Annales de la faculté des sciences de Toulouse

Marcel Brillouin

Questions d'hydrodynamique

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 1, nº 1 (1887), p. 1-32
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1887_1_1_1_1_0>

REVUE DE PHYSIQUE.

QUESTIONS D'HYDRODYNAMIQUE,

PAR M. MARCEL BRILLOUIN,

Professeur de Physique à la Faculté des Sciences de Toulouse.

Dans cette première Revue de Physique, je me propose d'exposer les principaux progrès accomplis dans l'étude des phénomènes de mouvement des liquides depuis une vingtaine d'années. C'est l'illustre professeur de l'Université de Berlin, M. von Helmholtz, qui, dans un Mémoire publié en 1858 et dans une courte Note de 1868, a émis les deux idées capitales, origine de nombreux et importants travaux des Kirchhoff, des Rayleigh, des J. Thomson, et des spéculations d'un génie si original de Sir W. Thomson.

Malgré l'exactitude manifeste des équations de l'Hydrodynamique des fluides parfaits ou peu visqueux, certains phénomènes d'une observation journalière, la formation et la persistance des anneaux tourbillonnants, celle des jets, étaient restés sans explication. Aujourd'hui ces phénomènes sont expliqués dans leurs caractères généraux, et il ne semble pas douteux que les nombres fournis par l'expérience ne soient eux-mêmes conformes à la théorie lorsque les efforts des mathématiciens permettront de traiter complètement quelques cas particuliers de ces problèmes singulièrement difficiles.

Voici l'ordre adopté dans cette exposition :

I. Tourbillons dans les fluides parfaits. Théorie. Expériences. Applications.

II. Écoulement des liquides. Jets. Mouvement d'un solide ou d'un tourbillon dans un liquide.

III. Frottement des fluides. Expériences. Théorie.

IV. Bibliographie générale.

CHAPITRE I.

TOURBILLONS DANS LES FLUIDES PARFAITS.

(Wirbelbewegungen. — Wirbelfäden. — Rotational motion. — Vortex motion, etc.).
Cauchy. — Stokes. — Von Helmholtz. — Sir W. Thomson. — Kirchhoff. — J.-C. Maxwell.
Lamb. — Lord Rayleigh. — Beltrami.

1. *Propriétés analytiques.* — Les trois projections u, v, w d'une grandeur dirigée q, finies et continues, ainsi que leurs dérivées premières, dans toute une région de l'espace, jouissent de certaines propriétés générales indépendantes de la nature de la quantité représentée.

Green. — Soit φ une fonction à détermination unique, finie, et continue ainsi que ses dérivées premières à l'intérieur d'une surface fermée S; on a

$$\iiint\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+v\frac{\partial\varphi}{\partial y}+w\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$
$$=\iint\varphi(lu+mv+nw)\,dS-\iiint\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz.$$

Les intégrales triples sont étendues à tout le volume; l'intégrale double à toute la surface fermée S; l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale extérieure à la surface S.

Stokes. — Une courbe fermée simple s limite une aire S qui n'isole aucune portion de l'espace. On a

$$\int\left(u\frac{\partial x}{\partial s}+v\frac{\partial y}{\partial s}+w\frac{\partial z}{\partial s}\right)ds=\iint\left[l\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)+m\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)+n\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dS;$$

l'intégrale simple est étendue à la courbe fermée, l'intégrale double à l'aire limitée par cette courbe. La direction positive de la normale à la surface S est liée au sens de parcours de la courbe fermée s, comme la force magnétique au sens d'un courant électrique, par la règle d'Ampère. L'énoncé général de cette proposition semble dû à Stokes (1845), bien que des cas particuliers aient été fréquemment employés auparavant, notamment par Ampère dans toute la théorie de l'Électrodynamique.

On peut remplacer les trois fonctions u, v, w par trois autres d'une signification plus simple. Deux de ces transformations qui servent dans toute la Physique mathématique ont été employées pour la première fois, l'une par Stokes (1849), l'autre par Clebsch (*Crelle,* t. LVI, 1858) en Hydrodynamique.

Transformation de *Stokes-Helmholtz :*

$$u = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z},$$

$$v = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x},$$

$$w = \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y},$$

et l'on peut assujettir les trois fonctions L, M, N à une condition. On choisit ordinairement la relation solénoïdale

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0.$$

Transformation de *Clebsch* (1) :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2\lambda \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial(\varphi + \lambda\psi)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \lambda}{\partial x}$$

avec les deux analogues.

Les propriétés générales de ces deux transformations sont exposées méthodiquement dans la *Theorica delle Forze newtoniane* de E. Betti, p. 304-313.

Parmi les neuf quantités qui définissent les variations de u, v, w en passant d'un point à un point voisin, certaines sont susceptibles d'expressions simples :

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \Delta P = \Delta(\varphi + \lambda\psi) \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right);$$

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = -\Delta L = 2\left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right),$$

avec les expressions analogues pour $\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, que nous représentons par 2η, 2ζ. La direction ξ, η, ζ est tangente aux deux familles de surfaces λ, ψ.

Pour la brièveté du langage, je regarderai dès à présent u, v, w comme représentant la vitesse actuelle du fluide en un point (x, y, z), suivant la notation d'Euler. Si l'on connaît ces trois fonctions des coordonnées et du temps, on aura la position initiale x_0, y_0, z_0 de la masse liquide qui occupe actuellement la position (x, y, z), en intégrant le système d'équations du premier ordre trop souvent passé sous si-

(1) Cette transformation n'est qu'un cas particulier d'une transformation étudiée par M. Hill, en 1881, au *Quarterly Journal of Mathematics*.

lence

$$\frac{\partial x_0}{\partial t} + u\frac{\partial x_0}{\partial x} + v\frac{\partial x_0}{\partial y} + w\frac{\partial x_0}{\partial z} = 0, \qquad \dots,$$

que fournissent directement des considérations cinématiques, sous les conditions $x_0 = x$, $y_0 = y$, $z_0 = z$ pour $t = 0$.

2. Pour une masse liquide dont la forme actuelle est celle d'un cube, à côtés parallèles aux axes coordonnés, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$ représentent les vitesses de dilatation linéaire des côtés, θ la vitesse de dilatation cubique, $\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \dots$ les vitesses de glissement relatif des faces parallèles, et ξ, η, ζ les vitesses de rotation du cube autour de parallèles aux axes passant par son centre de gravité. On peut démontrer facilement (1) que les quantités ξ, η, ζ sont les vitesses de rotation que prendrait tout élément de volume à moments d'inertie égaux s'il était instantanément solidifié; ce sont aussi les vitesses de rotation moyennes de cet élément, définies conformément au principe des aires, autour de parallèles aux axes, passant par son centre de gravité.

La vitesse de rotation ω, dont les composantes sont ξ, η, ζ, a donc une signification physique très nette; quand elle est nulle, u, v, w sont les dérivées en x, y, z d'une même fonction qu'on appelle le *potentiel* des vitesses. La vitesse de rotation ξ, η, ζ satisfait toujours identiquement à la condition solénoïdale

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

C'est aussi la condition d'incompressibilité d'un liquide dont les vitesses de translation seraient ξ, η, ζ; par conséquent, la somme des produits de l'élément de surface par la composante normale de la vitesse de rotation est nulle pour toute surface fermée. Pour une aire limitée à une courbe fermée, la somme de ces produits est indépendante de la forme de la surface; elle ne dépend que de la courbe contour, et sa valeur est, d'après le théorème de Stokes, égale à l'intégrale curviligne

$$I = \int \left(u\frac{\partial x}{\partial s} + v\frac{\partial y}{\partial s} + w\frac{\partial z}{\partial s} \right) ds,$$

que nous appellerons, avec Sir W. Thomson, *circulation* le long de la courbe fermée.

Appelons *ligne-tourbillon* une ligne qui a pour tangente en chaque point la vitesse de rotation ω correspondant à ce point; il ne passe en général qu'une ligne-tourbillon par chaque point de l'espace. La surface engendrée par une

(1) STOKES, *Math. and phys. Papers*, t. I, p. 80, 112; 1845. — HELMHOLTZ, *Abh.*, t. I, p. 104.

ligne-tourbillon qui se déplace le long d'une courbe fermée est un tube-tourbillon clos latéralement, ouvert seulement aux deux bouts. La composante de la vitesse de rotation normale à la surface latérale est nulle par définition; la circulation dans un circuit fermé qui entoure le tube, en rencontrant une fois et une seule chacune des génératrices, est la même, en quelque point du tube qu'on transporte ce circuit. Nous appellerons *intensité* du tube cette valeur commune de la *circulation*. De là résulte qu'un tube ne peut pas se terminer au milieu du fluide; il se ferme sur lui-même en forme d'anneau, ou bien s'étend jusqu'à la paroi ou jusqu'aux surfaces sur lesquelles u, v, w cessent d'être continues et d'avoir des dérivées. Dans ce cas encore on peut concevoir que le tube se ferme soit hors de la surface, soit dans la surface même.

Ainsi la partie de l'espace dans laquelle existent des rotations doit être conçue comme divisée en anneaux-tourbillons fermés, d'intensité uniforme dans toute leur longueur. C'est la première partie de la proposition importante établie pour la première fois par M. von Helmholtz dans le cas des fluides incompressibles (1858). La démonstration suppose uniquement la continuité de u, v, w, mais non celle de ξ, η, ζ; si la rotation est discontinue, le tube présente au point correspondant un angle fini.

3. *Surfaces de discontinuité.* — La quantité u, v, w peut avoir des valeurs différentes u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, de part et d'autre de certaines surfaces particulières Σ. La direction λ, μ, ν de la normale à la surface Σ traverse celle-ci du côté 1 au côté 2. La discontinuité est définie par trois quantités $u_2 - u_1$, $v_2 - v_1$, $w_2 - w_1$, auxquelles on peut en substituer trois autres analogues aux dilatations et aux rotations

$$\Theta = \lambda(u_2 - u_1) + \mu(v_2 - v_1) + \nu(w_2 - w_1)$$

et

$$\begin{aligned} 2\Xi &= \mu(w_2 - w_1) - \nu(v_2 - v_1), \\ 2\mathrm{H} &= \nu(u_2 - u_1) - \lambda(w_2 - w_1), \\ 2\mathrm{Z} &= \lambda(v_2 - v_1) - \mu(u_2 - u_1), \end{aligned}$$

soumises à la relation

$$\lambda\Xi + \mu\mathrm{H} + \nu\mathrm{Z} = 0,$$

qui exprime que la direction Ξ, H, Z est tangente à la surface Σ; elle est en outre perpendiculaire à l'accroissement fini $u_2 - u_1$, $v_2 - v_1$, $w_2 - w_1$, de u, v, w (Helmholtz, 1858).

Dans l'interprétation hydrodynamique, on regarde ordinairement la densité superficielle de la matière comme constamment nulle; alors Θ est nul.

Il n'en serait pas nécessairement ainsi en Électrostatique ou même en Hydrodynamique à la surface de séparation de deux liquides différents. Mais la considération de ces différences nous entraînerait trop loin de notre sujet.

Les quantités Ξ, H, Z sont de même nature que les produits des quantités ξ, η, ζ par une longueur. Le produit d'un élément de longueur pris dans la surface Σ par la composante de ΞHZ normale à cet élément est une *intensité*.

Les trajectoires orthogonales de la différence $u_2 - u_1$, $v_2 - v_1$, $w_2 - w_1$, qui sont tangentes en chaque point à Ξ, H, Z, sont des lignes-tourbillons; l'espace compris entre deux lignes-tourbillons est un fuseau-tourbillon; la surface Σ elle-même une couche de tourbillons. Mais l'intensité d'un fuseau-tourbillon n'est pas nécessairement constante dans toute sa longueur. Soient I_1, I_2 les intensités des tubes-tourbillons qui découpent sur la surface Σ une longueur finie d'un fuseau-tourbillon, et δJ l'accroissement de l'intensité du fuseau-tourbillon parcouru dans le sens positif; on a, par la différence des circulations,

$$\delta J + I_2 - I_1 = 0.$$

Les tubes-tourbillons se ferment tous, en partie par une continuation du tube de l'autre côté de la surface Σ, en partie par un fuseau situé sur cette surface. Pourtant, si les deux valeurs de la vitesse de rotation normale

$$\lambda\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \nu\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

sont partout égales de part et d'autre, les fuseaux forment un système superficiel fermé ou indéfini, à intensité uniforme, complètement indépendant des tubes; et ceux-ci traversent la surface sans variation d'intensité. Enfin, si d'un côté de la surface il n'y a pas de rotation, tous les tubes de l'autre côté se ferment par les fuseaux superficiels.

Ce dernier cas se présente en particulier lorsque tout le fluide contenu à l'intérieur de la surface de discontinuité se meut comme un solide indéformable; les vitesses superficielles du fluide intérieur sont alors identiques aux vitesses que prendrait la surface d'un solide de même forme, dans son mouvement d'ensemble. M. Beltrami a traité en détail (1874) le cas où la surface de discontinuité appartient au système des surfaces homofocales du second ordre.

4. Si l'on connaît les vitesses de rotation ξ, η, ζ et la vitesse de dilatation cubique θ à l'intérieur d'une surface fermée, ainsi que la composante normale de la vitesse de translation $lu + mv + nw$ sur la surface limite, les trois fonctions u, v, w sont entièrement déterminées dans tout l'intérieur. En effet, il ne peut y avoir deux solutions différentes 1, 2. La différence des vitesses $u_1 - u_2, \ldots$ a un potentiel V, $(\xi_1 - \xi_2 = 0, \ldots)$, qui satisfait à $\Delta V = 0$, $(\theta_1 - \theta_2 = 0)$, dans tout l'intérieur, et à $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$, sur la surface, $(lu_1 + mv_1 + nw_1 - lu_2 - mv_2 - nw_2 = 0)$. On sait, par le théorème de Green, que ce potentiel V est constant, et la différence des vitesses nulle, si la région considérée est simple.

Si la région est multiple d'ordre $n+1$, il faut connaître en outre les valeurs des n constantes cycliques (THOMSON, 1869). Une région est multiple lorsque certains circuits fermés ne peuvent pas être réduits à un point sans sortir de la région. La circulation sur un de ces circuits peut avoir une valeur différente de zéro, bien que ξ, η, ζ soient nuls; mais, pour tous les circuits réductibles les uns aux autres, la circulation est la même. S'il existe n circuits irréductibles distincts, la région est multiple d'ordre $n+1$; les n valeurs distinctes de la circulation s'appellent les n constantes cycliques. Tel est un volume sphérique contenant un nombre quelconque de solides pleins, et des solides percés d'un ou plusieurs trous, comme des anneaux, des grillages, etc., de telle sorte que le nombre des trous distincts soit n. L'extérieur d'un cylindre indéfini, l'extérieur ou l'intérieur d'un tore sont des espaces multiples du deuxième ordre.

Quand les constantes cycliques sont données, la différence des deux solutions a un potentiel uniforme, puisque la circulation est alors nulle dans tous les circuits; le théorème de Green (¹) montre que les deux solutions sont identiques.

Il en est de même s'il y a des surfaces de discontinuité, pourvu que l'on connaisse le long de ces surfaces la différence des valeurs u_2-u_1, v_2-v_1, w_2-w_1.

Espace infini. — Les fonctions P, L, M, N peuvent être mises sous forme d'intégrales quand aucune paroi située à distance finie ne limite l'espace (STOKES, 1849) :

$$\mathrm{P}=-\frac{1}{4\pi}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\iiint\frac{\theta}{r}\,dx\,dy\,dz\\ \displaystyle+\iint\frac{\Theta}{r}\,d\mathrm{S},\end{array}\right.\qquad \mathrm{L}=-\frac{1}{2\pi}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\iiint\frac{\xi}{r}\,dx\,dy\,dz\\ \displaystyle+\iint\frac{\Xi}{r}\,d\mathrm{S},\quad\ldots.\end{array}\right.$$

Les intégrales triples sont étendues à tout l'espace; les intégrales doubles aux surfaces de discontinuité. Stokes n'avait pas tenu compte de ces dernières. On suppose que ξ, η, ζ, θ, Ξ, H, Z, Θ n'ont de valeurs finies qu'à distance finie; à l'infini, u, v, w sont nuls; ξ, η, ζ, Ξ, H, Z doivent d'ailleurs satisfaire aux conditions n° 3.

On peut regarder la vitesse en un point comme la résultante de vitesses dues aux dilatations cubiques θ et aux rotations ω dans tout l'espace; chaque élément de volume $d\mathrm{V}$ contribue ainsi pour sa part à la production de la vitesse en un point quelconque. La part due à la dilatation θ est identique à la force magnétique due à une distribution de densité $-\frac{\theta}{4\pi}$; ce qui provient de la vitesse de rotation ω est identique à la force électromagnétique produite, suivant la loi de Laplace, par une

(¹) $$u=\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial x},\qquad v=\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial y},\qquad w=\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial z},\qquad \Delta\mathrm{V}=0,\qquad \frac{\partial\mathrm{V}}{\partial n}=0,\qquad \varphi=\mathrm{V}.$$

distribution de courants électriques $\frac{\xi}{2\pi}$, $\frac{\eta}{2\pi}$, $\frac{\zeta}{2\pi}$ [1]. La loi générale de distribution de ces forces magnétiques est si familière au physicien, il est si facile de réaliser le spectre magnétique de courants distribués comme on veut, que cette ingénieuse remarque de Stokes fournit sans calcul l'explication de bien des phénomènes.

Espace limité simple. — La condition à la paroi n'est pas satisfaite par les valeurs de P, L, M, N écrites plus haut; il faut les compléter. Malheureusement on ne sait pas, jusqu'à présent, le faire au moyen de la seule donnée nécessaire, la vitesse normale. M. Boltzmann (1871) a fourni à ce sujet quelques indications que je vais reproduire en les généralisant. Supposons que l'on connaisse les trois composantes de la vitesse sur la surface limite; ce sont des données surabondantes, on ne saurait donc les prendre au hasard. Remplaçons la surface limite par une surface de discontinuité et la matière située au delà par le fluide lui-même indéfiniment étendu.

Premier cas. — *La paroi est rigide et immobile.* — On peut supposer le fluide extérieur complètement immobile. Les termes complémentaires sont, en faisant u_2, v_2, w_2 nuls,

$$P' = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\Theta\,dS}{r}, \qquad L' = -\frac{1}{2\pi}\int\int\frac{\Xi\,dS}{r}, \qquad \ldots;$$

P′ est nul dans les applications hydrodynamiques.

Deuxième cas. — *La paroi extérieure est rigide et immobile. Les parois internes sont mobiles comme des corps solides.* — Les termes complémentaires ont la même forme; u_2, v_2, w_2 sont nuls en dehors de la surface externe; dans les corps solides, u_2, v_2, w_2 sont les vitesses superficielles elles-mêmes de ces corps.

Troisième cas. — *Les parois internes sont mobiles et déformables; elles enferment un volume constant.* — On peut se donner arbitrairement les vitesses internes satisfaisant à la condition d'incompressibilité et fournissant les valeurs de la vitesse normale de la paroi; on en déduit les rotations internes ξ_2, η_2, ζ_2, et les rotations superficielles Ξ, H, Z; les termes complémentaires comprennent

---

(1) Il est facile de s'en assurer en réunissant sous le même signe d'intégration les termes tels que

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}.$$

Dans la région occupée par les courants, cette force, comme on sait, n'a pas de potentiel; mais, dans l'espace extérieur aux courants, elle en a un, $\mathfrak{P}$, qui permet de remplacer $\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}$ par $\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x}$. Ce potentiel $\mathfrak{P}$ est en général multiple, tandis que le potentiel P est simple.

des intégrales superficielles et des intégrales en volume; le terme complémentaire P′ est nul. Tel est le plan adopté par M. Boltzmann.

Quatrième cas. — *Le volume enfermé par les parois internes varie d'une manière connue. La paroi externe est déformable.* — La méthode générale consiste à ajouter aux rotations et dilatations connues dans une certaine région des rotations et dilatations étendues à tout le reste de l'espace, en partie arbitraires, mais satisfaisant aux conditions relatives à la paroi, de manière à retomber sur le cas de Stokes. On peut se donner les valeurs u, v, w au dehors d'une manière entièrement arbitraire, pourvu qu'on tienne compte des surfaces de discontinuité dans les termes complémentaires. Parmi les conditions qu'on pourrait s'imposer, se trouvent l'uniformité de la dilatation cubique, qui facilite en général le calcul du terme complémentaire P′, l'égalité des vitesses normales aux parois qui supprime dans P′ l'intégrale superficielle. On pourrait même ajouter que les vitesses aient un potentiel, ce qui achèverait de déterminer le problème, sans le rendre plus facile. Nous verrons plus loin (Chap. II) l'utilité de certaines de ces conditions dans le problème dynamique.

5. *Équations du mouvement d'un corps continu.* — Suivant les notations d'Euler, nous appelons u, v, w les vitesses actuelles du point matériel qui passe en x, y, z, et $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$ la dérivée par rapport au temps d'une fonction relative à la masse mobile et non au point xyz de l'espace. On sait qu'on a symboliquement

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}.$$

Les équations du mouvement d'un fluide parfait sont

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \mathrm{X} = \frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t},$$

et les deux symétriques; p est la pression normale, ρ la densité et X, Y, Z la force extérieure qui agit sur l'unité de masse. On doit y joindre l'équation de conservation de la matière

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\theta = 0.$$

Enfin il faut exprimer les propriétés physiques du fluide que l'on étudie. Les cas les plus simples sont ceux où, par suite des conditions particulières du problème, on peut regarder la pression comme une fonction de la densité; c'est ce qui arrive lorsque la température du fluide est uniforme dans toute son étendue, ou encore lorsque aucun échange de chaleur ne se produit entre les éléments de volume contigus. Ces conditions ne sont jamais remplies qu'approximativement, et, lorsqu'on veut serrer de plus près la réalité, on rencontre des difficultés considérables; au lieu d'une relation finie unique entre la pression et la densité, on doit écrire plusieurs équations différentielles comprenant la température et faisant intervenir la conductibilité calorifique. Helmholtz et Kirchhoff ont abordé sous cette forme quelques problèmes d'acoustique. Bjerkness a particulièrement étudié le moyen de conserver une équation finie unique, lorsque les mouvements sont périodiques (*Acta mathematica,* 1884).

Dans un corps quelconque, susceptible de grandes déformations et d'écoulement sans rupture, les forces élastiques ne sont pas nécessairement normales; on doit remplacer dans les équations d'Euler les termes, tels que $-\frac{\partial p}{\partial x}$, par les groupes de termes $\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial T_3}{\partial y}+\frac{\partial T_2}{\partial z}$, suivant les notations de Lamé. Reste la difficulté physique de découvrir les relations de compressibilité, de dilatation et de frottement qui lient les pressions normales et tangentielles à la déformation et à la vitesse de déformation, ainsi que les relations calorimétriques correspondantes. Lorsque l'état d'équilibre ne dépend que des pressions normales, on a admis que les actions tangentielles et les excès des actions normales sur leur moyenne ne dépendent que de la vitesse de déformation et non de la déformation elle-même : c'est ce qui arrive pour tous les corps gazeux ou franchement liquides; l'expérience a même montré que, dans des limites fort étendues, ces actions sont proportionnelles aux vitesses de déformation (Chap. III). On a alors

$$N_1 = 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{3}\theta\right)-p, \qquad T_1=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

Mais il n'en est plus de même pour les cires, les résines liquéfiées, les solides mous sous les pressions employées par M. Tresca. Les oscillations de flexion et de torsion de fils métalliques fins révèlent déjà des actions de ce genre, dont les lois élémentaires sont encore inconnues malgré de nombreuses expériences. La suite de cet article fera comprendre sur un sujet beaucoup plus simple le genre de difficultés que l'on rencontre, même pour les fluides parfaits, dès que l'amplitude du mouvement exige l'emploi des équations différentielles complètes (Chap. II).

Les forces extérieures X, Y, Z ont généralement un potentiel V; une seule exception importante se présente, quand le liquide est parcouru par des courants électriques.

Enfin il faudrait écrire les équations à la surface : elles comprennent une équation cinématique, exprimant la conservation de la vitesse normale à travers la surface, et une équation statique, exprimant que la différence des pressions p_1, p_2, de part et d'autre de la surface, est égale au produit de la tension superficielle A par la courbure moyenne c. On néglige généralement l'influence de la tension superficielle quand la courbure de la surface de contact est un peu grande [1].

6. Considérons d'abord un fluide sans frottement, soumis à des forces extérieures douées d'un potentiel à valeur unique en chaque point, dont la pression est une fonction déterminée de la densité. Une combinaison facile des équations d'Euler donne

$$\frac{D}{Dt}\int_A^B\left(u\frac{\partial x}{\partial s}+v\frac{\partial y}{\partial s}+w\frac{\partial z}{\partial s}\right)ds=\left(\frac{1}{2}q^2-V-\int\frac{dp}{\rho}\right)_A^B,$$

en tenant compte de la relation

$$\frac{D(u\,dx)}{Dt}=\frac{Du}{Dt}dx+u\,du,$$

l'intégration est étendue à une portion finie de courbe, mobile avec le liquide [2] (Thomson, 1869). La fonction entre parenthèses est uniforme, et le second membre s'annule quand la courbe est fermée. Ainsi la circulation dans une courbe fermée mobile avec le liquide ne change pas avec le temps. Il en est de même de l'intensité du tube-tourbillon que cette courbe environne.

Dans un espace où les vitesses u, v, w sont continues, un anneau tourbillon est toujours formé de la même matière et doué d'une intensité invariable.

La première démonstration de cette propriété pour les liquides est due à Helmholtz (1858). Dans ses Leçons de Physique mathématique (1877), Kirchhoff a déduit le même résultat de la marche même au moyen de laquelle Cauchy avait établi, pour la première fois, rigoureusement, le principe de la conservation du potentiel des vitesses dû à Lagrange. La méthode d'Helmholtz peut être facilement étendue à tous les fluides (Nanson, 1885). On montre que la vitesse de dilatation linéaire dans la direction de la vitesse de rotation ξ, η, ζ est proportionnelle à la vitesse d'accroissement du rapport $\frac{\omega}{\rho}$ de la vitesse de rotation à la densité; ce qui

---

(1) Cette manière d'écrire les équations suppose essentiellement qu'il n'y a pas de variation rapide de densité au voisinage de la surface; les équations générales seraient une équation de conservation de la matière avec accroissement de la densité superficielle, comme en électricité statique, et trois équations dynamiques de mouvement de cette couche superficielle sous l'influence des forces qui la sollicitent. La force normale à la surface est p_2-p_1+cA; les forces tangentielles sont les variations de la tension superficielle $\frac{\partial A}{\partial s_1}$, $\frac{\partial A}{\partial s_2}$, liées aux variations de la densité superficielle par une équation de compressibilité à demander à l'expérience; les vitesses à introduire dans cette équation dynamique paraissent être les demi-sommes des vitesses du liquide et de la paroi en contact. (*Voir* Chap. III.)

(2) Tant que u, v, w sont continues, une courbe mobile avec le fluide ne peut pas se rompre; un tube, une surface fermée enferment toujours la même matière; il résulte du Mémoire de M. Hill (1881) que, pour un système quelconque de tubes mobiles avec le *liquide,* il existe une quantité constante le long du tube, et qui se conserve dans le mouvement, jouant ainsi un rôle analogue à celui de l'intensité.

équivaut à la conservation de l'intensité, si l'on tient compte de la conservation de la masse dans un élément de tube-tourbillon.

Cas où il y a des surfaces de discontinuité Σ. — Les trois démonstrations montrent que toute la partie du tube-tourbillon qui reste d'un même côté de la surface de discontinuité conserve son intensité. Deux tubes-tourbillons qui découpaient le même élément $d\Sigma$ cessent aussitôt de se correspondre : on ne peut même plus les supposer réunis par un fuseau-tourbillon pris sur la surface; car la direction de leur déplacement relatif ($u_2 - u_1$, $v_2 - v_1$, $w_2 - w_1$) est précisément orthogonale à la direction du fuseau Ξ, H, Z. On doit donc renoncer à la conception de tubes-tourbillons qui se ferment à travers la surface de discontinuité, et regarder deux tubes-tourbillons, situés de part et d'autre de cette surface, comme entièrement indépendants; il convient de distinguer, sur la surface Σ, deux couches situées l'une du côté (1), l'autre du côté (2), se mouvant l'une avec la vitesse u_1, v_1, w_1, l'autre avec la vitesse u_2, v_2, w_2, et fermant respectivement les tubes-tourbillons correspondants.

Un tube-tourbillon qui aboutit à une surface de discontinuité mobile avec le fluide reste toujours composé des mêmes masses [1].

7. *Exceptions dues aux forces extérieures.* — La conservation de l'intensité des tubes-tourbillons est en défaut si le second membre de l'équation (1) ne s'annule pas pour un contour fermé mobile avec le liquide. Cela se produira si le liquide tout entier est sillonné de courants électriques permanents ou variables, soumis à leurs actions mutuelles et placés dans un champ magnétique. Soient α, β, γ les composantes de ces courants, a, b, c les composantes de la force magnétique totale; on a

$$\rho X = b\gamma - c\beta, \qquad \rho Y = c\alpha - a\gamma, \qquad \rho Z = a\beta - b\alpha,$$

et il faut, au lieu de $V_A - V_B$, mettre

$$\int_A^B \left[(b\gamma - c\beta)\frac{dx}{ds} + (c\alpha - a\gamma)\frac{dy}{ds} + (a\beta - b\alpha)\frac{dz}{ds} \right] \frac{ds}{\rho};$$

[1] Si la surface de discontinuité se déplace par rapport au fluide, les tubes tourbillons qui y aboutissent ne restent pas formés des mêmes masses fluides; ils peuvent se fermer et devenir libres; des anneaux peuvent au contraire rencontrer la surface, s'y ouvrir et s'y détruire; pour la matière d'un tube qui passe d'un côté à l'autre de la surface de discontinuité, l'intensité change de valeur. Mais ce cas est ordinairement exclu : la masse de fluide qui traverse la surface doit y subir un changement fini de vitesse tangentielle, ce qui exige l'action d'une force tangentielle finie par unité de surface, que la capillarité ne peut produire; il existe pourtant des actions physiques capables de produire de pareilles forces : le frottement superficiel, les actions électrostatiques sur une couche superficielle d'électricité non en équilibre, les actions magnétiques sur une couche mince des courants électriques. Ces cas exceptés, une surface de discontinuité sépare deux masses de fluides à jamais distinctes.

cette intégrale n'est pas nulle, en général, pour un circuit fermé, comme on s'en assure facilement sur un exemple simple. Donc, dans un fluide parcouru par des courants électriques :

1° La circulation n'est pas invariable dans un circuit fermé qui se meut avec le fluide. Il en est de même de l'intensité relative à une portion de surface limitée. Elle peut croître indéfiniment si le mouvement maintient la même disposition géométrique des lignes-tourbillons par rapport aux lignes de force magnétique et aux courants.

2° Un tube-tourbillon ne se meut pas avec le fluide, il n'est pas lié indéfiniment à la matière dont il est formé à une certaine époque.

Chacun sait en effet comment on produit la rotation électromagnétique des liquides dans des expériences classiques. Comme ce mode de génération du mouvement rotatoire n'a pas été jusqu'ici utilisé pour l'étude même des tourbillons, je n'en parlerai pas davantage.

Je ne parle pas non plus d'un corps doué de magnétisme permanent; la réalité physique semble appartenir non à la masse magnétique, mais au moment magnétique; l'existence du magnétisme permanent n'est possible que dans un corps dont les réactions élastiques pourraient donner sur un élément de volume un couple proportionnel au volume. Aucune des théories actuelles de l'élasticité ne s'applique à ces corps; les transformer ici m'entraînerait trop loin; d'ailleurs une aimantation permanente semble incompatible avec l'état fluide parfait.

Exceptions dues aux réactions élastiques. — Pour un fluide élastique quelconque, le terme $\int_A^B \frac{dp}{\rho}$ est remplacé par

$$(2)\int_A^B \left[\left(\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial T_3}{\partial y}+\frac{\partial T_2}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial s}+\left(\frac{\partial T_3}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial y}+\frac{\partial T_1}{\partial z}\right)\frac{\partial y}{\partial s}+\left(\frac{\partial T_2}{\partial x}+\frac{\partial T_1}{\partial y}+\frac{\partial N_3}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial s}\right]\frac{\partial s}{\rho},$$

où l'on doit tenir compte des lois de compressibilité. Cette intégrale s'annule pour un contour fermé quelconque, lorsque la quantité intégrée est différentielle exacte; cela n'arrive que pour certaines lois de mouvement particulières à chaque nature de fluide élastique. Pour les fluides parfaits eux-mêmes, il faut que la pression soit une fonction de la densité seule, ce qui est loin d'être le cas général.

Il est assez difficile de se rendre compte sans calcul de la nécessité de ces diverses conditions. Dans un fluide parfait, les pressions produisent sur un élément de volume une poussée normale aux surfaces d'égale densité. Dans un corps ordinaire, les réactions élastiques N, T produisent aussi sur un élément de volume une résultante unique, mais dont la direction n'est pas liée aux surfaces d'égale densité. Là semble être toute la différence; pourtant, en y regardant de près, on reconnaît que, dans un fluide parfait, la résultante des pressions est toujours appliquée rigoureusement au centre de gravité du fluide contenu dans l'élément de volume tout comme la force extérieure, et l'inertie de la matière. Au contraire, dans un corps à forces tangentielles, la résultante des actions élastiques ne passe qu'approximativement par le centre de gravité de l'élément; pour l'y transporter, il faut ajouter un couple de l'ordre du produit de la résultante par le carré des dimensions linéaires de l'élément, et qui dépend des dérivées secondes des N et des T. Pour un cube ce couple ne s'annule que si trois relations entre ces dérivées secondes sont satisfaites : ce sont précisément celles qui expriment que l'intégrale (2) est indépendante du chemin parcouru. Quand il n'est pas nul ce couple est du cinquième ordre, c'est-à-dire de l'ordre du moment d'inertie de l'élément de volume : il peut donc imprimer à cet élément une accélération angulaire finie, et par suite altérer son mouvement de rotation autour du centre de gravité ([1]).

Ces considérations me paraissent indiquer dans quelle direction il convient de chercher la raison élémentaire de la remarquable propriété des fluides parfaits découverte par Helmholtz.

En résumé, le mouvement qui prend naissance à partir du repos dans un fluide sans frottement est doué d'un potentiel des vitesses, sous les conditions énoncées plus haut. Il en est de même pour un fluide naturel, au moins au début du mouvement; mais, si le mouvement se prolonge, le frottement interne, quelque faible qu'il soit, donne naissance à des vitesses de rotation qui croissent avec le temps. Celles-ci peuvent donc avoir une valeur finie dans le mouvement permanent d'un fluide, même assez dépourvu de viscosité pour qu'on puisse entièrement négliger les termes qui en dépendent dans les équations différentielles. C'est ce qu'on verra plus nettement au Chapitre II.

8. *Problèmes particuliers.* — L'analogie électromagnétique va nous permettre d'étudier facilement quelques cas importants du mouvement tourbillonnaire.

([1]) Désignons par A, B, C, D, E, F les six composantes du moment d'inertie géométrique d'un petit volume quelconque, c'est-à-dire les intégrales de x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy. Appelons $\mathcal{D}_x$, $\mathcal{G}_x$, ξ les vitesses de dilatation linéaire, de glissement et de rotation, et Δ_x, Γ_x, Ξ des quantités formées au moyen des forces élastiques par unité de volume $\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z}$, ..., ..., comme $\mathcal{D}_x$, $\mathcal{G}_x$, ξ le sont en u, v, w. Le moment de la quantité de mouvement d'un petit volume autour de l'axe Ox est le produit de ρ par l'expression

$$(B + C)\xi - F\eta - E\zeta + D(\mathcal{D}_z - \mathcal{D}\ ) + (B - C)\mathcal{G}_x + F\mathcal{G}_y - E\mathcal{G}_z,$$

et le moment des forces élastiques a la même expression en fonction de Δ, Γ, Ξ. Cela est d'ailleurs évident si l'on se souvient que l'équilibre de translation d'un élément de volume assure l'équilibre complet d'un volume fini quelconque. Dans le cas particulier du cube ($A = B = C$; $D = E = F = 0$), les équations des moments donnent séparément les variations de la vitesse de rotation ξ, η, ζ d'Helmholtz. Les conditions $\Xi = H = Z = 0$, qui expriment que la circulation est constante, expriment aussi que la vitesse de rotation d'un élément de volume symétrique est invariable avec le temps.

1° *Mouvement plan.* — Un tube-tourbillon rectiligne, de section invariable, d'intensité I, produit autour de lui un mouvement circulaire; chaque cylindre de rayon r tourne avec une vitesse angulaire $\frac{I}{r^2}$; le filet reste immobile.

Un nombre quelconque de tubes parallèles se déforme et se déplace, de manière que le centre de gravité des intensités reste immobile (Helmholtz, 1858; *Abh.*, I, 125). Kirchhoff a montré l'existence d'autres intégrales du mouvement (*Vorles.*, 259). J'examinerai seulement ici le cas de deux tubes parallèles.

Deux tubes parallèles forment une figure invariable; chacun d'eux communique à l'autre une vitesse perpendiculaire au plan commun et égale à $\frac{I}{d}$, $\frac{I'}{d}$; ils tournent avec la vitesse angulaire $\frac{I + I'}{\pi d^2}$ autour du centre de gravité de leurs intensités en décrivant des cercles égaux ou inégaux suivant que les intensités sont égales ou différentes. Le centre de gravité immobile est entre les deux tubes s'ils sont de même signe; il est en dehors du côté du plus intense, s'ils sont de signes contraires. Deux tubes égaux et de signes contraires ont un mouvement de translation uniforme perpendiculaire à leur plan. Le mouvement qu'ils produisent dans le plan médian est tangent à ce plan, qu'on peut supposer solide. Un tube, situé à une distance d d'un plan fixe, se meut donc avec une vitesse $\frac{I}{2d}$ parallèlement à ce plan, comme s'il roulait en sens inverse de sa rotation. Un tourbillon compris entre deux parois planes qui font un angle $\frac{\pi}{n}$ décrit une spirale de Cotes $r \sin n\theta = a$. Un tourbillon voisin d'un cylindre circulaire tourne tout autour sans s'en écarter, comme on le voit facilement par la méthode des images.

Un assez grand nombre d'autres exemples de mouvements plans, dans le voisinage, de parois cylindriques, ont été traités par les géomètres anglais : Greenhill, Coates, Ferrers, Hill, Hicks, dans le *Quarterly Journal*, le *Messenger*, les *Proceedings of the royal Society of London*, et les *Proceedings of the Mathematical Society*.

Pour se rendre compte de la direction de la force électromagnétique en un point du courant lui-même, et par conséquent de la vitesse de translation d'un élément du tourbillon, il faut considérer la force électrodynamique que l'élément de courant subirait par les lois d'Ampère, et en déduire la force électromagnétique correspondante.

Mouvement dans l'espace. — Un tourbillon annulaire, plan et circulaire, se propage sans changement de diamètre dans l'espace indéfini. La vitesse constante, normale à son plan, dépend de son intensité, de son diamètre et des dimensions transversales du tube annulaire.

Deux anneaux circulaires égaux parallèles et de rotations inverses ne produisent pas de vitesse perpendiculaire au plan de symétrie; leur mouvement n'est pas changé si ce plan est remplacé par une paroi rigide. A la vitesse de propagation propre de chaque anneau, il faut ajouter la vitesse due à l'autre. Celle-ci se compose d'une vitesse de translation généralement inférieure à la vitesse propre des anneaux et de sens contraire, et d'une vitesse d'accroissement ou de diminution du diamètre, suivant que les anneaux se rapprochent ou s'éloignent. Au total l'anneau grandit indéfiniment en se rapprochant du plan de symétrie; son mouvement de translation se ralentit si la rotation est inverse, il s'accélère et diminue progressivement de diamètre en s'éloignant du plan de symétrie. Comme ces deux mouvements correspondent à des rotations inverses, il ne saurait être question de réflexion de l'anneau contre le plan; il doit s'en approcher sans jamais l'atteindre.

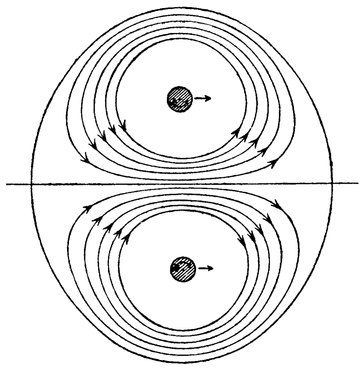
On peut analyser de même le mouvement de deux anneaux de même axe, mais inégaux en diamètre et en intensité. Considérons deux anneaux de même signe et peu différents. Pris isolément, ils auraient des vitesses de translation égales pour certaines valeurs de leurs diamètres. Mais les actions mutuelles accélèrent de plus en plus le mouvement de celui qui est en arrière, B, en le rétrécissant; au contraire, elles dilatent le premier, A, dont la vitesse diminue jusqu'à devenir égale, puis inférieure à celle de B, si bien que l'anneau B traverse l'anneau A et passe devant. Désormais les rôles sont renversés, l'anneau B se dilate et se ralentit, l'anneau A se rétrécit et s'accélère et le même jeu se reproduit indéfiniment entre les deux anneaux qui passent tour à tour l'un dans l'autre sans se quitter jamais (Helmholtz, 1858). J.-J. Thomson, qui a étudié à fond cette question (1883), a précisé les conditions de ce mouvement, et les relations qui existent entre ses éléments. Considérons deux tores circulaires, engendrés par la révolution de deux circonférences concentriques autour du même axe, et animés de la même vitesse de translation le long de cet axe. Chacun des anneaux décrit la surface de l'un des tores. Le cône variable qui les réunit passe toujours par la circonférence axiale commune. Les intensités des deux anneaux sont sensiblement en raison inverse du diamètre de la section méridienne du tore correspondant, pourvu que les volumes des tubes-tourbillons soient les mêmes.

Deux anneaux de même axe, mais de signes contraires, marchent l'un vers l'autre; le plus petit se ralentit, grandit et traverse l'autre qui s'est dilaté pour le laisser passer, en se ralentissant s'il n'est pas très grand, en s'accélérant au contraire s'il est beaucoup plus grand. Après cela, tous les effets changent de signe, et les anneaux se séparent en général. Il ne semble pourtant pas impossible que l'un des deux, plus intense et plus grand, entraîne l'autre dans son mouvement de translation, chacun oscillant autour d'une position moyenne.

9. Chaque tube-tourbillon est accompagné d'une certaine quantité de fluide dénué de rotation, qui lui forme une sorte d'atmosphère. Cette atmosphère peut d'ailleurs se séparer du tube-tourbillon quand il subit une variation d'énergie tem-

poraire ou permanente par une cause quelconque. Sir W. Thomson en a donné un exemple (1867) (*fig.* 1), dans le cas de deux tubes parallèles, égaux et de rotations inverses. La vitesse de translation des tourbillons est moindre que celle qu'ils produisent entre eux sur une certaine étendue du plan médian; il existe un cylindre, lieu des points où la vitesse du fluide a une composante perpendi-

Fig. 1. — (W. Thomson, *Proc. R. S. Ed.*, 1867.)



culaire au plan des deux tubes égale à leur vitesse de translation commune : c'est ce cylindre qui limite l'atmosphère ; il entoure les deux tubes. Les courbes tracées sur la figure sont des lignes de flux par rapport aux tourbillons. Les lignes extérieures, qui n'ont pas été tracées, sont grossièrement parallèles à l'axe de symétrie dont elles s'écartent pour contourner l'atmosphère des tourbillons mobiles. Les équations de ces lignes sont très faciles à déduire de l'analogie électromagnétique. Elles sont indépendantes de l'intensité.

Dans le cas des anneaux circulaires, l'atmosphère également indépendante de l'intensité a beaucoup moins d'étendue; elle est généralement contenue à l'intérieur d'un anneau qui enveloppe le tourbillon; son épaisseur dépend du rapport du volume du tube à son ouverture. C'est seulement quand cette ouverture est petite $\left(a < \frac{b}{8}\varepsilon^{4\pi^2+1}\right)$ que la surface limite coupe l'axe; d'abord concave au centre, puis convexe, elle s'allonge à mesure que l'anneau tourbillon se rétrécit.

10. *Vibrations des tourbillons.* — Dans tous les exemples précédents, le mouvement a un caractère permanent. Mais il importe d'aller plus loin et d'étudier les lois des vibrations des tourbillons, pour savoir quelles sont les formes stables. Les déformations de la ligne axiale du tourbillon d'intensité I peuvent quelquefois être étudiées sans hypothèse sur la distribution de l'intensité dans la section du tube et sur la forme de cette section; mais il n'en est jamais ainsi des variations de forme de la section. On s'est borné jusqu'à présent à l'étude des tourbillons liquides dont l'intensité est uniformément distribuée dans la section droite; cette unifor-

mité de distribution se conserve, quelles que soient les déformations du contour de la section droite, et l'on peut calculer par quadratures les vitesses internes et externes dues au tourbillon déformé.

La surface limite du tourbillon est constamment formée des mêmes parties fluides; si on la représente par $F(x, y, z, t) = 0$, à chaque instant on a

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} = 0. \tag{1}$$

On choisit la forme de la fonction F en x, y, z seulement; les coefficients dépendent du temps. On en déduit les valeurs de u, v, w sur le contour en fonction des valeurs actuelles des coefficients, et on les porte dans l'équation (1). Celle-ci se décompose en autant d'équations différentielles du premier ordre qu'il en faut pour déterminer tous les coefficients en fonction du temps. Il ne reste plus qu'à intégrer, ce qui présente presque toujours des difficultés insurmontables. Toutefois il est ordinairement assez facile de décider si la forme type adoptée est stable pour toutes les petites déformations, car les équations sont alors linéaires.

Kirchhoff a étudié en détail (*Vorles.*, p. 265) le tube rectiligne à section elliptique. Soient ζ la vitesse angulaire élémentaire, et a, b les deux axes de l'ellipse contour :

1° Le contour de la section tourne sans se déformer autour de son centre avec une vitesse ω égale à $\frac{2\zeta ab}{(a+b)^2}$.

2° Un point intérieur (x_0, y_0), situé sur une ellipse d'axes ka, kb, homothétique au contour, décrit avec la vitesse angulaire ω une circonférence de rayon $\frac{1}{2}k(a+b)$ dont le centre est au point $\frac{a-b}{2a}x_0$, $\frac{a-b}{2b}y_0$ par rapport aux axes de l'ellipse prise dans sa position initiale.

Les résultats de Kirchhoff se prêtent à un énoncé beaucoup plus clair à mon avis, et qui donne la physionomie générale du mouvement dans tous les cas. Dans la section droite tournant tout entière avec la vitesse angulaire ω, traçons les ellipses homothétiques au contour. Chaque ellipse mobile reste constamment formée des mêmes particules fluides, qui la parcourent conformément à la loi des aires dans le sens du mouvement général avec la vitesse aréolaire $k^2\omega ab$, en sorte que toutes les ellipses sont décrites dans le même temps.

Il en est de même quelle que soit la déformation simple du contour. Une rotation lente entraîne le contour et les courbes homothétiques, le long desquelles le fluide se meut rapidement dans le même sens avec une période uniforme. Sir W. Thomson a montré que, pour une petite déformation à n saillies, la vitesse angulaire du contour est $\frac{n-1}{n}\zeta$. La section circulaire est encore stable si les saillies occupent des hélices de même pas, au lieu de génératrices, sur la surface du tube tourbillon (1880).

Des tubes circulaires égaux distribués aux sommets d'un polygone régulier un peu grand forment un système stable si le polygone n'a pas plus de six côtés; ils tournent avec une vitesse angulaire uniforme autour du centre immobile. Mais, si le polygone a seulement sept sommets, l'un des déplacements possibles croît indéfiniment, au lieu d'être périodique, et le système des sept tourbillons est instable (J.-J. Thomson, 1883). La vitesse de rotation commune ω_n est égale à $\frac{n-1}{2\pi r^2}\mathrm{I}$, s'il y a n tubes. Les périodes des déplacements sont résumées dans le Tableau suivant :

$n =$	3	4	5	6
$\mathrm{T} =$	$\frac{2\pi}{\omega_3}$;	$\frac{3\pi}{\omega_4}\sqrt{2}$, $\frac{2\pi}{\omega_4}$;	$\frac{8\pi}{\omega_5\sqrt{14+2\sqrt{5}}}$, $\frac{4\pi}{\omega_5}$, $\frac{8\pi}{\omega_5\sqrt{3}}$;	$\mathrm{T} = \frac{10\pi}{\omega_6\sqrt{32}}$, $\frac{2\pi}{\omega_6}$, $\frac{5\pi}{2\omega_6}$, $\frac{10\pi}{3\omega_6}$.

Quant aux déformations de la section de chaque tube, J. Thomson a examiné leur influence dans le cas de deux tubes. Elles produisent des variations périodiques de tous les éléments d'autant plus petites que le nombre de dentures de la déformation est plus grand. Par exemple, l'ellipse tourne autour de son centre avec sa vitesse de rotation propre et oscille lentement autour de la forme circulaire avec la période $\frac{\pi}{\omega_2}$; l'ellipticité maximum varie en raison inverse du carré de la distance des deux tubes.

Voyons maintenant l'anneau circulaire de rayon moyen a et qui a pour section méridienne un cercle de très petit rayon b. J.-J. Thomson a démontré (1883) que cette forme est stable. La vitesse de translation moyenne est

$$\frac{\mathrm{I}}{2\pi a}\left(\log\frac{8a}{b}-1\right);$$

Sir W. Thomson avait indiqué dès 1867 une valeur à peine différente. Si la circonférence moyenne est divisée en n segments égaux par la vibration, la période est sensiblement

$$\frac{2\pi a}{\sqrt{n^2(n^2-1)}}\,\frac{2\pi a}{\mathrm{I}\log\frac{8a}{b}},$$

tant que n est petit. Quand n est de l'ordre de $\frac{a}{b}$, la période devient

$$\frac{2\pi a}{\sqrt{n^2(n^2-1)}}\,\frac{2\pi a}{\mathrm{I}\left(\log\frac{2a}{nb}-1,08\right)}.$$

Si l'on met en évidence la longueur $\frac{2\pi a}{n}$ d'un segment vibrant, ces deux valeurs concordent d'une manière satisfaisante avec celles que Sir W. Thomson (1880) avait trouvées pour un tourbillon rectiligne dont l'axe est simplement fléchi.

Il est facile de se rendre compte que toute courbe plane autre que le cercle se déforme nécessairement en progressant; car les forces électromagnétiques perpendiculaires au plan de la courbe ne sont pas partout égales; la vitesse de translation des diverses parties de l'anneau n'est pas la même; il cesse d'être plan. En même temps les forces électromagnétiques cessent d'être parallèles à leur résultante; la projection de l'anneau sur son plan primitif change de forme et, tout en progressant avec une vitesse moyenne constante, il oscille autour de la forme circulaire, se courbe et se tord.

11. *Choc de deux anneaux.* — J.-J. Thomson a étudié l'influence mutuelle de deux anneaux circulaires qui passent assez loin l'un de l'autre pour qu'on puisse se contenter d'une première approximation. Voici les résultats principaux qu'il a obtenus (1883):

La direction et la vitesse du mouvement, le diamètre des anneaux subissent un changement permanent; en outre, chacun d'eux est mis en vibration; quand ils se sont écartés l'un de l'autre, la période est celle qui correspond aux dimensions finales de l'anneau. Les directions de référence sont :

1° La plus courte distance D_1 entre les lignes presque droites parcourues par les centres des deux anneaux A et B ;

2° Le plan N perpendiculaire à cette plus courte distance en son milieu ;

3° Les directions mêmes des mouvements de chaque anneau AA', BB' sensiblement parallèles au plan N.

Les deux anneaux n'arrivent pas simultanément aux extrémités de la droite D_1 ; j'appellerai A celui qui y passe le premier. La plus courte distance entre les deux anneaux est une droite D_2 différente de D_1 et plus longue.

Soient I, R, U, I', R', U' l'intensité, le rayon et la vitesse de translation des deux anneaux A, B et ε l'angle des chemins AA', BB'. La vitesse relative des deux anneaux est

$$V = \sqrt{U^2 + U'^2 - 2UU'\cos\varepsilon}.$$

L'accroissement du rayon R après le choc est

$$\partial R = + I'R'U' \frac{RR'UU'\sin^3\varepsilon}{V^4 D_2^3}\left(1 - 4\frac{D_1^2}{D_2^2}\right)\sqrt{1 - \frac{D_1^2}{D_2^2}}.$$

L'angle du chemin de A avec N, compté positivement quand A s'éloigne du plan, est

$$\varphi = -2I'R'^2 \frac{UU'\sin^2\varepsilon}{V^3 D_2^4} D_1\left(1 - \frac{4}{3}\frac{D_1^2}{D_2^2}\right).$$

L'angle du chemin dévié de A avec le chemin initial, mesuré parallèlement au plan N et pris positivement vers BB', est

$$\psi = +2 I' R'^2 \frac{UU' \sin^2\varepsilon (U - U'\cos\varepsilon)}{V^4 D_2^3} \left(1 - 4\frac{D_1^2}{D_2^2}\right)\sqrt{1 - \frac{D_1^2}{D_2^2}}.$$

Quant aux signes, le Tableau suivant les résume :

$$D_2 > \frac{2D_1}{\sqrt{3}}, \quad \text{A et B s'écartent du plan N} \quad \varphi > 0,\ \varphi' > 0,$$

$$D_2 < \frac{2D_1}{\sqrt{3}}, \quad \text{A et B se rapprochent du plan N} \quad \varphi < 0,\ \varphi' < 0.$$

$D_2 > 2D_1$	$D_2 < 2D_1$.
Le rayon et l'énergie de A croissent. Sa vitesse de translation diminue. $\delta R > 0$. Pour B c'est le contraire. $\begin{cases} U > U'\cos\varepsilon & \text{A se rapproche de BB'} \quad \psi > 0, \\ U < U'\cos\varepsilon & \text{A s'éloigne de BB'} \quad \psi < 0, \end{cases}$ $\begin{cases} U' > U\cos\varepsilon & \text{B s'éloigne de AA'} \quad \psi' < 0, \\ U' < U\cos\varepsilon & \text{B se rapproche de AA'} \quad \psi' > 0. \end{cases}$	Tous les effets sont renversés.

Sir W. Thomson a montré par un raisonnement très général (*Vortex Mot.*, § 35, 1868) qu'un tourbillon qui passe près d'un solide fixe est toujours dévié comme par une attraction lorsqu'il se meut librement (Ch. II). J.-J. Thomson a retrouvé ce résultat pour le passage d'un anneau circulaire près d'une sphère. L'anneau se ralentit et s'élargit à mesure qu'il approche de l'obstacle; des mouvements contraires se produisent quand il s'éloigne. Ni les dimensions ni la grandeur de la vitesse finale ne sont altérées par le passage auprès d'un obstacle fixe. La direction du mouvement a changé d'un angle $-\frac{45}{128}\frac{\pi I R^2 a^3}{U D^6}$ en appelant a le rayon de la sphère, et D la plus courte distance du centre de la sphère au centre de l'anneau dont la vitesse est U.

12. *Anneaux noués.* — Ces anneaux peuvent être formés d'un ou plusieurs tourbillons distincts. M. Tait s'est particulièrement occupé de la question du nombre des nœuds qui peut présenter un intérêt géométrique analogue à celle de l'ordre de multiplicité d'un espace. Voici un exemple simple d'anneaux de ce genre. Traçons, sur un tube flexible, $\frac{m}{p}$ pas d'une hélice à pn filets; courbons le tube et réunissons les extrémités des files en regard : l'anneau est formé de n courbes fermées distinctes, mais enchevêtrées. L'ordre de multiplicité de l'espace extérieur est $n+1$, puisqu'il n'y a que n intensités distinctes; mais le nombre des nœuds est beaucoup plus grand. Quand les anneaux ont tous la même intensité, ils sont enroulés sur la surface d'un même tore; s'ils sont d'intensités différentes, les tores qui correspondent à chaque anneau ont des sections méridiennes différentes, mais même circonférence axiale.

J.-J. Thomson a traité le cas de $n=1$, $p=1$ (1881): les deux courbes font m tours l'une autour de l'autre; elles sont enroulées sur deux tores dont les sections méridiennes concentriques ont des rayons inversement proportionnels aux intensités: les rayons menés du centre commun aux deux courbes sont en ligne droite. Ces conditions ne suffisent pas pour la stabilité, il faut y ajouter l'égalité des vitesses de translation moyennes. Soient d la distance des deux filets (somme des rayons des tores); b, b' les rayons des sections droites de chacun d'eux; I, I' leurs intensités; ϖ, ϖ' leurs volumes

$$d^{\mathrm{I}-\mathrm{I}'} = b^{\mathrm{I}} b'^{-\mathrm{I}'} \qquad \text{ou} \qquad (2\pi a\, d^2)^{\mathrm{I}-\mathrm{I}'} = \varpi^{\mathrm{I}} \varpi'^{-\mathrm{I}'}.$$

Ainsi, la distance d est une fonction de l'ouverture moyenne a et des constantes de chaque anneau. Si les deux anneaux sont différents, il y a deux périodes de vibration d'ensemble (déplacements simultanés des traces des filets dans toutes les sections méridiennes), l'une rapide

$$\frac{4\pi^2 a^2}{\mathrm{I}\, m\sqrt{m^2-1}\left(\log\dfrac{64 a^2}{bd} - \dfrac{7}{4}\right)},$$

l'autre lente

$$\frac{2\pi}{\dfrac{\mathrm{I}+\mathrm{I}'}{\pi d^2} - \dfrac{\mathrm{II}'}{\mathrm{I}+\mathrm{I}'}\,\dfrac{2m^2-1}{4\pi a^2}\log\dfrac{d^2}{bb'}},$$

qui dépendent du nombre m de tours de l'hélice. Ces périodes diffèrent peu, l'une de la période d'oscillation d'un anneau circulaire simple pour une déformation de rang m, l'autre de la durée de rotation de l'un des tubes autour de l'autre.

Dans le cas particulier où les deux anneaux ont même intensité, on en déduit $b=b'$, mais d reste indéterminé. La forme d'équilibre de chaque anneau n'est pas l'hélice simple tracée sur le tore : il s'y superpose une hélice de pas moitié moindre, comme le montrent les équations en coordonnées cylindriques

$$\rho = a \pm \frac{d}{2}\cos(\mu t - m\psi) + \frac{d^2}{32 a}\cos 2(\mu t + m\psi),$$

$$z = \quad \pm \frac{d}{2}\sin(\mu t - m\psi) + \frac{d^2}{16 a}\sin 2(\mu t + m\psi),$$

rapportées au plan moyen. Les signes supérieurs se rapportent à l'un des anneaux, les signes inférieurs à l'autre; μ correspond à la période de vibration lente.

A l'exception de ce dernier résultat, poussé au second ordre, tous les calculs de J.-J. Thomson (1883) sont des approximations du premier ordre par rapport à $\frac{a}{d}$, $\frac{d}{b}$, pour des anneaux dont l'axe est sensiblement circulaire. La section droite est aussi sensiblement circulaire et la vitesse de rotation y est uniformément répartie. Enfin il ne s'agit que des fluides incompressibles.

Production expérimentale des tourbillons.

13. Tout le monde a pu observer ces anneaux persistants lancés par les fumeurs dans un air calme, ou ceux que produit la combustion spontanée du phosphure d'hydrogène. On les voit flotter lentement dans l'atmosphère, se déformer au gré du moindre souffle, s'allonger, puis se rompre et persister longtemps encore, en se dissipant peu à peu par les extrémités disjointes. Souvent aussi, l'anneau ne se forme même pas, et la fumée s'échappe dès le début en longue traînée semblable à un *fil de la Vierge*. Ces anneaux sont des anneaux tourbillons; ils persistent, sans se rompre, tant qu'ils se meuvent dans l'air calme où les vitesses varient d'une manière continue. Atteignent-ils une surface de discontinuité ou plutôt, à cause du frottement de l'air, une région de remous et de variations rapides de la vitesse dus à la rencontre de courants d'air opposés, les anneaux se rompent et leurs extrémités s'écartent. La rotation n'a pas pour cela disparu; mais la partie du tube située dans la couche de discontinuité est devenue si mince que la fumée n'y est plus visible (n° 6).

A l'époque où Helmholtz fondait la théorie et avant de la connaître, en 1858 et 1860, Rogers en Amérique, Reusch en Allemagne ont indiqué le moyen de produire à coup sûr des anneaux fermés persistants dans les gaz et dans les liquides; ils ont étudié leurs actions mutuelles.

Pour lancer une masse de gaz animée d'un mouvement de rotation, on profite du frottement superficiel et interne; pour la rendre visible, on la charge de fumée. Tait et Thomson ont vulgarisé un appareil formé d'une grande boîte cubique en bois dont une face a été remplacée par de la toile peu tendue; la face opposée, percée d'une ouverture, porte extérieurement deux coulisses parallèles qui permettent d'introduire des cartons ou des planches percées d'ouvertures plus petites et de formes variées. On remplit la boîte de fumée, soit en y faisant brûler divers corps, soit en y mettant deux assiettes remplies d'acide chlorhydrique et d'ammoniaque. Un coup sec frappé sur la toile fait sortir un petit volume d'air chargé de fumée; le frottement latéral rend la vitesse de translation très faible au bord, grande au centre, et produit un mouvement de rotation autour d'axes parallèles au bord, qui s'étend d'autant plus loin que celui-ci est plus épais. Pour des ouvertures de 20 à 25 centimètres de longueur, un carton de 5 ou 6 millimètres convient très bien. Tout près de la boîte, on ne distingue d'abord qu'une masse confuse de fumée; mais, à quelques décimètres, la fumée de la partie centrale est restée en arrière, et l'anneau progresse seul avec une vitesse à peu près uniforme.

Dans une salle de cours dont le fond est occupé par un grand tableau noir, on ferme les rideaux des premières fenêtres latérales et on laisse passer seulement un faisceau solaire renvoyé par l'héliostat parallèlement au tableau. On place la boîte en face de l'héliostat, de manière que l'anneau projeté se meuve le long du faisceau de lumière : il reçoit une vive illumination qui le détache nettement sur le fond sombre, aux yeux de tout un auditoire.

14. Le mode de production de l'anneau montre suffisamment qu'il est animé d'un mouvement de rotation, et, comme il parcourt dans un air calme 8 ou 10 mètres sans se briser, il est facile de reconnaître qu'il obéit à toutes les lois que la théorie a indiquées.

1° La vitesse de l'air qui traverse intérieurement l'anneau est moindre que celle de l'anneau lui-même. On s'en assure au moyen de légers drapeaux, de flammes ou simplement de la main, placés sur le trajet de l'anneau. Sur les bords, au moment du passage de l'anneau, un violent remous se produit, avec renversement du sens du vent, qui s'écarte d'abord de l'axe du mouvement et converge ensuite vers cet axe. Ainsi, au centre du tourbillon, l'air dénué de rotation se renouvelle constamment; le tourbillon va sans cesse à la rencontre de nouvelles couches, s'y fraye un chemin, puis les laisse s'écouler en arrière. C'est grâce à cette propriété qu'un court trajet suffit à séparer le tourbillon proprement dit du jet d'air central chargé de fumée, mais dénué de rotation.

2° On peut contrôler l'expérience par l'expérience inverse (Ball, Yeates, 1868). On produit la fumée non plus dans la boîte, mais au dehors, à 1 mètre en avant, en faisant bouillir dans deux capsules voisines des solutions concentrées d'acide chlorhydrique et d'ammoniaque. L'anneau sort invisible, traverse la fumée, reparaît entouré d'un nuage confus; 1 ou 2 mètres plus loin, la fumée centrale s'est dissipée, il ne reste plus qu'un large tore. En regardant par la tranche, on voit nettement que toute cette fumée environne, sans le pénétrer, un tore de même ouverture dont le cercle méridien apparaît, au milieu de la fumée, comme un double trou sombre de 5 ou 6 centimètres de diamètre. C'est l'anneau tourbillon proprement dit qui se propage en se conservant intact à travers tous les milieux; il s'en entoure et les entraîne un moment, laisse en arrière presque tout ce qui est dépourvu de rotation et, après quelques mètres de parcours, ne conserve plus qu'une mince enveloppe superficielle qui le dessine et qui a pénétré dans son atmosphère (n° 9).

3° *Ouverture circulaire.* — Quand on projette l'anneau normalement contre un mur noir, on le voit s'approcher beaucoup du mur sans grandir notablement. Arrivé à moins d'un décimètre, il s'élargit subitement et s'évanouit avec une rapidité saisissante, dès que son diamètre dépasse 1 mètre ou 1 mètre et demi. Si l'incidence est oblique, l'anneau s'aplatit sur le mur en se courbant et finit toujours très vite par se détruire. L'intensité et la quantité de matière restant les mêmes, la vitesse de rotation est d'autant plus grande et la section d'autant plus petite que la longueur est plus grande ; l'action destructive du frottement interne est d'autant plus énergique et plus rapide.

Tout obstacle placé sur le trajet de l'anneau produit un effet analogue. Pourtant, si l'obstacle est en dehors du chemin de l'anneau, celui-ci cesse de se mouvoir en ligne droite. Le côté le plus voisin de l'obstacle est ralenti, et le plan général de l'anneau tourne. En même temps il se déforme et se met à vibrer. Une fois l'obstacle dépassé, l'anneau reprend ses dimensions et sa vitesse moyenne, mais sa route a été déviée vers l'obstacle. C'est tout le contraire de ce qu'on a l'habitude d'appeler une réflexion (Sir W. Thomson, Tait, 1869).

4° En frappant à une seconde d'intervalle deux coups secs sur la toile, le second un peu plus fort, on peut avec un peu d'adresse faire sortir deux anneaux bien formés de même rotation. Le second rejoint le premier, le traverse en se rétrécissant et s'accélérant, tandis que l'autre se ralentit et s'ouvre comme pour rendre le passage plus facile. Quelquefois, quand la différence des vitesses n'est pas trop grande, le même mouvement se reproduit avec interversion des rôles.

5° Avec deux boîtes on peut facilement étudier dans leurs détails les actions mutuelles de deux anneaux quelconques ; pour faire cette étude dans les meilleures conditions de précision, il faudrait lancer les tourbillons dans une grande salle close, comme une serre, et les regarder du dehors à travers une glace.

6° M. Ball (1871-1875) a étudié la loi du mouvement de translation d'un anneau circulaire de 25 centimètres de diamètre environ dans un long corridor. Le tourbillon est lancé avec une vitesse initiale de 3 mètres par le choc d'un pendule qui tombe toujours de la même hauteur sur la toile d'une grande boîte de 70 centimètres de côté. Le commencement de la chute du pendule ouvre un circuit électrique, que referme plus tard le choc de l'anneau contre une large feuille de papier tendue sur un léger cadre de bois que l'on peut suspendre à diverses distances sur le trajet du tourbillon. L'ouverture et la fermeture du courant sont enregistrées par un appareil tournant qui mesure le temps écoulé. La membrane est disposée dans des expériences successives à des distances croissant par 2 pieds jusqu'à 7 mètres ; pour chaque position, on fait dix mesures dont on prend la moyenne.

Au départ et jusqu'à une distance de 1 mètre et demi environ, le mouvement est accéléré et médiocrement déterminé ; au delà il commence à être nettement retardé, mais l'étendue des expériences n'est pas assez grande pour déterminer la loi du retard. C'est ainsi que, d'après M. Ball, des résistances proportionnelles à la vitesse ou au carré de la vitesse satisfont également bien aux expériences (¹).

(¹) Accélérations négatives : $0,345\,v$, ou v^2 lognép $1,05212$.

L'une des deux lois conduirait à un arrêt de l'anneau à une distance d'environ 10 mètres, l'autre à une progression indéfinie de plus en plus lente. Dans ces conditions, je laisserai indécise la question de savoir si le ralentissement est dû au frottement de l'air, comme semble l'admettre M. Ball, ou simplement à l'action des parois du corridor dans l'expérience citée, et du mur de fond de la chambre dans une seconde expérience, actions retardatrices dans un fluide parfait, ou enfin à la compressibilité de l'air.

7° *Oscillations.* — Avec une ouverture allongée, dont la longueur ne dépasse pas deux ou trois fois la largeur, l'anneau se produit encore très bien. Les courbures inverses qu'il prend alternativement sont très faciles à observer en le regardant par la tranche; de face l'ellipse paraît se déformer avec la même période; elle devient un cercle, puis une ellipse orientée à angle droit avec la première, etc.

Des ouvertures quadrangulaires, hexagonales, donnent des résultats analogues, mais il faut les découper dans des cartons d'autant plus minces que le nombre de subdivisions du contour est plus grand, pour la même surface ouverte. Il convient de diminuer en même temps la quantité d'air chassée de la boîte.

En outre, dans l'air, les anneaux tendent rapidement vers la forme circulaire qui seule est stable. La cause principale d'un aussi rapide amortissement n'est probablement pas le frottement interne de l'air, mais sa compressibilité. Le temps qu'exige la propagation d'une modification quelconque produit une différence de phase entre des actions qui seraient simultanées dans un liquide; il faut ajouter, dans les équations d'un mouvement périodique, un terme proportionnel à la vitesse, dont le coefficient dépend de la période du mouvement et diffère essentiellement par là d'un coefficient de frottement spécifique tout en produisant des effets analogues et souvent très intenses.

Toutes ces expériences sont faciles à répéter sur une échelle beaucoup plus restreinte au moyen d'appareils simples, dont plusieurs ont été décrits par M. Guebhardt dans la *Nature* (1881).

15. *Tourbillons dans les liquides.* — Toutes les fois qu'une petite quantité de liquide est lancée un peu vivement dans une grande masse immobile, elle y forme un tourbillon annulaire ou une goutte. Ce dernier cas se produit lorsque la tension superficielle est suffisante; la surface de la goutte est alors une surface de discontinuité non seulement pour les vitesses, mais encore pour les pressions; le mouvement intérieur est certainement tourbillonnaire, mais rien ne le rend sensible aux yeux. D'après J.-J. Thomson (1885), qui a expérimenté sur un grand nombre de liquides, l'anneau ne se produit que si les deux liquides peuvent se diffuser l'un dans l'autre, ce qui confirme une vue théorique de Trowbridge (1877). L'alcool absolu dans la benzine donne des anneaux; additionné d'un millième d'eau, il ne forme plus que des gouttes.

Ces anneaux ont été étudiés d'abord par Rogers (1858) et Reusch (1860). En 1864, Tomlinson a décrit sous le nom de *nouvelles figures de cohésion* et dessiné les formes très variées des anneaux de divers liquides suivant leur nature et leur diffusibilité. Il se proposait de se servir de ces formes caractéristiques pour discerner le degré de pureté de certaines essences employées en pharmacie.

Une condition indispensable de régularité des anneaux est le repos absolu du liquide dans lequel on les forme, ce qui exige une parfaite uniformité de la température. On obtient ce résultat en mettant plusieurs heures d'avance le liquide dans un vase de grandes dimensions posé sur un support bien stable, à l'abri du rayonnement direct du soleil et des poêles. Il est avantageux de choisir un vase de verre à parois parallèles planes : un petit aquarium, le vase ordinairement fourni pour les expériences de Plateau. On éclaire par transparence.

Deux méthodes principales sont employées :

1° Chute d'une goutte toute formée;

2° Expulsion d'une petite quantité de liquide par l'extrémité d'un tube immergé.

Très peu d'expériences ont été faites avec une ouverture en paroi plane peu épaisse, qui fournit des anneaux si bien formés dans les gaz. On obtient des résultats plus compliqués et un peu différents par les deux méthodes; je les passerai en revue séparément.

16. *Chute d'une goutte de liquide.* — Un très bon procédé consiste à mettre le liquide dans une burette graduée dont on ouvre à peine le robinet; les gouttes se succèdent très régulièrement à plusieurs secondes d'intervalle sans se nuire. Pour des gouttes de 4 ou 5 millimètres de diamètre, une hauteur de chute de 2 ou 3 centimètres est ordinairement convenable. Lorsque les liquides ont des indices très différents, ou une coloration propre, il n'y a besoin d'aucun artifice pour discerner l'anneau; mais, pour des liquides peu différents ou identiques, il faut en général ajouter à celui qui tombe en gouttes une petite quantité de couleur d'aniline intense, qui n'altère pas sensiblement sa densité. On peut imiter aussi l'expérience du rideau de fumée, en faisant flotter sur la surface libre du liquide récepteur une fine poussière, ou une couche mince d'un liquide non miscible, comme l'huile sur l'eau (Trowbridge, 1877). L'anneau incolore s'entoure en descendant d'une enveloppe de poussière, qui le sépare du reste du liquide, et prend part au mouvement tourbillonnaire.

On obtient ainsi de très beaux anneaux bien formés, ayant 1 ou 2 centimètres d'ouverture et quelques millimètres de section droite. Ils sont persistants et leur section droite reste longtemps très étroite. A mesure qu'ils progressent, les petites inégalités s'accusent, la section se renfle en quelques points isolés, il s'y forme une sorte de nouvelle goutte, qui descend plus vite, suivie d'une légère traînée de matière, et par le même phénomène de frottement superficiel donne, elle aussi, naissance à un nouvel anneau tourbillonnant. Certains liquides projettent fréquemment deux ou trois couronnes d'anneaux décroissants, et dessinent un véritable lustre flottant. Suivant la diffusibilité et la tension super-

Fig. 2.

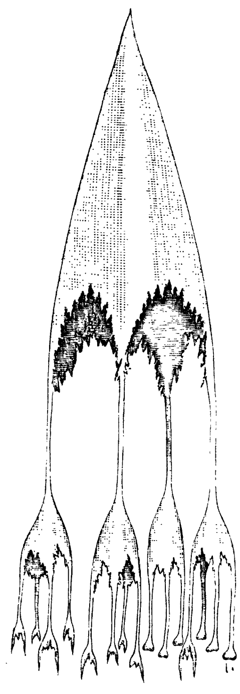
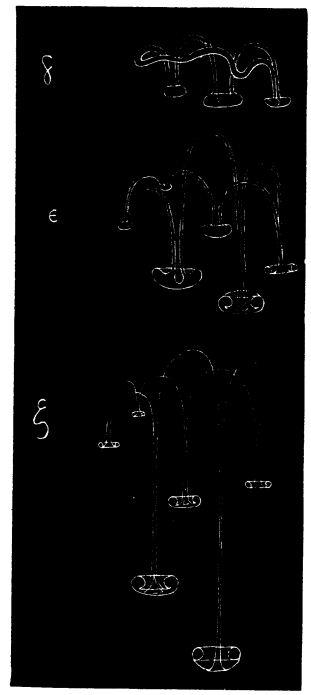


Fig. 3.



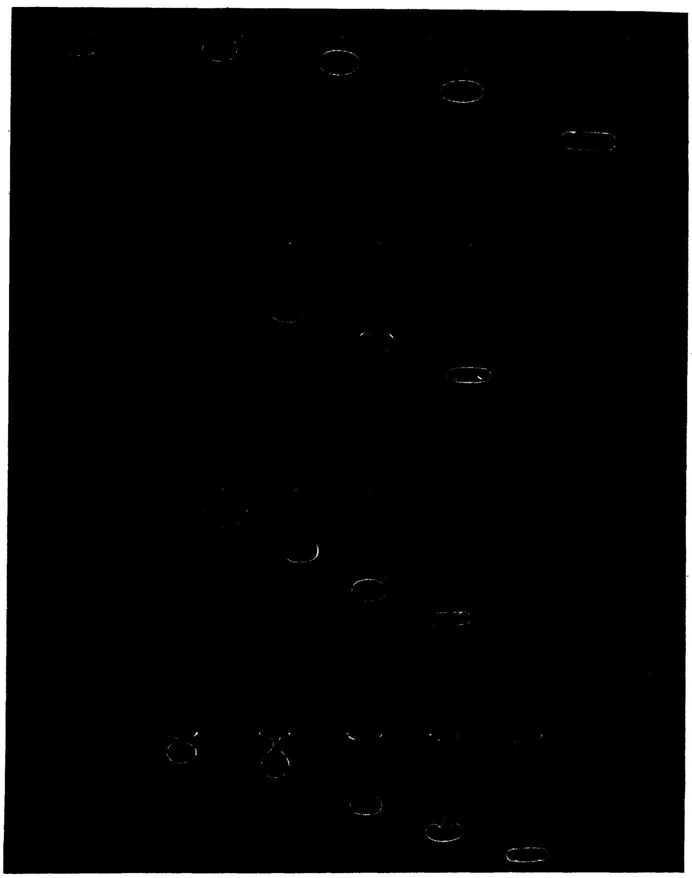
ficielle, ces anneaux sont rattachés les uns aux autres par de simples fils ou par des surfaces complètes formant dôme en ogive (*fig.* 2) : Fousel oil in paraffin oil, Tomlinson, 1864; (*fig.* 3 : J.-J. Thomson, 1885).

Quand l'anneau est bien formé et simple, on peut reproduire facilement toutes les expériences décrites sur les gaz.

En 1875, M. O. Reynolds a fait remarquer que tous ces phénomènes se produisent plus ou moins irrégulièrement quand la pluie tombe à la surface de la mer; quand on lance à travers une pomme d'arrosoir de l'eau colorée dans un baquet, chaque anneau se forme, se meut et ne se détruit qu'à une profondeur de quelques centimètres. Chaque goutte transforme en chaleur, non seulement son énergie cinétique, mais une partie de l'énergie de translation de la mer, avant de s'y mélanger; c'est ainsi que, d'après M. O. Reynolds, une pluie fine et persistante peut calmer les agitations les plus violentes. Peut-être faudrait-il rapporter à une cause analogue l'influence connue de l'huile; continuellement mêlée à l'eau de la surface, elle formerait une émulsion en fines gouttelettes; la production, puis la diffusion, par le frottement, de leur mouvement tourbillonnaire interne serait le mécanisme de la transformation de l'énergie cinétique de la mer en chaleur.

17. Les conditions de production du mouvement tourbillonnaire par simple frottement interne dans la masse du liquide, hétérogène ou non, ont fait l'objet d'expériences importantes de J.-J. Thomson et Newall (1885).

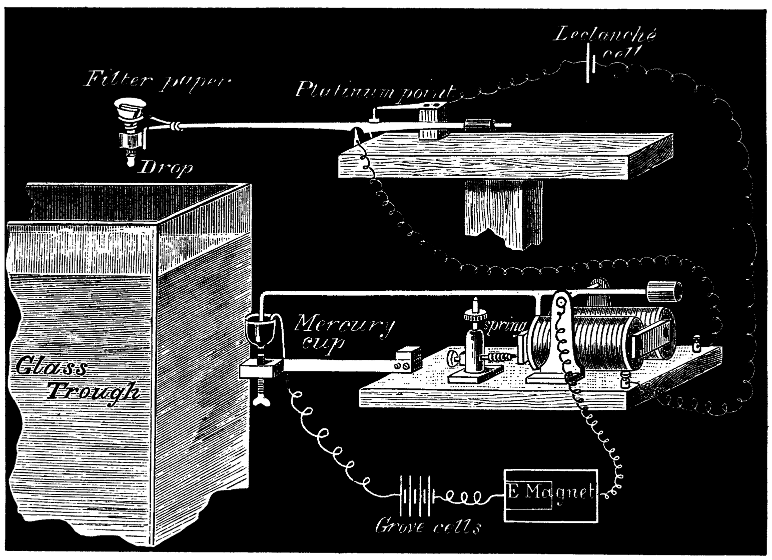
Fig. 4.



La perfection des anneaux formés pour une même hauteur de chute, c'est-à-dire une même vitesse initiale, varie beaucoup avec la nature des liquides. Certains ne donnent qu'un trouble confus, d'autres des anneaux plus ou moins bien formés, d'autres enfin des gouttes qui restent à la surface. L'ordre est indépendant du liquide récepteur; il est le même que celui des viscosités internes $\frac{\mu}{\rho}$ (n° 5) croissantes : éther, eau, acide sulfurique concentré. Le frottement est-il faible, la rotation reste confinée à une couche superficielle, la diffusion se produit immédiatement; plus intense, le frottement met en rotation une grande partie de la goutte sans atteindre le centre, l'anneau se forme nettement; plus intense encore, il fait de toute la bulle un tourbillon unique dont le centre même ne se diffuse pas. Cette explication est contrôlée par le fait que le même liquide présente la succession des formes décrites, quand on l'emploie en gouttes de plus en plus fines. Le mouvement de rotation pénètre à une profondeur à peu près invariable pour la même hauteur de chute et entraîne par conséquent une fraction d'autant plus grande de la goutte que celle-ci est plus petite.

MM. J.-J. Thomson et Newall ont aussi étudié la période de formation de l'anneau (*fig.* 4) (¹). Le liquide est contenu dans un petit entonnoir soutenu au bout

Fig. 5.



d'un léger levier équilibré. La chute de la goutte provoque, par un dispositif que la figure explique suffisamment, une forte étincelle d'induction dont on peut à volonté régler le retard. L'anneau éclairé instantanément paraît alors dans sa forme actuelle complète sans confusion possible de formes successives.

La plupart des expériences ont été faites avec une dissolution étendue de nitrate d'argent tombant dans de l'eau un peu salée; la goutte se distingue très facilement grâce au chlorure d'argent formé; une trace d'ammoniaque suffit à rendre

(¹) Nous adressons nos remerciments à la Rédaction des *Proc. R. S.*, qui a bien voulu nous prêter les *fig.* 3, 4, 5, 6 et 7.

au liquide récepteur toute sa limpidité après plusieurs gouttes. Les *fig.* 3, 4, 6, 7 montrent très exactement les principales apparences observées. Quand la tension superficielle n'est pas nulle, l'anneau ne se forme pas; mais les déformations de la goutte (*fig.* 6 et 7) ne sont pas moins caractéristiques d'un mouvement tourbillonnaire interne.

Enfin la persistance de l'anneau dépend de la forme de la goutte au moment où

Fig. 6.

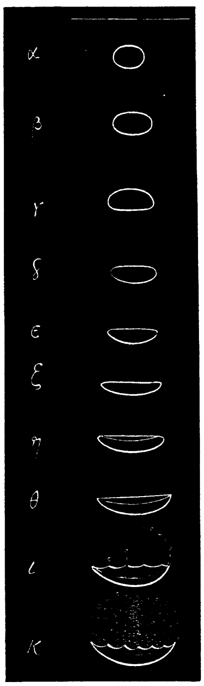
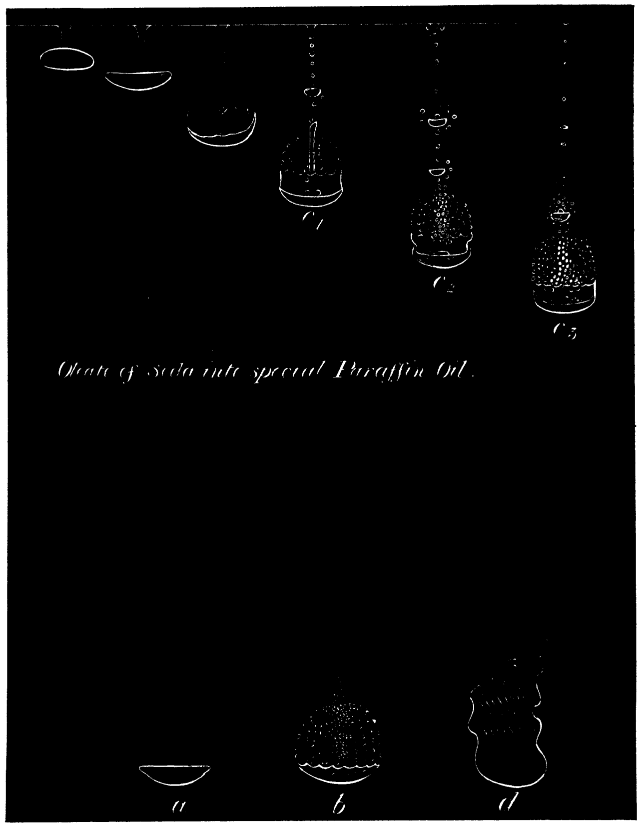


Fig. 7.

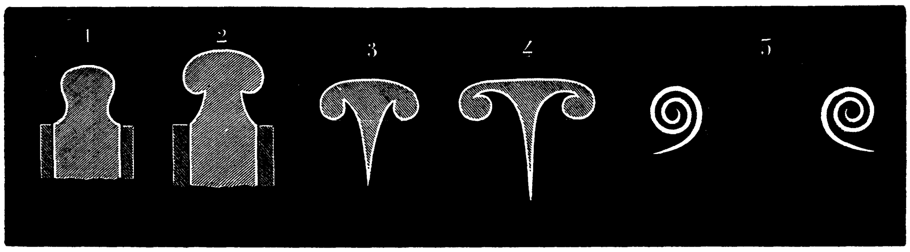


elle rencontre la surface; car la longueur du chemin que l'anneau parcourt sans se déformer est une fonction périodique du temps que met la goutte à atteindre la surface. J. Thomson a constaté que cette période est bien de même ordre de grandeur que la période oscillatoire de la goutte en vertu de sa tension superficielle dans l'air.

18. *Écoulement par un tube cylindrique immergé.* — Un tube de verre, de 1 centimètre de diamètre au moins, à bords nettement coupés et courbé en S, s'ouvre horizontalement ou verticalement vers le haut, à l'intérieur du liquide récep-

teur. Il est relié par un caoutchouc court à un large flacon. Un robinet qu'on ouvre pendant un temps très court ne laisse échapper qu'une très petite quantité de liquide sous une pression de 2 ou 3 centimètres d'eau. Les anneaux se produisent très régulièrement, mais leur forme est beaucoup moins simple que celle des anneaux gazeux que nous avons décrits. Ce n'est plus un simple tore dont la section droite à peu près circulaire ne se déforme guère : c'est toujours un anneau, mais comme ceux qu'on pourrait obtenir avec un tube de caoutchouc long et très mince, roulé entre les doigts. La section droite ressemble beaucoup à une

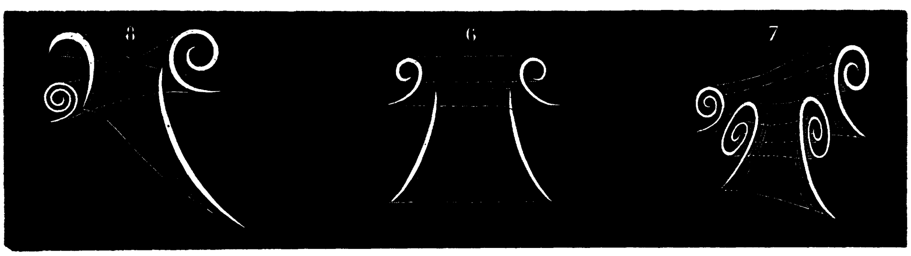
Fig. 8.



spirale tracée à la pointe du pinceau; cette ligne s'allonge et s'enroule de plus en plus à mesure que l'anneau progresse et s'élargit. Ce fait est complètement d'accord avec l'action qu'exercent l'un sur l'autre deux anneaux de même rotation.

Cette forme particulière se rattache évidemment à l'emploi du tube cylindrique auquel le liquide adhère fortement; l'écoulement se fait principalement par le milieu du tube, le liquide s'y élève en forme de dôme renflé, puis la partie supérieure s'aplatit, s'étale sous la résistance de l'eau, se borde d'un tore qui va s'élargissant (*fig.* 8); la goutte se détache, monte lentement en s'enroulant par le bord. Quand le liquide récepteur est en repos parfait, la spirale est assez res-

Fig. 9.



serrée au bout de 1 décimètre de course pour paraître une surface continue. L'anneau monte, s'élargit beaucoup en approchant de la surface libre. Tantôt il s'y dissipe, tantôt il s'y réfléchit et redescend en continuant à s'élargir lente-