ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

X. STOUFF

Sur une classe de surfaces minima

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 6, nº 1 (1892), p. A5-A12
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1892_1_6_1_A5_0>

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

SUR UNE

CLASSE DE SURFACES MINIMA,

PAR M. X. STOUFF,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier.

I.

Riemann a découvert (1) des surfaces minima engendrées par un cercle dont le plan se déplace parallèlement à lui-même et montré que la théorie de ces surfaces se rattache de fort près au théorème d'addition des fonctions elliptiques. D'une manière générale, le problème de trouver des surfaces minima passant par un cercle revient à chercher deux fonctions analytiques telles que, la somme des arguments restant constante, il en résulte une relation d'une certaine forme entre les fonctions elles-mêmes.

Nous partons des formules de M. Weierstrass :

$$(1)\quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int(1-u^2)\mathfrak{F}(u)\,du + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int(1-v^2)\mathcal{G}(v)\,dv, \\ y = \dfrac{i}{2}\displaystyle\int(1+u^2)\mathfrak{F}(u)\,du - \dfrac{i}{2}\displaystyle\int(1-v^2)\mathcal{G}(v)\,dv, \\ z = \displaystyle\int u\,\mathfrak{F}(u)\,du + \displaystyle\int v\,\mathcal{G}(v)\,dv. \end{cases}$$

Cherchons la condition pour que la surface contienne un cercle dont le

(1) *Œuvres complètes*, p. 311.

plan soit parallèle au plan des xy. Soit $z=c$ l'équation du plan de ce cercle, R son rayon. Les valeurs de u et de v relatives à un point de ce cercle satisfont à la relation

$$(2)\qquad \int u\mathfrak{F}(u)\,du+\int v\mathfrak{G}(v)\,dv=c,$$

laquelle doit être équivalente à l'équation obtenue en exprimant que la section de la surface par le plan $z=c$ a un rayon de courbure constant et égal à R. Posons

$$(3)\qquad \int u\,\mathfrak{F}(u)\,du=c-\int v\mathfrak{G}(v)\,dv=\zeta.$$

Un élément d'arc de la courbe est donné par la formule

$$(4)\qquad d\sigma=(1+uv)\sqrt{\mathfrak{F}(u)\mathfrak{G}(v)\,du\,dv},$$

ou, en tenant compte de l'équation (2),

$$d\sigma=\pm i\frac{1+uv}{\sqrt{uv}}\,d\zeta;$$

α étant l'angle que fait la tangente avec l'axe des x, on a

$$(5)\qquad \operatorname{tang}\alpha=i\frac{(1+u^2)\mathfrak{F}(u)\,du-(1+v^2)\mathfrak{G}(v)\,dv}{(1-u^2)\mathfrak{F}(u)\,du+(1-v^2)\mathfrak{G}(v)\,dv}=i\frac{v+u}{v-u},$$

$$(6)\qquad d\alpha=i\frac{u\,dv-v\,du}{2uv}=-i\frac{u^2\mathfrak{F}(u)+v^2\mathfrak{G}(v)}{2u^2v^2\mathfrak{F}(u)\mathfrak{G}(v)}\,d\zeta,$$

et, par suite,

$$\frac{d\sigma}{d\alpha}=\mathrm{R}=\frac{2u^{\frac{3}{2}}v^{\frac{3}{2}}(1+uv)\mathfrak{F}(u)\mathfrak{G}(v)}{u^2\mathfrak{F}(u)+v^2\mathfrak{G}(v)};$$

posons

$$(7)\qquad u=\varphi^2(\zeta),\qquad v=\psi^2(c-\zeta),$$

il vient

$$\mathfrak{F}(u)=\frac{1}{2\varphi^3(\zeta)\,\varphi'(\zeta)},$$

et l'équation (7) devient

$$(8)\qquad \frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta)}+\frac{\psi'(c-\zeta)}{\psi(c-\zeta)}=\frac{1}{\mathrm{R}}\left\{\varphi(\zeta)\psi(c-\zeta)+[\varphi(\zeta)\psi(c-\zeta)]^{-1}\right\}.$$

C'est à la détermination des fonctions $\varphi(\zeta)$ et $\psi(\zeta)$ jouissant de la propriété exprimée par l'équation (8) que revient essentiellement le problème de faire passer une surface minima par un cercle donné. Les coordonnées d'un point de la surface s'expriment alors en fonction de deux paramètres arbitraires ζ et η par les formules

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} x+iy &= -\int \varphi^2(\zeta)\,d\zeta + \int \frac{d\eta}{\psi^2(\eta)},\\ x-iy &= \int \frac{d\zeta}{\varphi^2(\zeta)} - \int \psi^2(\eta)\,d\eta,\\ z &= \zeta+\eta, \end{aligned}\right.$$

La formule bien connue d'addition des fonctions elliptiques peut s'écrire

$$(10)\qquad ik\,\mathrm{sn}(\zeta+\eta) = \frac{\mathrm{cn}\,\zeta\,\mathrm{dn}\,\zeta\,\mathrm{sn}^{-1}\zeta + \mathrm{cn}\,\eta\,\mathrm{dn}\,\eta\,\mathrm{sn}^{-1}\eta}{ik\,\mathrm{sn}\,\zeta\,\mathrm{sn}\,\eta + (ik\,\mathrm{sn}\,\zeta\,\mathrm{sn}\,\eta)^{-1}},$$

et, en prenant $\varphi(\zeta) = \sqrt{ik}\,\mathrm{sn}\,\zeta$, $\psi(\eta) = \sqrt{ik}\,\mathrm{sn}\,\eta$, la formule (10) se ramène à la formule (8) et montre que les sections de la surface minima par des plans parallèles au plan des xy sont *toutes des cercles*. On a ainsi la surface cerclée de Riemann.

II.

On peut satisfaire à l'équation (8) par des fonctions plus simples que celles de Riemann. Posons

$$(11)\qquad \varphi(\zeta) = \lambda\frac{\zeta-a}{\zeta-b}e^{k\zeta}, \qquad \psi(\eta) = \lambda'\frac{\eta-a'}{\eta-b'}e^{k\eta},$$

les constantes contenues dans les fonctions (11) devront être telles que ces fonctions vérifient l'identité (8), c'est-à-dire

$$\begin{aligned} 2k + \frac{1}{\zeta-a} - \frac{1}{\zeta-b} + \frac{1}{c-\zeta-a'} - \frac{1}{c-\zeta-b'} \\ = \frac{1}{R}\left[\lambda\lambda'\frac{(\zeta-a)(c-\zeta-a')}{(\zeta-b)(c-\zeta-b')}e^{kc} + \frac{1}{\lambda\lambda'}\frac{(\zeta-b)(c-\zeta-b')}{(\zeta-a)(c-\zeta-a')}e^{-kc}\right]. \end{aligned}$$

En exprimant que les deux membres ont même valeur pour ζ infini et en égalant les résidus des deux membres par rapport aux pôles a, b, $c-a'$, $c-b'$, on obtient des équations faciles à résoudre et qui donnent finalement le résultat suivant.

Pour obtenir des surfaces réelles, on attribue à k une valeur réelle, extérieure à $-\frac{1}{R}$ et $+\frac{1}{R}$; la valeur de $\lambda\lambda'$ est déterminée par l'équation

$$2kR = \lambda\lambda' e^{kc} + \frac{1}{\lambda\lambda'} e^{-kc},$$

elle est réelle; les modules de λ et de λ' seront tous deux égaux à $\sqrt{\lambda\lambda'}$ et l'on pourra prendre arbitrairement la valeur absolue de leurs arguments, qui seront égaux et de signes contraires : δ étant une quantité réelle arbitraire, on aura

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{c}{2} - \frac{2\lambda\lambda' e^{kc} R}{\lambda^4\lambda'^4 e^{4kc} - 1} + i\delta, \\ a' &= \frac{c}{2} - \frac{2\lambda\lambda' e^{kc} R}{\lambda^4\lambda'^4 e^{4kc} - 1} - i\delta, \\ b &= \frac{c}{2} - \frac{2\lambda^3\lambda'^3 e^{3kc} R}{\lambda^4\lambda'^4 e^{4kc} - 1} + i\delta, \\ b' &= \frac{c}{2} - \frac{2\lambda^3\lambda'^3 e^{3kc} R}{\lambda^4\lambda'^4 e^{4kc} - 1} - i\delta, \end{aligned}\right\} \quad a + b' = b + a'.$$

Les intégrations indiquées dans les équations (9) peuvent s'effectuer et la surface minima peut se représenter par les équations

$$\begin{aligned} x + iy &= -\frac{\lambda^2}{2k}\,\frac{\zeta - 2a + b}{\zeta - b} e^{2k\zeta} - \frac{1}{2k\lambda'^2}\,\frac{\eta - 2b' + a'}{\eta - a'} e^{2k\eta}, \\ x - iy &= -\frac{1}{2k\lambda^2}\,\frac{\zeta - 2b + a}{\zeta - a} e^{-2k\zeta} - \frac{\lambda'^2}{2k}\,\frac{\eta - 2a' + b'}{\eta - b'} e^{2k\eta}, \\ z &= \zeta + \eta, \end{aligned}$$

ζ et η étant deux quantités imaginaires conjuguées. Si l'on a

$$\zeta + \eta = a + b' = b + a',$$

uv est constant. Il en résulte que le plan $z = a + b'$ coupe la surface *sous un angle constant.*

L'emploi des fonctions elliptiques donne des résultats analogues. Considérons les expressions

$$\frac{\sigma(c - b - b')\sigma(\zeta - a)\sigma(c - \zeta - a')}{\sigma(c - b - a')\sigma(a - b)\sigma(\zeta - b)\sigma(c - \zeta - b')},$$

$$\frac{\sigma(c - a - a')\sigma(\zeta - b)\sigma(c - \zeta - b')}{\sigma(a - b)\sigma(c - a - b')\,\sigma(\zeta - a)\sigma(c - \zeta - a')},$$

où σ désigne la fonction de M. Weierstrass ([1]). Elles représentent des fonctions doublement périodiques de ζ, si la somme de leurs zéros égale celle de leurs infinis. Cette condition, que nous supposerons réalisée, revient à

$$a - b = a' - b'. \tag{12}$$

En les décomposant en éléments simples, on trouve qu'elles sont respectivement égales à

$$\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)} - \frac{\sigma'(\zeta-b)}{\sigma(\zeta-b)} - \frac{\sigma'(c-\zeta-b')}{\sigma(c-\zeta-b')} + \frac{\sigma'(c-a-b')}{\sigma(c-a-b')}$$

et

$$\frac{\sigma'(\zeta-a)}{\sigma(\zeta-a)} + \frac{\sigma'(c-\zeta-a')}{\sigma(c-\zeta-a')} + \frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)} - \frac{\sigma'(c-b-a')}{\sigma(c-b-a')}.$$

En remarquant que, d'après la relation (12),

$$c - a - b' = c - b - a',$$

on obtient l'identité

$$\tag{13} \left\{ \begin{aligned} & 2\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)} + \frac{\sigma'(\zeta-a)}{\sigma(\zeta-a)} - \frac{\sigma'(\zeta-b)}{\sigma(\zeta-b)} + \frac{\sigma'(c-\zeta-a')}{\sigma(c-\zeta-a')} - \frac{\sigma'(c-\zeta-b')}{\sigma(c-\zeta-b')} \\ & = \frac{\sigma(c-b-b')\sigma(\zeta-a)\sigma(c-\zeta-a')}{\sigma(c-b-a')\sigma(a-b)\sigma(\zeta-b)\sigma(c-\zeta-b')} \\ & \quad + \frac{\sigma(c-a-a')\sigma(\zeta-b)\sigma(c-\zeta-b')}{\sigma(a-b)\sigma(c-a-b')\sigma(\zeta-a)\sigma(c-\zeta-a')}, \end{aligned} \right.$$

que l'on peut ramener à l'identité (8) en posant

$$R = \frac{\sigma(a-b)\sigma(c-a-b')}{\sqrt{\sigma(c-b-b')\sigma(c-a-a')}},$$

$$\varphi(\zeta) = \lambda \frac{\sigma(\zeta-a)}{\sigma(\zeta-b)} e^{\zeta\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}}, \qquad \psi(\zeta) = \lambda' \frac{\sigma(\zeta-a')}{\sigma(\zeta-b')} e^{\zeta\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}},$$

λ et λ' étant déterminés par les égalités

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{\sigma(c-b-b')}{\sigma(c-a-a')}}\, e^{i\mu - \frac{c}{2}\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}}, \qquad \lambda' = \sqrt[4]{\frac{\sigma(c-b-b')}{\sigma(c-a-a')}}\, e^{-i\mu - \frac{c}{2}\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}},$$

où μ est une constante arbitraire.

([1]) Je suis ici les notations du Livre de M. Weber : *Elliptische Functionen und algebraische Zahlen*.

Les intégrations indiquées dans les formules (9) peuvent s'effectuer. Je dis que

$$\varphi^2(\zeta) = \mathrm{D}_\zeta\left[\lambda^2\frac{\sigma^2(a-b)}{\sigma(2a-2b)}\,\frac{\sigma(\zeta-2a+b)}{\sigma(\zeta-b)}\,e^{2\zeta\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}}\right],$$

soit, pour abréger,

$$\mathrm{Q}(\zeta) = \frac{\sigma(\zeta-2a+b)}{\sigma(\zeta-b)}\,e^{2\zeta\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}}.$$

On a

$$\mathrm{Q}(\zeta+\omega_1) = \mathrm{Q}(\zeta)\,e^{4\eta_1(b-a)+2\omega_1\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}},$$

donc aussi

$$\mathrm{Q}'(\zeta+\omega_1) = \mathrm{Q}'(\zeta)\,e^{4\eta_1(b-a)+2\omega_1\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}}$$

et

$$\varphi^2(\zeta+\omega_1) = \varphi^2(\zeta)\,e^{4\eta_1(b-a)+2\omega_1\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}}.$$

Donc $\dfrac{\mathrm{Q}'(\zeta)}{\varphi^2(\zeta)}$ reste invariable quand on ajoute ω_1 à l'argument; on vérifie de même qu'il ne change pas lorsque l'on ajoute ω_2. Cette fonction ne peut d'ailleurs avoir pour pôle que a et ses homologues. Or a n'est pas un pôle; en effet,

$$\sigma(\zeta-2a+b) = \sigma(b-a)+(\zeta-a)\sigma'(b-a)+\frac{(\zeta-a)^2}{2}\sigma''(b-a)+\ldots,$$

$$\sigma(\zeta-b) = \sigma(a-b)+(\zeta-a)\sigma'(a-b)+\frac{(\zeta-a)^2}{2}\sigma''(a-b)+\ldots,$$

et, en faisant le quotient des deux séries

$$\frac{\sigma(\zeta-2a+b)}{\sigma(\zeta-b)} = -1+2(\zeta-a)\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}-2(\zeta-a)^2\frac{\sigma'^2(a-b)}{\sigma^2(a-b)}+\ldots,$$

on a aussi

$$e^{2\zeta\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}} = e^{2a\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}}\left[1+2(\zeta-a)\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}+2(\zeta-a)^2\frac{\sigma'^2(a-b)}{\sigma^2(a-b)}+\ldots\right].$$

En effectuant le produit, on voit que $\mathrm{Q}(\zeta)$ ne contient ni termes en $\zeta-a$, ni termes en $(\zeta-a)^2$, donc $\zeta=a$ est un zéro double de $\mathrm{Q}'(\zeta)$. Par suite, la fonction $\dfrac{\mathrm{Q}'(\zeta)}{\varphi^2(\zeta)}$ est doublement périodique, n'a pas de pôles et se réduit à une constante; en faisant $\zeta=b$, on obtient la valeur de cette constante.

En faisant les intégrations des formules (9), il vient

$$(14)\quad \begin{cases} x+iy = -\lambda^2 \dfrac{\sigma^2(a-b)\sigma(\zeta-2a+b)}{\sigma(2a-2b)\sigma(\zeta-b)} e^{2\zeta\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}} - \dfrac{1}{\lambda'^2} \dfrac{\sigma^2(a-b)\sigma(\eta-2b'+a')}{\sigma(2a-2b)\sigma(\eta-a')} e^{-2\eta\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}}, \\ x-iy = -\dfrac{1}{\lambda^2} \dfrac{\sigma^2(a-b)\sigma(\zeta-2b+a)}{\sigma(2a-2b)\sigma(\zeta-a)} e^{-2\zeta\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}} - \lambda'^2 \dfrac{\sigma^2(a-b)\sigma(\eta-2a'+b')}{\sigma(2a-2b)\sigma(\eta-b')} e^{2\eta\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}}, \\ z = \zeta+\eta. \end{cases}$$

Le plan $z=c$ coupe la surface suivant un cercle; il n'en est pas de même, en général, des autres plans parallèles au plan des xy. Mais les sections de la surface par ces plans jouissent d'une propriété qui les rapproche d'un cercle. *Il existe entre leur courbure proprement dite et leur courbure géodésique une relation linéaire.*

En effet, si dans l'identité (13) on remplace c par z, il vient

$$\begin{aligned} &2\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)} + \frac{\sigma'(\zeta-a)}{\sigma(\zeta-a)} - \frac{\sigma'(\zeta-b)}{\sigma(\zeta-b)} + \frac{\sigma'(z-\zeta-a')}{\sigma(z-\zeta-a')} - \frac{\sigma'(z-\zeta-b')}{\sigma(z-\zeta-b')} \\ &\quad = \frac{\sigma(z-b-b')\sigma(\zeta-a)\sigma(z-\zeta-a')}{\sigma(z-b-a')\sigma(a-b)\sigma(\zeta-b)\sigma(z-\zeta-b')} \\ &\qquad + \frac{\sigma(z-a-a')\sigma(\zeta-b)\sigma(z-\zeta-b')}{\sigma(a-b)\sigma(z-a-b')\sigma(\zeta-a)\sigma(z-\zeta-a')}, \end{aligned}$$

ou

$$(15)\qquad \frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta)} + \frac{\psi'(c-\zeta)}{\psi(c-\zeta)} = \rho\varphi(\zeta)\psi(c-\zeta) + \rho'[\varphi(\zeta)\psi(c-\zeta)]^{-1},$$

en désignant par ρ et ρ' les quantités

$$\rho = \frac{\sigma(z-b-b')\sqrt{\sigma(c-a-a')}}{\sigma(z-b-a')\sigma(a-b)\sqrt{\sigma(c-b-b')}} e^{(c-z)\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}},$$

$$\rho' = \frac{\sigma(z-a-a')\sqrt{\sigma(c-b-b')}}{\sigma(z-a-b')\sigma(a-b)\sqrt{\sigma(c-a-a')}} e^{(z-c)\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}}.$$

Mais le rayon de courbure de la section est, en général, donné par la formule (8) et, en divisant membre à membre les formules (8) et (15), il vient

$$R = \frac{\rho uv + \rho'}{uv+1};$$

mais, si φ désigne l'angle de la normale avec l'axe des z,

$$uv = \operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2},$$

d'où

$$1 = \frac{\rho' + \rho}{2} \frac{1}{R} + \frac{\rho' - \rho}{2} \frac{\cos\varphi}{R},$$

ce qui démontre la proposition. En particulier, le plan $z = a + b'$ coupe la surface sous un angle constant, et il existe des plans qui donnent des sections dont le rayon de courbure géodésique est constant.

Le même procédé s'applique à la démonstration du théorème de Riemann. Il résulte de la décomposition en éléments simples de la fonction

$$\frac{\sigma(\zeta)\sigma\left(\zeta - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)\sigma(c-\zeta)\sigma\left(c - \zeta - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)}{\sigma\left(\zeta - \frac{\omega_1}{2}\right)\sigma\left(\zeta - \frac{\omega_2}{2}\right)\sigma\left(c - \zeta - \frac{\omega_1}{2}\right)\sigma\left(c - \zeta - \frac{\omega_2}{2}\right)}$$

et de son inverse.