Annales de la faculté des sciences de Toulouse

Paul Appell

Sur certaines propriétés d'une position d'équilibre d'un système

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 6, nº 1 (1892), p. C1-C6
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1892_1_6_1_C1_0>

SUR

CERTAINES PROPRIÉTÉS D'UNE POSITION D'ÉQUILIBRE

D'UN SYSTÈME,

PAR M. PAUL APPELL,

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris.

Lorsqu'un système dont les liaisons sont indépendantes du temps est sollicité par des forces dérivant d'une fonction de forces U, la recherche des positions d'équilibre du système se trouve ramenée à la recherche des maxima et minima de cette fonction U regardée comme fonction des paramètres indépendants qui servent à définir la configuration géométrique du système.

En partant de cette propriété bien connue qui est une conséquence immédiate du principe des vitesses virtuelles, on peut, même pour un système sollicité par des forces ne dérivant pas d'une fonction de forces, assigner une infinité de fonctions devenant maxima ou minima *dans une position d'équilibre donnée du système*. On obtient ainsi des théorèmes donnant des propriétés de la position d'équilibre considérée, mais ne permettant pas, en général, de trouver cette position, car l'énoncé de ces propriétés suppose connue la position d'équilibre. Nous commencerons par indiquer, en les rattachant au point de vue auquel nous nous plaçons ici, des théorèmes de Lagrange et Möbius.

Considérons un système de points matériels $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $\ldots$, $M_n(x_n, y_n, z_n)$ assujettis à des liaisons données indépendantes du temps et sollicités par des forces directement appliquées, le point M_1, par des forces que nous supposons pour simplifier réduites à une force $P_1(X_1, Y_1, Z_1)$, le point M_2 par une force $P_2(X_2, Y_2, Z_2)$, ... Soit, pour ce système, une position d'équilibre déterminée dans laquelle les points M_1, M_2, $\ldots$, M_n occupent des positions déterminées $m_1, m_2, \ldots, m_n$ de coordonnées (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), $\ldots$, (a_n, b_n, c_n), les forces correspondantes étant des forces déterminées $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de projections respectives (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2),

..., (A_n, B_n, C_n). Dans ces conditions on a les propositions que nous allons indiquer.

I. Lagrange donne dans sa *Mécanique analytique* (*Statique*, Section I, n° 18 et Section III, § V) une démonstration du principe des vitesses virtuelles qui est fondée sur un principe entrevu par Torricelli (*ibid.*, § 16) et qui conduit à la propriété suivante : Sur la direction de chacune des forces $p_1, p_2, \ldots, p_n$ correspondant à la position d'équilibre, marquons un point fixe; nous aurons ainsi n points, O_1 sur p_1, O_2 sur p_2, ... Dans une position voisine de cette position d'équilibre, les points du système occuperont des positions $M_1, M_2, \ldots, M_n$. La fonction

$$S = p_1\overline{M_1 O_1} + p_2\overline{M_2 O_2} + \ldots + p_n\overline{M_n O_n},$$

dont chaque terme est la distance d'un point M_i du système au point fixe O_i correspondant multipliée par l'intensité p_i, est *maximum ou minimum dans la position d'équilibre considérée.*

En effet, imaginons que le système, au lieu d'être sollicité par les forces données $P_1, P_2, \ldots, P_n$, soit sollicité par des forces $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$, la force P'_i appliquée au point M_i étant égale à la constante p_i et dirigée vers le point fixe O_i : sous l'action de ces nouvelles forces le système sera encore en équilibre dans la position déterminée que nous avons considérée, car dans cette position déterminée les nouvelles forces $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ deviennent, d'après leur définition, égales à ce que deviennent $P_1, P_2, \ldots, P_n$ dans cette même position. Mais ce nouveau système de forces $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ dérive de la fonction des forces

$$-p_1\overline{M_1 O_1} - p_2\overline{M_2 O_2} - \ldots - p_n\overline{M_n O_n},$$

car le travail virtuel de la force P'_i d'intensité constante p_i dirigée vers le point fixe O_i est $-p_i\delta\overline{M_i O_i}$. La position d'équilibre considérée rend donc en général maximum ou minimum cette fonction des forces, c'est-à-dire S, et dans tous les cas elle annule la variation de S.

Bien entendu, la réciproque n'est pas exacte, en ce sens que toute position du système pour laquelle la variation de S est nulle est une position d'équilibre du système sous l'action des nouvelles forces $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$, *mais non sous l'action des forces primitivement données* $P_1, P_2, \ldots, P_n$; la propriété énoncée est donc spéciale à la position d'équilibre particulière que nous avons envisagée au début et qui nous a servi à définir les points $O_1, O_2, \ldots, O_n$ et les quantités $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Il est important de remarquer aussi que la position d'équilibre considérée qui est commune aux systèmes de forces $P_1, P_2, \ldots, P_n$ et $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ peut être stable dans l'un des systèmes de forces et instable dans l'autre. Lagrange montre que l'on peut réaliser ce second système de forces à l'aide de poids et de poulies, mais c'est là un point particulier qu'il est inutile de développer ici.

Prenons un exemple entièrement élémentaire. Imaginons un point libre M sollicité par trois forces, *toutes d'égale intensité*, mais de directions différentes. Ce point sera en équilibre dans une position m pour laquelle les trois forces formeront entre elles, deux à deux, des angles tous égaux à 120°. Prenons alors, sur la direction de ces trois dernières forces, trois points fixes O_1, O_2, O_3, le point m se trouvera parmi les positions du point M qui rendent minimum la somme

$$\overline{MO_1} + \overline{MO_2} + \overline{MO_3}.$$

Un calcul facile montre d'ailleurs que ce point m est le seul qu'on trouve en cherchant à rendre cette somme minimum.

II. Dans son *Traité de Statique,* Möbius suppose presque toujours que les forces agissant sur un système sont *constantes en grandeur, direction et sens.* Ce cas se présenterait pour les forces $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$, si les points appelés précédemment $O_1, O_2, \ldots, O_n$ étaient éloignés indéfiniment sur les directions des forces $p_1, p_2, \ldots, p_n$ dans la position d'équilibre considérée. Les projections de p_i étant A_i, B_i, C_i, celles de P'_i qui est égale et parallèle à p_i auront les mêmes valeurs; le système des forces P′ dérivera alors de la fonction des forces

$$S = \sum_{i=1}^{i=n} (A_i x_i + B_i y_i + C_i z_i),$$

qui remplacera la fonction appelée précédemment S et qui, par suite, sera encore, en général, maximum ou minimum dans la position d'équilibre considérée.

III. *Principe du minimum de la somme des carrés des distances.* — Voici une autre propriété de l'équilibre qui a été indiquée par Möbius et qui se rattache au même ordre d'idées (1). Le système étant en équilibre dans les positions $m_1, m_2, \ldots, m_n$ où les forces sont $p_1, p_2, \ldots, p_n$, prenons, à partir du point m_1, sur la direction de la force p_1, une longueur $\overline{m_1 O_1}$ égale à $\frac{p_1}{k}$, à partir de m_2 sur la direction de p_2 une longueur $\overline{m_2 O_2}$ égale à $\frac{p_2}{k}, \ldots, k$ désignant une constante différente de zéro. Considérant ensuite une position quelconque $M_1, M_2, \ldots, M_n$ du système, faisons agir sur les points $M_1, M_2, \ldots, M_n$ des forces $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ dirigées respectivement suivant les droites $\overline{M_1 O_1}, \overline{M_2 O_2}, \ldots, \overline{M_n O_n}$ et égales à $k\overline{M_1 O_1}$, $k\overline{M_2 O_2}$, $k\,\overline{M_n O_n}$. Sous l'action de ces nouvelles forces, le système est encore en équilibre dans la même position $m_1, m_2, \ldots, m_n$, car dans cette position spéciale les forces $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ coïncident avec $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Comme le nouveau système de forces $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ dérive de la fonction des forces

$$T = -k\left(\overline{M_1 O_1}^2 + \overline{M_2 O_2}^2 + \ldots + \overline{M_n O_n}^2\right),$$

on voit que la position d'équilibre considérée rend cette fonction maximum ou minimum en général, et que, dans tous les cas, la variation de la fonction T s'annule pour cette position d'équilibre.

Voilà donc encore une propriété de l'équilibre qui est analogue à celle du n° I et qui conduit aux mêmes remarques.

En appliquant ce théorème au cas le plus simple, on voit que, si un point m est en équilibre sous l'action de trois forces $\overline{mO_1}, \overline{mO_2}, \overline{mO_3}$, cette position d'équilibre est la position du point M pour laquelle la somme

$$\overline{MO_1}^2 + \overline{MO_2}^2 + \overline{MO_3}^2$$

est minimum, ce qui est une propriété bien connue du centre de gravité du triangle $O_1 O_2 O_3$.

IV. Plus généralement, si l'on prend à partir de m_1 sur la direction $m_1 p_1$ une longueur $\overline{m_1 O_1}$ égale à $\left(\frac{p_1}{k}\right)^{\frac{1}{\nu}}$, sur la direction $m_2 p_2$ une longueur $\overline{m_2 O_2}$

(1) Ce principe peut être déduit d'un principe plus général relatif au mouvement donné par Gauss (*Journal de Crelle*, t. IV). *Voir* aussi *Mécanique analytique* de Lagrange, troisième édition, par M. J. Bertrand, t. II, Note IX.

égale à $\left(\frac{p_2}{k}\right)^{\frac{1}{\nu}}$, ..., ν désignant une constante, la fonction

$$R = -\frac{k}{\nu+1}\left(\overline{M_1O_1}^{\nu+1} + \overline{M_2O_2}^{\nu+1} + \ldots + \overline{M_nO_n}^{\nu+1}\right)$$

est maximum ou minimum quand les points M_1, M_2, ..., M_n du système prennent la position d'équilibre considérée m_1, m_2, ..., m_n. En effet, en appliquant aux points M_1, M_2, ..., M_n des forces P'_1, P'_2, ..., P'_n dirigées suivant $\overline{M_1O_1}$, $\overline{M_2O_2}$, ..., $\overline{M_nO_n}$ et égales à $k\overline{M_1O_1}^{\nu}$, $k\overline{M_2O_2}^{\nu}$, ..., on obtient un système de forces dérivant de la fonction de forces R et se réduisant aux forces p_1, p_2, ..., p_n dans la position m_1, m_2, ..., m_n.

Si $\nu = -1$, il faut remplacer R par

$$R = -k \log \overline{M_1O_1}.\overline{M_2O_2}\ldots\overline{M_nO_n}.$$

Soient, par exemple, plusieurs forces se faisant équilibre appliquées à un point libre dans une position m et ayant pour extrémités des points e_1, e_2, ..., e_n : ce point m est le centre des moyennes distances des points e. Prenons sur chaque droite $\overline{me_i}$ un point O_i tel que

$$\overline{mO_i}.\overline{me_i} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

nous aurons ainsi construit un système de points O_i inverses des points e_i par rapport au point m. D'après ce que nous venons de voir, le point m est l'une des positions du point M rendant maximum ou minimum l'expression

$$\log \overline{MO_1}.\overline{MO_2}\ldots\overline{MO_n}.$$

Réciproquement tout point m' pour lequel cette expression est maximum ou minimum est le centre des moyennes distances des points formant la figure inverse des points O_i par rapport à ce point m'. Quand les points O_1, O_2, ..., O_n sont dans un plan, ces points m' sont, d'après une remarque de Chasles (1), les points représentant les racines de la dérivée d'un polynôme ayant pour racines les quantités imaginaires représentées par les points O_1, O_2, ..., O_n.

---

(1) *Voir* des Notes de M. F. Lucas, *Comptes rendus*, 1879 et 1888, et une Note de M. Berloty, *ibid.*, 1884.

V. Dans les énoncés précédents on pourrait remplacer les points fixes appelés $O_1, O_2, \ldots, O_n$ par des surfaces fixes quelconques menées par ces points normalement à $p_1, p_2, \ldots, p_n$ et supposer les distances aux points fixes remplacées par les distances à ces surfaces. Mais toutes les propositions ainsi obtenues sont des cas particuliers de la suivante, qui permet d'assigner une infinité de fonctions devenant maxima ou minima dans la position d'équilibre considérée. Formons une fonction U de $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots; x_n, y_n, z_n$ dont les dérivées partielles $\frac{\partial U}{\partial x_i}, \frac{\partial U}{\partial y_i}, \frac{\partial U}{\partial z_i}$ prennent les valeurs A_i, B_i, C_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ quand le système est dans la position d'équilibre considérée, c'est-à-dire quand les coordonnées $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots; x_n, y_n, z_n$ prennent les valeurs $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; \ldots; a_n, b_n, c_n$. Le même système, sollicité par des forces $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ dérivant de la fonction des forces U, sera encore en équilibre dans la même position $m_1, m_2, \ldots, m_n$, car, dans cette position, les forces $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ coïncident avec $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Donc la fonction U est en général maximum ou minimum pour cette position d'équilibre et, dans tous les cas, sa variation s'annule pour cette position.

Des remarques analogues peuvent être faites au sujet du principe de la moindre action et du principe d'Hamilton, pour un mouvement déterminé du système correspondant à des conditions initiales déterminées. On obtient alors des intégrales définies devenant maxima ou minima pour ce mouvement déterminé.