ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

E. COSSERAT

Sur un théorème de M. Darboux et sur les congruences de droites

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 8, nº 1 (1894), p. B1-B9
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1894_1_8_1_B1_0>

SUR UN

THÉORÈME DE M. DARBOUX

ET SUR

LES CONGRUENCES DE DROITES,

PAR M. E. COSSERAT,

Chargé d'un Cours complémentaire à la Faculté des Sciences de Toulouse.

1. Les systèmes triples orthogonaux pour lesquels les trajectoires orthogonales d'une des familles sont planes ont été considérés d'abord, dans un de ses Mémoires sur les systèmes orthogonaux [1], par M. Darboux, qui s'est attaché particulièrement au cas où les trois familles ont toutes leurs lignes de courbure planes. Ribaucour considéra ensuite le cas où les trajectoires orthogonales sont des cercles et créa la théorie des systèmes cycliques dont le lien, découvert par M. Darboux, avec le problème de la déformation, constitue un des plus beaux théorèmes de la théorie des surfaces. M. Darboux remarqua d'ailleurs [2] que son théorème n'était qu'un cas particulier du suivant :

Pour trouver la congruence la plus générale formée de courbes planes situées dans les plans tangents d'une surface (Σ) *et qui sont les trajectoires orthogonales d'une famille de Lamé* [3], *on prendra l'une quelconque* (Σ') *des surfaces applicables sur* (Σ), *et l'on construira toutes les courbes* (C') *qui sont à l'intersection des plans tangents*

(1) G. Darboux, *Sur les surfaces orthogonales* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1re série, t. III).

(2) M. Darboux a bien voulu me communiquer qu'il avait énoncé, sans démonstration, cette remarque dans une de ses Leçons du premier trimestre de l'année 1891.

(3) Nous employons cette expression pour désigner, ainsi que le font plusieurs géomètres, l'une des familles d'un système triple orthogonal.

de (Σ') *et d'une développable* (Δ) *circonscrite au cercle de l'infini. Si la surface* (Σ') *se déforme en entraînant les courbes* (C′), *de manière à venir coïncider avec la surface proposée* (Σ), *la congruence des courbes* (C′) *se transformera dans la congruence cherchée.*

Il faut ajouter, pour être complet, qu'une partie du théorème précédent a été énoncée, dans les *Comptes rendus* du 14 août 1891, par Ribaucour, qui n'avait pas connaissance des résultats plus complets de M. Darboux et que M. Bianchi [1] a publié un beau Mémoire, daté de novembre 1890, et consacré aux systèmes triples en question.

2. Je me propose d'établir le théorème général de M. Darboux en le rattachant, en somme, à une propriété remarquable des congruences de droites; je commencerai toutefois par indiquer comment on peut le démontrer, *en partie*, en utilisant les propositions connues de la théorie des systèmes cycliques.

Démontrons d'abord que la congruence des courbes (C′) construites, comme il a été indiqué, au moyen d'une développable (Δ) circonscrite au cercle de l'infini, satisfait à la question. Considérons les cercles qui sont à l'intersection des plans tangents de (Σ') et d'une sphère de rayon nul ayant son centre en un point M de l'arête de rebroussement de (Δ); ces cercles sont osculateurs aux courbes (C′) et ils forment, lorsque (Σ') s'applique sur (Σ), un système cyclique; les points où ils sont alors orthogonaux à une même surface étant primitivement sur une génératrice de la sphère de rayon nul considérée, il en résulte que ces cercles sont orthogonaux, en particulier, à la surface lieu des points où ils touchent les courbes (C′) correspondantes. Cela posé, la proposition résulte soit de la réciproque du théorème bien connu de Ribaucour sur les cercles osculateurs aux trajectoires d'une famille de Lamé, soit encore de ce que, lorsque le point M varie, les lignes de courbure des trajectoires des cercles du système cyclique correspondent toujours au réseau conjugué commun à (Σ) et à (Σ') et, par suite, se correspondent entre elles.

Inversement, considérons une congruence de courbes (C′) satisfaisant à

---

[1] L. Bianchi, *Sui sistemi tripli ortogonali che contengono una serie di superficie con un sistema di linee di curvatura piane* (*Annali di Matematica pura ed applicata*, série II, t. XIX).

la question; les cercles osculateurs à ces courbes en tous les points d'une surface qui leur est orthogonale forment, d'après le théorème de Ribaucour déjà cité, un système cyclique; les lignes de courbure des trajectoires des cercles dans ces différents systèmes cycliques devant se correspondre, il en résulte qu'elles correspondent à un même réseau conjugué tracé sur l'enveloppe (Σ) des plans des courbes (C'). Ce réseau conjugué est commun à (Σ) et à une surface (Σ') applicable sur (Σ); si ce réseau conjugué, comme c'est le cas général, ne reste pas conjugué sur une troisième surface applicable sur (Σ), il est clair que le théorème est démontré. Mais il n'en est plus de même si le réseau conjugué considéré reste conjugué sur une troisième surface provenant de la déformation de (Σ) et, par suite, sur une infinité de telles surfaces. Le théorème est encore vrai dans ce cas, ainsi que nous l'établirons plus loin.

3. Rappelons rapidement quelques résultats relatifs aux congruences de courbes planes.

Introduisons le trièdre (T), dépendant de deux paramètres u et v, dont le plan des xy est le plan d'une des courbes planes et dont l'axe des z est la normale à ce plan au point de contact avec son enveloppe (Σ). Adoptons, de plus, les notations des *Leçons* de M. Darboux. Nous définirons la congruence de courbes planes de la façon suivante. Soit, dans le plan des xy,

$$x\cos t + y\sin t - \zeta = 0$$

l'équation d'une droite; si ζ et t sont des fonctions données de u, v et d'un paramètre w, la droite enveloppera, lorsque u et v seront constants, une courbe plane (C'); et u, v variant, les positions de (C') formeront la congruence considérée.

Les coordonnées d'un point de (C') seront définies, en fonction de u, v, w, par les formules

$$x = \zeta\cos t - \frac{\dfrac{\partial\zeta}{\partial w}}{\dfrac{\partial t}{\partial w}}\sin t,$$

$$y = \zeta\sin t + \frac{\dfrac{\partial\zeta}{\partial w}}{\dfrac{\partial t}{\partial w}}\cos t.$$

Posons

$$R = \zeta + \frac{1}{\dfrac{\partial t}{\partial w}} \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\dfrac{\partial \zeta}{\partial w}}{\dfrac{\partial t}{\partial w}}\right).$$

Les coordonnées du centre de courbure de (C') correspondant au point considéré seront

$$x - R\cos t, \qquad y - R\sin t,$$

et l'on aura

$$\frac{\partial x}{\partial w} = -R\frac{\partial t}{\partial w}\sin t,$$

$$\frac{\partial y}{\partial w} = \quad R\frac{\partial t}{\partial w}\cos t.$$

Cela posé, considérons une surface de la congruence; si θ désigne l'un des angles que fait, avec le plan des xy, le plan tangent à cette surface en un point $M(x, y)$ de (C'), l'application des formules (B) de M. Darboux donne immédiatement

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{(py - qx)\,du + (p_1 y - q_1 x)\,dv}{S\,du + S_1\,dv},$$

en posant

$$S = \xi\cos t + \eta\sin t - \left(r + \frac{\partial t}{\partial u}\right)\frac{\dfrac{\partial \zeta}{\partial w}}{\dfrac{\partial t}{\partial w}} + \frac{\partial \zeta}{\partial u},$$

$$S_1 = \xi_1\cos t + \eta_1\sin t - \left(r_1 + \frac{\partial t}{\partial v}\right)\frac{\dfrac{\partial \zeta}{\partial w}}{\dfrac{\partial t}{\partial w}} + \frac{\partial \zeta}{\partial v}.$$

Parmi les surfaces de la congruence passant par une courbe (C'), considérons, avec M. Darboux, celles qui admettent en M pour une de leurs directions principales la tangente MT à la courbe; il est clair qu'elles vérifient l'équation différentielle suivante, où w est supposé remplacé par la valeur qui correspond au point M

$$\frac{\partial \operatorname{tang}\theta}{\partial w} = 0.$$

Si l'on écrit que les deux séries de surfaces, dont on vient de rappeler l'existence, sont toujours rectangulaires, on trouve, comme on sait, la condition pour que les courbes de la congruence admettent des surfaces trajectoires orthogonales.

Cherchons directement cette condition; supposons qu'il existe une surface coupant à angle droit toutes les courbes de la congruence; cette surface s'obtiendra en remplaçant w, dans les valeurs de x et y, par une certaine fonction de u, v qui sera définie, comme on le voit immédiatement, par l'équation aux différentielles totales

$$\mathrm{R}\frac{\partial t}{\partial w}\,dw + \mathrm{M}\,du + \mathrm{M}_1\,dv = 0,$$

où l'on a posé

$$\mathrm{M} = -\left(\xi + \frac{\partial x}{\partial u} - r\,y\right)\sin t + \left(\eta + \frac{\partial y}{\partial u} + r\,x\right)\cos t,$$

$$\mathrm{M}_1 = -\left(\xi_1 + \frac{\partial x}{\partial v} - r_1 y\right)\sin t + \left(\eta_1 + \frac{\partial y}{\partial v} + r_1 x\right)\cos t,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{M} = -\xi\,\sin t + \eta\,\cos t + \frac{\partial}{\partial u}\frac{\dfrac{\partial\zeta}{\partial w}}{\dfrac{\partial t}{\partial w}} + \zeta\left(r + \frac{\partial t}{\partial u}\right),$$

$$\mathrm{M}_1 = -\xi_1\sin t + \eta_1\cos t + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\dfrac{\partial\zeta}{\partial w}}{\dfrac{\partial t}{\partial w}} + \zeta\left(r_1 + \frac{\partial t}{\partial v}\right).$$

Supposons la condition d'intégrabilité vérifiée identiquement; l'intégrale de l'équation aux différentielles totales renfermera un paramètre arbitraire. Nous pouvons effectuer un changement de variable consistant à prendre pour variable, au lieu de w, ce paramètre. Supposons que ce changement de variable ait été effectué tout d'abord, en sorte que w soit précisément le paramètre en question. On aura alors

$$\mathrm{M} = 0, \qquad \mathrm{M}_1 = 0.$$

Ces équations déterminent ζ et t en fonction de u, v, w, de façon à obtenir des courbes planes orthogonales à une famille de surfaces.

4. Ces préliminaires établis, abordons la recherche des courbes planes orthogonales à une famille de Lamé en supposant connue la surface (Σ) enveloppe des plans des courbes planes.

Adoptons pour variables u et v celles qui correspondent aux lignes de courbure de toutes les surfaces trajectoires et pour w la variable dont il vient d'être question. Si l'on introduit les deux séries de surfaces de M. Darboux considérées au numéro précédent ou encore si l'on applique le théorème de Joachimsthal, on trouve immédiatement, dans les deux cas, les équations suivantes du problème

$$\mathrm{M}=0, \qquad \mathrm{M}_1=0,$$

$$\frac{p\dfrac{\partial y}{\partial w}-q\dfrac{\partial x}{\partial w}}{py-qx}-\frac{\dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial w}}{\mathrm{S}}=0,$$

$$\frac{p_1\dfrac{\partial y}{\partial w}-q_1\dfrac{\partial x}{\partial w}}{p_1y-q_1x}-\frac{\dfrac{\partial \mathrm{S}_1}{\partial w}}{\mathrm{S}_1}=0.$$

Les deux dernières peuvent être remplacées, en introduisant deux auxiliaires μ_1 et μ_2, par le système suivant :

$$(1)\qquad \begin{cases} \mu_1(p\sin t-q\cos t)\zeta=-\left(\xi\cos t+\eta\sin t+\dfrac{\partial\zeta}{\partial u}\right), \\ \mu_1(p\cos t+q\sin t)\ \ =r+\dfrac{\partial t}{\partial u}, \\ \mu_2(p_1\sin t-q_1\cos t)\zeta=-\left(\xi_1\cos t+\eta_1\sin t+\dfrac{\partial\zeta}{\partial v}\right), \\ \mu_2(p_1\cos t+q_1\sin t)\ \ =r_1+\dfrac{\partial t}{\partial v}. \end{cases}$$

D'ailleurs, si l'on tient compte des relations obtenues en différentiant ces dernières équations, les équations $\mathrm{M}=0$, $\mathrm{M}_1=0$ se transforment immédiatement dans les suivantes

$$(py-qx)\frac{\partial\mu_1}{\partial w}=0, \qquad (p_1y-q_1x)\frac{\partial\mu_2}{\partial w}=0$$

et, par suite, peuvent être remplacées par

$$\frac{\partial\mu_1}{\partial w}=0, \qquad \frac{\partial\mu_2}{\partial w}=0.$$

Ainsi la question est ramenée à l'intégration du système (1) où μ_1 et μ_2 sont des inconnues auxiliaires ne dépendant que de u et v. C'est de ce résultat que nous allons déduire le théorème de M. Darboux en rattachant l'étude du système (1) à celle des congruences de droites distribuées dans les plans tangents de la surface (Σ).

5. Faisons correspondre, à chaque position du plan des xy du trièdre (T), une droite située dans ce plan et définie par l'équation

$$x\cos t + y\sin t - \zeta = 0.$$

où t et ζ sont des fonctions données de u et v; on engendre ainsi la congruence de droites la plus générale. Supposons que u et v soient les paramètres des développables de la congruence; t et ζ seront alors définis en fonction de u et v par le système (1), où μ_1 et μ_2 sont deux inconnues auxiliaires qui ont une interprétation géométrique simple. Leurs inverses ont pour valeurs $\tang\theta_1$ et $\tang\theta_2$, θ_1 et θ_2 désignant des angles faits respectivement avec le plan des xy par les plans focaux de la congruence.

Si l'on se donne une congruence de droites rapportée à ses développables, il en résultera pour μ_1 et μ_2 des valeurs connues; inversement, cherchons les congruences de droites rapportées à leurs développables qui conduisent à ces valeurs de μ_1 et μ_2.

Introduisons les deux symboles de M. Christoffel :

$$\beta = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \frac{g\dfrac{\partial e}{\partial v} - f\dfrac{\partial g}{\partial u}}{2(eg-f^2)}, \qquad \beta_1 = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} = \frac{e\dfrac{\partial g}{\partial u} - f\dfrac{\partial e}{\partial v}}{2(eg-f^2)},$$

construits avec la forme quadratique différentielle qui est le carré de l'élément linéaire de la représentation sphérique et posons

$$a = -\frac{\cos t}{\zeta}, \qquad b = -\frac{\sin t}{\zeta}.$$

Si l'on égale les deux valeurs de $\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial u\,\partial v}$ déduites du système (1) ainsi que les deux valeurs de $\dfrac{\partial^2 t}{\partial u\,\partial v}$ déduites du même système, il vient les deux équations suivantes :

$$(pb-qa)\left[\frac{\partial\mu_1}{\partial v} + \beta(\mu_1-\mu_2)\right] - (p_1 b - q_1 a)\left[\frac{\partial\mu_2}{\partial u} - \beta_1(\mu_1-\mu_2)\right] - (q\xi_1 - p\eta_1)(\mu_1-\mu_2)(a^2+b^2) = 0,$$

$$(pa+qb)\left[\frac{\partial\mu_1}{\partial v} + \beta(\mu_1-\mu_2)\right] - (p_1 a + q_1 b)\left[\frac{\partial\mu_2}{\partial v} - \beta_1(\mu_1-\mu_2)\right] + (pq_1 - qp_1)(1+\mu_1\mu_2)\sqrt{a^2+b^2} = 0.$$

Ces équations fournissent, en général, pour a et b deux systèmes de valeurs. L'un d'eux est celui d'où l'on est parti; quant à l'autre, il ne satisfera pas, en général, à la question posée.

6. Nous n'insisterons pas, pour le moment, sur les propositions qui se déduisent immédiatement de la considération des deux équations précédentes; le cas où ces équations sont toutes deux identiques correspond à une propriété des congruences de droites qui entraîne comme conséquence le théorème de M. Darboux.

Attachons-nous surtout à la démonstration de ce dernier théorème. Remarquons d'abord qu'elle peut être présentée d'une façon bien simple si l'on a égard uniquement à la proposition directe. Nous pouvons, en effet, poser, *a priori*, en vertu du théorème de Joachimsthal, les équations (1), où μ_1 et μ_2 sont indépendants de w; cela résulte évidemment de ce qui a été dit au numéro précédent. Il en résulte également que, pour obtenir une solution du problème posé, il faut que les équations (2) soient séparément identiques.

Écartons immédiatement le cas où $\mu_1 = \mu_2 = i$; la solution correspondante s'obtient en coupant les plans tangents de (Σ) par une développable circonscrite au cercle de l'infini et rentre d'ailleurs dans le théorème de M. Darboux.

Ce cas écarté, il vient les équations

$$q\xi_1 - p\eta_1 = 0,$$

$$1 + \mu_1\mu_2 = 0,$$

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial v} + \beta(\mu_1 - \mu_2) = 0,$$

$$\frac{\partial \mu_2}{\partial u} - \beta_1(\mu_1 - \mu_2) = 0.$$

La première relation exprime que le réseau (u, v) est conjugué sur (Σ); la seconde permet d'exprimer μ_1 et μ_2 en fonction d'une auxiliaire σ par les formules

$$\mu_1 = \frac{\cos\sigma - 1}{\sin\sigma}, \qquad \mu_2 = \frac{\cos\sigma + 1}{\sin\sigma}.$$

Portant dans les deux dernières, il vient

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \cos\sigma}{\partial u} &= 2\beta_1(\cos\sigma - 1), \\ \frac{\partial \cos\sigma}{\partial v} &= 2\beta\,(\cos\sigma + 1). \end{aligned} \right.$$

Supposons que le réseau (u, v) soit conjugué sur (Σ) et que les deux équations (2) aient une solution commune σ; si l'on pose

$$p' = -i\frac{\cos\sigma - 1}{\sin\sigma}p, \qquad q' = -i\frac{\cos\sigma - 1}{\sin\sigma}q,$$
$$p'_1 = -i\frac{\cos\sigma + 1}{\sin\sigma}p_1, \qquad q'_1 = -i\frac{\cos\sigma + 1}{\sin\sigma}q_1,$$

il existe alors un trièdre mobile (T') dont les translations sont les mêmes que celles de (T) et dont les rotations sont p', q', r, p'_1, q'_1, r_1; l'axe des z de ce trièdre (T') est normal à l'origine à une surface (Σ') applicable sur (Σ). D'ailleurs, les équations (1), qui déterminent ζ et t en fonction de u, v, w, peuvent se mettre sous la forme suivante

$$\begin{aligned} (p'\sin t - q'\cos t)\zeta &= i\left(\xi\cos t + \eta\sin t + \frac{\partial\zeta}{\partial u}\right), \\ p'\cos t + q'\sin t &= -i\left(r + \frac{\partial t}{\partial u}\right), \\ (p'_1\sin t - q'_1\cos t)\zeta &= i\left(\xi_1\cos t + \eta_1\sin t + \frac{\partial\zeta}{\partial v}\right), \\ p'_1\cos t + q'_1\sin t &= -i\left(r_1 + \frac{\partial t}{\partial v}\right), \end{aligned}$$

ce qui met en évidence le théorème de M. Darboux.