P. DUHEM

Sur la propagation des actions électrodynamiques

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 10, nº 1 (1896), p. B1-B87

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1896_1_10_1_B1_0>

SUR LA

PROPAGATION DES ACTIONS ÉLECTRODYNAMIQUES,

PAR P. DUHEM,

Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

INTRODUCTION.

Le présent travail fait suite au troisième Volume de nos *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme* et aux divers Mémoires, relatifs à l'Électrodynamique, que nous avons publiés dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.* Il a pour but, comme les recherches dont nous venons de parler, de relier entre elles, d'une manière entièrement logique, les découvertes les plus récentes faites dans le domaine de l'Électrodynamique, en particulier par Maxwell et par Helmholtz. Ce sont les idées fondamentales de ce dernier physicien que nous suivons, à l'exclusion des doctrines nouvelles introduites depuis quelques années dans l'étude de l'électricité.

Parmi les conséquences du travail que nous publions aujourd'hui, il en est une sur laquelle nous voulons attirer l'attention; elle concerne la théorie électromagnétique de la lumière.

La théorie de la lumière, qui, depuis Young et Fresnel, a possédé la faveur des physiciens, est la théorie qui attribue la lumière aux vibrations transversales d'un corps élastique hypothétique, l'éther. On sait que cette théorie se heurte à des difficultés insurmontables lorsqu'elle se propose de traiter la réflexion et la réfraction de la lumière.

La théorie de l'élasticité permet aisément de traiter le problème de la réflexion et de la réfraction, à la surface plane qui sépare deux milieux, d'une onde incidente plane propageant des vibrations transversales.

Quand les vibrations incidentes sont perpendiculaires au plan d'incidence, le mouvement réfléchi et le mouvement réfracté se composent chacun d'une onde plane unique propageant des vibrations transversales normales au plan d'incidence; les lois des vibrations réfléchies et réfractées s'expriment par des formules semblables à celles que Fresnel a données pour la réflexion et la réfraction de la lumière polarisée perpendiculairement au plan d'incidence.

Mais, lorsque les vibrations incidentes sont dans le plan d'incidence, les lois de l'élasticité montrent que le mouvement réfléchi et le mouvement réfracté ne peuvent plus, en général, être composés de vibrations exclusivement transversales, en sorte que ce cas ne peut s'accorder avec les formules de l'Optique. Ce désaccord suffit, en bonne logique, pour faire rejeter l'assimilation de la lumière aux vibrations transversales d'un solide élastique.

Il était naturel de se demander si la théorie électromagnétique de la lumière se heurtait à des difficultés analogues, ou bien, au contraire, si cette théorie donnait, pour la réflexion et la réfraction d'une onde électromagnétique plane propageant une perturbation transversale, des formules analogues à celles qui régissent la réflexion et la réfraction de la lumière. Si ce dernier cas se réalisait, la théorie électromagnétique de la lumière aurait, sur la théorie élastique, un grand avantage.

Maxwell n'avait pas traité le problème de la réflexion et de la réfraction des ondes électromagnétiques à la surface de séparation de deux milieux. Ce problème a été traité pour la première fois par M. Potier, dans une Note (1) adjointe à la traduction française du *Treatise* de Maxwell.

M. Potier arrivait à cette conclusion que les formules, qui règlent la réflexion et la réfraction des ondes électromagnétiques planes à la surface de séparation de deux diélectriques, coïncidaient avec les formules qui expriment, selon Fresnel, les lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière à la surface de séparation de deux substances transparentes. Les lois de la réflexion d'une onde électromagnétique à la surface d'un conducteur s'exprimaient au moyen des formules de la réflexion métallique indiquées par Cauchy. M. Potier ajoutait : « L'identité des formules déduites de la théorie de Maxwell avec les formules vérifiées par l'expérience, en ce qui concerne les vibrations lumineuses, est un argument de grande importance en faveur de cette théorie. »

La solution, donnée par M. Potier, du problème de la réflexion et de la réfraction des ondes électromagnétiques a été acceptée par la plupart des auteurs. En particulier, elle a été reproduite par M. Volkmann (2).

---

(1) Tome II, p. 507.

(2) Volkmann, *Vorlesungen über die Theorie des Lichtes*, p. 298.

M. Volkmann ajoutait : « Les conditions aux limites de la théorie électromagnétique, à l'instar de celles que fournit la théorie de Mac Cullagh, ont un avantage sur les conditions aux limites acceptées par la théorie vibratoire de la lumière; elles résultent directement de principes mécaniques, sans avoir à faire appel à des conditions accessoires particulières. Nous devons en conclure que la théorie électromagnétique de la lumière l'emporte sur la théorie élastique. »

Mais les conditions aux limites adoptées par M. Potier, par Hertz, par M. Cohn, par M. Volkmann, avaient été établies en s'appuyant sur des propositions douteuses et sujettes à litige de Maxwell, ou de ses continuateurs, tel que M. Poynting; ces conditions étaient donc fort douteuses et il nous a paru nécessaire d'en reprendre la démonstration. Nous avons été ainsi conduit, *toujours dans les idées de Helmholtz,* à remplacer ces conditions par d'autres relations très différentes de forme et dont les conséquences s'écartent beaucoup de celles qu'avait obtenues M. Potier.

D'après ces nouvelles conditions limites, lorsqu'une onde électromagnétique plane, propageant une force électromotrice transversale et perpendiculaire au plan d'incidence, tombe sur la surface plane qui sépare deux milieux diélectriques, il y a une seule onde plane réfléchie et une seule onde plane réfractée; chacune d'elles propage une force électromotrice transversale et perpendiculaire au plan d'incidence; les formules qui lient la force réfléchie et la force réfractée à la force incidente sont identiques aux formules qui, selon Fresnel, lient la vibration réfléchie et la vibration réfractée à la vibration incidente, quand la lumière incidente est polarisée dans le plan d'incidence.

Mais, lorsque l'onde incidente propage une force électromotrice transversale située dans le plan d'incidence, il n'est plus possible d'accorder les conditions aux limites par nous obtenues avec l'existence d'une seule onde réfléchie et d'une seule onde réfractée, propageant toutes deux une force électromotrice transversale.

La théorie électromagnétique de la lumière se heurte donc à des contradictions tout à fait analogues à celles que rencontre la théorie élastique; l'une comme l'autre est logiquement inacceptable; l'une comme l'autre doit être reléguée au nombre de ces hypothèses chimériques qui ont sollicité les efforts des chercheurs et grandement contribué au progrès de la Physique, mais que la Physique rejette lorsqu'elle a cessé de s'en servir.

CHAPITRE I.

PRÉLIMINAIRES.

I. — *Variables qui représentent l'état électrique et magnétique d'un système.*

Si un corps est électrisé, chaque élément de volume $d\varpi$, tracé en une région où la constitution de ce corps varie d'une manière continue, renferme une quantité d'électricité $e\,d\varpi$; chaque élément d'aire dS, tracé sur la surface qui limite ce corps, ou bien sur une surface de discontinuité qui le divise, renferme une quantité d'électricité $E\,dS$; e est la *densité électrique solide* en un point de l'élément $d\varpi$; E est la *densité électrique superficielle* en un point de l'élément dS.

Si un corps diélectrique est polarisé, l'*intensité de la polarisation,* en un point de ce diélectrique, sera représentée par $\mathcal{M}$; les *composantes de la polarisation* seront représentées par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$.

Si un corps est aimanté, l'*intensité d'aimantation,* en un point de ce corps, sera représentée par μ; les *composantes de l'aimantation* seront représentées par α, β, γ.

Si un corps est traversé par des courants de conduction, les *composantes du flux de conduction,* en un point de ce corps, seront représentées par u, v, w.

Ces variables ne sont pas entièrement indépendantes des variables e et E.

En un point au voisinage duquel la constitution du conducteur varie d'une manière continue, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial e}{\partial t}=0. \tag{1}$$

Supposons qu'une surface S sépare deux parties 1 et 2 du conducteur, ces deux parties ayant des natures différentes. Soit M un point de la surface S. Soient n_1, n_2 les deux demi-normales menées, en ce point, à la surface S, l'une vers l'intérieur du corps 1, l'autre vers l'intérieur du corps 2. On a

$$(2)\qquad \begin{aligned} & u_1 \cos(n_1, x) + v_1 \cos(n_1, y) + w_1 \cos(n_1, z) \\ & + u_2 \cos(n_2, x) + v_2 \cos(n_2, y) + w_2 \cos(n_2, z) + \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} = 0. \end{aligned}$$

Si un diélectrique est le siège de flux de déplacement, les *composantes,* en un point, *du flux de déplacement* seront représentées par φ, ψ, χ. On a, par définition,

$$(3)\qquad \varphi = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}, \qquad \psi = \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}, \qquad \chi = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t}.$$

II. — *Fonctions potentielles.*

L'étude des actions exercées par l'électricité conduit à étudier la *fonction potentielle électrostatique*

$$(4)\qquad \mathrm{V}(\xi, \eta, \zeta) = \int \frac{e}{r}\, d\varpi + \int \frac{\mathrm{E}}{r}\, d\mathrm{S},$$

où r est la distance, soit de l'élément $d\varpi$, soit de l'élément $d\mathrm{S}$, au point (ξ, η, ζ);

Où la première intégrale s'étend à tous les éléments de volume du système;

Où la seconde intégrale s'étend à tous les éléments des surfaces de discontinuité que le système renferme.

La *fonction potentielle diélectrique* est la fonction

$$(5)\qquad \mathfrak{V}(\xi, \eta, \zeta) = \int \left(\mathcal{A} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mathcal{B} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \mathcal{C} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\varpi,$$

x, y, z étant les coordonnées d'un point de l'élément de volume $d\varpi$, et l'intégration s'étendant à tous les éléments de volume du système.

La *fonction potentielle magnétique* est la fonction

$$(6)\qquad \mathcal{S}(\xi, \eta, \zeta) = \int \left(\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\varpi.$$

L'étude des actions exercées par les courants de conduction conduit à envisager les fonctions

$$
(7)\quad \begin{cases}
\mathfrak{U}(\xi,\eta,\zeta)=\int\left[\frac{1+\lambda}{2}\frac{u}{r}+\frac{1-\lambda}{2}\frac{\xi-x}{r^2}\left(\frac{\xi-x}{r}u+\frac{\eta-y}{r}v+\frac{\zeta-z}{r}w\right)\right]d\varpi,\\
\mathfrak{V}(\xi,\eta,\zeta)=\int\left[\frac{1+\lambda}{2}\frac{v}{r}+\frac{1-\lambda}{2}\frac{\eta-y}{r^2}\left(\frac{\xi-x}{r}u+\frac{\eta-y}{r}v+\frac{\zeta-z}{r}w\right)\right]d\varpi,\\
\mathfrak{W}(\xi,\eta,\zeta)=\int\left[\frac{1+\lambda}{2}\frac{w}{r}+\frac{1-\lambda}{2}\frac{\zeta-z}{r^2}\left(\frac{\xi-x}{r}u+\frac{\eta-y}{r}v+\frac{\zeta-z}{r}w\right)\right]d\varpi.
\end{cases}
$$

L'étude des actions exercées par les courants de déplacement conduit de même à envisager les fonctions

$$
(8)\quad \begin{cases}
\mathfrak{F}(\xi,\eta,\zeta)=\int\left[\frac{1+\lambda}{2}\frac{\varphi}{r}+\frac{1-\lambda}{2}\frac{\xi-x}{r^2}\left(\frac{\xi-x}{r}\varphi+\frac{\eta-y}{r}\psi+\frac{\zeta-z}{r}\chi\right)\right]d\varpi,\\
\mathfrak{G}(\xi,\eta,\zeta)=\int\left[\frac{1+\lambda}{2}\frac{\psi}{r}+\frac{1-\lambda}{2}\frac{\eta-y}{r^2}\left(\frac{\xi-x}{r}\varphi+\frac{\eta-y}{r}\psi+\frac{\zeta-z}{r}\chi\right)\right]d\varpi,\\
\mathfrak{H}(\xi,\eta,\zeta)=\int\left[\frac{1+\lambda}{2}\frac{\chi}{r}+\frac{1-\lambda}{2}\frac{\zeta-z}{r^2}\left(\frac{\xi-x}{r}\varphi+\frac{\eta-y}{r}\psi+\frac{\zeta-z}{r}\chi\right)\right]d\varpi.
\end{cases}
$$

Dans ces formules, λ est une constante numérique que nous nommerons la *constante de Helmholtz*.

Les actions exercées par les aimants, soit sur les courants de conduction, soit sur les courants de déplacement, introduisent les fonctions

$$
(9)\quad \begin{cases}
\Phi(\xi,\eta,\zeta)=\int\left(\gamma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}-\beta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\varpi,\\
\Psi(\xi,\eta,\zeta)=\int\left(\alpha\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}-\gamma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)d\varpi,\\
X(\xi,\eta,\zeta)=\int\left(\beta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}-\alpha\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right)d\varpi.
\end{cases}
$$

Les actions exercées par les courants de conduction sur les aimants conduisent à considérer les fonctions

$$
(10)\quad \begin{cases}
P(\xi,\eta,\zeta)=\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial\eta}-\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\zeta},\\
Q(\xi,\eta,\zeta)=\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial\zeta}-\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial\xi},\\
R(\xi,\eta,\zeta)=\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\xi}-\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial\eta},
\end{cases}
$$

qui peuvent s'écrire plus explicitement

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} P(\xi,\eta,\zeta) &= -\int\left(w\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} - v\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\varpi,\\ Q(\xi,\eta,\zeta) &= -\int\left(u\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} - w\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)d\varpi,\\ R(\xi,\eta,\zeta) &= -\int\left(v\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} - u\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right)d\varpi. \end{aligned}\right.$$

Les actions exercées par les courants de déplacement sur les aimants conduisent à considérer les fonctions

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} p(\xi,\eta,\zeta) &= \frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\eta} - \frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial\zeta},\\ q(\xi,\eta,\zeta) &= \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\zeta} - \frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\xi},\\ r(\xi,\eta,\zeta) &= \frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial\xi} - \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\eta}, \end{aligned}\right.$$

qui peuvent s'écrire, plus explicitement, de la manière suivante :

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} p(\xi,\eta,\zeta) &= -\int\left(\chi\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} - \psi\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\varpi,\\ q(\xi,\eta,\zeta) &= -\int\left(\varphi\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} - \chi\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)d\varpi,\\ r(\xi,\eta,\zeta) &= -\int\left(\psi\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} - \varphi\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right)d\varpi. \end{aligned}\right.$$

III. — *Propriétés des fonctions potentielles en un point au voisinage duquel l'état du système varie d'une manière continue.*

Dorénavant, nous désignerons non plus par (ξ, η, ζ), mais par (x, y, z), le point auquel se rapportent nos fonctions potentielles. En outre, nous désignerons, suivant l'usage, par le symbole Δ, l'opération

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

On sait que l'on a

$$\Delta V = -4\pi e, \tag{14}$$

$$\Delta \mathfrak{v} = 4\pi\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z}\right), \tag{15}$$

$$\Delta \mathcal{S} = 4\pi\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right). \tag{16}$$

A ces relations, connues depuis Poisson, on peut joindre les suivantes, qui sont dues à Helmholtz :

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta \mathcal{U} - (1-\lambda)\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial t} = -4\pi u, \\ &\Delta \mathcal{V} - (1-\lambda)\frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial t} = -4\pi v, \\ &\Delta \mathcal{W} - (1-\lambda)\frac{\partial^2 V}{\partial z\, \partial t} = -4\pi w, \end{aligned}\right. \tag{17}$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z} + \lambda\frac{\partial V}{\partial t} = 0. \tag{18}$$

On a, de même :

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta \mathcal{F} - (1-\lambda)\frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial x\, \partial t} = -4\pi \varphi, \\ &\Delta \mathcal{G} - (1-\lambda)\frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial y\, \partial t} = -4\pi \psi, \\ &\Delta \mathcal{H} - (1-\lambda)\frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial z\, \partial t} = -4\pi \chi. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} + \lambda\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} = 0. \tag{20}$$

Les fonctions Φ, Ψ, X vérifient les équations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta \Phi = 4\pi\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\right), \\ &\Delta \Psi = 4\pi\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}\right), \\ &\Delta X = 4\pi\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right). \end{aligned}\right. \tag{21}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} = 0. \tag{22}$$

Les fonctions P, Q, R vérifient les équations suivantes :

$$(23)\qquad \begin{cases} \Delta P = -4\pi\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}\right), \\ \Delta Q = -4\pi\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\right), \\ \Delta R = -4\pi\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right). \end{cases}$$

$$(24)\qquad \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

Les fonctions p, q, r vérifient les équations suivantes :

$$(25)\qquad \begin{cases} \Delta p = -4\pi\left(\dfrac{\partial \chi}{\partial y} - \dfrac{\partial \psi}{\partial z}\right), \\ \Delta q = -4\pi\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} - \dfrac{\partial \chi}{\partial x}\right), \\ \Delta r = -4\pi\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial x} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right). \end{cases}$$

$$(26)\qquad \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0.$$

IV. — *Propriétés des fonctions potentielles en un point de la surface de contact de deux corps différents.*

Soient :

1 et 2 les deux corps en contact le long de la surface S;
M un point de la surface S;
n_1, n_2 les deux demi-normales menées, par ce point, à la surface S et dirigées respectivement vers l'intérieur du corps 1 et vers l'intérieur du corps 2;
T une demi-tangente menée par le point M à la surface S.

Si une fonction $f(x, y, z)$, ayant, pour les deux corps 1 et 2, la même signification *physique*, a, en ces deux corps, des expressions *analytiques* différentes, nous désignerons ces deux expressions par $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$.

Cela posé, nous aurons, en tout point de la surface S,

$$V_1 = V_2, \tag{27}$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial n_1} + \frac{\partial V_2}{\partial n_2} = -4\pi E. \tag{28}$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial T} = \frac{\partial V_2}{\partial T}. \tag{29}$$

Nous aurons aussi

$$\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v}_2. \tag{30}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathfrak{v}_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \mathfrak{v}_2}{\partial n_2} = 4\pi[& \mathcal{A}_1 \cos(n_1, x) + \mathcal{B}_1 \cos(n_1, y) + \mathcal{C}_1 \cos(n_1, z) \\ & + \mathcal{A}_2 \cos(n_2, x) + \mathcal{B}_2 \cos(n_2, y) + \mathcal{C}_2 \cos(n_2, z)],\end{aligned} \tag{31}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{v}_1}{\partial T} = \frac{\partial \mathfrak{v}_2}{\partial T} \tag{32}$$

et, de même,

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2, \tag{33}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial n_2} = 4\pi[& \alpha_1 \cos(n_1, x) + \beta_1 \cos(n_1, y) + \gamma_1 \cos(n_1, z) \\ & + \alpha_2 \cos(n_2, x) + \beta_2 \cos(n_2, y) + \gamma_2 \cos(n_2, z)],\end{aligned} \tag{34}$$

$$\frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial T} = \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial T}. \tag{35}$$

Les fonctions $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ vérifient les égalités suivantes :

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2, \qquad \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2, \qquad \mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_2, \tag{36}$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial n_2} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial n_2} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial n_2} = 0, \tag{37}$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial T} = \frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial T}, \qquad \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial T} = \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial T}, \qquad \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial T} = \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial T}. \tag{38}$$

Les fonctions $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ vérifient les égalités suivantes :

$$\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2, \qquad \mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_2, \qquad \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2, \tag{39}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial n_2} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{G}_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \mathfrak{G}_2}{\partial n_2} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{H}_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \mathfrak{H}_2}{\partial n_2} = 0, \tag{40}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial T} = \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial T}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{G}_1}{\partial T} = \frac{\partial \mathfrak{G}_2}{\partial T}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{H}_1}{\partial T} = \frac{\partial \mathfrak{H}_2}{\partial T} \tag{41}$$

Les fonctions Φ, Ψ, X vérifient les égalités suivantes :

$$\Phi_1 = \Phi_2, \qquad \Psi_1 = \Psi_2, \qquad X_1 = X_2, \tag{42}$$

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial n_2} &= 4\pi[\gamma_1 \cos(n_1, y) - \beta_1 \cos(n_1, z) + \gamma_2 \cos(n_2, y) - \beta_2 \cos(n_2, z)],\\
\frac{\partial \Psi_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial n_2} &= 4\pi[\alpha_1 \cos(n_1, z) - \gamma_1 \cos(n_1, x) + \alpha_2 \cos(n_2, z) - \gamma_2 \cos(n_2, x)],\\
\frac{\partial X_1}{\partial n_1} + \frac{\partial X_2}{\partial n_2} &= 4\pi[\beta_1 \cos(n_1, x) - \alpha_1 \cos(n_1, y) + \beta_2 \cos(n_2, x) - \alpha_2 \cos(n_2, y)].
\end{aligned}\right. \tag{43}$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial T} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial T}, \qquad \frac{\partial \Psi_1}{\partial T} = \frac{\partial \Psi_2}{\partial T}, \qquad \frac{\partial X_1}{\partial T} = \frac{\partial X_2}{\partial T}. \tag{44}$$

Les fonctions P, Q, R vérifient les égalités suivantes :

$$P_1 = P_2, \qquad Q_1 = Q_2, \qquad R_1 = R_2. \tag{45}$$

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial P_1}{\partial n_1} + \frac{\partial P_2}{\partial n_2} &= -4\pi[w_1 \cos(n_1, y) - v_1 \cos(n_1, z) + w_2 \cos(n_2, y) - v_2 \cos(n_2, z)],\\
\frac{\partial Q_1}{\partial n_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial n_2} &= -4\pi[u_1 \cos(n_1, z) - w_1 \cos(n_1, x) + u_2 \cos(n_2, z) - w_2 \cos(n_2, x)],\\
\frac{\partial R_1}{\partial n_1} + \frac{\partial R_2}{\partial n_2} &= -4\pi[v_1 \cos(n_1, x) - u_1 \cos(n_1, y) + v_2 \cos(n_2, x) - u_2 \cos(n_2, y)],
\end{aligned}\right. \tag{46}$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial T} = \frac{\partial P_2}{\partial T}, \qquad \frac{\partial Q_1}{\partial T} = \frac{\partial Q_2}{\partial T}, \qquad \frac{\partial R_1}{\partial T} = \frac{\partial R_2}{\partial T}. \tag{47}$$

Enfin, les fonctions p, q, r vérifient les égalités suivantes :

$$p_1 = p_2, \qquad q_1 = q_2, \qquad r_1 = r_2, \tag{48}$$

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial p_1}{\partial n_1} + \frac{\partial p_2}{\partial n_2} &= -4\pi[\chi_1 \cos(n_1, y) - \psi_1 \cos(n_1, z) + \chi_2 \cos(n_2, y) - \psi_2 \cos(n_2, z)],\\
\frac{\partial q_1}{\partial n_1} + \frac{\partial q_2}{\partial n_2} &= -4\pi[\varphi_1 \cos(n_1, z) - \chi_1 \cos(n_1, x) + \varphi_2 \cos(n_2, z) - \chi_2 \cos(n_2, x)],\\
\frac{\partial r_1}{\partial n_1} + \frac{\partial r_2}{\partial n_2} &= -4\pi[\psi_1 \cos(n_1, x) - \varphi_1 \cos(n_1, y) + \psi_2 \cos(n_2, x) - \varphi_2 \cos(n_2, y)],
\end{aligned}\right. \tag{49}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial T} = \frac{\partial p_2}{\partial T}, \qquad \frac{\partial q_1}{\partial T} = \frac{\partial q_2}{\partial T}, \qquad \frac{\partial r_1}{\partial T} = \frac{\partial r_2}{\partial T}. \tag{50}$$

V. — *Constantes fondamentales.*

La constante fondamentale des actions électrostatiques sera désignée par ε. La constante fondamentale des actions électrodynamiques s'exerçant *entre courants de conduction* sera désignée par $\frac{\mathfrak{A}^2}{2}$. La constante fondamentale des actions électrodynamiques s'exerçant *entre courants de déplacement* sera désignée par $\frac{\mathfrak{C}^2}{2}$.

En général, avec Maxwell, on suppose que ces deux constantes sont identiques :

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C}. \tag{51}$$

Nous avons montré ailleurs (¹) que *cette égalité était inadmissible.*

VI. — *Diverses combinaisons linéaires des fonctions précédentes.*

Nous rencontrerons souvent les combinaisons linéaires suivantes des variables $u, v, w, \varphi, \psi, \chi$:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{u} &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} u + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \varphi, \\ \mathfrak{v} &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} v + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \psi, \\ \mathfrak{w} &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} w + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \chi. \end{aligned}\right. \tag{52}$$

Dans l'hypothèse inadmissible exprimée par l'égalité (51), les quantités $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ se réduisent aux produits, par $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}$, des quantités $(u + \varphi)$, $(v + \psi)$, $(w + \chi)$ que Maxwell nomme *composantes du flux total.*

Nous poserons de même

$$\mathfrak{U} = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathrm{V} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \mathfrak{V}. \tag{53}$$

(¹) *Quelques remarques au sujet de l'électrodynamique des corps diélectriques proposée par* J. Clerk Maxwell. (*Comptes rendus du troisième Congrès scientifique international des Catholiques,* séance du 5 septembre 1894.)

Dans l'hypothèse inadmissible exprimée par l'égalité (51), la quantité $\mathfrak{U}$ se réduit au produit, par $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}$, de la fonction potentielle électrostatique totale $(V + \mathfrak{V})$.

Nous rencontrerons souvent, dans ce qui va suivre, les combinaisons suivantes :

$$(54)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{X} &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{U} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{F} + \Phi,\\ \mathfrak{Y} &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{V} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{G} + \Psi,\\ \mathfrak{Z} &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{W} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{H} + X.\end{aligned}\right.$$

$$(55)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{L} &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,P + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,p,\\ \mathfrak{M} &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,Q + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,q,\\ \mathfrak{N} &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,R + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,r.\end{aligned}\right.$$

En vertu des égalités (10), (12) et (54), on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} - \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial z},\\ \mathfrak{M} &= \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial x},\\ \mathfrak{N} &= \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}.\end{aligned}$$

D'autre part, en comparant les égalités (6) et (9), on trouve sans peine

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} &= \Delta \int \frac{\alpha}{r}\,d\varpi + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x},\\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial X}{\partial x} &= \Delta \int \frac{\beta}{r}\,d\varpi + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y},\\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \Delta \int \frac{\gamma}{r}\,d\varpi + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial z}.\end{aligned}$$

Si l'on observe que l'on a

$$\Delta \int \frac{\alpha}{r} d\varpi + 4\pi\alpha = 0,$$

$$\Delta \int \frac{\beta}{r} d\varpi + 4\pi\beta = 0,$$

$$\Delta \int \frac{\gamma}{r} d\varpi + 4\pi\gamma = 0,$$

on obtient les égalités

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{L} &= \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x} + 4\pi\alpha, \\ \mathfrak{M} &= \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y} + 4\pi\beta, \\ \mathfrak{N} &= \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial z} + 4\pi\gamma, \end{aligned} \right.$$

qui sont d'un fréquent usage.

VII. — *Des systèmes dont les propriétés ne dépendent pas de la valeur attribuée à la constante* λ.

La constante λ figure dans les six fonctions

$$\mathcal{U}, \quad \mathcal{V}, \quad \mathcal{W}, \quad \mathcal{F}, \quad \mathcal{G}, \quad \mathcal{H}.$$

Mais ces fonctions ne s'introduisent, dans les équations de l'Électrodynamique, que par les combinaisons :

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathcal{U} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \mathcal{F},$$

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathcal{V} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \mathcal{G},$$

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathcal{W} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \mathcal{H}.$$

Dès lors, pour que les propriétés du système soient indépendantes de la valeur attribuée à la constante λ, il faut et il suffit que ces trois combinaisons soient indépendantes de λ. Pour cela, *il est nécessaire et suffisan* *que l'on ait, en tout point du système,*

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} = 0. \tag{58}$$

Cette condition équivaut aux suivantes :

On a, en tout point autour duquel la constitution du système est continue,

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} = 0, \tag{59}$$

et, en tout point appartenant à une surface de discontinuité,

$$\begin{aligned} &\mathfrak{u}_1 \cos(n_1, x) + \mathfrak{v}_1 \cos(n_1, y) + \mathfrak{w}_1 \cos(n_1, z) \\ &+ \mathfrak{u}_2 \cos(n_2, x) + \mathfrak{v}_2 \cos(n_2, y) + \mathfrak{w}_2 \cos(n_2, z) = 0, \end{aligned} \tag{60}$$

Nous donnerons à des courants qui vérifient ces conditions (59) et (60), le nom de *courants de Maxwell;* c'est, en effet, à ces courants que l'on doit restreindre la plupart des propositions énoncées par Maxwell et ses disciples.

VIII. — *Potentiels.*

Le *potentiel électrostatique* de l'électrisation et de la polarisation répandues sur le système a pour valeur

$$\begin{aligned} W = {} & \frac{\varepsilon}{2}\int \mathrm{V} e\, d\varpi + \frac{\varepsilon}{2}\int \mathrm{V}\mathrm{E}\, d\mathrm{S} \\ & + \varepsilon \int \mathfrak{V} e\, d\varpi + \varepsilon \int \mathfrak{V} \mathrm{E}\, d\mathrm{S} \\ & + \frac{\varepsilon}{2}\int \left(\mathcal{A} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + \mathcal{B} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \mathcal{C} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} \right) d\varpi. \end{aligned} \tag{61}$$

Certaines intégrales s'étendent à tous les éléments de volume $d\varpi$ du système, certaines autres à tous les éléments $d\mathrm{S}$ des surfaces de discontinuité.

L'expression de ce potentiel peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} W = {} & \frac{\varepsilon}{2}\int \mathrm{V} e\, d\varpi + \frac{\varepsilon}{2}\int \mathrm{V}\mathrm{E}\, d\mathrm{S} \\ & + \varepsilon \int \left(\mathcal{A} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} + \mathcal{B} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} + \mathcal{C} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} \right) d\varpi, \\ & + \frac{\varepsilon}{2}\int \left(\mathcal{A} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + \mathcal{B} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \mathcal{C} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} \right) d\varpi. \end{aligned} \tag{62}$$

C'est un théorème bien connu que *cette quantité* W *est essentiellement positive*, sauf dans le cas où le système n'est ni électrisé, ni polarisé; elle est alors égale à o.

On sait également que l'on a, pour un système immobile quelconque,

$$\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t} = \varepsilon \int \Big[\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{v})}{\partial x}(u+\varphi) + \frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{v})}{\partial y}(v+\psi) + \frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{v})}{\partial z}(w+\chi)\Big] d\varpi. \tag{63}$$

Le *potentiel magnétique du système* a pour expression

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\int\left(\alpha\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x} + \beta\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y} + \gamma\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial z}\right) d\varpi. \tag{64}$$

On sait que *cette quantité est essentiellement positive*, à moins que le système ne porte aucune aimantation, cas auquel elle est égale à o. On sait aussi que l'on a, pour un système immobile :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \int\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y}\frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial z}\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right) d\varpi. \tag{65}$$

Le *potentiel électrodynamique*, tant des flux de conduction que des flux de déplacement répartis sur le système, a pour valeur

$$\begin{aligned} \Pi = &-\frac{\mathfrak{A}^2}{4}\int(\mathfrak{U}u + \mathfrak{V}v + \mathfrak{W}w)\,d\varpi, \\ &-\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{2}\int(\mathfrak{U}\varphi + \mathfrak{V}\psi + \mathfrak{W}\chi)\,d\varpi, \\ &-\frac{\mathfrak{C}^2}{4}\int(\mathfrak{F}\varphi + \mathfrak{G}\psi + \mathfrak{H}\chi)\,d\varpi. \end{aligned} \tag{66}$$

Ce potentiel peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} \Pi = &-\frac{\mathfrak{A}^2}{4}\int(\mathfrak{U}u + \mathfrak{V}v + \mathfrak{W}w)\,d\varpi, \\ &-\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{2}\int(\mathfrak{F}u + \mathfrak{G}v + \mathfrak{H}w)\,d\varpi, \\ &-\frac{\mathfrak{C}^2}{4}\int(\mathfrak{F}\varphi + \mathfrak{G}\psi + \mathfrak{H}\chi)\,d\varpi. \end{aligned} \tag{67}$$

Helmholtz a montré que l'on pouvait écrire

$$(68)\quad \begin{aligned} 4\pi\mathrm{\Pi} = &- \int\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{W} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\mathfrak{H}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{V} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\mathfrak{G}\right)\right]^2 d\varpi \\ &- \int\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{U} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\mathfrak{F}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{W} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\mathfrak{H}\right)\right]^2 d\varpi \\ &- \int\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{V} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\mathfrak{G}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{U} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\mathfrak{F}\right)\right]^2 d\varpi \\ &- \frac{1}{\lambda}\int\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{U} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\mathfrak{F}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{V} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\mathfrak{G}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{W} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\mathfrak{H}\right)\right]^2 d\varpi. \end{aligned}$$

Cette égalité montre que *si la constante* λ *est positive ou nulle, la quantité* $\mathrm{\Pi}$ *est essentiellement négative, à moins que le système ne soit le siège d'aucun courant, ni de conduction, ni de déplacement.*

On démontre sans peine que l'on a, pour un système immobile :

$$(69)\quad \begin{aligned} \frac{\partial\mathrm{\Pi}}{\partial t} = &- \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t}u + \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial t}v + \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial t}w\right)d\varpi \\ &- \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{2}\int\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial t}u + \frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial t}v + \frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}w\right)\right. \\ &\qquad\left. + \left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t}\varphi + \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial t}\psi + \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial t}\chi\right)d\varpi\right] \\ &- \frac{\mathfrak{C}^2}{2}\int\left(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial t}\varphi + \frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial t}\psi + \frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}\chi\right)d\varpi. \end{aligned}$$

Le *potentiel électromagnétique* du système a pour expression

$$(70)\quad \begin{aligned} \mathfrak{P} = - \int\Big[&\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}u + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\varphi\right)\Phi \\ &+ \left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}v + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\psi\right)\Psi \\ &+ \left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}w + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\chi\right)\mathrm{X}\Big]d\varpi. \end{aligned}$$

On peut encore le mettre sous la forme

$$(71)\quad \mathfrak{P} = \int(\mathfrak{L}\alpha + \mathfrak{M}\beta + \mathfrak{N}\gamma)\,d\varpi.$$

IX. — *Lois des courants de conduction.*

Soit ρ la résistance spécifique d'un conducteur en un point (x, y, z). Soient θ, η, ζ les composantes, au même point, de la force électromotrice indépendante de la distribution électrique sur le système, des courants qui le traversent, de l'aimantation qu'il porte. Si le système est immobile, nous aurons

$$(72)\quad \left\{\begin{aligned} \rho u &= -\varepsilon\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{v})}{\partial x} - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + \theta, \\ \rho v &= -\varepsilon\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{v})}{\partial y} - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} + \eta, \\ \rho w &= -\varepsilon\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{v})}{\partial z} - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} + \zeta, \end{aligned}\right.$$

X. — *Lois de la polarisation diélectrique.*

Nous supposerons que la *fonction de polarisation* $\mathrm{F}(\mathfrak{M})$ soit indépendante de l'intensité de polarisation $\mathfrak{M}$ et se réduise à une simple constante F. Nous aurons, en un système immobile,

$$(73)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{A} &= -\mathrm{F}\left[\varepsilon\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{v})}{\partial x} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}\right], \\ \mathcal{B} &= -\mathrm{F}\left[\varepsilon\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{v})}{\partial y} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}\right], \\ \mathcal{C} &= -\mathrm{F}\left[\varepsilon\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{v})}{\partial z} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\mathfrak{Z}}{\partial t}\right]. \end{aligned}\right.$$

On en déduit les valeurs suivantes pour les composantes du flux de déplacement, en vertu des égalités (3),

$$(74)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi &= -\mathrm{F}\frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{v})}{\partial x} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}\right], \\ \psi &= -\mathrm{F}\frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{v})}{\partial y} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}\right], \\ \chi &= -\mathrm{F}\frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{v})}{\partial z} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}\right]. \end{aligned}\right.$$

XI. — *Lois de l'aimantation.*

Nous supposerons que la *fonction magnétisante* $f(\mu)$ soit indépendante de l'intensité d'aimantation μ et se réduise à une simple constante f. Nous aurons alors, en tout point d'un système immobile,

$$(75)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= -f\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + \mathfrak{L}\right), \\ \beta &= -f\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \mathfrak{M}\right), \\ \gamma &= -f\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} + \mathfrak{N}\right). \end{aligned}\right.$$

En vertu des égalités (56), ces équations (55) peuvent encore s'écrire

$$(76)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= -\frac{f}{1+4\pi f}\left(\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z}\right), \\ \beta &= -\frac{f}{1+4\pi f}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x}\right), \\ \gamma &= -\frac{f}{1+4\pi f}\left(\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{X}}{dy}\right). \end{aligned}\right.$$

XII. — *Sur la valeur de λ dans les recherches de Maxwell.*

Maxwell, dans ses divers Mémoires, ne donne jamais l'expression analytique explicite des composantes de la force électromotrice d'induction, qu'il représente, en général, par $-\frac{dF}{dt}$, $-\frac{dG}{dt}$, $-\frac{dH}{dt}$. Il assujettit seulement ces composantes à redonner le résultat connu des physiciens lorsqu'on en fait usage pour calculer la force électromotrice totale le long d'un circuit fermé. Il est bien évident que cette condition ne suffit pas à déterminer la forme des composantes de la force électromotrice; que si P, Q, R est une détermination acceptable de ces composantes, on aura une nouvelle détermination également acceptable en prenant le groupe de valeurs

$$P - \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \qquad Q - \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \qquad R - \frac{\partial \Psi}{\partial z},$$

Ψ étant une fonction finie, uniforme et continue, *mais d'ailleurs quelconque,* des coordonnées x, y, z.

Comment Maxwell a-t-il cru que l'indétermination de la fonction Ψ n'était qu'apparente et que cette fonction n'était autre chose que la fonction potentielle électrostatique? Il est difficile de l'expliquer, car il s'est toujours borné à affirmer cette identité sans essayer de l'établir (¹). Il a, du reste, reproduit à plusieurs reprises cette affirmation, comme en témoignent les passages suivants :

« Ψ, dit-il dans son Mémoire : *On physical lines of forces* (²), est une fonction de x, y, z et t qui est indéterminée en ce qui concerne la solution de la question originelle, mais qui, d'ailleurs, serait déterminée, dans un cas donné, par les circonstances du problème. L'interprétation de Ψ est que c'est la *tension électrique* en chaque point de l'espace. »

Dans son Mémoire : *A dynamical theory of the electromagnetic field*, il écrit ces lignes :

« Ψ étant une fonction de x, y, z, t, qui est indéterminée en ce qui regarde la solution des équations précédentes, car les termes qui en dépendent disparaissent dans l'intégration le long d'un circuit. Néanmoins, la quantité Ψ peut être déterminée dans tous les cas particuliers où nous connaissons les conditions spéciales de la question. L'interprétation physique de Ψ est qu'il représente le *potentiel électrique* en chaque point de l'espace. »

Puis, deux pages plus loin, il ajoute :

« Le dernier terme représente l'effet du potentiel électrique Ψ. Celui-ci n'a pas d'effet lorsqu'il s'agit de produire un courant circulant dans un circuit fermé. Il indique l'existence de forces qui sollicitent l'électricité de ou vers certains points du champ. »

Enfin, dans son *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, Maxwell écrit (³) :

« Les termes qui comprennent la nouvelle quantité Ψ ont été introduits pour donner de la généralité aux expressions P, Q, R. Ils disparaissent quand l'intégrale est prise tout le long d'un circuit fermé. La quantité Ψ est donc indéterminée, du moins en ce qui concerne le problème actuel, où nous nous proposons d'obtenir la force électromotrice totale qui agit le long

(¹) MAXWELL, *Scientifics papers*, t. I, p. 482.
(²) *Ibid.*, t. I, p. 558.
(³) Traduction française, t. II, p. 274.

du circuit. Mais nous verrons que, quand on connaît toutes les conditions du problème, on peut assigner à Ψ une valeur déterminée qui est le potentiel électrique au point (x, y, z). »

L'indétermination signalée par Maxwell est réelle et ne saurait se lever comme il l'a affirmé sans démonstration. Les lois relatives aux courants uniformes qui parcourent un circuit fermé laissent les composantes de la force électromotrice d'induction dépendre d'une fonction entièrement arbitraire $\Psi(x, y, z)$. Les hypothèses sur lesquelles nous avons fait reposer l'établissement des formules de Helmholtz réduisent cette indétermination à celle de la constante λ, mais cette dernière indétermination reste entière. Si l'on veut n'avoir pas à se préoccuper de cette indétermination, on doit se borner à l'étude des cas où les formules de l'Électrodynamique deviennent indépendantes de la valeur attribuée à la constante λ. Ces cas sont définis au § VII.

CHAPITRE II.

LES DEUX TRIPLETS DE MAXWELL.

I. — *Le premier triplet.*

Les équations (76) peuvent se mettre sous plusieurs autres formes. Posons

$$(77)\quad \left\{\begin{aligned} X &= -\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial(V+\mathfrak{v})}{\partial x}, \\ Y &= -\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial(V+\mathfrak{v})}{\partial y}, \\ Z &= -\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial(V+\mathfrak{v})}{\partial z}, \end{aligned}\right.$$

$$(78)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{X} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial(V+\mathfrak{v})}{\partial x}, \\ \mathcal{Y} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial(V+\mathfrak{v})}{\partial y}, \\ \mathcal{Z} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial(V+\mathfrak{v})}{\partial z}, \end{aligned}\right.$$

$$(79)\quad \left\{\begin{aligned} L &= -\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x} - \mathfrak{L}, \\ M &= -\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y} - \mathfrak{M}, \\ N &= -\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial z} - \mathfrak{N}. \end{aligned}\right.$$

Les équations (76) peuvent s'écrire, en vertu des équations (75) et (79),

$$(80)\quad \left\{\begin{aligned} (1+4\pi f)\,L &= -\left(\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z}\right), \\ (1+4\pi f)\,M &= -\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y}\right), \\ (1+4\pi f)\,N &= -\left(\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y}\right). \end{aligned}\right.$$

Cette forme a été donnée par Maxwell [1].

---

[1] MAXWELL, *On physical lines of forces*. Part. I. Éq. (55) (*Maxwell's Papers*, t. I,

Maxwell donne à $-\mathfrak{X}$, $-\mathfrak{Y}$, $-\mathfrak{Z}$, qu'il désigne par F, G, H, le nom de *composantes de l'état électrotonique;* les quantités L, M, N, qu'il désigne par α, β, γ, sont pour lui les *composantes de la force magnétique;* $(1+4\pi f)$, qu'il désigne par μ, est la *capacité inductive magnétique,* ou, selon le mot de W. Thomson, la *perméabilité magnétique.* Maxwell pose, en outre,

$$(81)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= (1+4\pi f)\mathrm{L}, \\ b &= (1+4\pi f)\mathrm{M}, \\ c &= (1+4\pi f)\mathrm{N}, \end{aligned}\right.$$

et il donne à a, b, c le nom de *composantes de l'induction magnétique.*

Si l'on différentie les équations (76) par rapport à t et que l'on compare les résultats obtenus aux équations (73), on obtient le groupe d'équations que voici :

$$(82)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{1+4\pi f}{f}\frac{\partial\alpha}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathcal{C}}{\mathrm{F}}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathcal{B}}{\mathrm{F}}\right), \\ \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{1+4\pi f}{f}\frac{\partial\beta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathcal{A}}{\mathrm{F}}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathcal{C}}{\mathrm{F}}\right), \\ \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{1+4\pi f}{f}\frac{\partial\gamma}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathcal{B}}{\mathrm{F}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathcal{A}}{\mathrm{F}}\right), \end{aligned}\right.$$

Sous cette forme, ces équations ont été données par Helmholtz [1].

Les équations (80), différentiées par rapport à t, et comparées, soit aux équations (77), soit aux équations (78), donnent les deux groupes d'équations

$$(83)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f)\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial t} &= \frac{\partial\mathrm{Z}}{\partial y} - \frac{\partial\mathrm{Y}}{\partial z}, \\ \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f)\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial t} &= \frac{\partial\mathrm{X}}{\partial z} - \frac{\partial\mathrm{Z}}{\partial x}, \\ \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f)\frac{\partial\mathrm{N}}{\partial t} &= \frac{\partial\mathrm{Y}}{\partial x} - \frac{\partial\mathrm{X}}{\partial y}, \end{aligned}\right.$$

---

p. 475); *A dynamical theory of the electromagnetic field.* Équations B (*Maxwell's Papers,* t. I, p. 556); *Traité d'Électricité et de Magnétisme,* t. II, p. 268 et 290 de la Traduction française.

(1) HELMHOLTZ, *Ueber die Bewegungsgleichungen der Electricität für ruhende leitende Körper.* Équations (21). (*Helmholtz Abhandlungen,* t. I, p. 624.)

$$
(84)\qquad
\begin{cases}
\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f)\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z}, \\[2ex]
\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f)\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x}, \\[2ex]
\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f)\dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y}.
\end{cases}
$$

Lorsqu'on fait l'hypothèse

$$
(51)\qquad \mathfrak{A} = \mathfrak{C}
$$

que nous savons être inadmissible, mais qui a été acceptée jusqu'ici, ces deux groupes deviennent identiques. Ils constituent alors un des deux triplets sur lesquels Heaviside [1], Hertz [2] et Cohn [3] font reposer l'Électrodynamique.

II. — *Le deuxième triplet.*

Des deux dernières équations (56), jointes aux deux dernières équations (79), on déduit sans peine la relation

$$
\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y^2} + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial x\,\partial z} - 4\pi\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\right),
$$

relation que l'on peut écrire sous la forme de la première des égalités

$$
(85)\qquad
\begin{cases}
\dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial z} = -4\pi\left(\dfrac{\partial \gamma}{\partial y} - \dfrac{\partial \beta}{\partial z}\right) + \Delta\mathfrak{X} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right), \\[2ex]
\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} = -4\pi\left(\dfrac{\partial \alpha}{\partial z} - \dfrac{\partial \gamma}{\partial x}\right) + \Delta\mathfrak{Y} - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right), \\[2ex]
\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial y} = -4\pi\left(\dfrac{\partial \beta}{\partial x} - \dfrac{\partial \alpha}{\partial y}\right) + \Delta\mathfrak{Z} - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right).
\end{cases}
$$

Or, les égalités (54), (17), (19) et (21) donnent, en vertu des égalités

---

(1) Heaviside, *On electromagnetic wawes, especially in relation to the vorticity of the impressed forces; and the forced vibrations of electromagnetic systems.* Éq. (3). (*Philosophical Magazine*, 5e série, t. XXV, p. 130; 1888.)

(2) H. Hertz, *Ueber die Grundgleichungen der Electrodynamik für ruhende leitende Körper.* Équations (6 *a*). (*Wiedemann's Annalen,* t. XL, p. 577; 1890.)

(3) Cohn, *Zur Systematik der Electricitätslehre.* Équations (2). (*Wiedemann's Annalen*, t. XL, p. 625; 1890.)

(52) et (53),

$$
(86)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\Delta\mathfrak{X} &= (1-\lambda)\frac{\partial^2\mathfrak{U}}{\partial x\,\partial t} - 4\pi\mathfrak{u} + 4\pi\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right),\\
\Delta\mathfrak{Y} &= (1-\lambda)\frac{\partial^2\mathfrak{U}}{\partial y\,\partial t} - 4\pi\mathfrak{v} + 4\pi\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right),\\
\Delta\mathfrak{Z} &= (1-\lambda)\frac{\partial^2\mathfrak{U}}{\partial z\,\partial t} - 4\pi\mathfrak{w} + 4\pi\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right),
\end{aligned}
\right.
$$

tandis que les égalités (54), (18), (20) et (22) donnent, en vertu de l'égalité (53),

$$
(87)\quad \frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z} = \lambda\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t}.
$$

Les égalités (85), (86), (87) donnent le groupe de relations

$$
(88)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} &= -4\pi\mathfrak{u} + \frac{\partial^2\mathfrak{U}}{\partial x\,\partial t},\\
\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} &= -4\pi\mathfrak{v} + \frac{\partial^2\mathfrak{U}}{\partial y\,\partial t},\\
\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} &= -4\pi\mathfrak{w} + \frac{\partial^2\mathfrak{U}}{\partial z\,\partial t}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces équations (88) peuvent encore se mettre sous une autre forme.

En vertu des équations (52), (72), (74), (77) et (78), elles peuvent s'écrire

$$
(89)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} &= \frac{\partial^2\mathfrak{U}}{\partial x\,\partial t} - \frac{4\pi\mathfrak{C}F}{\sqrt{2}}\frac{\partial X}{\partial t} - \frac{4\pi\mathfrak{A}}{\rho\sqrt{2}}(\mathcal{X}+\theta),\\
\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{\partial^2\mathfrak{U}}{\partial y\,\partial t} - \frac{4\pi\mathfrak{C}F}{\sqrt{2}}\frac{\partial Y}{\partial t} - \frac{4\pi\mathfrak{A}}{\rho\sqrt{2}}(\mathcal{Y}+\eta),\\
\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{\partial^2\mathfrak{U}}{\partial z\,\partial t} - \frac{4\pi\mathfrak{C}F}{\sqrt{2}}\frac{\partial Z}{\partial t} - \frac{4\pi\mathfrak{A}}{\rho\sqrt{2}}(\mathcal{Z}+\zeta).
\end{aligned}
\right.
$$

Si, dans ces équations, on fait l'hypothèse, d'ailleurs inacceptable, $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}$, et si l'on suppose le milieu dénué de conductibilité, ce qui revient à faire $\rho = \infty$, on retrouve un groupe d'équations données par Helmholtz [1].

---

[1] Helmholtz, *loc. cit.* Équations (21_b) (*Helmholtz Abhandlungen*, t. I, p. 625).

III. — *Forme de ce triplet adoptée par Maxwell.*

Considérons des *courants de Maxwell* caractérisés par les égalités (59) et (60). Pour de tels courants, on a identiquement

$$(58) \qquad \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} = 0,$$

en sorte que les équations (89) deviennent

$$(90) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) &= -\left[\frac{\mathfrak{C}F}{\sqrt{2}}\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\mathfrak{A}}{\rho\sqrt{2}}(\mathfrak{X} + \theta)\right], \\ \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) &= -\left[\frac{\mathfrak{C}F}{\sqrt{2}}\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\mathfrak{A}}{\rho\sqrt{2}}(\mathfrak{Y} + \eta)\right], \\ \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) &= -\left[\frac{\mathfrak{C}F}{\sqrt{2}}\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\mathfrak{A}}{\rho\sqrt{2}}(\mathfrak{Z} + \zeta)\right]. \end{aligned}\right.$$

Ces équations peuvent encore s'écrire, en vertu des égalités (52), (72), (74), (77) et (78),

$$(91) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} &= -4\pi\mathfrak{u}, \\ \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} &= -4\pi\mathfrak{v}, \\ \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} &= -4\pi\mathfrak{w}. \end{aligned}\right.$$

Les équations (90) et (91) sont donc exactes toutes les fois que les courants considérés sont des courants de Maxwell.

Inversement, si ces équations sont exactes, les courants sont des courants de Maxwell.

En effet, considérons, en premier lieu, un point autour duquel la constitution du système varie d'une manière continue. Différentions la première des égalités (91) par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z et ajoutons membre à membre les résultats obtenus. Nous trouvons l'égalité

$$(59) \qquad \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} = 0.$$

Considérons, en second lieu, une surface de discontinuité séparant deux régions, 1 et 2, du système. Si les équations (91) sont vérifiées en chacune des régions 1 et 2, on aura

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial(\mathrm{N}_1-\mathrm{N}_2)}{\partial y}-\frac{\partial(\mathrm{M}_1-\mathrm{M}_2)}{\partial z}\right]\cos(n_1, x)\\
&+\left[\frac{\partial(\mathrm{L}_1-\mathrm{L}_2)}{\partial z}-\frac{\partial(\mathrm{N}_1-\mathrm{N}_2)}{\partial x}\right]\cos(n_1, y)\\
&+\left[\frac{\partial(\mathrm{M}_1-\mathrm{M}_2)}{\partial x}-\frac{\partial(\mathrm{L}_1-\mathrm{L}_2)}{\partial y}\right]\cos(n_1, z)\\
&=-4\pi[\mathfrak{u}_1\cos(n_1, x)+\mathfrak{v}_1\cos(n_1, y)+\mathfrak{w}_1\cos(n_1, z)\\
&\qquad+\mathfrak{u}_2\cos(n_2, x)+\mathfrak{v}_2\cos(n_2, y)+\mathfrak{w}_2\cos(n_2, z)].
\end{aligned}$$

En vertu des égalités (79), cette égalité peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial(\mathfrak{N}_1-\mathfrak{N}_2)}{\partial y}-\frac{\partial(\mathfrak{M}_1-\mathfrak{M}_2)}{\partial z}\right]\cos(n_1, x)\\
&+\left[\frac{\partial(\mathfrak{L}_1-\mathfrak{L}_2)}{\partial z}-\frac{\partial(\mathfrak{N}_1-\mathfrak{N}_2)}{\partial x}\right]\cos(n_1, y)\\
&+\left[\frac{\partial(\mathfrak{M}_1-\mathfrak{M}_2)}{\partial z}-\frac{\partial(\mathfrak{L}_1-\mathfrak{L}_2)}{\partial y}\right]\cos(n_1, z)\\
&=4\pi[\mathfrak{u}_1\cos(n_1, x)+\mathfrak{v}_1\cos(n_1, y)+\mathfrak{w}_1\cos(n_1, z)\\
&\qquad+\mathfrak{u}_2\cos(n_2, x)+\mathfrak{v}_2\cos(n_2, y)+\mathfrak{w}_2\cos(n_2, z)].
\end{aligned}\tag{92}$$

Les égalités (55) donnent

$$\frac{\partial(\mathfrak{L}_1-\mathfrak{L}_2)}{\partial y}=\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial(\mathrm{P}_1-\mathrm{P}_2)}{\partial y}+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial(p_1-p_2)}{\partial y}.$$

En vertu des égalités (47) cette égalité devient la première des deux égalités

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\mathfrak{L}_1-\mathfrak{L}_2)}{\partial y}&=\left[\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\mathrm{P}_1}{\partial n_1}+\frac{\partial\mathrm{P}_2}{\partial n_2}\right)+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial p_1}{\partial n_1}+\frac{\partial p_2}{\partial n_2}\right)\right]\cos(n_1 y),\\
\frac{\partial(\mathfrak{L}_1-\mathfrak{L}_2)}{\partial z}&=\left[\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\mathrm{P}_1}{\partial n_1}+\frac{\partial\mathrm{P}_2}{\partial n_2}\right)+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial p_1}{\partial n_1}+\frac{\partial p_2}{\partial n_2}\right)\right]\cos(n_1, z).
\end{aligned}$$

La seconde s'établit d'une manière analogue.

Ces deux égalités fournissent la première des égalités

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial(\mathfrak{L}_1-\mathfrak{L}_2)}{\partial y}\cos(n_1, z)-\frac{\partial(\mathfrak{L}_1-\mathfrak{L}_2)}{\partial z}\cos(n_1, y)=0,\\
&\frac{\partial(\mathfrak{M}_1-\mathfrak{M}_2)}{\partial z}\cos(n_1, x)-\frac{\partial(\mathfrak{M}_1-\mathfrak{M}_2)}{\partial x}\cos(n_1, z)=0,\\
&\frac{\partial(\mathfrak{N}_1-\mathfrak{N}_2)}{\partial x}\cos(n_1, y)-\frac{\partial(\mathfrak{N}_1-\mathfrak{N}_2)}{\partial y}\cos(n_1, x)=0.
\end{aligned}\right.\tag{93}$$

Les deux dernières s'établissent d'une manière analogue.

Les égalités (92) et (93) entraînent l'égalité

$$(60)\qquad \begin{aligned} &\mathfrak{u}_1 \cos(n_1, x) + \mathfrak{v}_1 \cos(n_1, y) + \mathfrak{w}_1 \cos(n_1, z) \\ &+ \mathfrak{u}_2 \cos(n_2, x) + \mathfrak{v}_2 \cos(n_2, y) + \mathfrak{w}_2 \cos(n_2, z) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, pour que les équations (90) ou (91) soient applicables à un système de courants, il faut et il suffit que ce soient des *courants de Maxwell.*

Maxwell [1] a obtenu les équations (91), ou plutôt celles que l'on en déduirait en faisant l'hypothèse inadmissible $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}$, par un raisonnement qui suppose évidemment que l'on a affaire à des courants uniformes; il a fait remarquer, d'ailleurs, que ces équations (91) entraînaient l'uniformité des flux électriques. Heaviside [2], H. Hertz [3] et Cohn [4] ont adopté sans démonstration, le premier les équations (91), les deux derniers les équations (90). Helmholtz [5], qui avait donné la forme générale du triplet que nous avons indiquée au paragraphe précédent, a adopté, dans un de ses derniers Mémoires, la forme (91).

Heaviside, Hertz et Cohn ont proposé d'accepter sans démonstration les deux triplets (83) [ou (84)] et (90) [ou (91)] et de les considérer comme les hypothèses fondamentales sur lesquelles repose toute l'Électrodynamique. On reconnaîtra, sans peine, à quel point cette idée est dangereuse si l'on observe que le triplet (90) [ou (91)] n'est vrai que moyennant la restriction suivante : *tous les courants sont des courants de Maxwell*, tandis que l'on ne peut rendre compte de certains phénomènes, sans rejeter cette restriction, comme nous le verrons plus loin.

---

(1) MAXWELL, *On Faraday's lines of force* (Maxwell's Papers, t. I, p. 194). — *On physical lines of forces* (Maxwell's Papers, t. I, p. 462). — *A dynamical theory of the electromagnetic field* (Maxwell's Papers, t. I, p. 557). — *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. II, p. 285 de la traduction française.

(2) HEAVISIDE, *loc. cit.* Equation (2), p. 130.

(3) H. HERTZ, *loc. cit.* Equations (6*d*), p. 588.

(4) COHN, *loc. cit.* Equations (3), p. 626.

(5) HELMHOLTZ, *Das Princip der kleinsten Wirkung in der Electrodynamik.*

CHAPITRE III.

L'ÉNERGIE INTERNE.

I. — *L'énergie interne du système électromagnétique le plus général.*

Lorsqu'il n'y a, dans un système, ni flux de conduction, ni flux de déplacement, l'énergie interne U est donnée par l'égalité

$$(94)\quad \begin{aligned} \mathrm{EU} = \mathrm{E}\Upsilon &+ \sum\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial \mathrm{T}}\right)q + \frac{\varepsilon}{2}\sum q(\mathrm{V}+\mathfrak{v}) \\ &+ \int\left[\mathcal{F}(\mathfrak{M},\mathrm{T}) - \mathrm{T}\frac{\partial}{\partial \mathrm{T}}\mathcal{F}(\mathfrak{M},\mathrm{T})\right]d\varpi \\ &+ \frac{\varepsilon}{2}\int\left[\mathcal{A}\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{v})}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{v})}{\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{v})}{\partial z}\right]d\varpi \\ &+ \int\left[\mathfrak{f}(\mu,\mathrm{T}) - \mathrm{T}\frac{\partial}{\partial \mathrm{T}}\mathfrak{f}(\mu,\mathrm{T})\right]d\varpi \\ &+ \frac{1}{2}\int\left[\alpha\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial x} + \beta\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial z}\right]d\varpi. \end{aligned}$$

Dans cette formule, Υ présente l'énergie interne qu'aurait le système, si l'on supposait qu'il fût dépourvu d'électrisation, d'aimantation et de polarisation;

Θ est une quantité qui dépend de la nature du système au voisinage du point où se trouve la charge q;

$\mathcal{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T})$ est une fonction liée à $\mathrm{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T})$ par l'égalité

$$(95)\quad \frac{\mathfrak{M}}{\mathrm{F}(\mathfrak{M},\mathrm{T})} = \frac{\partial\mathcal{F}(\mathfrak{M},\mathrm{T})}{\partial\mathfrak{M}};$$

$\mathfrak{f}(\mu, \mathrm{T})$ est une fonction liée à $f(\mu, \mathrm{T})$ par l'égalité

$$(96)\quad \frac{\mu}{f(\mu,\mathrm{T})} = \frac{\partial\mathfrak{f}(\mu,\mathrm{T})}{\partial\mu}.$$

Enfin, le signe $\sum$ indique une sommation qui s'étend à toutes les charges électriques répandues sur le système.

Dans le cas où le système renferme des flux de conduction ou de déplacement, nous ajouterons, au second membre de l'égalité (94), un terme EU′, dont nous allons déterminer la valeur.

Nous nous appuierons, pour cela, sur l'hypothèse qui nous a toujours servi dans des cas analogues.

Soient

$$(97)\qquad \begin{cases} \mathbf{E}_x = \mathcal{X} + \theta, \\ \mathbf{E}_y = \mathcal{Y} + \eta, \\ \mathbf{E}_z = \mathcal{Z} + \zeta \end{cases}$$

les composantes de la force électromotrice totale en un point (x, y, z). Soit dQ la quantité de chaleur dégagée par le système pendant le temps dt. On a

$$(98)\qquad \begin{aligned} \mathbf{E}\,d\mathrm{Q} = \int \left[\left(\mathbf{E}_x - \mathrm{T}\frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial \mathrm{T}}\right) u + \left(\mathbf{E}_y - \mathrm{T}\frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial \mathrm{T}}\right) v + \left(\mathbf{E}_z - \mathrm{T}\frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial \mathrm{T}}\right) w\right] d\varpi \\ + \mathbf{E}\,d\mathrm{Q}', \end{aligned}$$

$d\mathrm{Q}'$ étant donné, *dans le cas où les corps magnétiques et diélectriques sont parfaitement doux et où la température* T *est invariable en chaque point*, par l'égalité

$$(99)\qquad \mathbf{E}\,d\mathrm{Q}' = \frac{\partial}{\partial t}\int \mathrm{T}\frac{\partial}{\partial \mathrm{T}}[\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T}) + \mathfrak{f}(\mu, \mathrm{T})]\, d\varpi.$$

Supposons *le système immobile*. Les égalités (94), (97), (98), (99), jointes aux renseignements que l'étude du galvanisme fournit au sujet des forces électromotrices θ, η, ζ, nous donnent l'égalité suivante :

$$(100)\qquad \begin{aligned} &\int \left\{ \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M})}{\partial t} + \varepsilon\left[\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{V})}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{V})}{\partial y}\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} + \frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{V})}{\partial z}\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t}\right]\right\} d\varpi \\ &+ \int \left[\frac{\partial \mathfrak{f}(\mu)}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y}\frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial z}\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right] d\varpi \\ &+ \mathbf{E}\frac{\partial \mathrm{U}'}{\partial t} \\ &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} u + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} v + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} w\right) d\varpi. \end{aligned}$$

Mais l'égalité (95) permet d'écrire

$$\begin{aligned} &\int \left\{ \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M})}{\partial t} + \varepsilon\left[\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{V})}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{V})}{\partial y}\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} + \frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{V})}{\partial z}\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t}\right]\right\} d\varpi \\ &= \int \left\{ \left[\frac{\mathcal{A}}{\mathrm{F}(\mathfrak{M})} + \varepsilon\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{V})}{\partial x}\right]\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \right. \\ &\qquad + \left[\frac{\mathcal{B}}{\mathrm{F}(\mathfrak{M})} + \varepsilon\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{V})}{\partial y}\right]\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \\ &\qquad \left. + \left[\frac{\mathcal{C}}{\mathrm{F}(\mathfrak{M})} + \varepsilon\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{V})}{\partial z}\right]\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} \right\} d\varpi. \end{aligned}$$

Les égalités (73), où l'on remplace F par $F(\mathfrak{M})$, transforment cette égalité en la suivante :

$$(101)\quad \int \left\{ \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M})}{\partial t} + \varepsilon \left[\frac{\partial (V+\mathfrak{V})}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \frac{\partial (V+\mathfrak{V})}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} + \frac{\partial (V+\mathfrak{V})}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} \right] \right\} d\varpi$$
$$= -\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \int \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} \right) d\varpi.$$

De même, l'égalité (96) permet d'écrire

$$\int \left[\frac{\partial \mathfrak{f}(\mu)}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial z} \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right] d\varpi$$
$$= \int \left\{ \left[\frac{\alpha}{f(\mu)} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x} \right] \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \left[\frac{\beta}{f(\mu)} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y} \right] \frac{\partial \beta}{\partial t} + \left[\frac{\gamma}{f(\mu)} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial z} \right] \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\} d\varpi.$$

Les égalités (75), où l'on remplace f par $f(\mu)$, transforment cette égalité en la suivante :

$$(102)\quad \int \left[\frac{\partial \mathfrak{f}(\mu)}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial z} \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right] d\varpi$$
$$= -\int \left(\mathfrak{L} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \mathfrak{M} \frac{\partial \beta}{\partial t} + \mathfrak{N} \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) d\varpi.$$

Les égalités (100), (101), (102) donnent l'égalité

$$(103)\quad \mathbf{E} \frac{\partial U'}{\partial t} = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \int \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} u + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} v + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} w \right) d\varpi$$
$$+ \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \int \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} \varphi + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} \psi + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} \chi \right) d\varpi$$
$$+ \int \left(\mathfrak{L} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \mathfrak{M} \frac{\partial \beta}{\partial t} + \mathfrak{N} \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) d\varpi.$$

Les égalités (54), (67) et (69) donnent sans peine l'égalité

$$
\begin{aligned}
(104)\qquad & \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}u+\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}v+\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}w\right)d\varpi \\
& +\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\int\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}\varphi+\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}\psi+\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}\chi\right)d\varpi \\
& =\frac{\mathfrak{A}^2}{4}\frac{\partial}{\partial t}\int(\mathfrak{U}u+\mathfrak{V}v+\mathfrak{W}w)\,d\varpi \\
& +\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int(\mathfrak{F}u+\mathfrak{G}v+\mathfrak{H}w)\,d\varpi \\
& +\frac{\mathfrak{C}^2}{4}\frac{\partial}{\partial t}\int(\mathfrak{F}\varphi+\mathfrak{G}\psi+\mathfrak{H}\chi)\,d\varpi \\
& +\int\left[\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}u+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\varphi\right)\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right. \\
& \qquad+\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}v+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\psi\right)\frac{\partial\Psi}{\partial t} \\
& \qquad\left.+\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}w+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\chi\right)\frac{\partial X}{\partial t}\right]d\varpi.
\end{aligned}
$$

Les égalités (103) et (104), jointes à l'identité

$$
\begin{aligned}
(105)\qquad & \int\left[\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}u+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\varphi\right)\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right. \\
& \qquad+\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}v+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\psi\right)\frac{\partial\Psi}{\partial t} \\
& \qquad\left.+\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}w+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\chi\right)\frac{\partial X}{\partial t}\right]d\varpi \\
& =-\int\left(\mathfrak{L}\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\mathfrak{M}\frac{\partial\beta}{\partial t}+\mathfrak{N}\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)d\varpi,
\end{aligned}
$$

que l'on obtient en remplaçant α, β, γ par $\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \frac{\partial\beta}{\partial t}, \frac{\partial\gamma}{\partial t}$, dans les égalités (70) et (71), donnent

$$
\begin{aligned}
E\frac{\partial U'}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\Big[& \frac{\mathfrak{A}^2}{4}\int(\mathfrak{U}u+\mathfrak{V}v+\mathfrak{W}w)\,d\varpi \\
& +\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{2}\int(\mathfrak{F}u+\mathfrak{G}v+\mathfrak{H}w)\,d\varpi \\
& +\frac{\mathfrak{C}^2}{4}\int(\mathfrak{F}\varphi+\mathfrak{G}\psi+\mathfrak{H}\chi)\,d\varpi\Big].
\end{aligned}
$$

De cette égalité, on déduit sans peine

$$
(106) \qquad \begin{aligned}
\mathbf{EU}' = {} & \frac{\mathfrak{A}_2}{4}\int(\mathfrak{U}u + \mathfrak{V}v + \mathfrak{W}w)\,d\varpi \\
& + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{2}\int(\mathfrak{F}u + \mathfrak{G}v + \mathfrak{H}w)\,d\varpi \\
& + \frac{\mathfrak{C}^2}{4}\int(\mathfrak{F}\varphi + \mathfrak{G}\psi + \mathfrak{H}\chi)\,d\varpi.
\end{aligned}
$$

Les égalités (94) et (106) déterminent la forme de l'énergie interne du système électrodynamique le plus général. Le terme EU' est égal, au signe près, au potentiel électrodynamique $\mathbf{\Pi}$ défini par l'égalité (67). Le potentiel électromagnétique n'y figure pas.

II. — *Comment Maxwell détermine l'énergie interne d'un système électromagnétique.*

L'interprétation mécanique que Maxwell a tenté de donner des phénomènes électriques le conduisait à adopter une forme spéciale pour l'énergie interne d'un système électromagnétique [1].

Cette énergie est la somme de deux termes : l'*énergie potentielle* et l'*énergie cinétique*.

Le premier terme est représenté par une intégrale triple étendue au volume entier du système. Le terme sous le signe $\int$ est proportionnel à $(X^2 + Y^2 + Z^2)$, ou, si l'on préfère, à $\mathfrak{M}^2$.

Le second terme est représenté, lui aussi, par une intégrale triple étendue au volume entier du système. La quantité sous le signe $\int$ est proportionnelle à $(L^2 + M^2 + N^2)$, ou, si l'on préfère, à μ^2.

Dans le Mémoire qu'il a publié ultérieurement, et dans son *Traité*, Maxwell cherche à retrouver, en s'appuyant sur les lois fondamentales de l'Électrostatique et de l'Électromagnétisme, une forme analogue pour l'énergie interne. Il parvient, en effet, à la forme suivante :

$$
(107) \qquad \begin{aligned}
\mathbf{EU} = \mathbf{E}\Upsilon & + \frac{1}{2}\int(\mathcal{A}X + \mathcal{B}Y + \mathcal{C}Z)\,d\varpi \\
& + \frac{1}{8\pi}\int(1 + 4\pi f)(L^2 + M^2 + N^2)\,d\varpi.
\end{aligned}
$$

---

[1] MAXWELL, *On physical lines of force* (*Maxwell's papers*, t. I, p. 460).

« La seconde intégrale, dit Maxwell [1], dépend de l'aimantation du champ et s'explique, dans notre théorie, par les mouvements actuels de toute espèce dont le champ est le siège. La première intégrale dépend de la polarisation du champ et s'explique par les déformations de tout genre dont le champ est le siège. »

Pour parvenir à cette formule (107), si intimement liée à quelques-unes de ses idées les plus essentielles, Maxwell n'hésite pas à accumuler de graves paralogismes.

Maxwell considère d'abord un système dépourvu de tout flux de conduction ou de déplacement. Laissant de côté les termes

$$\sum \left(\Theta - \mathrm{T}\,\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right) q,$$

$$\int \left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T}) - \mathrm{T}\,\frac{\partial\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T})}{\partial\mathrm{T}}\right] d\varpi,$$

$$\int \left[\mathfrak{f}(\mu, \mathrm{T}) - \mathrm{T}\,\frac{\partial\mathfrak{f}(\mu, \mathrm{T})}{\partial\mathrm{T}}\right] d\varpi,$$

qu'une foule de phénomènes nous obligent à introduire, mais qui ne sont jamais entrés en ligne de compte dans ses théories, il se borne à introduire le *potentiel électrostatique* et le *potentiel magnétique* dans l'expression de l'énergie interne.

Empruntons la détermination de la première partie soit au Mémoire : *On physical lines of force*, soit au Mémoire : *A dynamical theory of the electromagnetic field*. Le raisonnement suivi dans le *Traité*, bien que peu différent, se réfère à une théorie des corps diélectriques autre que la théorie de la polarisation. Quant à la seconde partie, nous suivrons le mode de détermination indiqué dans le *Traité*.

Conformément à une erreur de principe qui vicie toutes ses théories, ainsi que nous l'avons fait remarquer ailleurs [2], Maxwell commence par faire abstraction de toute électrisation réelle et par réduire le potentiel électrostatique au potentiel de la polarisation diélectrique sur elle-même, potentiel qu'il écrit, *avec une faute de signe* [3],

$$-\frac{\varepsilon}{2}\int \left(\mathcal{A}\,\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x} + \mathcal{B}\,\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y} + \mathcal{C}\,\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z}\right) d\varpi.$$

---

(1) MAXWELL, *Papers*, t. I, p. 562.

(2) *Quelques remarques au sujet de l'électrodynamique des corps diélectriques, proposée par J. Clerk Maxwell* (3e Congrès scientifique des catholiques. Bruxelles; 1894).

(3) MAXWELL, *Papers*, t. I, p. 495, égalité (104) et p. 563, n° 572.

Quant au potentiel magnétique, il lui conserve la forme

$$\frac{1}{2}\int\left(\alpha\,\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial x}+\beta\,\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial y}+\gamma\,\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial z}\right)d\varpi.$$

Maxwell passe ensuite au cas où le système renferme des flux de conduction et de déplacement; il commence par supprimer le potentiel magnétique; « cette partie de l'énergie, dit-il, sera comprise dans l'énergie cinétique sous la forme que nous allons lui donner »; en fait, le potentiel magnétique constitue l'une des pierres d'achoppement auquel vient se heurter la théorie qui regarde les aimants comme des systèmes de courants particulaires et l'énergie électrodynamique comme de l'énergie cinétique; de là l'omission, par Maxwell, de ce terme embarrassant, omission que ne justifient nullement les vagues digressions du n° 637 du *Traité*.

Sans prévenir de ce changement, Maxwell raisonne, à partir du n° 638, comme si le terme électrostatique de EU avait pour expression

$$(108)\qquad \begin{aligned} \mathrm{W} &= -\int\Bigg[\left(\varepsilon\,\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}\right)\mathcal{A} \\ &\qquad +\left(\varepsilon\,\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y}+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t}\right)\mathcal{B} \\ &\qquad +\left(\varepsilon\,\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z}+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}\right)\mathcal{C}\Bigg]\,d\varpi \\ &= \frac{1}{2}\int(\mathrm{X}\mathcal{A}+\mathrm{Y}\mathcal{B}+\mathrm{Z}\mathcal{C})\,d\varpi. \end{aligned}$$

Aucun raisonnement ne justifie l'introduction, sous le signe $\int$ des termes

$$\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,\mathcal{A}\,\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t},\qquad \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,\mathcal{B}\,\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t},\qquad \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,\mathcal{C}\,\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}.$$

Quant à l'énergie électrocinétique, Maxwell raisonne, à partir du n° 634, comme si elle avait pour expression

$$(109)\qquad \mathrm{T}=\frac{1}{2}\int(\mathfrak{X}\mathfrak{u}+\mathfrak{Y}\mathfrak{v}+\mathfrak{Z}\mathfrak{w})\,d\varpi.$$

Les égalités (52), (54), (66) et (70) montrent que (—T) est égal au *potentiel électrodynamique augmenté de la moitié du potentiel électromagnétique.* Pour justifier cette détermination de T, Maxwell renvoie au n° 578 de son *Traité;* dans ce dernier numéro, il a simplement prouvé que, dans un système dépourvu de magnétisme, T était égal au potentiel électrodynamique changé de signe.

Pour transformer l'égalité (109), Maxwell fait usage des égalités (91), lesquelles ne sont point exactes, nous le savons, à moins que l'on ait

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} = 0,$$

c'est-à-dire que les courants soient des *courants de Maxwell.*

Admettons cette restriction.

L'égalité (109) deviendra alors

$$\text{(110)} \qquad \begin{aligned} T = -\frac{1}{8\pi}\int\Big[& \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\mathfrak{X} \\ & + \left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mathfrak{Y} \\ & + \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right)\mathfrak{Z}\Big]\, d\varpi. \end{aligned}$$

Transformons cette expression au moyen d'intégrations par parties.

Nous aurons

$$\text{(111)} \qquad \begin{aligned} T = -\frac{1}{8\pi}\int\Big[& \left(\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z}\right) L \\ & + \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x}\right) M \\ & + \left(\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y}\right) N \Big]\, d\varpi \\ -\frac{1}{8\pi}\int\Big\{ & L_1[\mathfrak{Z}\cos(n_1, y) - \mathfrak{Y}\cos(n_1, z)] \\ & + L_2[\mathfrak{Z}\cos(n_2, y) - \mathfrak{Y}\cos(n_2, z)] \\ & + M_1[\mathfrak{X}\cos(n_1, z) - \mathfrak{Z}\cos(n_1, x)] \\ & + M_2[\mathfrak{X}\cos(n_2, z) - \mathfrak{Z}\cos(n_2, x)] \\ & + N_1[\mathfrak{Y}\cos(n_1, x) - \mathfrak{X}\cos(n_1, y)] \\ & + N_2[\mathfrak{Y}\cos(n_2, x) - \mathfrak{X}\cos(n_2, y)]\Big\}\, dS, \end{aligned}$$

la seconde intégrale s'étendant à toutes les surfaces de discontinuité du système.

Mais, en vertu des égalités (79), (55), (45) et (35), on a

$$L_1 - L_2 = -\left(\frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial n_2}\right)\cos(n_1, x),$$

$$M_1 - M_2 = -\left(\frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial n_2}\right)\cos(n_1, y),$$

$$N_1 - N_2 = -\left(\frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial n_2}\right)\cos(n_1, z),$$

en sorte que l'égalité (111) devient simplement

$$\begin{aligned}T = -\frac{1}{8\pi}\int\Big[& \left(\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z}\right) L \\ & + \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x}\right) M \\ & + \left(\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y}\right) N \Big] d\varpi\end{aligned}$$

ou bien, en vertu des égalités (80),

$$(112) \qquad T = \frac{1}{8\pi}\int (1 + 4\pi f)(L^2 + M^2 + N^2)\, d\varpi.$$

Les égalités (108) et (112) donnent l'égalité (107) que Maxwell voulait obtenir.

III. — *Le théorème de Poynting.*

Considérons l'intégrale

$$(113) \qquad \begin{aligned} J = & \ \frac{1}{2}\int (X\mathcal{A} + Y\mathcal{B} + Z\mathcal{C})\, d\varpi \\ & + \frac{1}{8\pi}\int (1 + 4\pi f)(L^2 + M^2 + N^2)\, d\varpi, \end{aligned}$$

étendue à un espace limité quelconque, et convenons de la nommer l'*énergie électrique contenue dans cet espace;* ce mot ne sera, pour nous, qu'une simple notation, car ce que nous venons de dire nous a surabondamment prouvé que ce terme n'avait aucune analogie avec l'énergie interne, et que le raisonnement par lequel Maxwell a établi un lien entre ces deux quantités était fautif en plusieurs points.

Les égalités (73) et (77) permettent d'écrire l'égalité (113) sous la forme

$$\begin{aligned} J = & \ \frac{1}{2}\int \frac{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2}{F}\, d\varpi \\ & + \frac{1}{8\pi}\int (1 + 4\pi f)(L^2 + M^2 + N^2)\, d\varpi, \end{aligned}$$

qui, différentiée par rapport à t, donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t} = & \int \left(\frac{\mathcal{A}}{F}\varphi + \frac{\mathcal{B}}{F}\psi + \frac{\mathcal{C}}{F}\chi\right) d\varpi \\ & + \frac{1}{4\pi}\int (1 + 4\pi f)\left(L\frac{\partial L}{\partial t} + M\frac{\partial M}{\partial t} + N\frac{\partial N}{\partial t}\right) d\varpi. \end{aligned}$$

Moyennant les égalités (73), (77) et (83), cette égalité peut s'écrire

$$(114)\quad \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\int (X\varphi + Y\psi + Z\chi)\,d\varpi$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\int\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)L + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)M + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)N\right]d\varpi.$$

Imaginons maintenant que l'*espace considéré ne renferme pas de corps conducteur*. Nous aurons, en tout point de cet espace,

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0,$$

de sorte que les égalités (88) deviendront

$$\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\varphi = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial x\,\partial t},$$
$$\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\psi = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial y\,\partial t},$$
$$\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\chi = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial z\,\partial t}.$$

Moyennant ces égalités, l'égalité (114) devient

$$(115)\quad 4\pi\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial J}{\partial t} = \int\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial x\,\partial t}X + \frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial y\,\partial t}Y + \frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial z\,\partial t}Z\right)d\varpi$$
$$-\int\left[\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)X + \left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)Y + \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right)Z\right]d\varpi$$
$$+\int\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)L + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)M + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)N\right]d\varpi.$$

Mais des intégrations par parties donnent

$$(116)\quad \int\left[\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)X + \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)Y + \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right)Z\right]d\varpi$$
$$= \int\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)L + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)M + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)N\right]d\varpi$$
$$+\int\Big\{\ L_1[Z_1\cos(n_1, y) - Y_1\cos(n_1, z)]$$
$$+ L_2[Z_2\cos(n_2, y) - Y_2\cos(n_2, z)] + \ldots\Big\}\,dS$$
$$+\int\Big\{\ L\,[Z\,\cos(n_i, y) - Y\,\cos(n_i, z)] + \ldots\Big\}\,d\Sigma.$$

Dans la deuxième intégrale du second membre, dS est l'aire d'un élément découpé sur l'une des surfaces de discontinuité contenues dans l'espace considéré; le signe $+\ldots$ remplace quatre termes qui se déduisent par permutation tournante des deux termes explicitement écrits. Dans la troisième intégrale du second membre, $d\Sigma$ est l'aire de l'un des éléments découpés sur la surface qui limite le système; n_i est la demi-normale dirigée vers l'intérieur du système; le signe $+\ldots$ remplace deux termes qui se déduisent par permutation tournante du terme explicitement écrit.

On aura donc

$$
\begin{aligned}
(117) \qquad 4\pi \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \frac{\partial J}{\partial t} = {} & \int \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial x\, \partial t} X + \frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial y\, \partial t} Y + \frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial z\, \partial t} Z \right) d\varpi \\
& + \int \Big\{ \quad L_1 [Z_1 \cos(n_1, y) - Y_1 \cos(n_1, z)] \\
& \qquad + L_2 [Z_2 \cos(n_2, y) - Y_2 \cos(n_2, z)] + \ldots \Big\} dS \\
& + \int \Big\{ \quad L\, [Z \cos(n_i, y) - Y \cos(n_i, z)] + \ldots \Big\} d\Sigma.
\end{aligned}
$$

M. Poynting (¹) a donné une égalité qui se déduit de celle-là par suppression des deux premiers termes du second membre.

Le premier terme a disparu de l'égalité proposée par M. Poynting parce que ce physicien a fait usage, dans sa démonstration, du deuxième triplet de Maxwell, ce qui suppose implicitement que *tous les courants sont des courants de Maxwell,* c'est-à-dire que

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} = 0$$

dans tout l'espace. Quant au second terme, M. Poynting ne l'a pas écrit faute d'avoir remarqué que les quantités L, M, N, X, Y, Z peuvent être discontinues le long de certaines surfaces. Ce terme disparaîtrait si, pour les deux diélectriques limitrophes, on avait $f_1 = f_2$.

Dans ce cas, en effet, les égalités (200 *bis*) et (201 *bis*), que nous trouverons plus loin, donneraient

$$L_1 = L_2, \qquad M_1 = M_2, \qquad N_1 = N_2,$$

(¹) POYNTING, *On the transfer of energy in the electromagnetic field* (*Philosophical Transactions*, t. CLXXV, 2ᵉ partie, p. 343; 1884).

et l'on a, d'ailleurs, en toutes circonstances,

$$\frac{X_1 - X_2}{\cos(n_1, x)} = \frac{Y_1 - Y_2}{\cos(n_1, y)} = \frac{Z_1 - Z_2}{\cos(n_1, z)}.$$

M. Poynting écrit, sous la forme suivante, la formule qu'il a proposée :

$$(118) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t} = -\frac{\sqrt{2}}{4\pi \mathfrak{C}} \int [& (MZ - NY) \cos(n_i, x) \\ & + (NX - LZ) \cos(n_i, y) \\ & + (LY - MX) \cos(n_i, z)] \, dS. \end{aligned}$$

Il énonce cette égalité de la manière suivante :

La variation de la quantité d'énergie que renferme un volume donné rempli par des corps diélectriques s'exprime de la même manière que si l'énergie était un fluide dont le flux, en chaque point, aurait pour composantes

$$\frac{\sqrt{2}}{4\pi \mathfrak{C}} (MZ - NY),$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4\pi \mathfrak{C}} (NX - LZ),$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4\pi \mathfrak{C}} (LY - MX).$$

Ce théorème a suscité une doctrine philosophico-scientifique nouvelle, la doctrine du *transport de l'énergie*, qui prétend traiter la Physique en se passant de l'existence du corps. Nous ne voulons pas discuter ici cette doctrine; nous nous contenterons de souligner le caractère douteux de la proposition qui lui a donné naissance.

CHAPITRE IV.

STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE ÉLECTRIQUE ET MAGNÉTIQUE SUR UN SYSTÈME IMMOBILE.

Considérons des corps conducteurs, diélectriques ou magnétiques, qui ne sont animés d'aucun mouvement. Imaginons que, sur ces corps, les lois représentées par les égalités (73) et (75) soient applicables; ce qui revient à dire que ces corps sont parfaitement doux tant au point de vue diélectrique qu'au point de vue magnétique.

Supposons, en outre, que l'on ait, en tout point,

$$\theta = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0.$$

L'équilibre électrique et magnétique pourra alors s'établir sur ce système.

Pour traiter la question avec une entière généralité, nous supposerons le système formé de deux parties : l'une 1, dépourvue de conductibilité, tandis que l'autre 2 est conductrice. Ces deux parties sont d'ailleurs supposées diélectriques et magnétiques.

On a alors, en tout point de la partie 1,

$$(119) \qquad \rho_1 = \infty,$$

ce qui entraîne nécessairement, à tout instant,

$$(120) \qquad u_1 = v_1 = w_1 = 0,$$

$$(121) \qquad e = e_1 = \text{const.}$$

Supposons qu'à l'instant $t = 0$ l'équilibre soit établi sur le système.

En chaque point du corps 1, la densité électrique a la valeur e_1; en chaque point du corps 2, la densité électrique a la valeur 0; en chaque point appartenant à une surface de discontinuité, la densité électrique superficielle a la valeur E_0; V_0 est la fonction potentielle de cette distribution.

En chaque point du corps 1, la polarisation a pour composantes

$$(\mathcal{A}_1)_0, \quad (\mathcal{B}_1)_0, \quad (\mathcal{C}_1)_0.$$

En chaque point du corps 2, la polarisation est nulle; $\mathfrak{V}_0$ est la fonction potentielle d'une telle distribution.

En chaque point du corps 1, on a

$$(122)\quad \left\{\begin{aligned} (\mathcal{A}_1)_0 &= -\varepsilon F_1 \frac{\partial(V_0+\mathfrak{V}_0)}{\partial x}, \\ (\mathcal{B}_1)_0 &= -\varepsilon F_1 \frac{\partial(V_0+\mathfrak{V}_0)}{\partial y}, \\ (\mathcal{C}_1)_0 &= -\varepsilon F_1 \frac{\partial(V_0+\mathfrak{V}_0)}{\partial z}, \end{aligned}\right.$$

tandis qu'en chaque point du corps 2, on a

$$(123)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial(V_0+\mathfrak{V}_0)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial(V_0+\mathfrak{V}_0)}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial(V_0+\mathfrak{V}_0)}{\partial z} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Enfin, à l'instant $t=0$, on a, en tout point du système,

$$\begin{gathered} u=0, \quad v=0, \quad w=0, \\ \varphi=0, \quad \psi=0, \quad \chi=0, \\ \alpha=0, \quad \beta=0, \quad \gamma=0. \end{gathered}$$

Nous allons démontrer que *cet équilibre est stable sous les conditions suivantes :*

1° *La constante* λ *n'est pas négative*

$$(124)\quad \lambda \geqq 0;$$

2° *Le coefficient de polarisation* F *n'est négatif pour aucun corps*

$$(125)\quad F \geqq 0;$$

3° *Le coefficient d'aimantation* f *n'est négatif pour aucun corps*

$$(126)\quad f \geqq 0.$$

Nous obtiendrons ainsi l'entière généralisation d'un beau théorème de Helmholtz [1].

---

(1) H. Helmholtz, *Ueber die Bewegungsgleichungen des Elektricität für ruhende leitende Körper* (Helmholtz, *Wissenschaftliche Abhandlungen*, t. I).

A l'instant $t = 0$, troublons l'équilibre du système. Posons :

(127)

1° *En tout le système*

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'_0,$$

$$\alpha = \alpha_0, \qquad \beta = \beta_0, \qquad \gamma = \gamma_0,$$

$$\varphi = \varphi_0, \qquad \psi = \psi_0, \qquad \chi = \chi_0;$$

2° *En tout point du corps* 1

$$e = e_1 = \text{const.}$$

$$u_1 = 0, \qquad v_1 = 0, \qquad w_1 = 0,$$

$$\mathcal{A}_1 = (\mathcal{A}_1)_0 + (\mathcal{A}'_1)_0, \qquad \mathcal{B}_1 = (\mathcal{B}_1)_0 + (\mathcal{B}'_1)_0, \qquad \mathcal{C}_1 = (\mathcal{C}_1)_0 + (\mathcal{C}'_1)_0;$$

3° *En tout point du corps* 2 :

$$e = (e_2)_0,$$

$$u_2 = (u_2)_0, \qquad v_2 = (v_2)_0, \qquad w_2 = (w_2)_0,$$

$$\mathcal{A}_2 = (\mathcal{A}_2)_0, \qquad \mathcal{B}_2 = (\mathcal{B}_2)_0, \qquad \mathcal{C}_2 = (\mathcal{C}_2)_0.$$

Nous allons prouver que l'on peut prendre les quantités

$$(128) \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} & \mathbf{E}'_0, \quad (e_2)_0, & \\ (\mathcal{A}'_1)_0, & (\mathcal{B}'_1)_0, & (\mathcal{C}'_1)_0, \\ (\mathcal{A}_2)_0, & (\mathcal{B}_2)_0, & (\mathcal{C}_2)_0, \\ (u_2)_0, & (v_2)_0, & (w_2)_0, \\ \varphi_0, & \psi_0, & \chi_0, \\ \alpha_0, & \beta_0, & \gamma_0, \end{array} \right.$$

assez voisines de zéro pour que, quel que soit l'instant t, postérieur à t_0, que l'on considère, les quantités

$$(129) \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} & \mathbf{E}' = \mathbf{E} - \mathbf{E}_0, \quad e_2, & \\ \mathcal{A}'_1 = \mathcal{A}_1 - (\mathcal{A}_1)_0, & \mathcal{B}'_1 = \mathcal{B}_1 - (\mathcal{B}_1)_0, & \mathcal{C}'_1 = \mathcal{C}_1 - (\mathcal{C}_1)_0, \\ \mathcal{A}_2, & \mathcal{B}_2, & \mathcal{C}_2, \\ u_2, & v_2, & w_2, \\ \varphi, & \psi, & \chi, \\ \alpha, & \beta, & \gamma, \end{array} \right.$$

soient inférieures, en valeur absolue, à des limites données d'avance.

Soit V′ la fonction potentielle électrostatique de la distribution

$$e_1 = 0, \quad \text{sur le corps 1,}$$
$$e = e_2, \quad \text{sur le corps 2,}$$
$$\mathrm{E} = \mathrm{E}', \quad \text{sur les surfaces de discontinuité.}$$

Soit, de même, $\mathfrak{V}'$ la fonction potentielle diélectrique de la polarisation

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}'_1, \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}'_1, \quad \mathcal{C} = \mathcal{C}'_1, \quad \text{sur le corps 1,}$$
$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_2, \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}_2, \quad \mathcal{C} = \mathcal{C}_2, \quad \text{sur le corps 2.}$$

Nous aurons identiquement, en tout point du système,

$$(130) \qquad \begin{cases} \mathrm{V} = \mathrm{V}_0 + \mathrm{V}', \\ \mathfrak{V} = \mathfrak{V}_0 + \mathfrak{V}'. \end{cases}$$

Ces égalités (130), jointes aux égalités (123), montrent qu'en tout point du corps 2 on a

$$(131) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(\mathrm{V} + \mathfrak{V})}{\partial x} = \dfrac{\partial(\mathrm{V}' + \mathfrak{V}')}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial(\mathrm{V} + \mathfrak{V})}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mathrm{V}' + \mathfrak{V}')}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial(\mathrm{V} + \mathfrak{V})}{\partial z} = \dfrac{\partial(\mathrm{V}' + \mathfrak{V}')}{\partial z}. \end{cases}$$

Moyennant ces égalités (131), les égalités (72), où l'on doit faire

$$\theta = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0,$$

deviennent

$$\rho_2 u_2 = -\varepsilon \frac{\partial(\mathrm{V}' + \mathfrak{V}')}{\partial x} - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t},$$
$$\rho_2 v_2 = -\varepsilon \frac{\partial(\mathrm{V}' + \mathfrak{V}')}{\partial y} - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t},$$
$$\rho_2 w_2 = -\varepsilon \frac{\partial(\mathrm{V}' + \mathfrak{V}')}{\partial z} - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}.$$

Multiplions respectivement les deux membres de chacune de ces équations par $u_2\, d\varpi_2$, $v_2\, d\varpi_2$, $w_2\, d\varpi_2$; ajoutons membre à membre les résultats obtenus et intégrons pour toute la région de l'espace à laquelle s'applique l'indice 2. Nous trouverons l'égalité

$$(132)\qquad \int_2 \rho_2(u_2^2+v_2^2+w_2^2)\,d\varpi_2$$
$$= -\varepsilon \int_2 \left[\frac{\partial(\mathrm{V}'+\mathfrak{V}')}{\partial x}u_2+\frac{\partial(\mathrm{V}'+\mathfrak{V}')}{\partial y}v_2+\frac{\partial(\mathrm{V}'+\mathfrak{V}')}{\partial z}w_2\right]d\varpi_2$$
$$-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int_2\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}u_2+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t}v_2+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}w_2\right)d\varpi_2.$$

Les équations (73) et (131) montrent que l'on a, en tout point du corps 2,

$$\frac{\mathcal{A}_2}{\mathrm{F}_2} = -\varepsilon\frac{\partial(\mathrm{V}'+\mathfrak{V}')}{\partial x}-\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t},$$
$$\frac{\mathcal{B}_2}{\mathrm{F}_2} = -\varepsilon\frac{\partial(\mathrm{V}'+\mathfrak{V}')}{\partial y}-\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t},$$
$$\frac{\mathcal{C}_2}{\mathrm{F}_2} = -\varepsilon\frac{\partial(\mathrm{V}'+\mathfrak{V}')}{\partial z}-\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}.$$

Multiplions les premiers membres de ces égalités par $\frac{\partial\mathcal{A}_2}{\partial t}d\varpi_2$, $\frac{\partial\mathcal{B}_2}{\partial t}d\varpi_2$, $\frac{\partial\mathcal{C}_2}{\partial t}d\varpi_2$ et les seconds membres par les quantités, égales aux précédentes, $\varphi_2\,d\varpi_2$, $\psi_2\,d\varpi_2$, $\chi_2\,d\varpi_2$; ajoutons membre à membre les résultats obtenus et intégrons pour toute la région de l'espace que désigne l'indice 2.

Nous aurons l'égalité suivante :

$$(133)\qquad \int_2 \frac{\mathcal{A}_2\frac{\partial\mathcal{A}_2}{\partial t}+\mathcal{B}_2\frac{\partial\mathcal{B}_2}{\partial t}+\mathcal{C}_2\frac{\partial\mathcal{C}_2}{\partial t}}{\mathrm{F}_2}d\varpi_2$$
$$= -\varepsilon \int_2 \left[\frac{\partial(\mathrm{V}'+\mathfrak{V}')}{\partial x}\varphi_2+\frac{\partial(\mathrm{V}'+\mathfrak{V}')}{\partial y}\psi_2+\frac{\partial(\mathrm{V}'+\mathfrak{V}')}{\partial z}\chi_2\right]d\varpi_2$$
$$-\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\int_2\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}\varphi_2+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t}\psi_2+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}\chi_2\right)d\varpi_2$$

En tout point du corps 1, les quantités $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}_1$ vérifient des égalités semblables aux égalités (75). Si l'on en retranche membre à membre les égalités (122), en tenant compte des égalités (130), on trouve

$$\frac{\mathcal{A}'_1}{F_1} = -\varepsilon\frac{\partial(V'+\mathfrak{V}')}{\partial x} - \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t},$$
$$\frac{\mathcal{B}'_1}{F_1} = -\varepsilon\frac{\partial(V'+\mathfrak{V}')}{\partial y} - \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t},$$
$$\frac{\mathcal{C}'_1}{F_1} = -\varepsilon\frac{\partial(V'+\mathfrak{V}')}{\partial z} - \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}.$$

De ces égalités, on déduit sans peine la nouvelle égalité

$$(134)\qquad \int_1 \frac{\mathcal{A}'_1\frac{\partial\mathcal{A}'_1}{\partial t} + \mathcal{B}'_1\frac{\partial\mathcal{B}'_1}{\partial t} + \mathcal{C}'_1\frac{\partial\mathcal{C}'_1}{\partial t}}{F_1}\,d\varpi_1$$
$$= -\varepsilon\int_1\left[\frac{\partial(V'+\mathfrak{V}')}{\partial x}\varphi_1 + \frac{\partial(V'+\mathfrak{V}')}{\partial y}\psi_1 + \frac{\partial(V'+\mathfrak{V}')}{\partial z}\chi_1\right]d\varpi_1$$
$$-\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\int_1\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}\varphi_1 + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t}\psi_1 + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}\chi_1\right)d\varpi_1,$$

où les intégrations s'étendent à toute la région de l'espace que désigne l'indice 1.

Posons

$$(135)\qquad \begin{cases} \mathfrak{M}_2^2 = \mathcal{A}_2^2 + \mathcal{B}_2^2 + \mathcal{C}_2^2, \\ \mathfrak{M}_1'^2 = \mathcal{A}_1'^2 + \mathcal{B}_1'^2 + \mathcal{C}_1'^2, \end{cases}$$

Ajoutons membre à membre les égalités (132), (133), (134), en observant que l'on a, en tout point de la région 1,

$$(120)\qquad u_1 = 0, \qquad v_1 = 0, \qquad w_1 = 0,$$

et en tenant compte des égalités (54) et (69). Nous trouvons l'égalité

$$(136)\qquad \int_2 \rho_2(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)\,d\varpi_2$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\int_1\frac{\mathfrak{M}_1'^2}{2F_1}\,d\varpi_1 + \frac{\partial}{\partial t}\int_2\frac{\mathfrak{M}_2^2}{2F_2}\,d\varpi_2$$
$$= -\varepsilon\int_2\left[\frac{\partial(V'+\mathfrak{V}')}{\partial x}u_2 + \frac{\partial(V'+\mathfrak{V}')}{\partial y}v_2 + \frac{\partial(V'+\mathfrak{V}')}{\partial z}w_2\right]d\varpi_2$$
$$-\varepsilon\int\left[\frac{\partial(V'+\mathfrak{V}')}{\partial x}\varphi + \frac{\partial(V'+\mathfrak{V}')}{\partial y}\psi + \frac{\partial(V'+\mathfrak{V}')}{\partial z}\chi\right]d\varpi$$
$$+\frac{\partial\Pi}{\partial t} - \int\Bigg[\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}u + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\varphi\right)\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$
$$+\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}v + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\psi\right)\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$
$$+\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}w + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\chi\right)\frac{\partial X}{\partial t}\Bigg]d\varpi,$$

les intégrales qui ne portent pas d'indice s'étendant à tout l'espace.

Considérons la distribution électrique suivante :

(137)
$$\left\{\begin{array}{l} 1^{\circ}\ \text{Sur le corps } 1 \\ e = 0, \qquad \mathcal{A} = \mathcal{A}'_1, \qquad \mathcal{B} = \mathcal{B}'_1, \qquad \mathcal{C} = \mathcal{C}'_1; \\ 2^{\circ}\ \text{Sur le corps } 2 \\ e = e_2, \qquad \mathcal{A} = \mathcal{A}_2, \qquad \mathcal{B} = \mathcal{B}_2, \qquad \mathcal{C} = \mathcal{C}_2; \\ 3^{\circ}\ \text{Sur les surfaces de discontinuité} \\ \qquad\qquad \mathbf{E} = \mathbf{E}'. \end{array}\right.$$

Soit W′ le potentiel électrostatique de cette distribution (137).

Il est aisé de voir que l'on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{W}'}{\partial t} = {} & \varepsilon \int_2 \left[\frac{\partial(\mathrm{V}' + \mathfrak{V}')}{\partial x} u_2 + \frac{\partial(\mathrm{V}' + \mathfrak{V}')}{\partial y} v_2 + \frac{\partial(\mathrm{V}' + \mathfrak{V}')}{\partial z} w_2 \right] d\varpi_2 \\ & + \varepsilon \int \left[\frac{\partial(\mathrm{V}' + \mathfrak{V}')}{\partial x} \varphi + \frac{\partial(\mathrm{V}' + \mathfrak{V}')}{\partial y} \psi + \frac{\partial(\mathrm{V}' + \mathfrak{V}')}{\partial z} \chi \right] d\varpi, \end{aligned}$$

en sorte que l'égalité (136) devient

(138)
$$\begin{aligned} & \int_2 \rho_2 (u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)\, d\varpi_2 \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \int_1 \frac{\mathfrak{M}_1'^2}{2 \mathrm{F}_1} d\varpi_1 + \frac{\partial}{\partial t} \int_2 \frac{\mathfrak{M}_2^2}{2 \mathrm{F}_2} d\varpi_2 \\ & = - \frac{\partial \mathbf{W}'}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \int \Bigg[\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} u + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \varphi \right) \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ & \qquad + \left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} v + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \psi \right) \frac{\partial \Psi}{\partial t} \\ & \qquad + \left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} w + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \chi \right) \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial t} \Bigg] d\varpi. \end{aligned}$$

Les quantités α, β, γ vérifient, en tous les points du système, les égalités

(75)
$$\left\{\begin{aligned} \frac{\alpha}{f} &= - \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x} - \mathfrak{L}, \\ \frac{\beta}{f} &= - \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y} - \mathfrak{M}, \\ \frac{\gamma}{f} &= - \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial z} - \mathfrak{N}. \end{aligned}\right.$$

Multiplions respectivement ces équations par $\alpha\,d\varpi$, $\beta\,d\varpi$, $\gamma\,d\varpi$; ajoutons membre à membre les équations obtenues et intégrons pour tout l'espace en posant

$$\mu^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

et en tenant compte de l'égalité (65). Nous trouvons l'égalité suivante :

$$(139) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\mu^2}{2f}\,d\varpi = -\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial t} - \int\left(\mathfrak{L}\,\frac{\partial\alpha}{\partial t} + \mathfrak{M}\,\frac{\partial\beta}{\partial t} + \mathfrak{N}\,\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)d\varpi.$$

La comparaison des égalités (70) et (71) donne l'identité

$$\begin{aligned}\int\left(\mathfrak{L}\,\frac{\partial\alpha}{\partial t} + \mathfrak{M}\,\frac{\partial\beta}{\partial t} + \mathfrak{N}\,\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)d\varpi \\ = -\int\Bigg[& \left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,u + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,\varphi\right)\frac{\partial\Phi}{\partial t} \\ & + \left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,v + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,\psi\right)\frac{\partial\Psi}{\partial t} \\ & + \left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,w + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{X}\right)\frac{\partial\mathrm{X}}{\partial t}\Bigg]\,d\varpi.\end{aligned}$$

En vertu de cette identité, les égalités (138) et (139) donnent l'égalité

$$(140) \qquad \begin{aligned} & \int_2 \rho_2(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)\,d\varpi_2 \\ & + \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_1 \frac{\mathfrak{M}_1'^2}{2\mathrm{F}_1}\,d\varpi_1 + \int_2 \frac{\mathfrak{M}_2^2}{2\mathrm{F}_2}\,d\varpi_2 + \int \frac{\mu^2}{2f}\,d\varpi + \mathrm{W}'' + \mathfrak{T} - \Pi\right] = 0.\end{aligned}$$

Multiplions par dt les deux membres de cette équation (140) et intégrons par rapport à t depuis l'instant t_0 jusqu'à un instant quelconque t, postérieur à t_0. Nous obtenons l'égalité

$$(141) \qquad \begin{aligned} & \int_{t_0}^{t}\int_2 [\rho_2(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)\,d\varpi_2]\,dt \\ & + \int_1 \frac{\mathfrak{M}_1'^2}{2\mathrm{F}_1}\,d\varpi_1 + \int_2 \frac{\mathfrak{M}_2^2}{2\mathrm{F}^2}\,d\varpi_2 + \int \frac{\mu^2}{2f}\,d\varpi \\ & + \mathrm{W}' + \mathfrak{T} + (-\Pi) \\ = \; & \int_1 \frac{(\mathfrak{M}_1')_0^2}{2\mathrm{F}_1}\,d\varpi_1 + \int_2 \frac{(\mathfrak{M}_2)_0^2}{2\mathrm{F}_2}\,d\varpi_2 + \int \frac{\mu_0^2}{2f}\,d\varpi \\ & + \mathrm{W}_0' + \mathfrak{T}_0 - \Pi_0.\end{aligned}$$

On peut toujours prendre les perturbations initiales (128) assez voisines de zéro pour que le second membre de l'égalité (141) soit inférieur à une quantité positive quelconque donnée d'avance. Si l'on admet les restrictions (124), (125) et (126), on est assuré qu'aucun des termes du premier membre ne peut être négatif. On voit donc que l'on peut prendre les perturbations initiales (128) assez petites pour que *chacun* des termes qui figurent au premier membre de l'égalité (141) demeure, quel que soit t, inférieur à une quantité positive donnée d'avance, si petite soit-elle. Il faut et il suffit pour cela que chacune des quantités (129) demeure, quel que soit t, inférieur en valeur absolue à une quantité positive quelconque donnée d'avance.

La stabilité de l'équilibre électrique sur un système immobile est donc assurée.

Nous conviendrons, désormais, de ne jamais attribuer aux quantités λ, F, f, de valeurs négatives, de telle sorte que l'équilibre d'un système immobile soit assurément stable.

CHAPITRE V.

PROPAGATION D'UNE PERTURBATION ÉLECTRIQUE DANS UN MILIEU CONTINU.

I. — *Équations générales.*

Considérons un milieu *homogène;* les quantités ρ, F, f, au lieu d'y être des fonctions de x, y, z, y sont de simples constantes. Supposons, en outre, qu'en tout point de ce milieu on ait

$$\theta = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0. \tag{142}$$

En vertu des égalités (17), les égalités (72) permettent d'écrire, en tout point d'un tel milieu,

$$\left\{\begin{aligned}
\Delta\mathcal{U} - (1-\lambda)\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial t} &= \frac{4\pi}{\rho}\left[\varepsilon\frac{\partial(V+\mathfrak{v})}{\partial x} + \frac{\mathfrak{I}}{\sqrt{2}}\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}\right],\\
\Delta\mathcal{V} - (1-\lambda)\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial t} &= \frac{4\pi}{\rho}\left[\varepsilon\frac{\partial(V+\mathfrak{v})}{\partial y} + \frac{\mathfrak{I}}{\sqrt{2}}\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t}\right],\\
\Delta\mathcal{W} - (1-\lambda)\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial t} &= \frac{4\pi}{\rho}\left[\varepsilon\frac{\partial(V+\mathfrak{v})}{\partial z} + \frac{\mathfrak{I}}{\sqrt{2}}\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}\right].
\end{aligned}\right. \tag{143}$$

De même, les égalités (19) et (74) donnent les égalités

$$\left\{\begin{aligned}
\Delta\mathfrak{F} - (1-\lambda)\frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial x\,\partial t} &= 4\pi F\frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon\frac{\partial(V+\mathfrak{v})}{\partial x} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}\right],\\
\Delta\mathfrak{G} - (1-\lambda)\frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial y\,\partial t} &= 4\pi F\frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon\frac{\partial(V+\mathfrak{v})}{\partial y} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t}\right],\\
\Delta\mathfrak{H} - (1-\lambda)\frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial z\,\partial t} &= 4\pi F\frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon\frac{\partial(V+\mathfrak{v})}{\partial z} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}\right].
\end{aligned}\right. \tag{144}$$

Différentions la première des égalités (143) par rapport à x, la deuxième par rapport à y, la troisième par rapport à z et ajoutons membre à membre les résultats obtenus. Nous trouvons l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
&\Delta\left(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y} + \frac{\partial\mathcal{W}}{\partial z}\right) - (1-\lambda)\,\Delta\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)\\
&\qquad = \frac{4\pi\varepsilon}{\rho}\Delta(V+\mathfrak{v}) + \frac{4\pi}{\rho}\frac{\mathfrak{I}}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right).
\end{aligned} \tag{145}$$

Différentions de même la première égalité (144) par rapport à x, la deuxième par rapport à y, la troisième par rapport à z et ajoutons membre à membre les résultats obtenus. Nous trouvons l'égalité

$$(146)\qquad \Delta\left(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial z}\right)-(1-\lambda)\Delta\left(\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t}\right)$$
$$=4\pi\varepsilon\mathrm{F}\Delta\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{v})}{\partial t}+4\pi\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\mathrm{F}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right).$$

Multiplions les deux membres de l'égalité (145) par $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}$, les deux membres de l'égalité (146) par $\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}$, et ajoutons membre à membre les résultats obtenus en tenant compte des égalités (22), (53) et (54). Nous trouvons

$$(147)\qquad \Delta\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right)-(1-\lambda)\Delta\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t}$$
$$=\frac{4\pi\varepsilon}{\rho}\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\Delta(\mathrm{V}+\mathfrak{v})+4\pi\varepsilon\mathrm{F}\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\Delta\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{v})}{\partial t}$$
$$+\frac{4\pi}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right)$$
$$+4\pi\mathrm{F}\frac{\mathfrak{C}^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right).$$

Mais les égalités (54), jointes aux égalités (18), (20) et (22), donnent l'égalité

$$(148)\qquad \frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}+\lambda\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t}=0.$$

Moyennant cette égalité (148), l'équation (147) devient

$$(149)\qquad \Delta\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t}-\frac{4\pi}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\lambda\frac{\partial^2\mathfrak{U}}{\partial t^2}-4\pi\mathrm{F}\frac{\mathfrak{C}^2}{2}\lambda\frac{\partial^3\mathfrak{U}}{\partial t^3}$$
$$+4\pi\varepsilon\left[\frac{\mathfrak{A}}{\rho\sqrt{2}}\Delta(\mathrm{V}+\mathfrak{v})+\frac{\mathfrak{C}\mathrm{F}}{\sqrt{2}}\Delta\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{v})}{\partial t}\right]=0.$$

D'autre part, les équations (21) et (76) nous donnent

$$(150)\qquad \left\{\begin{aligned}
\Delta\Phi&=\frac{4\pi f}{1+4\pi f}\left[\Delta\mathfrak{X}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right)\right],\\
\Delta\Psi&=\frac{4\pi f}{1+4\pi f}\left[\Delta\mathfrak{Y}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right)\right],\\
\Delta\mathrm{X}&=\frac{4\pi f}{1+4\pi f}\left[\Delta\mathfrak{Z}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right)\right].
\end{aligned}\right.$$

Multiplions les deux membres de la première égalité (17) par $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}$; les deux membres de la première égalité (19) par $\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}$; ajoutons membre à membre les résultats obtenus et la première égalité (150), en tenant compte des égalités (52), (53), (54) et (148); nous trouvons la première des égalités

$$(151)\quad \left\{\begin{aligned}
&\Delta\mathfrak{X} + \frac{1+4\pi f-\lambda}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right)+4\pi(1+4\pi f)\,\mathfrak{u}=0,\\
&\Delta\mathfrak{Y} + \frac{1+4\pi f-\lambda}{\lambda}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right)+4\pi(1+4\pi f)\,\mathfrak{v}=0,\\
&\Delta\mathfrak{Z} + \frac{1+4\pi f-\lambda}{\lambda}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right)+4\pi(1+4\pi f)\,\mathfrak{w}=0.
\end{aligned}\right.$$

Les deux dernières s'établissent d'une manière analogue.

En vertu des égalités (52), (72) et (74), ces égalités (151) peuvent s'écrire

$$(152)\quad \left\{\begin{aligned}
&\Delta\mathfrak{X} + \frac{1+4\pi f-\lambda}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right)\\
&\quad-\frac{4\pi}{\rho}(1+4\pi f)\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}-4\pi\mathrm{F}(1+4\pi f)\frac{\mathfrak{C}^2}{2}\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}\\
&\quad-\frac{4\pi\varepsilon}{\rho}(1+4\pi f)\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{V})}{\partial x}-4\pi\varepsilon\mathrm{F}(1+4\pi f)\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial^2(\mathrm{V}+\mathfrak{V})}{\partial x\,\partial t}=0,\\
&\Delta\mathfrak{Y} + \frac{1+4\pi f-\lambda}{\lambda}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right)\\
&\quad-\frac{4\pi}{\rho}(1+4\pi f)\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t}-4\pi\mathrm{F}(1+4\pi f)\frac{\mathfrak{C}^2}{2}\frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}\\
&\quad-\frac{4\pi\varepsilon}{\rho}(1+4\pi f)\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{V})}{\partial y}-4\pi\varepsilon\mathrm{F}(1+4\pi f)\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial^2(\mathrm{V}+\mathfrak{V})}{\partial y\,\partial t}=0,\\
&\Delta\mathfrak{Z} + \frac{1+4\pi f-\lambda}{\lambda}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right)\\
&\quad-\frac{4\pi}{\rho}(1+4\pi f)\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}-4\pi\mathrm{F}(1+4\pi f)\frac{\mathfrak{C}^2}{2}\frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}\\
&\quad-\frac{4\pi\varepsilon}{\rho}(1+4\pi f)\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{V})}{\partial z}-4\pi\varepsilon\mathrm{F}(1+4\pi f)\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial^2(\mathrm{V}+\mathfrak{V})}{\partial z\,\partial t}=0.
\end{aligned}\right.$$

II. — *Conséquences de l'hypothèse inacceptable* $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}$.

Supposons, pour un instant, que nous fassions l'hypothèse

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C}, \tag{51}$$

hypothèse reçue, jusqu'ici, par tous les auteurs qui ont traité de l'électrodynamique des courants de déplacement, mais hypothèse que nous savons, aujourd'hui, être inadmissible. L'égalité (53) pourra s'écrire, dans ce cas,

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}(\mathrm{V} + \mathfrak{V}) = \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(\mathrm{V} + \mathfrak{V}) = \mathfrak{U}. \tag{153}$$

L'équation (149) ne renferme plus que la fonction $\mathfrak{U}$ et devient

$$\begin{aligned} &\frac{4\pi\varepsilon}{\rho}\Delta\mathfrak{U} + (1 + 4\pi\varepsilon\mathrm{F})\Delta\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t} \\ &\qquad - \frac{4\pi}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\lambda\frac{\partial^2\mathfrak{U}}{\partial t^2} - 4\pi\mathrm{F}\frac{\mathfrak{C}^2}{2}\lambda\frac{\partial^3\mathfrak{U}}{\partial t^3} = 0. \end{aligned} \tag{154}$$

Si l'on différentie par rapport à t les équations (152) et si l'on tient compte des égalités (153) et (158), on obtient trois équations aux dérivées partielles où ne figurent plus que les trois fonctions $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$.

Écrivons seulement la première de ces équations

$$\begin{aligned} &\Delta\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t} + \frac{4\pi\varepsilon(1 + 4\pi f)}{\lambda\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right) \\ &\quad + \frac{(1 + 4\pi f)(1 + 4\pi\varepsilon\mathrm{F}) - \lambda}{\lambda}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right) \\ &\qquad - \frac{4\pi}{\rho}(1 + 4\pi f)\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2} - 4\pi\mathrm{F}(1 + 4\pi f)\frac{\mathfrak{C}^2}{2}\frac{\partial^3\mathfrak{X}}{\partial t^3} = 0. \end{aligned} \tag{155}$$

Ces équations (154) et (155) peuvent être regardées comme la forme correcte sous laquelle devraient être mises les équations analogues données par Maxwell [1].

---

(1) MAXWELL, *Traité d'électricité et de Magnétisme*. N° 783, éq. (8) et (7). (Tome II, p. 488 de la traduction française.)

III. — *Deux cas où il est légitime d'écrire des équations voisines des précédentes.*

En rejetant, comme nous devons le faire, l'hypothèse $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}$, nous sommes amenés, par le fait même, à rejeter l'égalité (153) et les conséquences qui s'en déduisent. Toutefois, dans deux cas particuliers, que nous allons préciser, certaines de ces conséquences redeviennent légitimes.

Le PREMIER CAS *est celui où le milieu, doué de pouvoir diélectrique, est absolument isolant.* — On a alors, en tout point de ce milieu,

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0.$$

Les égalités (1) et (14) donnent, pour un pareil corps,

$$\Delta \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \tag{156}$$

en sorte que l'égalité (53) permet d'écrire

$$\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \Delta \frac{\partial (V + \mathfrak{V})}{\partial t} = \Delta \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t}, \tag{156 bis}$$

relation qui représente une conséquence, *légitime dans ce cas*, de l'égalité *illégitime* (153).

Le DEUXIÈME CAS *est celui où le milieu est conducteur, mais privé de pouvoir diélectrique.* — On a alors, en tout point du milieu,

$$\mathcal{A} = 0, \qquad \mathcal{B} = 0, \qquad \mathcal{C} = 0.$$

L'équation (15) devient

$$\Delta \mathfrak{V} = 0. \tag{157}$$

L'équation (53) permet d'écrire la relation

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \Delta (V + \mathfrak{V}) = \Delta \mathfrak{U}. \tag{157 bis}$$

IV. — *Milieu isolant.*

Pour un milieu isolant, où ρ est infini, l'équation (149) devient, en tenant compte de l'égalité (156 *bis*), et en posant

$$\Omega = \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t}, \tag{158}$$

$$\frac{1 + 4\pi\varepsilon F}{4\pi\varepsilon F} \frac{1}{\lambda} \frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{C}^2}{2}} \Delta\Omega - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} = 0. \tag{159}$$

Si la constante λ est positive, *la fonction Ω vérifie, en tout point d'un milieu isolant, l'équation canonique des petits mouvements, la vitesse de propagation ayant pour valeur*

$$\mathfrak{T} = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\mathfrak{C}} \frac{\sqrt{1 + 4\pi\varepsilon F}}{\sqrt{4\pi\varepsilon F \lambda}}. \tag{160}$$

Si la constante λ est égale *à* 0, *la fonction Ω vérifie, en tout point du milieu isolant, l'équation de Laplace.*

De cette proposition on peut en déduire une autre dont le sens est plus concret.

Soit

$$\sigma = -\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z}\right) \tag{161}$$

la densité du fluide fictif équivalant à la polarisation diélectrique. On a, en général, en vertu de l'égalité (15),

$$\Delta \mathfrak{V} = -4\pi\sigma,$$

et, par conséquent,

$$\Delta \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t} = -4\pi \frac{\partial \sigma}{\partial t},$$

$\frac{\partial \sigma}{\partial t}$ est ce que nous nommerons la *vitesse de condensation du fluide diélectrique fictif.*

Dans le cas particulier qui nous occupe, cette égalité devient, en vertu des égalités (158) et (156),

$$\Delta\Omega = -4\pi \frac{\partial \sigma}{\partial t}. \tag{162}$$

Les égalités (159) et (162) nous montrent alors que l'on a

$$\frac{1+4\pi\varepsilon F}{4\pi\varepsilon F}\,\frac{1}{\lambda}\,\frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{C}^2}{2}}\,\Delta\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)=0. \tag{163}$$

Si la constante λ est positive *la vitesse de condensation du fluide diélectrique fictif vérifie, en tout point d'un milieu isolant, l'équation canonique des petits mouvements, la vitesse de propagation ayant la valeur* (160). Si la constante λ est égale a zéro, *cette vitesse de condensation vérifie l'équation de Laplace.*

Considérons maintenant la première des égalités (152). Donnons-y à ρ une valeur infinie. En vertu des égalités (74), elle pourra s'écrire

$$\begin{aligned}\Delta\mathfrak{X}+\frac{1+4\pi f-\lambda}{\lambda}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right)&\\ +4\pi\,\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,(1+4\pi f)\,\varphi&=0.\end{aligned}$$

Différentions deux fois cette égalité par rapport à t. Elle deviendra

$$\begin{aligned}\Delta\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}+\frac{1+4\pi f-\lambda}{\lambda}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3\mathfrak{X}}{\partial x\,\partial t^2}+\frac{\partial^3\mathfrak{Y}}{\partial y\,\partial t^2}+\frac{\partial^3\mathfrak{Z}}{\partial z\,\partial t^2}\right)&\\ +4\pi\,\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,(1+4\pi f)\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}&=0.\end{aligned}$$

Dans cette égalité, remplaçons $\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}$ par leurs valeurs déduites des égalités (74) et nous trouvons

$$\begin{aligned}\Delta\varphi+\frac{1+4\pi f-\lambda}{\lambda}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)-4\pi\,\frac{\mathfrak{C}^2}{2}\,F(1+4\pi f)\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}&\\ +\frac{(1+4\pi\varepsilon f)\varepsilon F}{\lambda}\,\frac{\partial}{\partial x}\,\Delta\,\frac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial t}&=0.\end{aligned}$$

Mais, dans le cas actuel, on a, en vertu de l'égalité (156),

$$\Delta\,\frac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial t}=4\pi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\chi}{\partial z}\right).$$

L'égalité précédente devient donc la première des égalités

$$(164)\quad \left\{\begin{aligned}
&\Delta\varphi + \frac{(1+4\pi\varepsilon F)(1+4\pi f)-\lambda}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)\\
&\qquad -(1+4\pi f)\,4\pi\varepsilon F\,\frac{\mathfrak{C}^2}{2\varepsilon}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0,\\
&\Delta\psi + \frac{(1+4\pi\varepsilon F)(1+4\pi f)-\lambda}{\lambda}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)\\
&\qquad -(1+4\pi f)\,4\pi\varepsilon F\,\frac{\mathfrak{C}^2}{2\varepsilon}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0,\\
&\Delta\chi + \frac{(1+4\pi\varepsilon F)(1+4\pi f)-\lambda}{\lambda}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)\\
&\qquad -(1+4\pi f)\,4\pi\varepsilon F\,\frac{\mathfrak{C}^2}{2\varepsilon}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}=0.
\end{aligned}\right.$$

On peut donc former trois équations aux dérivées partielles qui lient entre elles les trois composantes du flux de déplacement en tout point d'un milieu isolant. Ces équations sont de même forme que les équations des petits mouvements d'un solide élastique isotrope.

A ces équations on peut appliquer une proposition démontrée par Clebsch pour les équations des petits mouvements des corps isotropes. *On peut écrire*

$$(165)\quad \left\{\begin{aligned}
\varphi &= \frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial n}{\partial y}-\frac{\partial m}{\partial z},\\
\psi &= \frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial l}{\partial z}-\frac{\partial n}{\partial x},\\
\chi &= \frac{\partial a}{\partial z}+\frac{\partial m}{\partial x}-\frac{\partial l}{\partial y},
\end{aligned}\right.$$

a étant une fonction de x, y, z, t qui vérifie l'équation

$$(166)\quad \frac{1+4\pi\varepsilon F}{4\pi\varepsilon F}\,\frac{1}{\lambda}\,\frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{C}^2}{2}}\,\Delta a-\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}=0,$$

c'est-à-dire l'équation canonique des petits mouvements où la vitesse de propagation a une valeur $\mathfrak{C}$ donnée par l'égalité (160), *tandis que l, m, n sont des fonctions de x, y, z, t dont chacune vérifie l'équation*

$$(167)\quad \frac{1}{(1+4\pi f)\,4\pi\varepsilon F}\,\frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{C}^2}{2}}\,\Delta p-\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=0,$$

c'est-à-dire pour l'équation canonique des petits mouvements, où la vitesse de propagation a la valeur

$$(168) \qquad \tau = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\mathfrak{C}} \frac{1}{\sqrt{(1+4\pi f)\,4\pi\varepsilon F}}.$$

Helmholtz [1] a donné des équations semblables aux équations (164), mais portant sur les composantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ de la polarisation. Pour obtenir les équations de Helmholtz, il suffit de suivre une marche analogue à celle qui nous a fourni les équations (164), en différentiant une fois seulement les égalités (152) par rapport à t et en supposant que

$$\Delta V = 0,$$

c'est-à-dire que le diélectrique mauvais conducteur ne renferme pas de charge électrique répandue dans sa masse. Les équations (164) sont indépendantes de cette hypothèse.

V. — *Milieu conducteur non diélectrique.*

Considérons maintenant un milieu conducteur, mais privé de pouvoir diélectrique, en sorte que $F = 0$. L'équation (149) devient

$$\Delta \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} - \frac{4\pi}{\rho} \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \lambda \frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\varepsilon}{\rho} \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \Delta(V + \mathfrak{v}) = 0.$$

En vertu de l'égalité (157 *bis*), cette égalité devient

$$(169) \qquad 4\pi\varepsilon\,\Delta\mathfrak{U} + \rho\,\Delta \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} - 4\pi \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \lambda \frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial t^2} = 0.$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles que vérifie la fonction $\mathfrak{U}$ au sein d'un milieu non diélectrique.

La nature des intégrales de cette équation varie beaucoup avec la grandeur relative des trois constantes positives

$$4\pi\varepsilon, \quad \rho, \quad 4\pi \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \lambda.$$

---

(1) H. HELMHOLZ, *Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper*. Équations (21 c) (*Helmholtz wissenschaftliche Abhandlungen*, t. I, p. 625).

Considérons seulement le *cas d'un conducteur parfait*, c'est-à-dire le cas où l'on a

$$\rho = 0. \tag{170}$$

1° LA CONSTANTE λ A UNE VALEUR POSITIVE. — L'équation (169) peut alors s'écrire

$$\frac{2\varepsilon}{\mathfrak{A}^2\lambda}\Delta\mathfrak{U} - \frac{\partial^2\mathfrak{U}}{\partial t} = 0. \tag{171}$$

Dans un conducteur parfait dénué de pouvoir diélectrique, la fonction $\mathfrak{U}$ vérifie une équation canonique des petits mouvements où la vitesse de propagation a pour valeur

$$\mathfrak{T} = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\mathfrak{A}\sqrt{\lambda}}. \tag{172}$$

2° LA CONSTANTE λ EST ÉGALE A 0. L'équation (169) devient alors

$$\Delta\mathfrak{U} = 0. \tag{173}$$

La fonction $\mathfrak{U}$ vérifie l'équation de Laplace.

On peut donner de ces propositions une conséquence concrète. L'équation (157), jointe à l'égalité (14), nous permet d'écrire, dans le cas actuel,

$$\Delta\mathfrak{U} = -4\pi\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}e,$$

e étant la densité de l'électricité libre. Dès lors, on voit sans peine que l'on peut déduire des équations (169), (171) et (173) les équations suivantes, vérifiées par la densité de l'électricité libre

$$4\pi\varepsilon\,\Delta e - \rho\,\Delta\frac{\partial e}{\partial t} - 4\pi\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\lambda\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} = 0, \tag{174}$$

$$\frac{2\varepsilon}{\mathfrak{A}^2\lambda}\Delta e - \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} = 0, \tag{175}$$

$$\Delta e = 0. \tag{176}$$

Les équations (175) et (176) peuvent s'énoncer de la manière suivante :

SI LA CONSTANTE λ A UNE VALEUR POSITIVE, *dans un conducteur parfait, dénué de pouvoir diélectrique, la densité électrique vérifie l'équation canonique des petits mouvements, la vitesse de propagation étant donnée par l'égalité* (172).

Si la constante λ est égale a o, *dans les mêmes conditions, la densité électrique vérifie l'équation de Laplace.*

Considérons maintenant la première des égalités (152). Donnons-y à F la valeur o. En vertu des égalités (72), elle pourra s'écrire

$$\Delta\mathfrak{X} + \frac{1+4\pi f-\lambda}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right) + 4\pi\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f)u = 0.$$

Différentions cette égalité par rapport à t. Elle deviendra

$$\Delta\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t} + \frac{1+4\pi f-\lambda}{\lambda}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right) + 4\pi\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f)\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Dans cette équation, remplaçons $\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}, \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}, \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}$, par leurs valeurs déduites des égalités (72). Elle deviendra

$$\Delta u + \frac{1+4\pi f-\lambda}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) - \frac{4\pi(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\varepsilon(1+4\pi f)}{\lambda\rho}\frac{\partial}{\partial x}\Delta(\mathrm{V}+\mathfrak{V}) = 0.$$

Or les équations (14) et (157) donnent, dans le cas actuel,

$$\Delta(\mathrm{V}+\mathfrak{V}) = -4\pi e.$$

On obtient donc la première des équations suivantes

$$(177)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta u + \frac{1+4\pi f-\lambda}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\ &\qquad - \frac{4\pi(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{4\pi(1+4\pi f)\varepsilon}{\lambda\rho}\frac{\partial e}{\partial x} = 0,\\ &\Delta v + \frac{1+4\pi f-\lambda}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\ &\qquad - \frac{4\pi(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{4\pi(1+4\pi f)\varepsilon}{\lambda\rho}\frac{\partial e}{\partial y} = 0,\\ &\Delta w + \frac{1+4\pi f-\lambda}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\ &\qquad - \frac{4\pi(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{4\pi(1+4\pi f)\varepsilon}{\lambda\rho}\frac{\partial e}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right.$$

De ces équations on peut en déduire d'autres qui ne renferment plus que les trois fonctions u, v, w. Il suffit de différentier les égalités (177) par rapport à t, en tenant compte de l'égalité (1). Nous trouvons ainsi les équations

$$
(178)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{4\pi(1+4\pi f)\varepsilon}{\lambda\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
&\quad +\Delta\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1+4\pi f-\lambda}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
&\qquad\qquad -\frac{4\pi(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,\\
&\frac{4\pi(1+4\pi f)\varepsilon}{\lambda\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
&\quad +\Delta\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1+4\pi f-\lambda}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
&\qquad\qquad -\frac{4\pi(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0,\\
&\frac{4\pi(1+4\pi f)\varepsilon}{\lambda\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
&\quad +\Delta\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1+4\pi f-\lambda}{\lambda}\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
&\qquad\qquad -\frac{4\pi(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces équations s'éclairent par une transformation analogue à la transformation de Clebsch pour les équations des petits mouvements d'un solide isotrope.

On peut écrire

$$
(179)\quad \left\{
\begin{aligned}
u&=\frac{\partial\mathfrak{a}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{n}}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{m}}{\partial z},\\
v&=\frac{\partial\mathfrak{a}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{l}}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{n}}{\partial x},\\
w&=\frac{\partial\mathfrak{a}}{\partial z}+\frac{\partial\mathfrak{m}}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{l}}{\partial y},
\end{aligned}
\right.
$$

$\mathfrak{a}$ *étant une fonction de* x, y, z, t *qui vérifie l'équation*

$$
(180)\qquad 4\pi\varepsilon\,\Delta\mathfrak{a}+\rho\,\Delta\frac{\partial\mathfrak{a}}{\partial t}-4\pi\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\lambda\frac{\partial^2\mathfrak{a}}{\partial t^2}=0,
$$

semblable aux équations (169) *et* (174), *tandis que* $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ *sont des fonc-*

tions de x, y, z, t, dont les dérivées par rapport au temps $\frac{\partial \mathfrak{l}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial t}$, *vérifient toutes trois l'équation*

$$\Delta p - \frac{4\pi(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial p}{\partial t} = 0, \tag{181}$$

qui appartient au même type que l'équation de la conductibilité calorifique dans un milieu homogène et isotrope.

VI. — *Actions magnétiques.*

Revenons maintenant aux équations générales (152).

Différentions la deuxième de ces équations par rapport à z, la troisième par rapport à y et retranchons membre à membre le premier résultat du second en tenant compte de la première des égalités (76).

Nous trouvons la première des égalités suivantes

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta\alpha - \frac{4\pi(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial t} - 4\pi F(1+4\pi f)\frac{\mathfrak{C}^2}{2}\frac{\partial\beta}{\partial t^2} = 0,\\ &\Delta\beta - \frac{4\pi(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial\beta}{\partial t} - 4\pi F(1+4\pi f)\frac{\mathfrak{C}^2}{2}\frac{\partial^2\beta}{\partial t^2} = 0,\\ &\Delta\gamma - \frac{4\pi(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial\gamma}{\partial t} - 4\pi F(1+4\pi f)\frac{\mathfrak{C}^2}{2}\frac{\partial^2\gamma}{\partial t^2} = 0. \end{aligned}\right. \tag{182}$$

En vertu des équations (75) et (79), ces équations peuvent encore s'écrire

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta L - \frac{4\pi(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial L}{\partial t} - 4\pi F(1+4\pi f)\frac{\mathfrak{C}^2}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} = 0,\\ &\Delta M - \frac{4\pi(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial M}{\partial t} - 4\pi F(1+4\pi f)\frac{\mathfrak{C}^2}{2}\frac{\partial^2 M}{\partial t^2} = 0,\\ &\Delta N - \frac{4\pi(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial N}{\partial t} - 4\pi F(1+4\pi f)\frac{\mathfrak{C}^2}{2}\frac{\partial^2 N}{\partial t^2} = 0. \end{aligned}\right. \tag{183}$$

Maxwell aurait pu déduire ces équations des équations, d'ailleurs inexactes, qu'il a données au n° 783 de son Traité.

Les équations précédentes sont générales. Que deviennent-elles dans les deux cas particuliers auxquels nous nous sommes longuement arrêtés?

Dans un milieu entièrement isolant, où $\rho = \infty$, *les quantités* α, β, γ, L, M, N *vérifient l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{1}{(1+4\pi f)4\pi\varepsilon F}\frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{C}^2}{2}}\Delta p-\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=0. \tag{167}$$

Dans un milieu privé de pouvoir diélectrique, où F = 0, *les quantités* α, β, γ, L, M, N, *vérifient l'équation aux dérivées partielles*

$$\Delta p-\frac{4\pi(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial p}{\partial t}=0. \tag{181}$$

Le premier de ces deux résultats a été démontré par Helmholtz [1].

VII. — *Récapitulation.*

Si nous nous bornons soit aux milieux isolants, soit aux milieux privés de pouvoir diélectrique, nous trouvons que les diverses quantités qui figurent dans nos théories vérifient des équations aux dérivées partielles appartenant à un petit nombre de types qui sont les suivants :

1° *Corps isolant.* — Les quantités $\Omega=\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t}$, $\frac{\partial\sigma}{\partial t}$, a vérifient une équation aux dérivées partielles du type

$$\frac{1+4\pi\varepsilon F}{4\pi\varepsilon F}\frac{1}{\lambda}\frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{C}^2}{2}}\Delta p-\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=0. \tag{159}$$

Les fonctions l, m, n, α, β, γ vérifient une équation aux dérivées partielles du type

$$\frac{1}{(1+4\pi f)4\pi\varepsilon F}\frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{C}^2}{2}}\Delta p-\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=0. \tag{167}$$

2° *Corps privé de pouvoir diélectrique.* — Les fonctions $\mathfrak{U}$, e, $\mathfrak{a}$ vérifient une équation du type

$$4\pi\varepsilon\,\Delta p+\rho\,\Delta\frac{\partial p}{\partial t}-4\pi\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\lambda\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=0. \tag{169}$$

---

(1) HELMHOLTZ, *Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper.* Équations (21 *d*) (*Helmholtz Abhandlungen*, t. I, p. 625).

Les fonctions $\frac{\partial \mathfrak{l}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial t}$, α, β, γ vérifient une équation du type

$$\Delta p - \frac{4\pi(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial p}{\partial t} = 0. \tag{181}$$

Nous désignerons les équations (159) et (169) comme les *équations d'une perturbation électrostatique,* tandis que les équations (167) et (181) seront les *équations d'une perturbation électromagnétique;* CES MOTS N'ONT D'AUTRE SENS QUE CELUI D'UNE NOTATION.

Dans un corps privé de pouvoir diélectrique, l'équation des perturbations électromagnétiques est du même type que l'équation de la conductibilité calorifique; *il n'y a pas d'onde électromagnétique.*

Dans un corps isolant, l'équation des perturbations électromagnétiques est une équation canonique des petits mouvements; *il y a une onde électromagnétique qui se propage avec une vitesse*

$$\tau = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\mathfrak{C}}\frac{1}{\sqrt{(1+4\pi f)4\pi\varepsilon F}}. \tag{168}$$

Dans un corps isolant, l'équation des perturbations électrostatiques est une équation canonique des petits mouvements; *il y a une onde électrostatique qui se propage avec une vitesse*

$$\mathfrak{T} = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\mathfrak{C}}\frac{\sqrt{1+4\pi\varepsilon F}}{\sqrt{4\pi\varepsilon F}\sqrt{\lambda}}. \tag{160}$$

Dans un corps privé de pouvoir diélectrique, l'existence ou la non-existence des ondes électrostatiques dépend des grandeurs relatives des quantités

$$4\pi\varepsilon, \quad \rho, \quad 4\pi\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\lambda.$$

Dans un conducteur parfait, où $\rho = 0$, l'équation des perturbations électrostatiques devient

$$\frac{2\varepsilon}{\mathfrak{A}^2\lambda}\Delta p - \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \tag{171}$$

C'est une équation canonique des petits mouvements; *il y a une onde* *électrostatique qui se propage avec une vitesse*

$$\mathfrak{T} = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\mathfrak{A}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \tag{172}$$

L'expérience semble confirmer cette vue de Maxwell :

Dans l'éther diélectrique, la vitesse de propagation d'une perturbation électromagnétique est égale à la vitesse de la lumière dans le même milieu.

Nous avons vu ailleurs ([1]) que cette proposition entraînait la conséquence suivante :

On a

$$\frac{\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{A}^2} = \frac{1 + 4\pi\varepsilon F_0}{4\pi\varepsilon F_0}, \tag{184}$$

F_0 *étant le coefficient de polarisation diélectrique de l'éther.*

Désignons par $\mathfrak{C}_0$ la vitesse de propagation d'une onde électrostatique dans l'éther. Les équations (160), (172) et (184) donnent l'égalité

$$\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{T}. \tag{185}$$

D'où la proposition suivante :

Si une perturbation électromagnétique se propage dans l'éther avec la même vitesse que la lumière, une perturbation électrostatique se propage avec la même vitesse dans l'éther diélectrique et dans un conducteur parfait privé de pouvoir diélectrique.

Nous avons marqué, dans un autre Travail ([2]), le rôle capital que cette proposition paraît appelée à jouer dans le domaine de l'Électrodynamique.

([1]) *Quelques remarques au sujet de l'électrodynamique des corps diélectriques proposée par J.-Clerk Maxwell*, § IX.

([2]) *Sur l'interprétation théorique des expériences hertziennes* (*L'éclairage électrique*, t. IV, p. 494 ; 1895).

CHAPITRE VI.

CONDITIONS A LA SURFACE LIMITE DE DEUX MILIEUX.

I. — *Conditions à la limite commune de deux milieux isolants.*

Les conditions qui doivent être vérifiées à la limite de deux milieux offrent d'étroites analogies avec les conditions qui sont vérifiées en tout point d'un milieu illimité.

Considérons, en premier lieu, la surface de contact de deux milieux isolants doués de pouvoir diélectrique. Soient 1 et 2 ces deux milieux.

En chacun de ces deux milieux, et jusqu'au voisinage de la surface de contact, on peut écrire des équations telles que les équations (74).

$$(186)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\varphi_1}{F_1} + \varepsilon\frac{\partial^2(V_1+\mathfrak{V}_1)}{\partial x\,\partial t} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial^2\mathfrak{X}_1}{\partial t^2} = 0,\\ &\frac{\psi_1}{F_1} + \varepsilon\frac{\partial^2(V_1+\mathfrak{V}_1)}{\partial y\,\partial t} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial^2\mathfrak{Y}_1}{\partial t^2} = 0,\\ &\frac{\chi_1}{F_1} + \varepsilon\frac{\partial^2(V_1+\mathfrak{V}_1)}{\partial z\,\partial t} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial^2\mathfrak{Z}_1}{\partial t^2} = 0,\end{aligned}\right.$$

$$(186\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\varphi_2}{F_2} + \varepsilon\frac{\partial^2(V_2+\mathfrak{V}_2)}{\partial x\,\partial t} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial^2\mathfrak{X}_2}{\partial t^2} = 0,\\ &\frac{\psi_2}{F_2} + \varepsilon\frac{\partial^2(V_2+\mathfrak{V}_2)}{\partial y\,\partial t} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial^2\mathfrak{Y}_2}{\partial t^2} = 0,\\ &\frac{\chi_2}{F_2} + \varepsilon\frac{\partial^2(V_2+\mathfrak{V}_2)}{\partial z\,\partial t} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial^2\mathfrak{Z}_2}{\partial t^2} = 0.\end{aligned}\right.$$

Multiplions respectivement les équations (186) par $\cos(n_1, x)$, $\cos(n_1, y)$, $\cos(n_1, z)$; les équations (186 *bis*) par $\cos(n_2, x)$, $\cos(n_2, y)$, $\cos(n_2, z)$; ajoutons membre à membre les résultats obtenus, en tenant compte des égalités (54), (36), (39) et (42), qui donnent, quel que soit t, en tout point de la surface,

$$(187)\qquad \mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2,\qquad \mathfrak{Y}_1 = \mathfrak{Y}_2,\qquad \mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_2,$$

et nous trouverons

$$(188)\qquad \frac{\varphi_1\cos(n_1,x)+\psi_1\cos(n_1,y)+\chi_1\cos(n_1,z)}{F_1} + \frac{\varphi_2\cos(n_2,x)+\psi_2\cos(n_2,y)+\chi_2\cos(n_2,z)}{F_2} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V_1}{\partial n_1}+\frac{\partial V_2}{\partial n_2}+\frac{\partial \mathfrak{v}_1}{\partial n_1}+\frac{\partial \mathfrak{v}_2}{\partial n_2}\right)=0.$$

Mais les égalités (2) et (28) donnent

$$(189)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V_1}{\partial n_1}+\frac{\partial V_2}{\partial n_2}\right)=4\pi[u_1\cos(n_1,x)+v_1\cos(n_1,y)+w_1\cos(n_1,z) + u_2\cos(n_2,x)+v_2\cos(n_2,y)+w_2\cos(n_2,z)],$$

égalité qui devient

$$(190)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V_1}{\partial n_1}+\frac{\partial V_2}{\partial n_2}\right)=0,$$

puisque les deux milieux 1 et 2 sont supposés isolants.

D'autre part, les égalités (3) et (29) donnent l'égalité

$$(191)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{v}_1}{\partial n_1}+\frac{\partial \mathfrak{v}_2}{\partial n_2}\right)=4\pi[\varphi_1\cos(n_1,x)+\psi_1\cos(n_1,y)+\chi_1\cos(n_1,z) + \varphi_2\cos(n_2,x)+\psi_2\cos(n_2,y)+\chi_2\cos(n_2,z)].$$

Les égalités (188), (190) et (191) donnent l'égalité

$$(192)\qquad \frac{1+4\pi\varepsilon F_1}{F_1}[\varphi_1\cos(n_1,x)+\psi_1\cos(n_1,y)+\chi_1\cos(n_1,z)] + \frac{1+4\pi\varepsilon F_2}{F_2}[\varphi_2\cos(n_2,x)+\psi_2\cos(n_2,y)+\chi_2\cos(n_2,z)]=0,$$

ou bien, en vertu des égalités (74) et (77),

$$(192\ bis)\qquad (1+4\pi\varepsilon F_1)\frac{\partial}{\partial t}[X_1\cos(n_1,x)+Y_1\cos(n_1,y)+Z_1\cos(n_1,z)] + (1+4\pi\varepsilon F_2)\frac{\partial}{\partial t}[X_2\cos(n_2,x)+Y_2\cos(n_2,y)+Z_2\cos(n_2,z)]=0.$$

D'autre part, si nous désignons par T une direction quelconque, tangente à la surface de contact, les équations (186), (186 *bis*), (187), (29) et (32) donnent l'égalité

$$(193)\qquad \frac{1}{F_1}[\varphi_1\cos(T,x)+\psi_1\cos(T,y)+\chi_1\cos(T,z)] = \frac{1}{F_2}[\varphi_2\cos(T,x)+\psi_2\cos(T,y)+\chi_2\cos(T,z)].$$

Cette égalité peut encore s'écrire, en vertu des égalités (74) et (77),

$$(193\ bis)\qquad \frac{\partial}{\partial t}[X_1\cos(T,x)+Y_1\cos(T,y)+Z_1\cos(T,z)] = \frac{\partial}{\partial t}[X_2\cos(T,x)+Y_2\cos(T,y)+Z_2\cos(T,z)].$$

Telles sont les conditions auxquelles sont assujettis les flux de déplacement à la surface de contact de deux corps isolants quelconques.

II. — *Conditions à la limite commune de deux conducteurs dénués de pouvoir diélectrique.*

Les équations (72) nous permettent d'écrire

$$(194)\qquad \left\{\begin{aligned} &\rho_1 u_1+\varepsilon\frac{\partial(V_1+\mathfrak{V}_1)}{\partial x}+\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial\mathfrak{X}_1}{\partial t}=0,\\ &\rho_1 v_1+\varepsilon\frac{\partial(V_1+\mathfrak{V}_1)}{\partial y}+\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial\mathfrak{Y}_1}{\partial t}=0,\\ &\rho_1 w_1+\varepsilon\frac{\partial(V_1+\mathfrak{V}_1)}{\partial z}+\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial\mathfrak{Z}_1}{\partial t}=0,\end{aligned}\right.$$

$$(194\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} &\rho_2 u_2+\varepsilon\frac{\partial(V_2+\mathfrak{V}_2)}{\partial x}+\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial\mathfrak{X}_2}{\partial t}=0,\\ &\rho_2 v_2+\varepsilon\frac{\partial(V_2+\mathfrak{V}_2)}{\partial y}+\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial\mathfrak{Y}_2}{\partial t}=0,\\ &\rho_2 w_2+\varepsilon\frac{\partial(V_2+\mathfrak{V}_2)}{\partial z}+\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial\mathfrak{Z}_2}{\partial t}=0.\end{aligned}\right.$$

Multiplions respectivement les équations (194) par $\cos(n_1,x)$, $\cos(n_1,y)$, $\cos(n_1,z)$ et les équations (194 *bis*) par $\cos(n_2,x)$, $\cos(n_2,y)$, $\cos(n_2,z)$. Ajoutons membre à membre les résultats obtenus en tenant compte des égalités (187), et nous trouvons l'égalité suivante :

$$(195)\qquad \begin{aligned} &\rho_1[u_1\cos(n_1,x)+v_1\cos(n_1,y)+w_1\cos(n_1,z)]\\ &+\rho_2[u_2\cos(n_2,x)+v_2\cos(n_2,y)+w_2\cos(n_2,z)]\\ &+\varepsilon\left(\frac{\partial V_1}{\partial n_1}+\frac{\partial V_2}{\partial n_2}+\frac{\partial\mathfrak{V}_1}{\partial n_1}+\frac{\partial\mathfrak{V}_2}{\partial n_2}\right)=0.\end{aligned}$$

Mais, comme les milieux 1 et 2 sont dénués de pouvoir diélectrique, l'égalité (31) devient

$$\frac{\partial\mathfrak{V}_1}{\partial n_1}+\frac{\partial\mathfrak{V}_2}{\partial n_2}=0.$$

La condition (195) devient donc, en tenant compte de l'égalité (28),

$$(196)\qquad \begin{aligned} &\rho_1[u_1\cos(n_1,x)+v_1\cos(n_1,y)+w_1\cos(n_1,z)]\\ &+\rho_2[u_2\cos(n_2,x)+v_2\cos(n_2,y)+w_2\cos(n_2,z)]=4\pi\varepsilon\mathrm{E}. \end{aligned}$$

Si l'on différentie l'égalité (196) par rapport à t, en tenant compte de l'égalité (2), on trouve l'égalité

$$(197)\qquad \begin{aligned} &4\pi\varepsilon[u_1\cos(n_1,x)+v_1\cos(n_1,y)+w_1\cos(n_1,z)\\ &\qquad+u_2\cos(n_2,x)+v_2\cos(n_2,y)+w_2\cos(n_2,z)]\\ &+\rho_1\frac{\partial}{\partial t}[u_1\cos(n_1,x)+v_1\cos(n_1,y)+w_1\cos(n_1,z)]\\ &+\rho_2\frac{\partial}{\partial t}[u_2\cos(n_2,x)+v_2\cos(n_2,y)+w_2\cos(n_2,z)]=0. \end{aligned}$$

En vertu des égalités (72) et (78), cette égalité peut encore s'écrire

$$(197\,bis)\qquad \begin{aligned} &\frac{4\pi\varepsilon}{\rho_1}[\mathfrak{X}_1\cos(n_1,x)+\mathfrak{Y}_1\cos(n_1,y)+\mathfrak{Z}_1\cos(n_1,z)]\\ &+\frac{\partial}{\partial t}\,[\mathfrak{X}_1\cos(n_1,x)+\mathfrak{Y}_1\cos(n_1,y)+\mathfrak{Z}_1\cos(n_1,z)]\\ &+\frac{4\pi\varepsilon}{\rho_2}[\mathfrak{X}_2\cos(n_2,x)+\mathfrak{Y}_2\cos(n_2,y)+\mathfrak{Z}_2\cos(n_2,z)]\\ &+\frac{\partial}{\partial t}\,[\mathfrak{X}_2\cos(n_2,x)+\mathfrak{Y}_2\cos(n_2,y)+\mathfrak{Z}_2\cos(n_2,z)]=0. \end{aligned}$$

D'autre part, moyennant les égalités (187), (29) et (32), les égalités (194) et (194 *bis*) permettent d'écrire la condition

$$(198)\qquad \begin{aligned} &\rho_1[u_1\cos(\mathrm{T},x)+v_1\cos(\mathrm{T},y)+w_1\cos(\mathrm{T},z)]\\ &=\rho_2[u_2\cos(\mathrm{T},x)+v_2\cos(\mathrm{T},y)+w_2\cos(\mathrm{T},z)]. \end{aligned}$$

En vertu des égalités (72) et (78), cette égalité peut encore s'écrire

$$(198\,bis)\qquad \begin{aligned} &\mathfrak{X}_1\cos(\mathrm{T},x)+\mathfrak{Y}_1\cos(\mathrm{T},y)+\mathfrak{Z}_1\cos(\mathrm{T},z)\\ &=\mathfrak{X}_2\cos(\mathrm{T},x)+\mathfrak{Y}_2\cos(\mathrm{T},y)+\mathfrak{Z}_2\cos(\mathrm{T},z). \end{aligned}$$

Les équations (196), (197), (198) représentent les conditions vérifiées à la surface de contact de deux milieux privés de pouvoir diélectrique.

III. — *Conditions vérifiées par les composantes de l'aimantation à la surface de séparation de deux milieux.*

Pour établir ces conditions, il n'est plus nécessaire de faire aucune restriction sur la valeur de la conductibilité ou du pouvoir diélectrique des deux milieux.

La première des égalités (76) nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}&\frac{1+4\pi f_1}{f_1}\alpha_1\cos(n_1,x)+\frac{1+4\pi f_2}{f_2}\alpha_2\cos(n_2,x)\\&\quad=-\frac{\partial(\mathfrak{X}_1-\mathfrak{X}_2)}{\partial y}\cos(n_1,x)+\frac{\partial(\mathfrak{Y}_1-\mathfrak{Y}_2)}{\partial z}\cos(n_1,x).\end{aligned}$$

Les égalités (54), (38), (41), (44) donnent

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\mathfrak{X}_1-\mathfrak{X}_2)}{\partial y}&=\left(\frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial n_1}+\frac{\partial \mathrm{X}_2}{\partial n_2}\right)\cos(n_1,y)\\\frac{\partial(\mathfrak{Y}_1-\mathfrak{Y}_2)}{\partial z}&=\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial n_1}+\frac{\partial \Psi_2}{\partial n_2}\right)\cos(n_1,z),\end{aligned}$$

en sorte que l'égalité précédente devient

$$\begin{aligned}&\frac{1+4\pi f_1}{f_1}\alpha_1\cos(n_1,x)+\frac{1+4\pi f_2}{f_2}\alpha_2\cos(n_2,x)\\&\quad=-\left[\left(\frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial n_1}+\frac{\partial \mathrm{X}_2}{\partial n_2}\right)\cos(n_1,y)-\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial n_1}+\frac{\partial \Psi_2}{\partial n_2}\right)\cos(n_1,z)\right]\cos(n_1,x).\end{aligned}$$

Moyennant les égalités (43) et l'identité

$$\cos^2(n_1,x)+\cos^2(n_1,y)+\cos^2(n_1,z)=1,$$

l'égalité précédente se transforme en la première des égalités

$$(199)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{1+4\pi f_1}{f_1}\alpha_1\cos(n_1,x)+\frac{1+4\pi f_2}{f_2}\alpha_2\cos(n_2,x)\\&\quad=4\pi[\alpha_1\cos(n_1,x)+\alpha_2\cos(n_2,x)]\\&\qquad-4\pi\cos^2(n_1,x)[\alpha_1\cos(n_1,x)+\beta_1\cos(n_1,y)+\gamma_1\cos(n_1,z)\\&\qquad\qquad+\alpha_2\cos(n_2,x)+\beta_2\cos(n_2,y)+\gamma_2\cos(n_2,z)],\\&\frac{1+4\pi f_1}{f_1}\beta_1\cos(n_1,y)+\frac{1+4\pi f_2}{f_2}\beta_2\cos(n_2,y)\\&\quad=4\pi[\beta_1\cos(n_1,y)+\beta_2\cos(n_2,y)]\\&\qquad-4\pi\cos^2(n_1,y)[\alpha_1\cos(n_1,x)+\beta_1\cos(n_1,y)+\gamma_1\cos(n_1,z)\\&\qquad\qquad+\alpha_2\cos(n_2,x)+\beta_2\cos(n_2,y)+\gamma_2\cos(n_2,z)],\\&\frac{1+4\pi f_1}{f_1}\gamma_1\cos(n_1,z)+\frac{1+4\pi f_2}{f_2}\gamma_2\cos(n_2,z)\\&\quad=4\pi[\gamma_1\cos(n_1,z)+\gamma_2\cos(n_2,z)]\\&\qquad-4\pi\cos^2(n_1,z)[\alpha_1\cos(n_1,x)+\beta_1\cos(n_1,y)+\gamma_1\cos(n_1,z)\\&\qquad\qquad+\alpha_2\cos(n_2,x)+\beta_2\cos(n_2,y)+\gamma_2\cos(n_1,z)].\end{aligned}\right.$$

Les deux dernières s'établissent d'une manière analogue.

En ajoutant membre à membre les trois équations (199), on trouve

$$(200)\qquad \begin{aligned} &\frac{1+4\pi f_1}{f_1}[\alpha_1\cos(n_1,x)+\beta_1\cos(n_1,y)+\gamma_1\cos(n_1,z)]\\ &+\frac{1+4\pi f_2}{f_2}[\alpha_2\cos(n_2,x)+\beta_2\cos(n_2,y)+\gamma_2\cos(n_2,z)]=0. \end{aligned}$$

En vertu des égalités (75) et (79), cette égalité peut encore s'écrire

$$(200\ bis)\qquad \begin{aligned} &(1+4\pi f_1)[\mathrm{L}_1\cos(n_1,x)+\mathrm{M}_1\cos(n_1,y)+\mathrm{N}_1\cos(n_1,z)]\\ &+(1+4\pi f_2)[\mathrm{L}_2\cos(n_2,x)+\mathrm{M}_2\cos(n_2,y)+\mathrm{N}_2\cos(n_2,z)]=0. \end{aligned}$$

Soit maintenant T une direction tangente à la surface de discontinuité. La première des égalités (76) nous donnera

$$\begin{aligned} &\frac{1+4\pi f_1}{f_1}\alpha_1\cos(\mathrm{T},x)-\frac{1+4\pi f_2}{f_2}a_2\cos(\mathrm{T},x)\\ &=-\frac{\partial(\mathfrak{L}_1-\mathfrak{L}_2)}{\partial y}\cos(\mathrm{T},x)+\frac{\partial(\mathfrak{J}_1-\mathfrak{J}_2)}{\partial z}\cos(\mathrm{T},x). \end{aligned}$$

En vertu des égalités (54), (38), (41), (44), cette égalité deviendra

$$\begin{aligned} &\frac{1+4\pi f_1}{f_1}\alpha_1\cos(\mathrm{T},x)-\frac{1+4\pi f_2}{f_2}\alpha_2\cos(\mathrm{T},x)\\ &=-\left[\left(\frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial n_1}+\frac{\partial \mathrm{X}_2}{\partial n_2}\right)\cos(n_1,y)-\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial n_1}+\frac{\partial \Psi_2}{\partial n_2}\right)\cos(n_1,z)\right]\cos(\mathrm{T},x). \end{aligned}$$

Moyennant les égalités (43) et l'identité

$$\cos^2(n_1,x)+\cos^2(n_1,y)+\cos^2(n_1,z)=1,$$

l'égalité précédente devient la première des égalités

$$(201)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\alpha_1}{f_1}-\frac{\alpha_2}{f_2}\right)\cos(\mathrm{T},x)\\ &\quad=-4\pi\cos(n_1,x)\cos(\mathrm{T},x)[\alpha_1\cos(n_1,x)+\beta_1\cos(n_1,y)+\gamma_1\cos(n_1,z)\\ &\qquad\qquad+\alpha_2\cos(n_2,x)+\beta_2\cos(n_2,y)+\gamma_2\cos(n_2,z)],\\ &\left(\frac{\beta_1}{f_1}-\frac{\beta_2}{f_2}\right)\cos(\mathrm{T},y)\\ &\quad=-4\pi\cos(n_1,y)\cos(\mathrm{T},y)[\alpha_1\cos(n_1,x)+\beta_1\cos(n_1,y)+\gamma_1\cos(n_1,z)\\ &\qquad\qquad+\alpha_2\cos(n_2,x)+\beta_2\cos(n_2,y)+\gamma_2\cos(n_2,z)],\\ &\left(\frac{\gamma_1}{f_1}-\frac{\gamma_2}{f_2}\right)\cos(\mathrm{T},z)\\ &\quad=-4\pi\cos(n_1,z)\cos(\mathrm{T},z)[\alpha_1\cos(n_1,x)+\beta_1\cos(n_1,y)+\gamma_1\cos(n_1,z)\\ &\qquad\qquad+\alpha_2\cos(n_2,x)+\beta_2\cos(n_2,y)+\gamma_2\cos(n_2,z)]. \end{aligned}\right.$$

Les deux dernières s'établissent d'une manière analogue.

Si l'on ajoute membre à membre ces égalités (201) en tenant compte de l'identité

$$\cos(n_1, x)\cos(\mathrm{T}, x) + \cos(n_1, y)\cos(\mathrm{T}, y) + \cos(n_1, z)\cos(\mathrm{T}, z) = 0,$$

on trouve l'égalité

$$(202)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{f_1}[\alpha_1 \cos(\mathrm{T}, x) + \beta_1 \cos(\mathrm{T}, y) + \gamma_1 \cos(\mathrm{T}, z)] \\ &= \frac{1}{f_2}[\alpha_2 \cos(\mathrm{T}, x) + \beta_2 \cos(\mathrm{T}, y) + \gamma_2 \cos(\mathrm{T}, z)], \end{aligned}$$

qui peut encore s'écrire, en vertu des égalités (75) et (79),

$$(202\ bis)\qquad \begin{aligned} &\mathrm{L}_1 \cos(\mathrm{T}, x) + \mathrm{M}_1 \cos(\mathrm{T}, y) + \mathrm{N}_1 \cos(\mathrm{T}, z) \\ &= \mathrm{L}_2 \cos(\mathrm{T}, x) + \mathrm{M}_2 \cos(\mathrm{T}, y) + \mathrm{N}_2 \cos(\mathrm{T}, z). \end{aligned}$$

On remarquera l'analogie de forme des égalités (200) et (200 *bis*), (202) et (202 *bis*), qui expriment les conditions vérifiées par les composantes de l'aimantation à la surface de séparation de deux milieux quelconques, avec les équations (192) et (192 *bis*), (193) et (193 *bis*) qui expriment les conditions vérifiées par les composantes des flux de déplacement à la surface de séparation de deux milieux non conducteurs.

IV. — *Forme des conditions aux limites données par divers auteurs.*

Maxwell ne s'est pas occupé d'établir les conditions vérifiées à la limite de deux milieux. Ses disciples ont cherché à combler les lacunes du maître.

M. Potier paraît s'être occupé le premier de la question dans une Note insérée dans la traduction française du *Traité d'Électricité et de Magnétisme* de Maxwell [1].

Pour les quantités X, Y, Z, M. Potier trouve les conditions (193 *bis*). Quant à la condition (192 *bis*), il les remplace par la condition

$$(203)\qquad \begin{aligned} &\mathrm{F}_1 \frac{\partial}{\partial t}[\mathrm{X}_1 \cos(n_1, x) + \mathrm{Y}_1 \cos(n_1, y) + \mathrm{Z}_1 \cos(n_1, z)] \\ &+ \mathrm{F}_2 \frac{\partial}{\partial t}[\mathrm{X}_2 \cos(n_2, x) + \mathrm{Y}_2 \cos(n_2, y) + \mathrm{Z}_2 \cos(n_2, z)] = 0. \end{aligned}$$

[1] Tome II, p. 507-508.

Son raisonnement, qui est exact, lui aurait fait trouver l'équation (192 *bis*), s'il n'avait pas fait usage d'une relation, empruntée à Maxwell, et faussée par la confusion, habituelle à ce physicien, des deux quantités

$$4\pi\varepsilon F \quad \text{et} \quad (1+4\pi\varepsilon F).$$

Quant aux quantités L, M, N, M. Potier les déclare continues à la surface de séparation, ce qui paraît en contradiction avec l'égalité (200 *bis*); mais la contradiction n'est qu'apparente, M. Potier ayant commencé par supposer que l'on avait affaire à des milieux non magnétiques, c'est-à-dire que l'on avait

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0.$$

Peu de temps après, H. Hertz (¹) donnait pour les quantités X, Y, Z des conditions identiques, à la surface de séparation de deux milieux diélectriques, aux conditions (193 *bis*) et (203), c'est-à-dire aux conditions obtenues par M. Potier. Quant aux quantités L, M, N, il donne les conditions (202 *bis*) et la condition que l'on obtient en différentiant l'égalité (200 *bis*) par rapport à t. Mais, en un autre endroit de son Mémoire (²), Hertz écrit que l'on a

$$(1+4\pi f_1)\frac{\partial\delta_1}{\partial n_1} + (1+4\pi f_2)\frac{\partial\delta_2}{\partial n_2} = 0,$$

égalité qui n'est compatible avec la condition (200 *bis*) que pour un système en équilibre.

Vers le même moment, Cohn (³) admet que l'on a, à la surface de séparation de deux milieux,

$$\begin{aligned}&(u_1+\varphi_1)\cos(n_1, x) + (v_1+\psi_1)\cos(n_1, y) + (w_1+\chi_1)\cos(n_1, z)\\ &+ (u_2+\varphi_2)\cos(n_2, x) + (v_2+\psi_2)\cos(n_2, y) + (w_2+\chi_2)\cos(n_2, z) = 0,\end{aligned}$$

condition qui se réduit, dans le cas où les deux milieux ne sont pas conduc-

---

(¹) H. Hertz, *loc. cit.*, équations (8_a), (8_b), (8_c), (8_d), p. 589.
(²) H. Hertz, *loc. cit.*, p. 608.
(³) Cohn, *loc. cit.*, équations (7_a), (7_b), p. 628.

teurs, à l'égalité

$$(204)\qquad \begin{aligned} &\varphi_1 \cos(n_1, x) + \psi_1 \cos(n_1, y) + \chi_1 \cos(n_1, z) \\ &+ \varphi_2 \cos(n_2, x) + \psi_2 \cos(n_2, y) + \chi_2 \cos(n_2, z) = 0, \end{aligned}$$

qui équivaut évidemment à l'égalité (203).

En outre, il donne, au lieu de l'égalité (200), l'égalité

$$(205)\qquad \begin{aligned} &\alpha_1 \cos(n_1, x) + \beta_1 \cos(n_1, y) + \gamma_1 \cos(n_1, z) \\ &+ \alpha_2 \cos(n_2, x) + \beta_2 \cos(n_2, y) + \gamma_2 \cos(n_2, z) = 0. \end{aligned}$$

Ces divergences montrent combien il était nécessaire d'obtenir les conditions aux limites par des méthodes précises.

CHAPITRE VII.

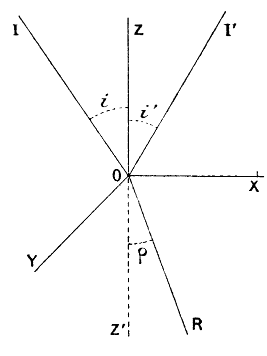
RÉFLEXION ET RÉFRACTION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES A LA SURFACE DE SÉPARATION DE DEUX MILIEUX DIÉLECTRIQUES.

I. — *Le vecteur électrique est perpendiculaire au plan d'incidence.*

Nous ne voulons pas examiner ici, dans toute son ampleur, le problème de la réflexion et de la réfraction des ondes électromagnétiques à la surface de séparation de deux milieux diélectriques différents. Ce problème présente de grandes difficultés. Nous nous contenterons de prouver que certaines solutions qui ont été proposées pour ce problème sont inacceptables. Les résultats, tout négatifs, que nous obtiendrons ainsi, seront cependant de quelque poids dans la discussion de la théorie électromagnétique de la lumière.

Nous supposerons que deux diélectriques, désignés par les indices 1 et 2, soient séparés par une surface plane. Nous prendrons cette surface pour

Fig. 1.



plan des (x, y) (*fig.* 1). Nous prendrons pour axe des z la normale à cette surface dirigée vers l'intérieur du milieu 1.

Nous supposerons qu'une onde électromagnétique plane vienne tomber sur cette surface de séparation. Soit IO sa direction de propagation, située dans le plan ZOX. Soit i l'angle d'incidence.

Imaginons que le vecteur (X_1, Y_1, Z_1) qu'elle propage soit *perpendiculaire au plan d'incidence*. Supposons, en outre, que ce vecteur soit une fonction périodique simple de t, ayant pour période T. Soit τ_1 [égalité (168)] la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le milieu 1.

Au point (x, y, z) du milieu 1, à l'instant t, le vecteur électrique (X_1, Y_1, Z_1) aura pour composantes

$$\text{(206)} \qquad \begin{cases} X_1 = 0, \\ Y_1 = B_1 \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin i - z\cos i}{\tau_1 T} - b_1\right), \\ Z_1 = 0, \end{cases}$$

B_1, b_1 étant deux constantes.

Nous allons chercher si la perturbation électrique réfléchie et la perturbation électrique réfractée peuvent être, l'une et l'autre, formées par une onde plane propageant un vecteur électrique situé dans l'onde.

La direction de propagation OI′ de l'onde réfléchie et la direction de propagation OR de l'onde réfractée sont nécessairement, par raison de symétrie, situées dans le plan d'incidence ZOX. Les composantes du vecteur réfléchi, en un point (x, y, z) du milieu 2, à l'instant t, seront, en désignant par i' l'angle de réflexion,

$$\text{(207)} \qquad \begin{cases} X'_1 = \quad A'_1 \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin i' + z\cos i'}{\tau_1 T} - a'_1\right)\cos i', \\ Y'_1 = \quad B'_1 \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin i' + z\cos i'}{\tau_1 T} - b'_1\right), \\ Z'_1 = -A'_1 \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin i' + z\cos i'}{\tau_1 T} - a'_1\right)\sin i', \end{cases}$$

A'_1, B'_1, a'_1, b'_1 étant quatre constantes.

Si nous désignons par ρ l'angle de réfraction et par τ_2 la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le milieu 2, nous trouvons que les composantes du vecteur électrique réfracté (X_2, Y_2, Z_2) ont, en un point (x, y, z) du milieu 2, et à l'instant t, les valeurs suivantes

$$\text{(208)} \qquad \begin{cases} X_2 = A_2 \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin\rho - z\cos\rho}{\tau_2 T} - a_2\right)\cos\rho, \\ Y_2 = B_2 \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin\rho - z\cos\rho}{\tau_2 T} - b_2\right), \\ Z_2 = A_2 \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin\rho - z\cos\rho}{\tau_2 T} - a_2\right)\sin\rho, \end{cases}$$

A_2, B_2, a_2, b_2 étant des constantes.

A ces vecteurs électriques correspondent des vecteurs magnétiques. Soient

(L_1, M_1, N_1) le vecteur magnétique incident,
(L'_1, M'_1, N'_1) le vecteur magnétique réfléchi,
(L_2, M_2, N_2) le vecteur magnétique réfracté.

Les équations (83), jointes aux équations (206), donnent

$$(209)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f_1)\dfrac{\partial L_1}{\partial t} = -\dfrac{2\pi}{\tau_1 T} B_1 \cos i \cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin i - z\cos i}{\tau_1 T} - b_1\right), \\ \dfrac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f_1)\dfrac{\partial M_1}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f_1)\dfrac{\partial N_1}{\partial t} = -\dfrac{2\pi}{\tau_1 T} B_1 \sin i \cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin i - z\cos i}{\tau_1 T} - b_1\right). \end{cases}$$

Les équations (83), jointes aux équations (207), donnent

$$(210)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f_1)\dfrac{\partial L'_1}{\partial t} = \dfrac{2\pi}{\tau_1 T} B'_1 \cos i' \cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin i' + z\cos i'}{\tau_1 T} - b'_1\right), \\ \dfrac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f_1)\dfrac{\partial M'_1}{\partial t} = -\dfrac{2\pi}{\tau_1 T} A'_1 (\cos^2 i + \sin^2 i') \cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin i' + z\cos i'}{\tau_1 T} - a'_1\right), \\ \dfrac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f_1)\dfrac{\partial N'_1}{\partial t} = -\dfrac{2\pi}{\tau_1 T} B'_1 \sin i' \cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin i' + z\cos i'}{\tau_1 T} - b'_1\right). \end{cases}$$

Enfin, les relations (83), jointes aux équations (208), donnent

$$(211)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f_2)\dfrac{\partial L_2}{\partial t} = -\dfrac{2\pi}{\tau_2 T} B_2 \cos\rho \cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin\rho - z\cos\rho}{\tau_2 T} - b_2\right), \\ \dfrac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f_2)\dfrac{\partial M_2}{\partial t} = \dfrac{2\pi}{\tau_2 T} A_2 \cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin\rho - z\cos\rho}{\tau_2 T} - a_2\right), \\ \dfrac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f_2)\dfrac{\partial N_2}{\partial t} = -\dfrac{2\pi}{\tau_2 T} B_2 \sin\rho \cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin\rho - z\cos\rho}{\tau_2 T} - b_2\right). \end{cases}$$

L'équation (192 *bis*) exige que l'on ait, pour $z = 0$,

$$(212)\quad (1+4\pi\varepsilon F_1)\frac{\partial}{\partial t}(Z_1 + Z'_1) - (1+4\pi\varepsilon F_2)\frac{\partial}{\partial t} Z_2 = 0.$$

L'équation (193 *bis*) exige que l'on ait, pour $z = 0$,

$$(213)\quad \frac{\partial}{\partial t}(X_1 + X'_1 - X_2) = 0,$$

$$(214)\quad \frac{\partial}{\partial t}(Y_1 + Y'_1 - Y_2) = 0.$$

L'équation (200 *bis*) exige que l'on ait, pour $z=0$,

$$(1+4\pi f_1)(N_1+N'_1)-(1+4\pi f_2)N_2=0.$$

Cette égalité devant avoir lieu quel que soit t, on en déduit l'égalité

$$(1+4\pi f_1)\left(\frac{\partial N_1}{\partial t}+\frac{\partial N'_1}{\partial t}\right)-(1+4\pi f_2)\frac{\partial N_2}{\partial t}=0. \tag{215}$$

L'équation (202 *bis*) exige que l'on ait, pour $z=0$,

$$L_1+L'_1-L_2=0,$$
$$M_1+M'_1-M_2=0.$$

Ces égalités devant avoir lieu quel que soit t, on en déduit les égalités

$$\frac{\partial L_1}{\partial t}+\frac{\partial L'_1}{\partial t}-\frac{\partial L_2}{\partial t}=0, \tag{216}$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial t}+\frac{\partial M'_1}{\partial t}-\frac{\partial M_2}{\partial t}=0. \tag{217}$$

Les égalités (212) à (217) ne peuvent être vérifiées, quel que soit t, pour $z=0$, que si l'on a

$$a'_1=a_2, \tag{218}$$

$$b_1=b'_1=b_2, \tag{219}$$

$$\frac{\sin i}{\tau_1}=\frac{\sin i'}{\tau_2}=\frac{\sin\rho}{\tau_2}. \tag{220}$$

Si l'on suppose vérifiées ces égalités (218), (219) et (220), les égalités (206), (207), (208) et (212) donnent

$$(1+4\pi\varepsilon F_1)A'_1\sin i+(1+4\pi\varepsilon F_2)A_2\sin\rho=0. \tag{221}$$

Les égalités (206), (207), (208) et (213) donnent

$$A'_1\cos i-A_2\cos\rho=0. \tag{222}$$

Les égalités (209), (210), (211) et (217) donnent

$$\frac{A'_1}{\tau_1(1+4\pi f_1)}(\cos^2 i+\sin^2 i)+\frac{A_2}{\tau_2(1+4\pi f_2)}=0. \tag{223}$$

Les égalités (206), (207), (208) et (214) donnent

$$\mathrm{B}_1 + \mathrm{B}'_1 - \mathrm{B}_2 = 0. \tag{224}$$

Les égalités (209), (210), (211), (215) et (220) redonnent la même égalité. Enfin les égalités (209), (210), (211) et (216) donnent

$$\frac{\mathrm{B}_1 - \mathrm{B}'_1}{\tau_1(1 + 4\pi f_1)} \cos i - \frac{\mathrm{B}_2}{\tau_2(1 + 4\pi f_2)} \cos \rho = 0. \tag{225}$$

Les égalités (221) et (222) exigent que l'on ait

$$\mathrm{A}'_1 = 0, \qquad \mathrm{A}_2 = 0. \tag{226}$$

En effet, pour qu'il en soit autrement, il faudrait que l'on ait

$$(1 + 4\pi\varepsilon \mathrm{F}_1) \sin i \cos\rho + (1 + 4\pi\varepsilon \mathrm{F}_2) \sin\rho \cos i = 0$$

ou

$$\frac{\tan\!g\, i}{\tan\!g\, \rho} = -\frac{(1 + 4\pi\varepsilon \mathrm{F}_2)}{(1 + 4\pi\varepsilon \mathrm{F}_1)},$$

égalité évidemment incompatible avec les égalités (220).

D'ailleurs, l'égalité (223) résulte des égalités (226).

Quant aux égalités (224) et (225), elles donnent

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{B}'_1 &= \mathrm{B}_1 \frac{\tau_2(1 + 4\pi f_2) \cos i - \tau_1(1 + 4\pi f_1) \cos\rho}{\tau_2(1 + 4\pi f_2) \cos i + \tau_1(1 + 4\pi f_1) \cos\rho}, \\ \mathrm{B}_2 &= \mathrm{B}_1 \frac{2\tau_2(1 + 4\pi f_2) \cos i}{\tau_2(1 + 4\pi f_2) \cos i + \tau_1(1 + 4\pi f_1) \cos\rho}. \end{aligned}\right. \tag{227}$$

Le problème que nous avions posé admet donc une solution acceptable. Cette solution est donnée par les égalités (218), (219), (220), (226) et (227).

En vertu des égalités (220), les égalités (227) peuvent s'écrire

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{B}'_1 &= \mathrm{B}_1 \frac{(1 + 4\pi f_2) \sin\rho \cos i - (1 + 4\pi f_1) \sin i \cos\rho}{(1 + 4\pi f_2) \sin\rho \cos i + (1 + 4\pi f_1) \sin i \cos\rho}, \\ \mathrm{B}_2 &= \mathrm{B}_1 \frac{2(1 + 4\pi f_2) \sin\rho \cos i}{(1 + 4\pi f_2) \sin\rho \cos i + (1 + 4\pi f_1) \sin i \cos\rho}. \end{aligned}\right. \tag{227 bis}$$

Dans le cas particulier où $f_1 = f_2 = 0$, cas qui est réalisé sensiblement par la plupart des milieux diélectriques, les égalités (227 *bis*) deviennent

$$(228)\qquad \left\{\begin{aligned} B'_1 &= -B_1\frac{\sin(i-\rho)}{\sin(i+\rho)},\\ B_2 &= B_1\frac{2\cos i\sin\rho}{\sin(i+\rho)}.\end{aligned}\right.$$

Les formules qui résolvent le problème posé ont alors exactement la même forme analytique que les formules proposées par Fresnel pour traiter la réflexion et la réfraction, à la surface de séparation de deux milieux transparents, d'un rayon lumineux polarisé dans le plan d'incidence.

II. — *Le vecteur électrique est à l'intersection de l'onde et du plan d'incidence.*

Gardons les notations du paragraphe précédent.

Nous aurons

$$(229)\qquad \left\{\begin{aligned} X_1 &= A_1\cos i\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x\sin i - z\cos i}{\tau_1 T}-a_1\right),\\ Y_1 &= 0,\\ Z_1 &= A_1\sin i\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x\sin i - z\cos i}{\tau_1 T}-a_1\right).\end{aligned}\right.$$

X'_1, Y'_1, Z'_1 sont encore donnés par les égalités (207) et X_2, Y_2, Z_2 par les égalités (208).

Les égalités (209) sont remplacées par les égalités

$$(230)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f_1)\frac{\partial L_1}{\partial t} = 0,\\ &\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f_1)\frac{\partial M_1}{\partial t} = \frac{2\pi A_1}{\tau_1 T}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x\sin i - z\cos i}{\tau_1 T}-a_1\right),\\ &\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f_1)\frac{\partial N_1}{\partial t} = 0,\end{aligned}\right.$$

tandis que les égalités (210) et (211) sont conservées.

Les égalités (212) à (217) doivent encore avoir lieu, pour $z = 0$, quel que soit t.

On en conclut, en premier lieu, que l'on doit avoir

$$a_1 = a'_1 = a_2, \tag{231}$$

$$b'_1 = b_2, \tag{232}$$

$$\frac{\sin i}{\tau_1} = \frac{\sin i'}{\tau_1} = \frac{\sin \rho}{\tau_2}. \tag{233}$$

Ces égalités vérifiées, les égalités (229), (207), (208) et (212) donnent

$$(1 + 4\pi\varepsilon \mathrm{F}_1)(\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}'_1)\sin i - (1 + 4\pi\varepsilon \mathrm{F}_2)\mathrm{A}_2 \sin\rho = 0. \tag{234}$$

Les égalités (229), (207), (208) et (213) donnent

$$(\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}'_1)\cos i - \mathrm{A}_2 \cos\rho = 0. \tag{235}$$

Les égalités (230), (210), (211) et (217) donnent

$$\frac{\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}'_1}{\tau_1(1 + 4\pi f_1)} - \frac{\mathrm{A}_2}{\tau_2(1 + 4\pi f_2)} = 0. \tag{236}$$

Les égalités (229), (207), (208) et (214) donnent

$$\mathrm{B}'_1 - \mathrm{B}_2 = 0. \tag{237}$$

Les égalités (230), (210), (211), (215) et (223) redonnent la même égalité.

Enfin les égalités (230), (210), (211) et (216) donnent

$$\frac{\mathrm{B}'_1}{\tau_1(1 + 4\pi f_1)}\cos i + \frac{\mathrm{B}_2}{\tau_2(1 + 4\pi f_2)}\cos\rho = 0. \tag{238}$$

Les égalités (237) et (238) donnent

$$\mathrm{B}'_1 = 0, \qquad \mathrm{B}_2 = 0, \tag{239}$$

car, pour qu'il en soit autrement, il faudrait que l'on eût

$$\tau_1(1 + 4\pi f_1)\cos\rho + \tau_2(1 + 4\pi f_2)\cos i = 0,$$

ou bien, en vertu des égalités (233)

$$\frac{\operatorname{tang} i}{\operatorname{tang}\rho} = -\frac{1 + 4\pi f_2}{1 + 4\pi f_1},$$

égalité incompatible, en général, avec les égalités (233).

Il resterait à vérifier les égalités (234), (235), (236) par des valeurs convenablement choisies de A'_1 et de A_2. Mais il est aisé de voir qu'il est impossible d'y parvenir. En effet, les égalités (235) et (236) exigent que l'on ait

$$A_1 + A'_1 = 0, \qquad A_2 = 0, \tag{240}$$

à moins que l'on n'ait

$$\tau_1(1 + 4\pi f_1)\cos\rho - \tau_2(1 + 4\pi f_2)\cos i = 0,$$

ou bien, en vertu des égalités (233),

$$\frac{\text{tang}\, i}{\text{tang}\, \rho} = \frac{1 + 4\pi f_2}{1 + 4\pi f_1},$$

égalité incompatible, en général, avec les égalités (233).

Les égalités (240), jointes à l'égalité (234), donneraient l'égalité

$$A_1 = 0,$$

qui est inadmissible, puisque A_1 est arbitraire.

Ainsi, *lorsque le vecteur électrique incident est dans le plan d'incidence, on ne peut supposer sans contradiction que la perturbation réfléchie et la perturbation réfractée soient composées chacune d'une seule onde plane propageant un vecteur électrique situé dans l'onde.*

Cette conséquence paraît condamner toute théorie électromagnétique de la lumière.

NOTE ADDITIONNELLE.

D'après H. von Helmholtz, un diélectrique, dont la polarisation $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ varie, exerce les mêmes actions électrodynamiques qu'un conducteur traversé par un flux dont les composantes sont

$$u = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}, \qquad v = \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}, \qquad w = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t}.$$

La théorie de Helmholtz ne pouvant s'accorder pleinement avec l'expérience, nous avons proposé (¹) de remplacer les égalités précédentes par les égalités

$$u = \Theta \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}, \qquad v = \Theta \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}, \qquad w = \Theta \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t},$$

où $\Theta = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$ est une constante. Dans le précédent Mémoire et dans un certain nombre d'autres publications (²), nous avons développé les conséquences de cette hypothèse; ces conséquences évitent certaines des objections que l'on peut adresser à la théorie de Helmholtz; toutefois, elles ne s'accordent pas avec une loi qui paraît aujourd'hui bien vérifiée par les expériences de M. Blondlot et de MM. Cohn et Zeemann : *La vitesse de propagation des ondes électromagnétiques transversales dans un diélectrique est en raison inverse de la racine carrée du pouvoir inducteur spécifique du diélectrique.*

Pour éviter ce désaccord, nous généraliserons l'hypothèse précédente, en supposant que Θ est non plus une constante, mais une fonction de la polarisation $\mathcal{M}$ et de l'état de la substance au point considéré; toutefois, pour simplifier, nous traiterons seulement le cas où Θ est indépendant de $\mathcal{M}$

(¹) *Comptes rendus du troisième Congrès scientifique international des Catholiques*, séance du 5 septembre 1894.

(²) *Sur l'électrodynamique des milieux diélectriques* (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 5ᵉ série, t. I). — *Sur l'interprétation théorique des expériences hertziennes* (*L'éclairage électrique*, t. IV, p. 494; 1895).

et se réduit à une fonction H de l'état de la matière. Nous remplacerons les équations (3) par

$$\varphi = \mathrm{H}\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}, \qquad \psi = \mathrm{H}\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}, \qquad \chi = \mathrm{H}\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t},$$

et nous supposerons qu'un diélectrique, dont la polarisation varie, exerce et subit les mêmes actions électrodynamiques qu'un conducteur traversé par un flux u, v, w, dont les composantes auraient pour valeur

$$u = \varphi, \qquad v = \psi, \qquad w = \chi.$$

Cette hypothèse ne modifie point la marche du Mémoire précédent; dans la plupart des équations qui y figurent, il suffit de remplacer $\mathfrak{C}$ par $\mathfrak{A}$; il en est cependant qui subissent une modification plus profonde, que nous allons indiquer.

Équations (19) et (20). — Remplacer la fonction $\mathfrak{V}$ par la fonction

$$\omega = \int \mathrm{H}\left(\mathcal{A}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) d\varpi,$$

Équation (53). — Remplacer $\mathfrak{C}\mathfrak{V}$ par $\mathfrak{A}\omega$.

Équations (73). — Remplacer $\mathfrak{C}$ par $\mathfrak{A}\mathrm{H}$.

Équations (74). — Remplacer $\mathfrak{C}$ par $\mathfrak{A}\mathrm{H}$ et multiplier tous les seconds membres par H.

Équations (77). — Même modification.

Équation (101). — Écrire le second membre

$$-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}\varphi + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}\psi + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}\chi\right) d\varpi.$$

Équation (133). — Écrire le second membre

$$-\varepsilon\int_2\left[\frac{\partial(\mathrm{V}'+\mathfrak{V}')}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t} + \frac{\partial(\mathrm{V}'+\mathfrak{V}')}{\partial y}\frac{\partial \mathcal{B}_2}{\partial t} + \frac{\partial(\mathrm{V}'+\mathfrak{V}')}{\partial z}\frac{\partial \mathcal{C}_2}{\partial t}\right] d\varpi_2$$
$$-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int_2\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}\varphi_2 + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}\psi_2 + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}\chi_2\right) d\varpi_2.$$

Équation (134). — Modification analogue.

Équation (136). — Au deuxième terme du second membre, remplacer respectivement φ, ψ, χ par $\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t}$; dans les autres termes, remplacer $\mathfrak{C}$ par $\mathfrak{A}$.

Équations (137) à (138). — Mêmes modifications.

Équations (144) et (146). — Remplacer, au premier membre, $\mathfrak{V}$ par ω; au second membre, F par HF, $\mathfrak{C}$ par $\mathfrak{A}$H.

Équations (147), (149), (152), (159), (160), (163), (164), (166), (167), (168), (182), (183). — Remplacer $\mathfrak{C}$ par $\mathfrak{A}$H.

Équation (162). — Multiplier le second membre par H.

L'équation (168) modifiée nous donne, pour vitesse de propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu diélectrique,

$$\tau = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\mathfrak{A}} \frac{1}{H\sqrt{4\pi\varepsilon F(1+4\pi f)}}. \tag{I}$$

Dans l'éther, on a, d'après les expériences de Hertz, $\tau_0 = v$, v étant le coefficient de passage du système d'unités électrostatiques au système d'unités électromagnétiques; on a, d'ailleurs,

$$v = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\mathfrak{A}} \frac{1}{\sqrt{(1+4\pi f_0)(1+4\pi\varepsilon F_0)}}.$$

On a donc

$$H_0 = \sqrt{\frac{1+4\pi\varepsilon F_0}{4\pi\varepsilon F_0}}. \tag{II}$$

D'après les expériences de M. Blondlot, de MM. Cohn et Zeemann, 1 et 2 étant deux diélectriques quelconques non magnétiques, on a

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \sqrt{\frac{1+4\pi\varepsilon F_1}{1+4\pi\varepsilon F_2}}.$$

D'où

$$\frac{H_2}{H_1} = \sqrt{\frac{1+4\pi\varepsilon F_2}{1+4\pi\varepsilon F_1} \frac{4\pi\varepsilon F_1}{4\pi\varepsilon F_2}}. \tag{III}$$

Cette égalité, jointe à l'égalité (II), montre que l'on a, pour tout diélectrique,

$$H = \sqrt{\frac{1+4\pi\varepsilon F}{4\pi\varepsilon F}}. \tag{IV}$$

L'équation (160)

$$\mathfrak{T} = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\mathfrak{A}H} \frac{\sqrt{1+4\pi\varepsilon F}}{\sqrt{4\pi\varepsilon F\lambda}}$$

devient, en vertu de cette valeur de H,

$$\mathfrak{C} = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\mathfrak{A}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Comparée à l'équation (172), cette égalité montre que *les actions électrostatiques se propagent avec la même vitesse dans tous les diélectriques; cette vitesse est égale à celle avec laquelle elles se propagent dans les conducteurs parfaits.*

Les expériences de M. Blondlot montrent que cette dernière vitesse est égale à la vitesse de la lumière dans le vide et, par conséquent, à v. On en conclut que

$$\lambda = (1 + 4\pi\varepsilon F_0)(1 + 4\pi f_0),$$

comme nous l'avons montré dans notre Mémoire : *Sur l'interprétation théorique des expériences hertziennes.*

Équations (186). — Remplacer F_1 par $H_1 F_1$, et $\mathfrak{C}$ par $\mathfrak{A} H_1$.

Équations (186 *bis*). — Modifications analogues.

Équations (188). — Remplacer F_1 par $H_1 F_1$, F_2 par $H_2 F_2$; ajouter au premier membre

$$(\mathrm{V}) \qquad \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\; H_1 \mathfrak{X}_1 \cos(n_1, x) + \ldots + H_2 \mathfrak{X}_2 \cos(n_2, x) + \ldots].$$

Équation (191). — Remplacer $\varphi_1, \psi_1, \chi_1$ par $\frac{\varphi_1}{H_1}, \frac{\psi_1}{H_1}, \frac{\chi_1}{H_1}$; et $\varphi_2, \psi_2, \chi_2$ par $\frac{\varphi_2}{H_2}, \frac{\psi_2}{H_2}, \frac{\chi_2}{H_2}$.

Équation (192). — Remplacer, aux dénominateurs, F_1 par $F_1 H_1$, F_2 par $F_2 H_2$. Ajouter au premier membre la quantité (V).

L'équation (192 *bis*) devient

$$(\mathrm{VI}) \qquad \begin{aligned} &\left[(1 + 4\pi\varepsilon F_1)\frac{\partial X_1}{\partial t} + \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} H_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathfrak{X}_1\right] \cos(n_1, x) + \ldots \\ &+ \left[(1 + 4\pi\varepsilon F_2)\frac{\partial X_2}{\partial t} + \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} H_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathfrak{X}_2\right] \cos(n_2, x) + \ldots = 0. \end{aligned}$$

Équation (193). — Ajouter au premier membre

$$+ \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} H_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\mathfrak{X}_1 \cos(\mathrm{T}, x) + \ldots]$$

et au second membre

$$+\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{H}_2\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}[\mathfrak{X}_2\cos(\mathrm{T},x)+\ldots].$$

L'équation (193 *bis*) devient

$$(\mathrm{VII})\qquad \left(\frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial t}-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{H}_1\,\frac{\partial^2\mathfrak{X}_1}{\partial t^2}\right)\cos(\mathrm{T},x)+\ldots$$
$$=\left(\frac{\partial \mathrm{X}_2}{\partial t}-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{H}_2\,\frac{\partial^2\mathfrak{X}_2}{\partial t^2}\right)\cos(\mathrm{T},x)+\ldots.$$

Ces égalités ne portent plus, comme les égalités (192 *bis*) et (193 *bis*), sur les seules quantités X, Y, Z; elles ne permettent plus de traiter simplement le problème de la réflexion et de la réfraction des ondes planes à la surface de séparation de deux diélectriques.