

E. CARTAN

Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1^{re} série, tome 12, n° 1 (1898), p. B 1-B64

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1898_1_12_1_B1_0

© Université Paul Sabatier, 1898, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES

GROUPES BILINÉAIRES

ET LES

SYSTÈMES DE NOMBRES COMPLEXES,

PAR M. E. CARTAN.

Maitre de Conférences à l'Université de Lyon.



INTRODUCTION.

On sait quel lien étroit relie la théorie des systèmes de nombres complexes et celle des groupes linéaires et homogènes simplement transitifs. L'étude des groupes *bilinéaires*, c'est-à-dire des groupes dont les équations finies sont linéaires et homogènes par rapport aux variables et par rapport aux paramètres établit aussi une relation entre ces groupes et les systèmes de nombres complexes, et cette relation est bien simple : on peut regarder toute transformation finie proprement dite ou dégénérée d'un tel groupe comme un nombre complexe d'un certain système pour lequel la multiplication satisfait aux lois de distributivité et d'associativité et pour lequel l'opération inverse de la multiplication est en général possible.

Le but de ce Mémoire, après avoir établi cette relation et étudié quelques propriétés générales des groupes bilinéaires et même des groupes linéaires simplement par rapport aux paramètres, est de faire une étude d'ensemble sur les systèmes de nombres complexes, spécialement au point de vue de leur composition et d'en faire l'application aux groupes bilinéaires. Cette étude, qui occupe les paragraphes IV-VIII de ce Mémoire, forme un tout en soi ; elle ne fait appel à aucune notion de la théorie des groupes et reste exclusivement sur le terrain de la théorie des nombres complexes. Elle a pour point de départ la considération de ce que j'appelle *l'équation caractéris-*

mais d'après les formules (7), les coefficients de e^2, e^3, \dots s'expriment en fonctions linéaires et homogènes, les mêmes pour tous les indices i , de $X_1 x_i, X_2 x_i, \dots, X_r x_i$, c'est-à-dire de $\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{ir}$. Le groupe engendré par $X_1 f$ a donc ses équations finies de la forme

$$x'_i = x_i + \alpha_1 \xi_{i1} + \alpha_2 \xi_{i2} + \dots + \alpha_r \xi_{ir} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

c'est-à-dire est contenu parmi les transformations (1).

Les formules (1) définissent donc un ensemble de transformations à r paramètres qui contiennent toutes les transformations du groupe engendré par les r transformations infinitésimales indépendantes $X_1 f, \dots, X_r f$. Elles constituent donc les équations finies de ce groupe qui, par suite, est linéaire et homogène par rapport aux paramètres.

4. En définitive, nous avons le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que les r transformations infinitésimales indépendantes $X_1 f, X_2 f, \dots, X_r f$, à n variables x_1, x_2, \dots, x_n , engendrent un groupe linéaire et homogène par rapport aux paramètres est que la transformation $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$ soit une combinaison linéaire des $X_i f$, ainsi que les r^2 transformations infinitésimales $X_i(X_k f)$. On a alors la valeur de la variable transformée x'_i dans les équations finies du groupe, en prenant le coefficient de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ dans l'expression $a_1 X_1 f + a_2 X_2 f + \dots + a_r X_r f$.

Par exemple, les transformations infinitésimales

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 f = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}, \\ X_2 f = x^m \frac{\partial f}{\partial y}, \\ X_3 f = x^m \log x \frac{\partial f}{\partial y} \end{array} \right.$$

satisfont aux neuf relations

$$\begin{array}{lll} X_1(X_1 f) = X_1 f, & X_1(X_2 f) = m X_2 f, & X_1(X_3 f) = X_2 f + m X_3 f, \\ X_2(X_1 f) = X_2 f, & X_2(X_2 f) = 0, & X_2(X_3 f) = 0, \\ X_3(X_1 f) = X_3 f, & X_3(X_2 f) = 0, & X_3(X_3 f) = 0. \end{array}$$

Elles engendrent donc un groupe linéaire et homogène par rapport aux paramètres dont les équations finies sont

$$(10) \quad \begin{cases} x' = ax, \\ y' = ay + bx^m + cx^m \log x. \end{cases}$$

Comme application, on peut chercher le plus petit groupe linéaire et homogène par rapport aux paramètres, dans lequel soient contenues r transformations infinitésimales données $X_1 f, X_2 f, \dots, X_r f$. Pour l'obtenir, il suffira d'ajouter à ces transformations la transformation $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$, si elle n'y est pas, ainsi que toutes les transformations $X_i(X_j f)$; procéder de la même manière pour les transformations nouvelles ainsi obtenues, et ainsi de suite. Si ces opérations ont un terme, les transformations données sont contenues dans un groupe fini linéaire et homogène par rapport aux paramètres; sinon elles ne sont contenues que dans un groupe infini (non nécessairement défini par des équations aux dérivées partielles) jouissant de la même propriété.

II.

LES GROUPES LINÉAIRES ET HOMOGÈNES PAR RAPPORT AUX VARIABLES ET PAR RAPPORT AUX PARAMÈTRES. GROUPE DES PARAMÈTRES.

5. Nous allons plus particulièrement considérer maintenant les groupes *linéaires et homogènes*, c'est-à-dire pour lesquels les variables transformées sont des fonctions linéaires et homogènes des variables primitives. Ce sont ceux de ces groupes qui sont en même temps linéaires et homogènes par rapport aux paramètres qui vont nous occuper. Nous les désignerons dorénavant sous le nom de *groupes bilinéaires*.

Nous avons vu au paragraphe précédent que l'on obtenait l'expression de la variable transformée x'_i par l'effet de la transformation de paramètres a_1, a_2, \dots, a_r en prenant le coefficient de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ dans l'expression

$$a_1 X_1 f + \dots + a_r X_r f.$$

Cela nous conduit à regarder le symbole

$$a_1 X_1 f + \dots + a_r X_r f$$

aussi bien comme représentant une transformation finie S_a qu'une transfor-

mation infinitésimale. Bien entendu, nous n'aurons affaire à une véritable transformation que si les coefficients de $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ sont des fonctions indépendantes de x_1, x_2, \dots, x_n . Néanmoins il y aura avantage à considérer les symboles pour lesquels cette condition n'est pas remplie et à les regarder comme représentant encore des transformations finies *dégénérées*, ce fait d'ailleurs ne se présentera que pour des valeurs particulières des a .

6. Imaginons que nous effectuions successivement les deux transformations finies

$$S_a \dots \dots a_1 X_1 f + \dots + a_r X_r f,$$

et

$$S_b \dots \dots b_1 X_1 f + \dots + b_r X_r f.$$

Si nous posons

$$(1) \quad X_i f = \sum_k \zeta'_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{k,s} \lambda_{kis} x_s \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

la première de ces transformations est définie par les formules

$$(2) \quad x'_i = \sum_k a_k \zeta_{ik} = \sum_{k,s} a_k \lambda_{iks} x_s \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

et la seconde par les formules

$$(3) \quad x''_i = \sum_k b_k \zeta'_{ik} = \sum_{k,s} b_k \lambda_{iks} x'_s \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Le résultat de ces deux transformations est la transformation

$$(4) \quad x''_i = \sum_{h,k,s,t} b_k \lambda_{iks} a_h \lambda_{sh t} x_t \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Mais d'après les identités (7) du paragraphe précédent, on a

$$X_h(X_k f) = \sum_{s,t,i} \lambda_{sh t} \lambda_{iks} x_t \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{\rho,i,t} \alpha_{hk\rho} \lambda_{i\rho t} x_t \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

c'est-à-dire

$$(5) \quad \sum_s \lambda_{iks} \lambda_{sh t} = \sum_{\rho} \alpha_{hk\rho} \lambda_{i\rho t} \quad \left(\begin{array}{l} i, t = 1, 2, \dots, n \\ h, k = 1, 2, \dots, r \end{array} \right).$$

Par suite, les formules (4) deviennent

$$x''_i = \sum_{h,k,\rho,t} \alpha_{hk\rho} a_h b_k \lambda_{i\rho t} x_t = \sum_{\rho,t} c_{\rho} \lambda_{i\rho t} x_t,$$

en posant

$$(6) \quad c_p = \sum \alpha_{hk\rho} \alpha_h b_k.$$

La succession de la transformation S_a et de la transformation S_b équivaut donc à la transformation S_c dont les paramètres c_1, c_2, \dots, c_r sont donnés par les équations (6).

7. Si nous appelons Af, Bf, Cf les symboles des transformations S_a, S_b, S_c , les formules (6) nous montrent immédiatement qu'on a la relation *fondamentale*

$$(7) \quad Cf = A(Bf).$$

Par conséquent, *la succession des deux transformations finies Af et Bf équivaut à la transformation finie $A(Bf)$.*

Cela nous conduit en particulier à la conclusion suivante :

Considérons trois transformations finies quelconques S_a, S_b, S_c . On voit qu'on a l'identité

$$S_a(S_b S_c) = (S_a S_b) S_c.$$

Prenons pour S_a, S_b, S_c respectivement $X_i f, X_j f, X_k f$. Les relations (7) du paragraphe I conduisent aux identités suivantes entre les quantités α_{iks} ⁽¹⁾

$$(8) \quad \sum_s \alpha_{ist} \alpha_{jks} = \sum_s \alpha_{ijs} \alpha_{skt} \quad (i, j, k, t = 1, 2, \dots, r).$$

8. Les équations (6), où l'on regarde les b comme des paramètres, les a comme des variables et les c comme les variables a transformées, définissent, comme on sait, un groupe qui est le *groupe des paramètres* du groupe primitif. Il est linéaire et homogène par rapport aux variables et aux paramètres, contient manifestement la transformation identique et est *simplement transitif* : il faut entendre par là que, étant donnés deux systèmes arbitraires de valeurs des a et des c , il existe un système de valeurs des paramètres b et un seul qui permet de passer des a aux c ; autrement dit, le

(1) Ces relations peuvent aussi s'établir en démontrant directement que

$$X_i[X_j(X_k f)] = X_i[X_j(X_k f)],$$

identité vraie si les Xf sont *linéaires* par rapport aux variables x .

déterminant des coefficients des b dans les seconds membres des équations (6) n'est pas identiquement nul. Cela résulte de la théorie générale des groupes; mais on peut le démontrer ici directement. En effet, si le déterminant des coefficients des b était identiquement nul, à chaque système de valeurs des a on pourrait faire correspondre un système de valeurs *non toutes nulles* des b tel que les c donnés par les formules (6) soient tous nuls. Mais, par la transformation S_a les x sont transformés en général en n formes linéaires x' *indépendantes*, et la transformation S_b , effectuée sur ces quantités x' , ne pourrait donner de résultats tous nuls que si tous les b étaient nuls, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il est facile de vérifier aussi directement que les équations (6) définissent un groupe. Considérons, en effet, les r quantités

$$B_k f = \sum_{h, \rho} \alpha_{hk\rho} a_h \frac{\partial f}{\partial a_\rho} \quad (k = 1, 2, \dots, r);$$

on a

$$B_\mu (B_\nu f) = \sum_{h, \rho, s} \alpha_{h\mu\rho} \alpha_{\rho\nu s} a_h \frac{\partial f}{\partial a_s};$$

mais, d'après les relations (8), cette équation se réduit à

$$(9) \quad B_\mu (B_\nu f) = \sum_{h, \rho, s} \alpha_{h\rho s} \alpha_{\mu\nu\rho} a_h \frac{\partial f}{\partial a_s} = \sum_{\rho} \alpha_{\mu\nu\rho} B_\rho f.$$

Ces relations (9) montrent, d'après les résultats du paragraphe I, que les transformations infinitésimales Bf engendrent un groupe bilinéaire et que les équations finies de ce groupe ne sont autres que les équations (6).

Les formules (9) montrent de plus qu'il y a *isomorphisme* entre les transformations finies du groupe des paramètres et celles du groupe primitif, les quantités α étant les mêmes pour ces deux groupes. Cela veut dire que, si l'on établit une correspondance entre les transformations S_a et T_a du groupe primitif et du groupe des paramètres qui correspondent aux mêmes valeurs des paramètres, à la transformation $S_a S_b$ correspond la transformation $T_a T_b$. En particulier, le groupe des paramètres est son propre groupe des paramètres.

9. Nous avons vu que les r^3 quantités α_{iks} devaient satisfaire aux r^4 équations (8). Nous pouvons maintenant démontrer la réciproque.

Étant donné un système de r^3 quantités α_{iks} satisfaisant aux r^3 équations (8)

$$(8) \quad \sum_s \alpha_{ist} \alpha_{jks} = \sum_s \alpha_{ijs} \alpha_{skt} \quad (i, j, k, t = 1, 2, \dots, r),$$

telles de plus que les r transformations infinitésimales

$$(10) \quad B_k f = \sum_{h, \rho} \alpha_{hk\rho} a_h \frac{\partial f}{\partial a_\rho}$$

soient indépendantes et que le symbole $a_1 \frac{\partial f}{\partial a_1} + \dots + a_r \frac{\partial f}{\partial a_r}$ soit une combinaison linéaire des $B_k f$, il existe certainement un système de r transformations infinitésimales indépendantes et linéaires $X_1 f, \dots, X_r f$ telles que l'on ait

$$X_i(X_k f) = \sum_s \alpha_{iks} X_s f,$$

ces transformations engendrant un groupe bilinéaire.

Il suffit, en effet, de prendre

$$X_k f = \sum \alpha_{hk\rho} x_h \frac{\partial f}{\partial x_\rho};$$

en refaisant les calculs du numéro précédent qui s'appuient uniquement sur les équations (8), on tombe sur les identités à démontrer. Il en résulte même que ce groupe est son propre groupe des paramètres et, par suite, simplement transitif.

10. Étant donné un groupe bilinéaire défini par r transformations infinitésimales indépendantes $X_1 f, X_2 f, \dots, X_r f$, nous avons défini la transformation finie de paramètres a_1, a_2, \dots, a_r et ayant pour symbole

$$(11) \quad a_1 X_1 f + \dots + a_r X_r f.$$

Imaginons que nous remplaçons les $X f$ par r combinaisons linéaires indépendantes de ces mêmes quantités $X'_1 f, X'_2 f, \dots, X'_r f$. Alors la transformation finie (11) est représentée par un nouveau symbole

$$(12) \quad a'_1 X'_1 f + \dots + a'_r X'_r f,$$

où les a' sont certaines combinaisons linéaires des a . Si nous prenons alors

les a' pour nouveaux paramètres, nous obtenons manifestement un *nouveau groupe des paramètres*, mais qui se déduit du premier en effectuant sur les variables et sur les paramètres une même substitution linéaire, celle qui permet de passer des a aux a' . Ces deux groupes sont dits *semblables* et ne doivent pas être regardés comme distincts.

On peut donc dire qu'un groupe donné a une infinité de groupes des paramètres, mais ils se déduisent tous de l'un d'entre eux par le procédé indiqué plus haut.

II. Cela étant, considérons un groupe bilinéaire et *simplement transitif*. Je dis qu'on peut toujours, par un changement de paramètres, faire en sorte que ce groupe soit son propre groupe des paramètres.

Soient, en effet, x_1, x_2, \dots, x_n les variables, a_1, a_2, \dots, a_n les paramètres. Le déterminant des coefficients des a dans les seconds membres des équations finies du groupe est, par hypothèse, non identiquement nul. Supposons donc que, pour $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, \dots, x_n = x_n^0$, ce déterminant soit différent de zéro. Nous pouvons toujours faire un changement de paramètres de façon que la transformation S_a de paramètres a_1, a_2, \dots, a_n transporte le point $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ au point (a_1, a_2, \dots, a_n) ; autrement dit nous pouvons définir sans ambiguïté chaque transformation du groupe par le point A (a_1, a_2, \dots, a_n) que cette transformation fait correspondre au point *origine* O (x_1^0, \dots, x_n^0) .

Cela étant, considérons deux transformations quelconques S_a, S_b définies par deux points A (a_1, a_2, \dots, a_n) et B (b_1, b_2, \dots, b_n) . La transformation $S_a S_b$ fera alors correspondre au point O d'abord le point A, puis le point transformé du point A par la transformation S_b . Si donc S_c est cette transformation, correspondant au point C, le point C est le transformé du point A par S_b . Mais il y a une autre transformation qui fait passer du point A au point C : c'est précisément la transformation T_b du groupe des paramètres. Donc les deux transformations S_b et T_b font correspondre au même point A le même point C : elles sont identiques. *Le groupe considéré est donc identique à son groupe des paramètres.*

Analytiquement, on peut choisir les transformations infinitésimales $X_1 f, \dots, X_n f$ d'un groupe simplement transitif de telle façon que, si

$$X_i(X_k f) = \sum_s \alpha_{iks} X_s f,$$

on ait en même temps

$$X_i f = \alpha_{kis} x_k \frac{\partial f}{\partial x_s}.$$

Ce théorème est dû à M. Study qui a démontré, d'une façon plus générale, que tout groupe simplement transitif, linéaire et homogène par rapport aux variables seulement, pouvait toujours être supposé linéaire et homogène par rapport aux paramètres et identique à son groupe des paramètres.

III.

RELATIONS ENTRE LES GROUPES BILINÉAIRES ET LES SYSTÈMES DE NOMBRES COMPLEXES.

12. Nous avons, dans le paragraphe précédent, fait correspondre à toute transformation finie S_a d'un groupe bilinéaire le symbole

$$a_1 X_1 f + \dots + a_r X_r f.$$

Nous allons maintenant introduire une autre représentation. Nous pouvons regarder l'ensemble des r paramètres a_1, a_2, \dots, a_r comme constituant un nombre complexe d'espèce supérieure, que nous désignerons encore symboliquement par

$$(1) \quad a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_r e_r;$$

les e sont dits *unités*. Nous dirons qu'un nombre complexe est nul si les r nombres a_1, a_2, \dots, a_r qui le définissent sont tous nuls. Nous définirons la somme des deux nombres complexes

$$\begin{aligned} a &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_r e_r, \\ b &= b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots + b_r e_r \end{aligned}$$

par le symbole

$$(2) \quad a + b = (a_1 + b_1)e_1 + (a_2 + b_2)e_2 + \dots + (a_r + b_r)e_r.$$

Nous définirons enfin le *produit* des deux nombres complexes a et b , symboles des deux transformations finies S_a et S_b par le nombre complexe c symbole de la transformation résultante S_c . Nous aurons donc, par définition, en conservant les notations des paragraphes précédents,

$$(3) \quad c = ab = \sum_{h,k,\rho} \alpha_{h k \rho} a_h b_k e_\rho = \sum_{\rho} c_\rho e_\rho.$$

De l'origine même de cette définition résultent les propriétés suivantes du produit :

Il y a en général un seul nombre b qui, multiplié à GAUCHE par un nombre a , reproduise un nombre donné c ; il y a en général un seul nombre a qui, multiplié à DROITE par un nombre donné b , reproduise un nombre donné c .

La multiplication satisfait aux lois distributive et associative; c'est-à-dire on a les identités

$$(4) \quad (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd;$$

$$(5) \quad (ab)c = a(bc).$$

L'identité (4) est évidente; l'identité (5) résulte de la représentation des nombres complexes comme substitutions.

Enfin, *il y a un nombre complexe ε qui, multiplié à droite ou à gauche par un nombre complexe quelconque, reproduise ce nombre*; c'est celui qui représente la transformation *identique* du groupe donné. On l'appelle le *module* du système de nombres complexes.

13. Réciproquement, définissons un système de nombres complexes à r unités fondamentales e_1, e_2, \dots, e_r par les lois suivantes :

L'addition de deux nombres complexes est définie par la formule (2).

Le produit de deux nombres complexes a et b est un nombre

$$ab = c = \sum c_\rho e_\rho,$$

où l'on a

$$(6) \quad c_\rho = \sum_{h, k} \alpha_{hk\rho} a_h b_k,$$

les constantes α_{iks} étant telles que le déterminant des coefficients des b dans les seconds membres des formules (6) n'est pas identiquement nul, de même que le déterminant des coefficients des a dans les mêmes expressions; ces constantes étant, de plus, tellement choisies que la multiplication satisfasse à la loi associative exprimée par la formule (5)

$$(4) \quad (ab)c = a(bc).$$

Je dis alors que *ce système complexe peut être regardé comme associé*

de la façon qui a été définie au numéro précédent, à un certain groupe bilinéaire d'ordre r .

En effet, d'abord la formule (5) ne fait qu'exprimer les relations déjà considérées entre les constantes α_{iks}

$$(7) \quad \sum_{\rho} \alpha_{ist} \alpha_{jks} = \sum_s \alpha_{ijs} \alpha_{skt} \quad (i, j, k, t = 1, 2, \dots, r).$$

De plus, les r transformations infinitésimales

$$(8) \quad X_i f = \sum \alpha_{kis} x_k \frac{\partial f}{\partial x_s}$$

sont indépendantes puisque le déterminant des $\frac{\partial f}{\partial x_s}$ est, par hypothèse, différent de zéro. Enfin je dis que le système admet un *module*.

Soit, en effet,

$$b^0 = b_1^0 e_1 + \dots + b_r^0 e_r$$

un nombre complexe tel que les équations (6) puissent être résolues par rapport aux a . Soit ε le nombre a ainsi obtenu lorsqu'on donne à c la valeur b^0 . On a alors

$$\varepsilon b^0 = b^0.$$

Si maintenant a est un nombre complexe quelconque, on a

$$a(\varepsilon b^0) = (a\varepsilon) b^0 = ab^0;$$

de sorte que le produit de b^0 par les deux nombres a et $a\varepsilon$ est le même; d'après l'hypothèse faite sur b^0 , il en résulte

$$(9) \quad a\varepsilon = a.$$

Si donc

$$\varepsilon = \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \dots + \varepsilon_r e_r,$$

l'identité (9) montre que le symbole $\varepsilon_1 X_1 f + \dots + \varepsilon_r X_r f$ se réduit à $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + x_r \frac{\partial f}{\partial x_r}$.

Les r transformations (8) sont donc indépendantes; elles contiennent la transformation $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + x_r \frac{\partial f}{\partial x_r}$; et, enfin, elles satisfont aux relations

$$X_i(X_k f) = \sum \alpha_{iks} X_s f;$$

elles engendrent donc un groupe bilinéaire, et le système de nombres complexes qui est associé à ce groupe est précisément le système considéré.

14. En somme, nous avons fait correspondre ainsi, d'une manière univoque, les groupes des paramètres des groupes bilinéaires aux systèmes de nombres complexes satisfaisant aux conditions exprimées dans le numéro précédent. Comme, d'après le théorème du n° 10, tout groupe bilinéaire simplement transitif peut être regardé comme son propre groupe des paramètres, nous avons établi une correspondance univoque entre les groupes bilinéaires simplement transitifs et les systèmes de nombres complexes. Ce dernier résultat est connu depuis longtemps et démontré en particulier complètement par M. Study; mais nos considérations sont plus générales, puisqu'elles établissent une correspondance entre un groupe bilinéaire *quelconque* et un système de nombres complexes.

L'étude des relations (7), c'est-à-dire, en somme, l'étude des nombres complexes nous fournira, comme nous le verrons dans la suite, des résultats très généraux sur les groupes bilinéaires *quelconques*. De nombreux auteurs se sont occupés de cette théorie des nombres complexes; je vais la prendre à un point de vue qui nous donnera des résultats nouveaux pour la plupart et d'une grande généralité.

IV.

GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES DE NOMBRES COMPLEXES.
SYSTÈMES DE LA PREMIÈRE CLASSE.

15. Considérons un système de nombres complexes

$$(1) \quad x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_r e_r,$$

où les e sont des symboles, les x des nombres ordinaires, réels ou imaginaires. Nous supposons définies sur ces nombres les opérations fondamentales, addition et multiplication,

$$(2) \quad \begin{cases} x + y = (x_1 e_1 + \dots + x_r e_r) + (y_1 e_1 + \dots + y_r e_r) \\ \quad = (x_1 + y_1) e_1 + \dots + (x_r + y_r) e_r, \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} xy = (x_1 e_1 + \dots + x_r e_r)(y_1 e_1 + \dots + y_r e_r) \\ \quad = \sum \alpha_{ik1} x_i y_k e_1 + \sum \alpha_{ikr} x_i y_k e_r, \end{cases}$$

de telle façon que la multiplication satisfasse à la loi associative

$$(4) \quad (xy)z = x(yz),$$

et de telle façon aussi que les deux opérations inverses de la multiplication ou division, la première consistant à passer du premier facteur et du produit au deuxième facteur, la seconde consistant à passer du second facteur et du produit au premier facteur, soient possibles en général.

Alors il existe un nombre ε appelé *module*, tel que pour tout nombre x du système on ait

$$(5) \quad \varepsilon x = x\varepsilon = \varepsilon.$$

Si l'on suppose l'existence d'un *module*, il est inutile de supposer la possibilité des deux divisions; car, si la première, par exemple, n'était pas possible, à chaque nombre x correspondrait au moins un nombre y tel que xy fût nul; or cela ne peut pas avoir lieu pour $y = \varepsilon$.

Il est bien évident que si l'on prend, au lieu des unités e_1, e_2, \dots, e_r , r nombres quelconques du système non liés par une relation linéaire à coefficients ordinaires, on obtient un nouveau système qui ne doit pas être considéré comme distinct du premier; les x_i subissent simplement une substitution linéaire.

16. Étant donné un nombre x du système

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_r e_r,$$

cherchons à déterminer un nombre y

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_r e_r,$$

tel que l'on ait

$$(6) \quad xy = \omega y,$$

où ω désigne un nombre ordinaire.

La relation (6) se décompose dans les r suivantes :

$$\sum_{i,k} x_i y_k a_{iks} = \omega y_s \quad (s = 1, 2, \dots, r).$$

Si l'on veut que le nombre y ne soit pas nul, il faut que ω satisfasse à

l'équation

$$(7) \quad \begin{vmatrix} \sum x_i \alpha_{i11} - \omega & \sum x_i \alpha_{i21} & \dots & \sum x_i \alpha_{ir1} \\ \sum x_i \alpha_{i12} & \sum x_i \alpha_{i22} - \omega & \dots & \sum x_i \alpha_{ir2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_i \alpha_{i1r} & \sum x_i \alpha_{i2r} & \dots & \sum x_i \alpha_{irr} - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation peut s'appeler l'*équation caractéristique* du système, quoique ce nom ait été donné par certains auteurs à des équations d'une tout autre nature. Nous lui conserverons néanmoins ce nom, toute confusion étant impossible.

Remarquons immédiatement que le terme indépendant de ω dans le premier membre de l'équation caractéristique est, d'après les hypothèses faites, *différent de zéro*.

On pourrait considérer une *deuxième* équation caractéristique obtenue en partant de l'équation

$$yx = \omega y.$$

La considération de cette deuxième équation nous sera utile dans certains cas.

17. Supposons que l'équation caractéristique admette en général h racines distinctes et h seulement, et considérons un nombre $x = a$ pour lequel cette condition est réalisée. Soient $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_h$ ces racines. Alors il existe un nombre α_i tel que l'on ait

$$a \alpha_i = \omega_i \alpha_i;$$

puis, si la racine ω_i est multiple, un nombre α'_i tel que l'on ait

$$a \alpha'_i = \omega_i \alpha'_i + \lambda_{11} \alpha_i;$$

puis un nombre α''_i tel que l'on ait

$$a \alpha''_i = \omega_i \alpha''_i + \lambda_{21} \alpha_i + \lambda_{22} \alpha'_i,$$

et ainsi de suite. Finalement, on fait correspondre à la racine ω_i , de multiplicité m_i , un système de m_i nombres linéairement indépendants $\alpha_i, \alpha'_i, \dots,$

$\alpha_1^{(m-1)}$ tels que le produit de a par chacun d'eux $\alpha_1^{(i)}$ soit égal au produit de ce dernier par ω plus une combinaison linéaire des précédents.

On peut procéder de la même façon pour les racines $\omega_2, \dots, \omega_h$, de sorte que nous avons déterminé r nouveaux nombres complexes linéairement indépendants, dont chacun *appartient* à une des racines $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_h$, ceux de ces nombres qui appartiennent à la racine ω_i étant désignés par les symboles $\alpha_i, \alpha'_i, \alpha''_i, \dots, \alpha_i^{(m_i-1)}$.

18. Il résulte facilement de là que si, par exemple, le produit ax est égal à ωx plus une combinaison linéaire de $\alpha_1, \alpha'_1, \dots$, le nombre x est lui-même une combinaison linéaire de $\alpha_1, \alpha'_1, \dots$. Cela étant, il est facile d'en déduire successivement que $\alpha_1 x, \alpha'_1 x, \alpha''_1 x, \dots$ sont des combinaisons linéaires de $\alpha_1, \alpha'_1, \dots$, et cela quel que soit x .

Donc le produit d'un nombre appartenant à la racine ω_i avec un nombre quelconque du système appartient encore à la racine ω_i . Il en est de même pour les autres racines.

19. Cela étant, considérons le module ε du système. Il peut toujours se mettre sous la forme

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_h,$$

un ou plusieurs des nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_h$ pouvant être nuls; ε_1 appartenant à la racine $\omega_1, \dots, \varepsilon_h$ à la racine ω_h .

Or prenons $\varepsilon \alpha_1^{(i)}$. On a

$$\varepsilon \alpha_1^{(i)} = \varepsilon_1 \alpha_1^{(i)} + \varepsilon_2 \alpha_1^{(i)} + \dots + \varepsilon_h \alpha_1^{(i)};$$

mais, d'après le numéro précédent, $\varepsilon_2 \alpha_1^{(i)}$ appartient à la racine $\omega_2, \dots, \varepsilon_h \alpha_1^{(i)}$ à la racine ω_h . Comme le second membre doit être égal à $\alpha_1^{(i)}$, il en résulte qu'on a

$$(8) \quad \varepsilon_1 \alpha_1^{(i)} = \alpha_1^{(i)}, \quad \varepsilon_2 \alpha_1^{(i)} = 0, \quad \dots, \quad \varepsilon_h \alpha_1^{(i)} = 0;$$

de même

$$(9) \quad \varepsilon_1 \alpha_2^{(i)} = 0, \quad \varepsilon_2 \alpha_2^{(i)} = \alpha_2^{(i)}, \quad \dots, \quad \varepsilon_h \alpha_2^{(i)} = 0,$$

et ainsi de suite.

Les nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_h$ peuvent être appelés *modules partiels*.

Considérons maintenant les nombres $\alpha_1, \alpha'_1, \dots$. On peut toujours supposer que les produits

$$\alpha_1 \varepsilon_1, \alpha'_1 \varepsilon_1, \dots, \alpha_1^{(p-1)} \varepsilon_1$$

sont distincts et différents de zéro, les produits restants

$$\alpha_1^{(p)} \varepsilon_1, \alpha_1^{(p+1)} \varepsilon_1, \dots, \alpha_1^{(m_1-1)} \varepsilon_1$$

étant tous nuls. Le nombre $\alpha_1 \varepsilon_1$, par exemple, fait partie des $\alpha_1, \alpha'_1, \dots$, et l'on a, d'autre part,

$$(\alpha_1 \varepsilon_1) \varepsilon_1 = \alpha_1 (\varepsilon_1 \varepsilon_1) = \alpha_1 \varepsilon_1.$$

Le produit de $\alpha_1 \varepsilon_1$ par ε_1 , n'étant pas nul, on voit que ce produit est une combinaison linéaire de $\alpha_1, \alpha'_1, \dots, \alpha_1^{(p-1)}$, et ce nombre est égal à son propre produit par ε_1 . Comme on peut répéter ce raisonnement pour $\alpha'_1 \varepsilon_1, \dots, \alpha_1^{(p-1)} \varepsilon_1$, il en résulte qu'on a

$$(10) \quad \begin{cases} \alpha_1 \varepsilon_1 = \alpha_1, & \alpha'_1 \varepsilon_1 = \alpha'_1, & \dots, & \alpha_1^{(p-1)} \varepsilon_1 = \alpha_1^{(p-1)}, \\ \alpha_1^{(p)} \varepsilon_1 = 0, & \dots, & \alpha_1^{(m_1-1)} \varepsilon_1 = 0. \end{cases}$$

De même, $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ étant nul d'après les formules (8) et (9), on a

$$\alpha_1 \varepsilon_2 = (\alpha_1 \varepsilon_1) \varepsilon_2 = \alpha_1 (\varepsilon_1 \varepsilon_2) = 0, \quad \alpha'_1 \varepsilon_2 = 0, \quad \dots, \quad \alpha_1^{(p-1)} \varepsilon_2 = 0,$$

et si l'on considère les nombres $\alpha_1^{(p)}, \dots, \alpha_1^{(m_1-1)}$, on peut les supposer choisis de telle façon que les q premiers se reproduisent lorsqu'on les multiplie par ε_2 , les autres donnant un produit nul avec ce même nombre. On peut continuer ainsi de proche en proche.

Finalement, on voit qu'on peut choisir avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_h$, rh nombres linéairement indépendants du système, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{rh}$, tels que pour chacun d'eux η , il existe deux indices α et β inférieurs ou égaux à h de façon qu'on ait

$$(11) \quad \varepsilon_\alpha \eta = \eta \varepsilon_\beta = \eta,$$

tous les produits $\varepsilon_i \eta, \eta \varepsilon_j$ étant nuls pour i différent de α et j différent de β .

L'ensemble des deux indices (α, β) constitue ce que M. Scheffers a appelé le caractère du nombre η .

On peut ajouter la remarque importante que, toutes les fois qu'on aura h nombres $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_h$ satisfaisant à $\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i, \varepsilon_i \varepsilon_j = 0$, on pourra faire la réduction précédente.

20. *Le produit d'un nombre complexe de caractère (α, β) par un nombre complexe de caractère (γ, δ) est nul si β est différent de γ et est un nombre complexe de caractère (α, δ) si β est égal à γ .*

En effet, soient η et η' ces deux nombres. On a, par hypothèse,

$$\varepsilon_\alpha \eta = \eta \varepsilon_\beta = \eta, \quad \varepsilon_\gamma \eta' = \eta' \varepsilon_\delta = \eta'.$$

Il en résulte qu'on a

$$\varepsilon_\alpha \eta \eta' = \eta \eta' = \eta \eta' \varepsilon_\delta, \quad \eta \eta' = (\eta \varepsilon_\beta)(\varepsilon_\gamma \eta') = \eta(\varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma) \eta'.$$

Mais si β est différent de γ , $\varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma$ est nul et par suite aussi $\eta \eta'$. Si β est égal à γ , le produit $\eta \eta'$ peut être nul; mais, s'il ne l'est pas, il est certainement de caractère (α, δ) .

Les modules partiels $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_h$ peuvent eux-mêmes être considérés comme ayant respectivement les caractères $(1, 1), (2, 2), \dots, (h, h)$.

L'existence de ces modules montre que la deuxième équation caractéristique admet au moins h racines distinctes. En effet, considérons le nombre

$$\alpha = x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + \dots + x_h \varepsilon_h,$$

on a

$$\varepsilon_1 \alpha = x_1 \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2 \alpha = x_2 \varepsilon_2, \quad \dots, \quad \varepsilon_h \alpha = x_h \varepsilon_h,$$

ce qui démontre bien la propriété.

Comme nous aurions pu aussi bien partir de la deuxième équation caractéristique que de la première, nous croyons que *les deux équations caractéristiques admettent, pour des valeurs arbitraires de x , le même nombre de racines distinctes.*

21. L'ensemble des nombres complexes de caractère $(1, 1)$ forme lui-même un système de nombres complexes satisfaisant aux conditions énoncées au début du paragraphe. En effet, le produit de deux nombres de caractère $(1, 1)$ est encore un nombre de caractère $(1, 1)$; ce produit satisfait à la loi associative et enfin ce système partiel admet un module qui n'est autre que ε_1 . Si nous désignons par $m_{\alpha\beta}$ le nombre des unités indépendantes de caractère (α, β) , nous voyons que ce système des nombres de caractère $(1, 1)$ admet $m_{1,1}$ unités indépendantes. Désignons ce système par Σ_1 .

L'équation caractéristique du système Σ_1 n'admet qu'une seule racine

multiple d'ordre m_{11} . Car si elle en admettait plusieurs distinctes, en répétant sur le système Σ_1 le raisonnement fait sur le système primitif, nous arriverions à trouver dans Σ_1 au moins deux modules partiels $\varepsilon'_1, \varepsilon''_1$, et l'équation caractéristique du système primitif, obtenue en partant du nombre

$$a = x'_1 \varepsilon'_1 + x''_1 \varepsilon''_1 + x_2 \varepsilon_2 + \dots + x_h \varepsilon_h,$$

admettrait, contrairement à l'hypothèse faite, $h + 1$ racines distinctes, à savoir $x'_1, x''_1, x_2, \dots, x_h$, et cela en vertu des équations

$$a \varepsilon'_1 = x'_1 \varepsilon'_1, \quad a \varepsilon''_1 = x''_1 \varepsilon''_1, \quad a \varepsilon_2 = x_2 \varepsilon_2, \quad \dots, \quad a \varepsilon_h = x_h \varepsilon_h.$$

Il résulte de là que le premier membre de l'équation caractéristique de Σ_1 est la puissance $m_{11}^{\text{ième}}$ d'un facteur linéaire. Par suite, on peut supposer choisies les unités de Σ_1 de telle façon que ε_1 soit une de ces unités et que pour toutes les autres l'équation caractéristique n'admette que des racines nulles.

Si l'on appelle nombre PSEUDO-NUL d'un système un nombre pour lequel l'équation caractéristique n'a que des racines nulles, on voit que le système Σ_1 d'ordre m_{11} admet $m_{11} - 1$ unités pseudo-nulles et que tous les nombres qui s'en déduisent linéairement sont également pseudo-nuls.

21. *Un nombre PSEUDO-NUL du système Σ_1 est également PSEUDO-NUL pour le système primitif Σ* . Soit, en effet, η un de ces nombres, nécessairement distinct de ε_1 . Supposons que l'équation caractéristique du système Σ obtenue en partant du nombre η admette une racine ω différente de zéro. Alors il existe un nombre ζ du système tel que l'on ait

$$\eta \zeta = \omega \zeta.$$

Ce nombre ζ est évidemment une somme de nombres ayant chacun un caractère déterminé; comme η est de caractère $(1, 1)$, on voit que ζ ne peut être qu'une somme de nombres de caractères $(1, 1), (1, 2), \dots, (1, h)$. Supposons qu'il y ait dans cette somme un nombre η' de caractère $(1, \alpha)$. Alors on voit immédiatement que l'on a aussi

$$\eta \eta' = \omega \eta'.$$

Cela étant, l'équation caractéristique obtenue en partant du nombre

$$a = y\eta + x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \dots + x_h\varepsilon_h$$

admet $h + 1$ racines distinctes. On a, en effet, d'abord les relations

$$a\eta' = (y + x_1)\eta', \quad a\varepsilon_2 = x_2\varepsilon_2, \quad \dots, \quad a\varepsilon_h = x_h\varepsilon_h.$$

De plus, le nombre η étant pseudo-nul dans le système Σ , il existe au moins un nombre η'' de ce système tel que le produit $\eta\eta''$ soit nul; on a, par suite,

$$a\eta'' = x_1\eta''.$$

L'équation caractéristique admettrait donc les $h + 1$ racines distinctes, $x_1, x_1 + y, x_2, \dots, x_h$, ce qui est impossible.

23. *Étant donné un nombre pseudo-nul η d'un système Σ de nombres complexes et un autre nombre quelconque u du même système, il existe un entier positif m tel que le produit $\eta^m u$ soit nul.* Posons, en effet,

$$\eta u = u_1, \quad \eta u_1 = u_2, \quad \dots, \quad \eta u_{m-1} = u_m, \quad \dots$$

Supposons que les nombres $u, u_1, u_2, \dots, u_{m-1}$ soient linéairement indépendants, mais que u_m soit une combinaison linéaire des précédents; ce fait se présentera certainement pour un nombre m qu'on peut même affirmer au plus égal à $r + 1$. Supposons donc

$$\eta u_{m-1} = \lambda u + \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{m-1} u_{m-1},$$

les λ désignant des nombres ordinaires. Cherchons à déterminer un nombre différent de zéro

$$v = \rho u + \rho_1 u_1 + \dots + \rho_{m-1} u_{m-1},$$

tel que l'on ait

$$\eta v = \omega v;$$

on obtiendra en ω l'équation

$$\omega^m - \lambda_{m-1}\omega^{m-1} - \lambda_{m-2}\omega^{m-2} - \dots - \lambda_1\omega - \lambda = 0.$$

D'après l'hypothèse faite sur η , il faut que cette équation n'admette que

des racines nulles, c'est-à-dire que tous les λ soient nuls. Donc, enfin, on a

$$\eta u_{m-1} = \eta^m u = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

24. On peut déduire de là que *la deuxième équation caractéristique obtenue en partant d'un nombre pseudo-nul η n'admet, comme la première, que des racines nulles.* Si non, en effet, il existerait un nombre complexe a , tel que l'on eût

$$a\eta = \omega a,$$

où ω désigne un nombre ordinaire. On déduit de là

$$a\eta^2 = \omega a\eta = \omega^2 a, \quad a\eta^3 = \omega^3 a, \quad \dots, \quad a\eta^m = \omega^m a, \quad \dots$$

Mais, d'après le numéro précédent, appliqué au cas où u est égal à η , il existe un entier m tel que $\eta^m \eta = \eta^{m+1}$ soit nul; par suite, on aurait

$$a\eta^{m+1} = \omega^{m+1} a = 0,$$

ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $\omega \neq 0$.

Ce théorème complète ce qu'il y avait d'un peu factice dans la définition des nombres pseudo-nuls.

Il résulte, en particulier, de là qu'étant donné un nombre complexe quelconque u , il existe toujours un entier n tel que $u\eta^n$ soit nul.

25. *Tous les nombres du système Σ qui appartiennent à un caractère (α, β) à indices différents sont pseudo-nuls, d'après la loi de multiplication des caractères (n° 20).*

Le produit d'un nombre pseudo-nul de caractère $(1, 1)$, par exemple, par un nombre complexe quelconque de même caractère est un nombre pseudo-nul. Si, en effet, η est le nombre pseudo-nul considéré et u un nombre complexe quelconque de caractère $(1, 1)$, on a une équation de la forme

$$\eta u = a\varepsilon_1 + b\eta',$$

a et b étant des nombres ordinaires, η' étant pseudo-nul. Il en résulte

$$\eta^m u = a\eta^{m-1} + b\eta^{m-1}\eta',$$

quel que soit l'entier m au moins égal à 2. Or, nous savons (23) qu'il existe un entier m tel que $\eta^m u$ soit nul; considérons le plus petit de ces entiers;

alors η^{m-1} est différent de zéro, et l'équation

$$b\eta^{m-1}\eta' = -a\eta^{m-1}$$

n'est possible que si a est nul, puisque η' est pseudo-nul.

Le produit ηu est donc bien pseudo-nul.

V.

SYSTÈMES DE NOMBRES COMPLEXES POUR LESQUELS L'ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE SE DÉCOMPOSE EN ÉQUATIONS LINÉAIRES.

26. Tout ce qui précède se rapporte à des systèmes de nombres complexes quelconques. Nous allons maintenant *séparer les systèmes de nombres complexes en deux grandes classes*.

La première classe est formée des systèmes dont l'équation caractéristique se décompose en équations linéaires.

La seconde des systèmes pour lesquels le premier membre de l'équation caractéristique admet un ou plusieurs facteurs irréductibles de degré supérieur au premier.

Nous verrons que cette distinction est indépendante de l'équation caractéristique dont on part. *Nous trouverons, de plus, un procédé simple pour déduire tous les systèmes de la seconde classe de ceux de la première.*

27. Prenons donc un système de la première classe. Supposons, comme dans le paragraphe précédent, que l'équation caractéristique admette h racines distinctes; ces racines seront, par hypothèse, des formes linéaires de x_1, x_2, \dots, x_r (n° 16). Autrement dit, les racines de l'équation caractéristique relative à $u + v$ sont les sommes des racines des équations caractéristiques relatives à u et à v . On peut dire encore que *la somme de deux nombres pseudo-nuls du système est un autre nombre pseudo-nul*.

Nous avons vu, dans le paragraphe précédent, comment on pouvait trouver h modules partiels $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_h$. Nous pouvons prendre ces h modules pour h des unités du système et faire en sorte que les $r - h = k$ autres $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ soient toutes des nombres pseudo-nuls (21, 25) et que chacune appartienne à un caractère (α, β) parfaitement déterminé.

On voit alors que tout nombre

$$y_1\eta_1 + y_2\eta_2 + \dots + y_k\eta_k$$

est pseudo-nul, d'après l'hypothèse faite sur l'équation caractéristique.

28. *Le produit d'un nombre pseudo-nul du système par un autre nombre complexe quelconque est un nombre pseudo-nul.* Remarquons d'abord que si l'on désigne par

$$(1) \quad x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \dots + x_h\varepsilon_h + y_1\eta_1 + \dots + y_k\eta_k,$$

un nombre complexe quelconque du système, la condition nécessaire et suffisante pour que ce nombre soit pseudo-nul est que tous les x soient nuls.

Cela étant, prenons un nombre complexe quelconque u ; il suffit de démontrer que les k produits $\eta_1 u, \eta_2 u, \dots, \eta_k u$ sont pseudo-nuls, car alors le produit d'un nombre pseudo-nul quelconque par u sera une combinaison linéaire de nombres pseudo-nuls et, par suite, sera pseudo-nul.

Prenons d'abord une des unités η appartenant au caractère $(1, 1)$. Si l'on regarde u comme une somme de nombres appartenant chacun à un caractère déterminé, le produit total sera une somme de produits partiels appartenant aussi chacun à un caractère déterminé et le seul de ces produits qui puisse donner un nombre non pseudo-nul s'obtient en multipliant η par un nombre de caractère $(1, 1)$. Mais nous avons vu (25) que le produit d'un nombre pseudo-nul de caractère $(1, 1)$ par un autre nombre de caractère $(1, 1)$ est toujours pseudo-nul.

Prenons maintenant une unité η appartenant au caractère $(1, 2)$, par exemple. On voit, comme précédemment, qu'il suffit de se ramener au cas où u appartient au caractère $(2, 1)$. Supposons donc que l'on ait

$$(2) \quad \eta u = a\varepsilon_1 + b\zeta,$$

a et b étant des nombres ordinaires et ζ un nombre pseudo-nul de caractère $(1, 1)$. Je dis alors que, si a est différent de zéro, le nombre $u\eta$ ne peut pas être pseudo-nul. Sinon, en effet (24), il existerait un entier m tel qu'on eût

$$\eta(u\eta)^m = 0.$$

Mais cette égalité peut s'écrire

$$(3) \quad (\eta u)^m \eta = 0;$$

il est, d'autre part, facile de voir, de proche en proche, que $(\eta u)^m$ est de la forme $\alpha^m \varepsilon_1 + \zeta^{(m)}$, $\zeta^{(m)}$ étant un nombre pseudo-nul, et cela, en tenant compte du résultat précédemment établi que le produit de deux nombres pseudo-nuls de caractère $(1, 1)$ est pseudo-nul. L'équation (3) devient alors, puisque η est de caractère $(1, 2)$,

$$\alpha^m \eta + \zeta^{(m)} \eta = 0,$$

ce qui est impossible si α est différent de zéro, puisque $\zeta^{(m)}$ est pseudo-nul.

On peut donc ajouter à l'équation (2) une équation de la forme

$$(4) \quad u\eta = a'\varepsilon_2 + b'\zeta',$$

ζ' étant un nombre pseudo-nul de caractère $(2, 2)$ et a' étant différent de zéro.

Cela étant, je dis que, si ν désigne un nombre quelconque de caractère $(2, 1)$, on ne peut pas avoir

$$\eta\nu = 0;$$

on aurait, en effet,

$$0 = u(\eta\nu) = (u\eta)\nu = a'\nu + b'\zeta'\nu,$$

ce qui est incompatible avec les hypothèses que a' n'est pas nul et que ζ' est pseudo-nul. Il en résulte que, $\eta\nu$ étant de caractère $(1, 1)$, *il y a au moins autant de nombres indépendants de caractère $(1, 1)$ que de caractère $(2, 1)$.*

De même, ω désignant un nombre quelconque de caractère $(1, 1)$, on ne peut pas avoir

$$u\omega = 0,$$

car on aurait

$$0 = \eta(u\omega) = a\omega + b\zeta\omega,$$

ce qui est encore impossible. *Il y a donc autant de nombres indépendants de caractère $(2, 1)$ que de caractère $(1, 1)$.*

De ces deux faits résulte la conséquence qu'on peut toujours déterminer un nombre ν de caractère $(2, 1)$, de telle façon que le produit $\eta\nu$ soit un nombre donné quelconque de caractère $(1, 1)$, par exemple ε_1 .

Finalement, *il existe deux nombres η , ν de caractères $(1, 2)$ et $(2, 1)$*

satisfaisant à la relation

$$(5) \quad \eta \nu = \varepsilon_1.$$

Par suite, on a

$$(6) \quad (\eta + \nu)(\varepsilon_1 + \nu) = \varepsilon_1 + \nu.$$

Le nombre $\eta + \nu$ ne serait donc pas pseudo-nul, ce qui est impossible, d'après les hypothèses faites, puisque c'est la somme de deux nombres pseudo-nuls.

Le théorème est donc finalement démontré et l'on peut, en le généralisant d'une façon évidente, l'énoncer de la façon suivante :

Le produit d'un nombre complexe pseudo-nul par un nombre complexe quelconque, de même que le produit d'un nombre complexe quelconque par un nombre pseudo-nul sont des nombres pseudo-nuls.

29. Cela étant, l'ensemble des nombres pseudo-nuls du système donné Σ forme lui-même un système σ jouissant des propriétés suivantes :

La somme et le produit de deux nombres de σ fait encore partie de σ , et, de plus, l'opération de la multiplication satisfait à la loi associative. Mais ici la division est impossible; autrement dit, étant donné un nombre arbitraire de σ , il n'est pas possible de trouver un autre nombre qui, multiplié par le premier, reproduise un nombre donné. On peut dire encore que le système σ n'admet pas de module.

D'une façon plus précise, étant donné un nombre η de σ , il est impossible de trouver un nombre u tel que l'on ait une relation de la forme

$$\eta u = \omega u,$$

ω étant différent de zéro.

Les modules partiels $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_h$ de Σ ne vont plus maintenant jouer qu'un rôle accessoire, et tout revient à étudier le système σ .

30. Supposons, d'abord, que σ contienne une seule unité indépendante η . On aura alors nécessairement

$$\eta^2 = a \eta,$$

a étant un nombre ordinaire; mais, d'après les propriétés de σ , ce nombre

est nécessairement nul. Par suite

$$(7) \quad \eta^2 = 0.$$

Il n'y a donc qu'une seule loi possible de multiplication pour les systèmes σ d'ordre 1.

Supposons, maintenant, que σ contienne deux unités indépendantes η_1 et η_2 . Il existe, certainement, au moins un nombre du système qui, multipliée par η_1 , donne un produit nul. Supposons, d'abord, qu'il y en ait un seul indépendant; ou bien il est multiple de η_1 , ou bien il en est indépendant et, par suite, peut être pris pour η_2 . On a donc les deux cas suivants :

$$\begin{array}{ll} 1^\circ & \eta_1^2 = 0, \quad \eta_2 \eta_1 = a \eta_1 + b \eta_2, \\ 2^\circ & \eta_1^2 = a \eta_1 + b \eta_2, \quad \eta_2 \eta_1 = 0, \end{array}$$

dans chacun des cas les nombres a et b n'étant pas tous les deux nuls.

Prenons d'abord le premier cas : on en déduit

$$(a \eta_1 + b \eta_2) \eta_1 = b(a \eta_1 + b \eta_2),$$

d'où l'on déduit que b est nul et, par suite, aussi a , sinon η_2 ne serait pas pseudo-nul. Le premier cas est donc impossible.

Dans le second cas, on a

$$(a \eta_1 + b \eta_2) \eta_1 = a(a \eta_1 + b \eta_2),$$

d'où l'on déduit que a est nul et, par suite, b doit être différent de zéro. On a donc

$$(8) \quad \eta_1^2 = b \eta_2, \quad \eta_2 \eta_1 = 0 \quad (b \neq 0).$$

On déduit de là que $(\eta_1, \eta_2) \eta_1$ est nul et, par suite, que $\eta_1 \eta_2$ est proportionnel à η_2 , ce qui n'est possible que si $\eta_1 \eta_2$ est nul. Enfin, on voit de même que $\eta_2^2 \eta_1$ est nul et, par suite, aussi η_2^2 . Finalement, la loi de la multiplication est exprimée par les formules

$$(9) \quad \eta_1^2 = b \eta_2, \quad \eta_1 \eta_2 = \eta_2 \eta_1 = \eta_2^2 = 0.$$

Enfin, il nous reste à supposer que tous les nombres du système, multipliés par η_1 , donnent des produits nuls, ce qui est exprimé par les formules

$$(10) \quad \eta_1^2 = \eta_2 \eta_1 = 0.$$

On a alors

$$\eta_1 \eta_2 = a \eta_1 + b \eta_2, \quad \eta_2^2 = c \eta_1 + d \eta_2,$$

d'où l'on déduit

$$\eta_1 (a \eta_1 + b \eta_2) = b (a \eta_1 + b \eta_2),$$

$$\eta_1 (c \eta_1 + d \eta_2) = d (c \eta_1 + d \eta_2),$$

relations qui entraînent

$$b = 0, \quad d = 0,$$

et, par suite, aussi

$$a = 0.$$

En échangeant η_1 et η_2 et remplaçant c par b on retombe sur les formules (9), mais où b peut être nul.

31. Nous allons maintenant démontrer, d'une manière générale, le théorème suivant :

Étant donné un système σ de nombres pseudo-nuls contenant k unités indépendantes $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$, on peut supposer choisies ces k unités de telle façon que le produit de deux unités η_i, η_j ne dépende que des unités dont l'indice est supérieur aux deux indices i, j .

Le théorème est vrai pour $k = 1$ et $k = 2$, comme cela résulte des formules (7) et (9). Nous allons le supposer vrai pour $1, 2, \dots, k - 1$ et le démontrer pour k .

Considérons donc un système σ de k unités, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$. Il existe certainement au moins un nombre complexe u tel que le produit $\eta_1 u$ soit nul. Je vais d'abord démontrer qu'il existe un nombre u tel que tous les produits $\eta_1 u, \eta_2 u, \dots, \eta_k u$ soient nuls.

Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi. Cherchons tous les nombres u pour lesquels le produit $\eta_1 u$ est nul ; il se peut que parmi ces nombres il y en ait pour lesquels $\eta_2 u$ est nul ; il se peut, de même, qu'il y en ait pour lesquels $\eta_1 u, \eta_2 u, \eta_3 u$ soient nuls à la fois ; mais, par hypothèse, on ne pourra pas continuer ainsi indéfiniment. Supposons donc qu'il existe n nombres indépendants et n seulement u_1, u_2, \dots, u_n tels que tous les produits

$$\eta_1 u_i, \quad \eta_2 u_i, \quad \dots, \quad \eta_m u_i \quad (i = 1, 2, \dots, n; m < k)$$

soient nuls, mais tels que, pour aucun des nombres u se déduisant linéairement de u_1, u_2, \dots, u_n , le produit $\eta_{m+1} u$ soit nul. On peut manifeste-

ment supposer que les nombres $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ forment un système σ , de nombres pseudo-nuls, c'est-à-dire que le produit de deux d'entre eux se déduit linéairement de $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$; car de

$$\eta_2 u_i = 0,$$

par exemple, on déduit

$$(\eta_1 \eta_2) u_i = 0,$$

ce qui montre qu'on peut ajouter aux nombres $\gamma_1 \eta_1 + \dots + \gamma_m \eta_m$ le nombre $\eta_1 \eta_2$ s'il n'en fait pas déjà partie.

Le nombre m étant inférieur à k , nous pouvons appliquer au système σ , le théorème à démontrer et supposer que le produit $\eta_i \eta_j$ ($i, j \leq m$) ne dépend que de $\eta_{i+1}, \eta_{i+2}, \dots, \eta_m$, si i est le plus grand des nombres i et j .

32. Cela étant, les n nombres $\eta_{m+1} u_1, \eta_{m+1} u_2, \dots, \eta_{m+1} u_n$ sont certainement linéairement indépendants, sans quoi un des nombres $\eta_{m+1} u$ serait nul. Appelons-les v_1, v_2, \dots, v_n , de sorte que

$$\eta_{m+1} u_i = v_i.$$

Je dis maintenant qu'étant donné un nombre quelconque de σ , soit ν , il existe toujours un nombre η de σ , tel que le produit $\eta \nu$ soit une combinaison linéaire non nulle de u_1, u_2, \dots, u_n , si le nombre ν lui-même ne l'est pas déjà. En effet, considérons le produit $\eta_m \nu$. On a, d'après le numéro précédent,

$$\eta_1 (\eta_m \nu) = \eta_2 (\eta_m \nu) = \dots = \eta_m (\eta_m \nu) = 0,$$

ce qui montre ou bien que $\eta_m \nu$ est nul, ou bien que $\eta_m \nu$ est une combinaison linéaire de u_1, u_2, \dots, u_n . Si c'est le dernier cas qui a lieu, la proposition est démontrée. Sinon, on a

$$\eta_m \nu = 0.$$

Prenons alors $\eta_{m-1} \nu$; on verra, comme tout à l'heure, que ce produit est nul ou est une combinaison linéaire de u_1, u_2, \dots, u_n , et ainsi de suite. Ou bien un des nombres $\eta \nu$ sera une combinaison linéaire de u_1, u_2, \dots, u_n ; ou bien tous les nombres $\eta \nu$ seront nuls, et alors ν lui-même sera une combinaison linéaire des u .

Appliquons cela aux nombres v_1, v_2, \dots, v_n , c'est-à-dire aux nombres $\eta_{m+1} u_1, \eta_{m+1} u_2, \dots, \eta_{m+1} u_n$. Nous voyons alors qu'à chacun u_i des nombres u_1, u_2, \dots, u_n on peut faire correspondre un nombre ζ_i du système σ tel

que $\zeta_1 u_1, \zeta_2 u_2, \dots, \zeta_n u_n$ ne dépendent que de u_1, u_2, \dots, u_n , ces produits étant différents de zéro.

33. Partons maintenant de u_1 et considérons le nombre $\zeta_1 u_1$, il ne peut pas être proportionnel à u_1 , puisque ζ_1 est pseudo-nul. On peut donc prendre ce produit pour nombre u_2 , puis $\zeta_2 u_2$ pour nombre u_3 et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on tombe sur une combinaison linéaire des nombres u précédemment utilisés. Soit donc

$$(11) \quad \zeta_1 u_1 = u_2, \quad \zeta_2 u_2 = u_3, \quad \dots, \quad \zeta_p u_p = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p,$$

les constantes λ n'étant pas toutes nulles ; on peut même supposer que λ_1 est différent de zéro. On déduit de là

$$(\zeta_p \zeta_{p-1} \dots \zeta_2 \zeta_1 - \lambda_p \zeta_{p-1} \dots \zeta_1 - \lambda_{p-1} \zeta_{p-2} \dots \zeta_1 - \dots - \lambda_2 \zeta_1) u_1 = \lambda_1 u_1,$$

égalité qui est impossible, le premier facteur du premier membre étant un nombre pseudo-nul.

34. Il résulte de là que l'hypothèse adoptée ne peut pas se présenter et que, par suite, l'un au moins des nombres u est tel que $\eta_{m+1} u$ soit nul. En continuant de proche en proche, on démontre donc l'existence d'un nombre u tel que tous les produits $\eta_1 u, \dots, \eta_k u$ soient nuls.

Supposons qu'il y ait exactement n nombres indépendants u_1, u_2, \dots, u_n jouissant de cette propriété, je dis maintenant qu'il y a au moins un nombre u , combinaison linéaire de u_1, u_2, \dots, u_n , tel que tous les produits $u \eta$ soient nuls.

En effet, d'abord tous les produits $u_1 \eta, u_2 \eta, \dots, u_n \eta$ sont des combinaisons linéaires de u_1, u_2, \dots, u_n , puisqu'on a, quel que soit le nombre η_i ,

$$\eta_i u_1 \eta = \eta_i u_2 \eta = \dots = \eta_i u_n \eta = 0.$$

Il résulte de là que, étant donné un nombre quelconque η , il existe un nombre u , combinaison linéaire de u_1, u_2, \dots, u_n , tel que $u \eta$ soit nul. Supposons, d'une manière plus générale, qu'il y ait p nombres indépendants u , et p seulement u_1, u_2, \dots, u_p , tels que tous les produits

$$u_i \eta_1, \quad u_i \eta_2, \quad \dots, \quad u_i \eta_m \quad (m < k; i = 1, 2, \dots, p)$$

soient nuls. Je dis qu'il y a un nombre $u = x_1 u_1 + \dots + x_p u_p$ pour le-

quel $u\eta_{m+1}$ est nul. Il suffit de refaire le raisonnement des paragraphes précédents, en le modifiant un peu. Nous voyons alors, ce point admis, qu'en procédant de proche en proche, on arrive à un nombre u pour lequel tous les $u\eta$ sont nuls.

35. Finalement nous avons démontré qu'il existe dans le système σ un nombre qui, multiplié à droite ou à gauche par un nombre quelconque de σ , donne un produit nul. Nous pouvons prendre ce nombre pour unité η_k , et nous voyons qu'on a

$$(12) \quad \eta_i \eta_k = \eta_k \eta_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, k).$$

Cela étant, dans les formules

$$\eta_i \eta_j = \sum \beta_{ijs} \eta_s,$$

qui donnent la loi de multiplication du système σ , supprimons dans les seconds membres les termes en η_k ; autrement dit considérons $k-1$ unités $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{k-1}$ telles qu'on pose

$$\zeta_i \zeta_j = \sum_{s=1}^{s=k-1} \beta_{ijs} \zeta_s \quad (i, j=1, 2, \dots, k-1).$$

Je dis que la multiplication ainsi définie satisfait encore à la loi associative, c'est-à-dire que l'on a, quels que soient les indices λ, μ, ν ,

$$(\zeta_\lambda \zeta_\mu) \zeta_\nu = \zeta_\lambda (\zeta_\mu \zeta_\nu).$$

Il suffit, en effet, de considérer l'identité

$$(\eta_\lambda \eta_\mu) \eta_\nu = \eta_\lambda (\eta_\mu \eta_\nu).$$

On peut, dans le produit des deux nombres $\eta_\lambda \eta_\mu$ et η_ν , supprimer les termes en η_k du premier facteur, puisqu'ils ne donnent rien, multipliés par η_ν ; mais alors $\eta_\lambda \eta_\mu$ devient une expression η' composée avec $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{k-1}$ comme $\zeta_\lambda \zeta_\mu$ est composée avec $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{k-1}$; par suite, si l'on supprime du produit $\eta' \eta_\nu$ les termes en η_k , on obtient une expression composée avec $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{k-1}$, comme $(\zeta_\lambda \zeta_\mu) \zeta_\nu$ l'est avec $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{k-1}$, et cette expression s'obtient simplement en supprimant du produit $(\eta_\lambda \eta_\mu) \eta_\nu$ les termes en η_k . En répétant le raisonnement pour $\eta_\lambda (\eta_\mu \eta_\nu)$, on arrive au résultat cherché.

36. Nous pouvons maintenant appliquer au système des $k - 1$ unités ζ le théorème supposé vrai. On voit alors que dans les constantes β_{ijs} , où i, j, s sont inférieurs à k , on peut supposer s supérieur à chacun des nombres i et j . Par suite, comme pour i ou j égal à k , les constantes sont nulles, on voit que la règle est encore vraie lorsqu'un ou plusieurs des indices i, j, s sont égaux à k .

On peut donc choisir les unités $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ de σ de telle sorte que le produit $\eta_i \eta_j$ ne dépende que de $\eta_{i+1}, \dots, \eta_k$ si i est supérieur ou égal à j , et de $\eta_{j+1}, \dots, \eta_k$ si j est supérieur ou égal à i .

37. Dans ce qui précède, nous n'avons pas respecté la convention supposée au début du paragraphe, d'après laquelle les unités $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ étaient supposées appartenir chacune à un caractère déterminé. Mais il est facile de voir comment on peut lever cette difficulté.

Supposons, en effet, que l'unité η_k déterminée dans les paragraphes précédents n'appartienne pas à un caractère déterminé; alors elle est une somme de nombres appartenant chacun à un certain caractère. Multiplions alors η_k par un nombre η appartenant au caractère (α, β) par exemple; le produit est une somme de produits partiels dont chacun est nul ou appartient à un caractère déterminé distinct, et comme ce produit total doit être nul, il faut que chacun des produits partiels le soit. On reconnaît ainsi que chaque terme de la somme qui forme η_k jouit de la même propriété que η_k . Par suite, on peut prendre l'un d'eux pour η_k , c'est-à-dire supposer que l'unité η_k appartient à un caractère déterminé. Il en est de même de proche en proche pour les autres.

38. Nous avons finalement le théorème suivant qui résume tout ce paragraphe.

Étant donné un système de nombres complexes d'ordre r , pour lequel l'équation caractéristique se décompose en équations linéaires, on peut toujours choisir les $r = h + k$ unités de ce système $e_1, e_2, \dots, e_h, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$, de telle façon que les conditions suivantes soient réalisées :

1° *Le carré d'une des unités e_1, e_2, \dots, e_h est égal à cette même unité, les produits de deux unités différentes étant nuls ;*

2° *A chaque unité η on peut faire correspondre un couple de deux indices α, β inférieurs ou égaux à h , qui constituent le caractère de*

cette unité, et tels que les deux produits $e_\alpha \eta$, ηe_β sont égaux à η , tous les autres produits $e_i \eta$, ηe_j étant nuls ;

3° Le produit de deux unités η dont la première est de caractère (α, β) et la seconde de caractère (γ, δ) est nul si β est différent de γ , et est une combinaison linéaire des unités de caractère (α, δ) si β est égal à γ ;

4° Le produit de deux unités η_i , η_j d'indices i et j est une combinaison linéaire des unités η dont l'indice est supérieur à chacun des indices i et j .

Il est bien évident que les constantes qui restent dans l'expression des produits $\eta_i \eta_j$ ne peuvent pas être prises arbitrairement. Elles doivent toujours être telles que la loi associative soit vérifiée.

39. Supposons réciproquement qu'un système de nombres complexes satisfasse aux conditions énoncées dans le numéro précédent. Je dis que son équation caractéristique se décompose en équations linéaires. Nous allons, pour cela, ranger les unités dans l'ordre suivant : e_1 , puis les unités η de caractère $(1, 1)$, $(2, 1)$, ..., $(h, 1)$ dans l'ordre de leurs indices croissants ; ensuite e_2 et les unités η de caractères $(1, 2)$, $(2, 2)$, ..., $(h, 2)$, dans l'ordre de leurs indices, et ainsi de suite. Soient $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_r$ les unités ainsi rangées et désignons par

$$z_1 \zeta_1 + z_2 \zeta_2 + \dots + z_r \zeta_r = x_1 e_1 + \dots + x_h e_h + y_1 \eta_1 + \dots + y_k \eta_k$$

un nombre complexe quelconque du système. Enfin nous désignerons par $n_{\alpha\beta}$ le nombre des unités η de caractère (α, β) , et nous poserons

$$n_\beta = n_{1\beta} + n_{2\beta} + \dots + n_{h\beta} + 1.$$

Si nous nous reportons à la forme (7) (n° 16) de l'équation caractéristique

$$(13) \quad \Delta = \begin{vmatrix} \sum z_i \alpha_{i11} - \omega & \sum z_i \alpha_{i21} & \sum z_i \alpha_{ir1} \\ \sum z_i \alpha_{i12} & \sum z_i \alpha_{i22} - \omega & \sum z_i \alpha_{ir2} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \sum z_i \alpha_{i1r} & \sum z_i \alpha_{i2r} & \sum z_i \alpha_{irr} - \omega \end{vmatrix} = 0,$$

nous voyons que tous les éléments du déterminant du premier membre qui

sont dans l'une des n_1 premières lignes et dans l'une des $r - n_1$ premières colonnes sont nuls. En effet, il n'entre dans ces éléments que des constantes $\alpha_{i\lambda\mu}$ pour lesquelles λ est supérieur à n_1 , c'est-à-dire correspond à une unité dont le caractère n'a pas 1 pour second indice, et μ est au plus égal à n_1 , c'est-à-dire correspond à une unité dont le caractère a 1 pour second indice ; or, le produit d'une unité quelconque ζ_i par une unité ζ_λ de caractère $(\alpha, 2), (\alpha, 3), \dots, (\alpha, h)$ ne peut pas dépendre d'unités ζ_μ de caractère $(1, 1), (2, 1), \dots, (h, 1)$.

Il résulte de là que le déterminant Δ contient en facteur un déterminant d'ordre n_1 , celui qu'on obtient en prenant les n_1 premières lignes et les n_1 premières colonnes du déterminant Δ . Il contient, de même, en facteur $h - 1$ autres déterminants d'ordre n_2, n_3, \dots, n_h .

Considérons alors le premier de ces déterminants. Toutes les constantes α_{i11} sont nulles, sauf α_{111} qui est égal à 1 ; de plus les constantes $\alpha_{i\lambda\mu}$ ne sont différentes de zéro que si μ est supérieur à i et λ , sauf les constantes $\alpha_{i\lambda\lambda}$ qui sont égales à l'unité. Il en résulte que, dans le premier déterminant partiel, tous les éléments qui sont en haut et à droite de la diagonale principale sont nuls et ceux de la diagonale principale se réduisent tous à $z_i - \omega = x_i - \omega$.

Par suite ce déterminant se réduit à $(x_1 - \omega)^{n_1}$ et l'on a pour Δ la valeur

$$(14) \quad \Delta = (x_1 - \omega)^{n_1} (x_2 - \omega)^{n_2} \dots (x_h - \omega)^{n_h}.$$

Cette formule démontre la réciproque.

40. Mais il y a plus. Si l'on considère la deuxième équation caractéristique

$$(15) \quad \Delta' = \begin{vmatrix} \sum z_i \alpha_{1i1} - \omega & \sum z_i \alpha_{2i1} & \dots & \sum z_i \alpha_{ri1} \\ \sum z_i \alpha_{1i2} & \sum z_i \alpha_{2i2} - \omega & \dots & \sum z_i \alpha_{ri2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum z_i \alpha_{1ir} & \sum z_i \alpha_{2ir} & \dots & \sum z_i \alpha_{rir} - \omega \end{vmatrix} = 0,$$

on peut répéter sur le déterminant Δ' les mêmes raisonnements que sur le déterminant Δ , mais en supposant ici les unités rangées de telle sorte que l'on ait d'abord les unités de caractères $(1, 1), (1, 2), \dots, (1, h)$, puis celles

de caractères $(2, 1), (2, 2), \dots, (2, h)$, et ainsi de suite. En posant alors

$$n'_\alpha = n_{\alpha_1} + n_{\alpha_2} + \dots + n_{\alpha_h} + 1,$$

on voit que Δ' prend la forme suivante

$$(16) \quad \Delta' = (x_1 - \omega)^{n'_1} (x_2 - \omega)^{n'_2} \dots (x_h - \omega)^{n'_h}.$$

L'équation (16) montre donc que le deuxième déterminant caractéristique se décompose, lui aussi, en facteurs linéaires, et de plus que ces facteurs sont les mêmes que ceux du premier, aux ordres de multiplicité près.

41. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Si une des équations caractéristiques d'un système de nombres complexes se décompose en équations linéaires, il en est de même de l'autre; les racines sont les mêmes dans ces deux équations, aux ordres de multiplicité près; enfin il n'y a aucune relation linéaire à coefficients constants entre ces racines.

Il est bon d'ajouter que les modules partiels e_1, e_2, \dots, e_h qui entrent dans l'énoncé du n° 38 ne sont pas toujours déterminés sans ambiguïté. Prenons par exemple $h = 2, k = 1$ et supposons que l'unité η soit de caractère $(1, 2)$. On vérifie facilement qu'en prenant $e_1 + \eta, e_2 - \eta$ au lieu de e_1 et e_2 la loi de multiplication reste la même. *Il faut et il suffit d'ailleurs (19) que les h nouvelles unités e'_1, \dots, e'_h satisfassent aux relations $e_i'^2 = e_i, e'_i e'_j = 0$.*

Mais ce qui est déterminé sans ambiguïté, ce sont naturellement les entiers $h, k, n_1, n_2, \dots, n_h, n'_1, n'_2, \dots, n'_h$, et aussi tous les entiers $n_{\alpha\beta}$. Pour se rendre compte de ce dernier point, remarquons que les nombres pseudo-nuls du système sont déterminés sans ambiguïté. Il en est de même parmi eux de ceux dont le produit, à droite ou à gauche, par un nombre pseudo-nul quelconque, est nul; appelons ζ_1, ζ_2, \dots celles des unités $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ du n° 38 qui satisfont à cette condition. Ceux des nombres pseudo-nuls dont le produit par un nombre pseudo-nul quelconque ne dépend que des ζ sont alors déterminés sans ambiguïté, à des nombres ζ près; désignons celles des unités η qui satisfont à cette condition par $\theta_1, \theta_2, \dots$; et ainsi de suite. Si nous partons d'un système de modules partiels e_1, e_2, \dots, e_h déterminé, nous pouvons supposer que les unités ζ, θ, \dots appartiennent à un caractère déterminé par rapport à ce système de modules.

Tout nouveau système de modules partiels s'obtiendra manifestement en prenant

$$e'_1 = e_1 + \eta^{(1)}, \quad e'_2 = e_2 + \eta^{(2)}, \quad \dots, \quad e'_h = e_h + \eta^{(h)},$$

les $\eta^{(i)}$ étant des nombres pseudo-nuls convenablement choisis; cela résulte de ce que l'ensemble des nombres $x_1 e_1 + y_1 \eta_1 + \dots + y_k \eta_k$ s'obtient en égalant à zéro les $h - 1$ dernières racines de l'équation caractéristique et, par suite, cet ensemble est indépendant du système de modules choisi.

Cela étant, si ζ_1 appartenait au caractère (α, β) , il en est encore de même maintenant, puisque tous les $\eta^{(i)} \zeta_1$ et $\zeta_1 \eta^{(i)}$ sont nuls. Prenons maintenant un des nombres θ appartenant *maintenant* au caractère (α, β) ; il est de la forme

$$\lambda_1 \theta_1 + \lambda_2 \theta_2 + \dots + \mu_1 \zeta_1 + \mu_2 \zeta_2 + \dots = \theta_0 + \zeta_0;$$

on a

$$(e_\alpha + \eta^{(\alpha)})(\theta_0 + \zeta_0) = (\theta_0 + \zeta_0)(e^\beta + \eta^{(\beta)}) = \theta_0 + \zeta_0;$$

d'où l'on déduit, en prenant les termes indépendants des ζ ,

$$e_\alpha \theta_0 = \theta_0 e_\beta = \theta_0, \quad e_i \theta_0 = \theta_0 e_j = 0, \quad i \neq \alpha, \quad j \neq \beta.$$

Le nombre $\theta_0 + \zeta_0$ peut donc être obtenu en ajoutant un nombre ζ à un des nombres θ qui *avait* le caractère (α, β) . On peut procéder ainsi de proche en proche. On voit que l'on peut prendre de nouvelles unités η ayant chacune un caractère déterminé et provenant chacun d'une ancienne unité de même caractère. Les nombres $n_{\alpha\beta}$ sont donc restés les mêmes.

42. *Pour chaque système de nombres complexes de la première classe, nous avons donc un certain nombre d'entiers INVARIANTS, à savoir d'abord le nombre r des unités indépendantes, le nombre h des racines distinctes de l'une quelconque des équations caractéristiques, et enfin un tableau carré de h^2 entiers.*

On peut facilement déduire de là que si deux systèmes de nombres complexes de la première classe sont donnés chacun par r unités $e_1, e_2, \dots, e_h, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$, les h premières étant des modules partiels et les k autres appartenant à un caractère déterminé, les deux systèmes seront distincts ou non suivant d'abord que les deux séries de nombres $h, n_{\alpha\beta}$ seront ou non différentes et ensuite suivant qu'il sera impossible ou non de remplacer les unités η de caractère (α, β) d'un des systèmes par d'autres unités de même

caractère de façon que la loi de multiplication des η devienne la même pour les deux systèmes.

Cherchons, par exemple, tous les systèmes de première classe pour lesquels $h = 2$, $n_{11} = n_{22} = 1$, $n_{12} = 2$, $n_{21} = 0$. Appelons η , η' , η'' , η''' les quatre unités pseudo-nulles, appartenant respectivement aux caractères $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(1, 2)$ et $(1, 2)$. Il n'y a que les produits $\eta\eta''$, $\eta\eta'''$, $\eta''\eta'$, $\eta''\eta'''$ qui puissent être différents de zéro. Supposons les unités η rangées comme il est dit au n° 31; on peut alors supposer que η''' est placée après η'' ; par suite les produits $\eta\eta'''$, $\eta''\eta'''$, qui ne peuvent dépendre que de η'' , η''' , sont nécessairement nuls. Donc on peut prendre η''' pour dernière unité η_4 . Alors les deux autres produits $\eta\eta''$, $\eta''\eta'$ ne pouvant dépendre que de η_4 , on peut ranger η , η' , η'' dans n'importe quel ordre, par exemple

$$\eta_1 = \eta, \quad \eta_2 = \eta', \quad \eta_3 = \eta'', \quad \eta_4 = \eta''';$$

alors tous les produits sont nuls sauf

$$\eta_1\eta_3 = a\eta_4, \quad \eta_3\eta_2 = b\eta_4;$$

et l'on peut même supposer les constantes a et b réduites à zéro ou l'unité, ce qui donne *quatre* cas distincts.

VI.

SYSTÈMES DE NOMBRES COMPLEXES DE LA DEUXIÈME CLASSE.

43. Les systèmes de nombres complexes de la deuxième classe sont ceux pour lesquels le premier membre de l'équation caractéristique contient un ou plusieurs facteurs irréductibles en ω , x_1 , x_2 , ..., x_r de degré supérieur à l'unité.

Nous pouvons toujours, d'après les développements du paragraphe IV, supposer pris pour unités d'abord h modules partiels ε_1 , ε_2 , ..., ε_h et ensuite $k = r - h$ unités pseudo-nulles η_1 , η_2 , ..., η_k dont chacune appartient à un caractère déterminé. Naturellement tout nombre qui se déduit linéairement de η_1 , η_2 , ..., η_k n'est plus nécessairement pseudo-nul.

Nous savons de plus que l'ensemble des nombres de caractère $(1, 1)$ forme un système *de la première classe*, et par suite nous pouvons supposer choisies les unités η de caractère $(1, 1)$ de telle sorte que le produit de deux d'entre elles ne dépende que des unités η de même caractère dont les indices

sont supérieurs à chacun des indices des premières. Il en est de même pour les unités η de caractère $(2, 2), \dots, (h, h)$.

44. En ce qui regarde l'équation caractéristique, nous pouvons, comme au n° 39, désigner par

$$z_1 \zeta_1 + z_2 \zeta_2 + \dots + z_r \zeta_r$$

un nombre quelconque du système, les symboles $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_r$ désignant les r unités e, η rangées de telle façon que les n_1 premières soient d'abord e_1 et ensuite les unités η dont le caractère a 1 pour second indice; les n_2 suivantes étant e_2 puis les unités η dont le caractère a 2 pour second indice; et ainsi de suite.

Si nous considérons alors le déterminant Δ du n° 16

$$(1) \quad \Delta = \begin{vmatrix} \sum z_i \alpha_{i11} - \omega & \sum z_i \alpha_{i21} & \dots & \sum z_i \alpha_{ir1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum z_i \alpha_{i1r} & \sum z_i \alpha_{i2r} & \dots & \sum z_i \alpha_{irr} - \omega \end{vmatrix},$$

nous verrons (39) que tous les éléments appartenant à l'une des n_1 premières lignes et des $r - n_1$ dernières colonnes sont nuls, de sorte que Δ contient en facteur un déterminant Δ_1 , d'ordre n_1 , formé des n_1 premières lignes et des n_1 premières colonnes; et de même $h - 1$ autres déterminants $\Delta_2, \dots, \Delta_h$ d'ordres n_2, \dots, n_h .

45. Considérons maintenant le déterminant Δ_1 et voyons comment y entre la variable z_1 , qui se rapporte à l'unité $\zeta_1 = e_1$. Il est clair que tous les coefficients $\alpha_{i\lambda\mu}$ sont nuls pour λ différent de μ , et que les coefficients $\alpha_{i\lambda\lambda}$ sont nuls si ζ_λ n'est pas d'indice $(1, 1)$ et sont égaux à 1 si ζ_λ est d'indice $(1, 1)$. Il en est de même de z_{n_1+1} (qui se rapporte à e_2) qui ne figure que dans les éléments de la diagonale principale avec le coefficient $\alpha_{n_1+1,\lambda,\lambda}$ égal à 1 que si ζ_λ appartient à l'indice $(2, 1)$; de même pour les autres z coefficients de e_2, e_3, \dots, e_h .

Nous voyons par là qu'en réintroduisant les variables x, y

$$x_1 e_1 + \dots + x_h e_h + y_1 \eta_1 + \dots + y_k \eta_k = z_1 \zeta_1 + \dots + z_r \zeta_r,$$

le déterminant Δ_1 est homogène en $x_1 - \omega, x_2 - \omega, \dots, x_h - \omega, y_1, y_2, \dots, y_k$, les variables x_1, x_2, \dots, x_h n'entrant en effet que dans la diagonale prin-

cipale, et chaque élément de la diagonale principale contenant une de ces variables et une seule avec le coefficient 1.

46. Cela étant, si nous posons

$$x'_1 = x_1 - \omega, \quad x'_2 = x_2 - \omega, \quad \dots, \quad x'_h = x_h - \omega,$$

le déterminant Δ_i ne contient que $x'_1, x'_2, \dots, x'_h; y_1, y_2, \dots, y_k$. Si nous convenons de dire que x'_i appartient au caractère (i, i) et y_i au caractère (α, β) de η_i , l'on voit facilement que Δ_i est homogène et de degré n_{α} (ou $n_{\alpha} + 1$ si $\alpha = 1$) par rapport aux variables x', y dont le caractère a α pour premier indice. En effet, une telle variable z_i ne peut se présenter dans Δ_i avec le coefficient $\alpha_{i\lambda\mu}$ que si le caractère de ζ_{μ} admet α pour premier indice; et réciproquement si le caractère de ζ_{μ} admet α pour premier indice, le coefficient $\alpha_{i\lambda\mu}$ ne peut être différent de zéro que si ζ_i admet aussi α pour premier indice. Δ_i est donc homogène par rapport aux variables z_i dont le caractère admet α pour premier indice et le degré d'homogénéité est égal au nombre des unités $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n_1}$ dont le caractère a le même premier indice, c'est-à-dire dont le caractère est $(\alpha, 1)$. Le degré d'homogénéité est donc bien n_{α} ou $n_{\alpha} + 1$.

De même Δ_i est homogène et du même degré d'homogénéité n_{α} (ou $n_{\alpha} + 1$) par rapport aux variables x', y dont le caractère admet α pour *second* indice.

47. Ces préliminaires étant posés, supposons décomposé le déterminant Δ en ses facteurs irréductibles

$$(2) \quad \Delta = P_1^{q_1} P_2^{q_2} \dots P_l^{q_l},$$

Le déterminant Δ admettant Δ_i pour diviseur, il est clair que Δ_i est de la forme

$$(3) \quad \Delta_i = P_1^{q'_1} P_2^{q'_2} \dots P_l^{q'_l},$$

les entiers q'_1, q'_2, \dots, q'_l pouvant être en partie nuls. D'autre part le nombre des racines distinctes en ω de Δ est égal à la somme des nombres des racines distinctes de P_1, P_2, \dots, P_l et comme ces l polynomes sont irréductibles, à la somme des degrés de P_1, P_2, \dots, P_l . La somme des degrés de ces polynomes est donc h .

Or, pour $y_1 = y_2 = \dots = y_k = 0$, le déterminant Δ se réduit à

$$(x_1 - \omega)^{n_1} (x_2 - \omega)^{n_2} \dots (x_h - \omega)^{n_h};$$

il en résulte, d'après la formule (2), que chacun des polynomes P_1, P_2, \dots, P_l se réduit, dans les mêmes conditions, à un produit de facteurs $(x_1 - \omega), \dots, (x_h - \omega)$. Comme tous ces facteurs doivent y figurer et que la somme des degrés de P_1, \dots, P_h est précisément égal au nombre de ces facteurs, il en résulte que chacun des polynomes P_1, P_2, \dots, P_l , par exemple P_1 , se réduit, pour $y_1 = y_2 = \dots = y_k = 0$, à un produit tel que

$$(4) \quad P_1^0 = (x_1 - \omega)(x_2 - \omega) \dots (x_p - \omega) = x'_1 x'_2 \dots x'_p,$$

à un facteur constant près qu'on peut toujours supposer égal à l'unité.

Considérons, maintenant, la formule (3). Le premier nombre Δ_i de cette formule est *homogène* par rapport aux variables x', y dont les caractères sont $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \dots, (\alpha, h)$. Cette quantité Δ_i est, d'autre part, égale au produit de polynomes en ces mêmes variables. Or, un produit de polynomes ne peut être homogène que si chacun des polynomes est homogène. Il en résulte donc que chacun des facteurs P_1, P_2, \dots, P_l est homogène par rapport aux variables considérées plus haut dont les caractères sont $(\alpha, 1), \dots, (\alpha, h)$ et, de même, par rapport aux variables dont les caractères sont $(1, \alpha), (2, \alpha), \dots, (h, \alpha)$.

Pour avoir les degrés d'homogénéité correspondants, il suffit de prendre *un* des termes de chacun des facteurs en question. Prenons, par exemple, le polynome P_1 . Un de ses termes est, d'après (4), $x'_1 x'_2 \dots x'_p$. Il est homogène et du premier degré par rapport aux variables x', y dont le caractère a pour premier ou pour second indice l'un quelconque des nombres $1, 2, \dots, p$.

Par suite, *le polynome P_1 est un polynome en $x'_1, x'_2, \dots, x'_h, y_1, y_2, \dots, y_k$. Il est, de plus, linéaire et homogène par rapport à celles de ces variables dont le caractère admet 1 pour premier indice, de même pour celles dont le caractère admet respectivement 2, 3, ..., p pour premier indice, et, enfin, pour celles dont le caractère admet respectivement 1, 2, 3, ..., p pour second indice. Ce polynome ne contient pas les autres variables.*

On voit que, pour avoir P_1 , on pourrait ne considérer que les nombres du système dont le caractère a des indices ne dépassant pas p . Ces nombres forment manifestement un système Σ_i dont l'équation caractéristique se réduit à $P_1^q = 0$.

48. Il résulte de là que, si l'on désigne symboliquement par $[\alpha, \beta]$ une

variable de caractère (α, β) , un terme quelconque de P_1 peut se représenter par un symbole analogue au suivant

$$(5) \quad \{[1, 2][2, 3] \dots [\alpha - 1, \alpha][\alpha, 1]\} \{[\alpha + 1, \alpha + 2] \dots [\beta, \alpha + 1]\} \dots \{[\gamma + 1, \gamma + 1] \dots [p, p]\};$$

les $p - \gamma$ derniers termes ayant des caractères à indices égaux.

Cela étant, considérons les termes dans lesquels le nombre des facteurs x'_1, x'_2, \dots, x'_p est le plus petit possible. Si nous faisons dans l'équation caractéristique

$$(6) \quad P_1 = 0,$$

de Σ_1 , $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$, les facteurs x'_1, x'_2, \dots, x'_p doivent être remplacés par ω . Nous considérons donc, en somme, dans ces conditions les termes de plus bas degré de l'équation (6) en ω . Supposons que l'expression (5) soit un de ces termes et que ω figure dans les $p - \lambda$ derniers termes

$$[\lambda + 1, \lambda + 1][\lambda + 2, \lambda + 2] \dots [p, p].$$

Imaginons alors que nous formulions, dans l'équation (6), toutes les variables y dont le caractère n'est pas un des caractères

$$(7) \quad \begin{cases} (1, 2), (2, 3), \dots, (\alpha, 1), (\alpha + 1, \alpha + 2), \dots, \\ (\beta, \alpha + 1), \dots, (\gamma + 1, \gamma + 1), \dots, (\lambda, \lambda), \end{cases}$$

qui entrent dans l'expression (5) débarrassée de la puissance de ω qu'elle contient. Il est alors manifeste que P_1 se réduira à ω^p plus des termes tout à fait analogues à (5). *Il sera donc possible de trouver un nombre complexe du système Σ_1 , somme de nombres appartenant aux caractères (7) et pour lequel l'équation caractéristique admettra au moins une racine différente de zéro.*

49. Partons maintenant, *a priori*, de l'hypothèse qui vient d'être exprimée. *Supposons donc que, pour un certain nombre u de la forme*

$$u = (e_{1,2} + e_{2,3} + \dots + e_{\alpha-1,\alpha} + e_{\alpha,1}) + (e_{\alpha+1,\alpha+2} + \dots + e_{\beta,\alpha+1}) + \dots \\ + \eta_{\gamma+1,\gamma+1} + \dots + \eta_{\lambda,\lambda},$$

l'équation caractéristique admette une racine différente de zéro, les nombres $e_{i,j}, \eta_{i,i}$ étant des combinaisons linéaires des nombres pseudo-

nuls $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ qui appartiennent respectivement aux caractères $(i, j), (i, i)$, l'un des nombres $\alpha, \beta - \alpha, \dots, \lambda - \gamma$ étant plus grand que zéro.

Il est évident que, dans ce cas, le système ne peut pas être de la première classe, car le nombre considéré, somme de nombres pseudo-nuls, n'est pas lui-même pseudo-nul.

L'hypothèse qui vient d'être énoncée exprime donc la condition nécessaire et suffisante pour que le système Σ appartienne à la seconde classe.

Le nombre u n'étant pas pseudo-nul, il existe un nombre v tel que l'on ait

$$(8) \quad uv = v,$$

en multipliant au besoin u par un facteur convenable. Regardons v comme une somme de nombres appartenant chacun à un caractère déterminé; de la forme de u et de la formule (8) résulte qu'aucun des premiers indices de ces caractères ne dépasse λ . Considérons, maintenant, ceux des termes de la somme v dont le caractère a $\gamma + 1$ pour premier indice; soit $v_{\gamma+1}$ la somme de ces termes; on a manifestement

$$\eta_{\gamma+1, \gamma+1} v_{\gamma+1} = v_{\gamma+1},$$

ce qui montre que $v_{\gamma+1}$ est nul, le nombre $\eta_{\gamma+1, \gamma+1}$ étant pseudo-nul.

Les premiers indices des caractères des termes qui constituent la somme v ne dépassent donc pas γ . Supposons qu'il y ait effectivement dans cette somme un terme dont le caractère ait 1 pour premier indice. En appelant v' le nombre différent de zéro, formé des termes dont les caractères ont pour premiers indices les nombres 1, 2, ..., α , et en appelant de même u' le nombre

$$u' = e_{12} + e_{23} + \dots + e_{\alpha, 1},$$

on voit que

$$u' v' = v'.$$

Autrement dit, on peut supposer que u est de la forme

$$u = e_{12} + e_{23} + \dots + e_{\alpha, 1}.$$

50. Enlevons donc les accents de u' et de v' . Nous pourrions, d'après ce

nombre

$$(12) \quad e_{i,j} = e_{i,i+1} e_{i+1,i+2} \cdots e_{j-1,j},$$

déterminé sans ambiguïté lorsqu'on se donne les deux indices i, j quelconques parmi les indices $1, 2, \dots, \alpha$. Je dis que le produit de e_{ij} par un nombre η de caractère (j, λ) ne peut pas être nul. Si, en effet, on avait

$$e_{ij}\eta = 0,$$

on en déduirait

$$e_{ji}e_{ij}\eta = 0.$$

Mais on a

$$(13) \quad e_{ji}e_{ij} = e_{j,j+1}e_{j+1,j+2}\cdots e_{j-1,j} = e_j + \zeta_j.$$

On aurait donc

$$0 = e_j\eta + \zeta_j\eta = \eta + \zeta_j\eta,$$

ce qui est impossible, le nombre ζ_j étant pseudo-nul.

Il résulte de là que, les produits $e_{i,j}\eta$ étant de caractère (i, λ) si η est de caractère (j, λ) , il y a au moins autant de nombres indépendants de caractère (i, λ) que de caractère (j, λ) . Comme rien ne distingue i et j , on peut dire qu'il y a le même nombre de nombres complexes indépendants de caractère (i, λ) que de caractère (j, λ) , et que les premiers peuvent être obtenus en multipliant e_{ij} par les derniers.

On démontrerait d'une façon analogue qu'il y a autant de nombres complexes indépendants de caractère (λ, i) que de caractère (λ, j) , et que les derniers s'obtiennent en multipliant les premiers par $e_{i,j}$.

Dans ces énoncés λ est l'un quelconque des nombres $1, 2, \dots, h$.

52. Il résulte immédiatement de là qu'il existe un nombre $e'_{\alpha 1}$ de caractère $(\alpha, 1)$ tel que le produit $e_{1\alpha}e'_{\alpha 1}$ soit un nombre donné de caractère $(1, 1)$, par exemple e_1 . Il existe donc α nombres $e_{12}, e_{23}, \dots, e_{\alpha-1,\alpha}, e'_{\alpha 1}$ tels que

$$(14) \quad e_{12}e_{23}\cdots e_{\alpha-1,\alpha}e'_{\alpha 1} = e_1.$$

On aura alors, évidemment, des égalités telles que la suivante

$$e_{i,i+1}\cdots e_{\alpha-1,\alpha}e'_{\alpha 1}e_{1,2}\cdots e_{i-1,i} = ae_i + \zeta'_i,$$

a étant une constante ordinaire et ζ'_i étant un nombre pseudo-nul de carac-

(i, λ) ; de même, les produits par e_{ij} de l'ensemble des nombres de caractère (λ, i) donnent tous les nombres de caractère (λ, j) .

54. En particulier, si nous nous bornons aux indices 1 et 2, nous voyons que le système donné contient quatre unités $e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}$, formant elles-mêmes un système, la loi de multiplication de ce système étant la suivante

$$e_{ij}e_{jl} = e_{il} \quad (i, j, l = 1, 2).$$

Un tel système de quatre unités s'appelle un QUATERNION.

L'équation caractéristique d'un quaternion est facile à former. En désignant par

$$x_{11}e_{11} + x_{12}e_{12} + x_{21}e_{21} + x_{22}e_{22}$$

un nombre quelconque du système, on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} - \omega & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} - \omega \end{vmatrix}.$$

Il en résulte qu'un quaternion est un système de la seconde classe, le déterminant du second membre étant irréductible.

Par suite, aucun système de première classe ne peut contenir de quaternion, car tout système contenu dans un système de première classe est nécessairement aussi de première classe. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, qui a été vérifié par M. Scheffers pour $r < 9$:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système soit de seconde classe est qu'il contienne un système de quatre unités, formant un quaternion.

C'est pour cette raison que M. Scheffers a appelé les systèmes de la seconde classe *systèmes à quaternions* (*Quaternionssystem*) et ceux de la première classe *systèmes sans quaternions* (*Nichtquaternionssystem*).

55. Nous pouvons encore exprimer, d'une autre façon, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système appartienne à la seconde classe. Remarquons, en effet, qu'on a

$$(e_{12} + e_{21})(e_{11} + e_{22}) = e_{11} + e_{22}.$$

Par suite, le nombre $e_{12} + e_{21}$, somme de deux nombres appartenant aux caractères $(1, 2), (2, 1)$, n'est pas pseudo-nul. Il est bien clair que si le

système appartenait à la première classe ce fait ne pourrait pas se présenter, la somme de deux nombres pseudo-nuls étant pseudo-nulle.

Donc, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système appartienne à la seconde classe est qu'il existe un nombre, somme de deux nombres appartenant respectivement aux caractères (α, β) , (β, α) , et qui ne soit pas pseudo-nul, ou encore qu'il existe deux nombres de caractères (α, β) , (β, α) dont le produit donne le module partiel e_α .

56. Cela étant, la série des indices $(1, 2, \dots, h)$ se partage en un certain nombre d'autres séries telles que $(1, 2, \dots, p)$, $(p+1, \dots, q)$, \dots , jouissant des propriétés suivantes. On peut passer d'un indice quelconque d'une de ces séries à un autre indice quelconque β de la même série par l'intermédiaire d'un certain nombre d'autres indices de la même série, soient $\gamma, \delta, \dots, \lambda$, de telle sorte qu'il existe un nombre non pseudo-nul de la forme $\eta_{\alpha\gamma} + \eta_{\gamma\alpha}$, un nombre non pseudo-nul de la forme $\eta_{\gamma\delta} + \eta_{\delta\gamma}$, \dots , un nombre non pseudo-nul de la forme $\eta_{\lambda\beta} + \eta_{\beta\lambda}$, en désignant par η_{ij} un nombre de caractère (i, j) . De plus, si λ, μ sont deux indices quelconques appartenant à deux séries différentes, il n'existe aucun nombre non pseudo-nul de la forme $\eta_{\lambda\mu} + \eta_{\mu\lambda}$.

On déduit facilement de là qu'on peut supposer choisis les indices $(1, 2, \dots, p)$ de la première série, par exemple, de telle façon qu'il y ait $p - 1$ nombres non pseudo-nuls de la forme

$$\eta_{12} + \eta_{21}, \quad \eta_{23} + \eta_{32}, \quad \dots, \quad \eta_{p-1,p} + \eta_{p,p-1}.$$

En répétant alors le raisonnement fait (49-53), nous verrons qu'il existe $2(p - 1)$ nombres $e_{12}, e_{21}, e_{23}, e_{32}, \dots, e_{p-1,p}, e_{p,p-1}$ tels que l'on ait

$$(19) \quad \begin{cases} e_{12}e_{21} = e_{11}, & e_{23}e_{32} = e_{22}, & \dots, & e_{p-1,p}e_{p,p-1} = e_{p-1,p-1}, \\ e_{21}e_{12} = e_{22}, & e_{32}e_{23} = e_{33}, & \dots, & e_{p,p-1}e_{p-1,p} = e_{p,p}. \end{cases}$$

Posons alors

$$(20) \quad \begin{cases} e_{i,i+j} = e_{i,i+1} e_{i+1,i+2} \dots e_{i+j-1,i+j}, \\ e_{i+j,i} = e_{i+j,i+j-1} e_{i+j-1,i+j-2} \dots e_{i+1,i}. \end{cases}$$

Nous démontrerons facilement que i, j, l, λ désignant quatre quelconques des indices $1, 2, \dots, p$, on a

$$(21) \quad e_{ij}e_{jl} = e_{il}, \quad e_{ij}e_{\lambda l} = 0 \quad (j \neq \lambda).$$

57. Nous pouvons ajouter (51) qu'on obtient l'ensemble des nombres de caractère (i, λ) en multipliant e_{ij} par l'ensemble des nombres de caractère (j, λ) , λ étant quelconque, i et j étant au plus égaux à p . De même, on obtient l'ensemble des nombres de caractère (λ, i) en multipliant par e_{ji} l'ensemble des nombres de caractère (λ, j) .

D'après cela, si nous désignons par η, η', \dots , les unités pseudo-nulles de caractère (i, i) , nous pourrions prendre pour unités de caractère (i, j) les nombres

$$e_{i1}\eta e_{1j}, \quad e_{i1}\eta' e_{1j}, \quad \dots,$$

le nombre $e_{i1}e_{11}e_{1j}$ se réduisant lui-même à e_{ij} . Si nous affectons les unités η, η', \dots du double indice inférieur (i, i) de leur caractère, nous pourrions poser

$$(22) \quad \eta_{ij} = e_{i1}\eta_{11}e_{1j}, \quad \eta'_{ij} = e_{i1}\eta'_{11}e_{1j}, \quad \dots$$

De même, si λ est supérieur à p et si nous nous donnons les unités de caractère (i, λ) , nous en déduirons celles de caractère (i, λ)

$$(23) \quad \eta_{i\lambda} = e_{i1}\eta_{1\lambda}, \quad \eta'_{i\lambda} = e_{i1}\eta'_{1\lambda}, \quad \dots,$$

et de même si nous nous donnons les unités de caractère (λ, i)

$$(24) \quad \eta_{\lambda i} = \eta_{\lambda 1}e_{1i}, \quad \eta'_{\lambda i} = \eta'_{\lambda 1}e_{1i}, \quad \dots$$

58. Considérons alors le système formé des unités appartenant aux caractères (i, i) , (i, λ) , (λ, i) , (λ, μ) , où λ et μ sont plus grands que p . Il est facile de déduire de la loi de multiplication de ce système la loi de multiplication du système total. Prenons d'abord le produit de deux nombres de caractère (i, i) . Soit

$$(25) \quad \eta_{i1}^{(\rho)} \eta_{i1}^{(\sigma)} = \sum \alpha_{\rho\sigma\tau} \eta_{i1}^{(\tau)};$$

on en déduit

$$(e_{i1}\eta_{i1}^{(\rho)}e_{1j})(e_{j1}\eta_{i1}^{(\sigma)}e_{1l}) = \sum \alpha_{\rho\sigma\tau} e_{i1}\eta_{i1}^{(\tau)}e_{1l},$$

ou

$$(26) \quad \eta_{ij}^{(\rho)} \eta_{jl}^{(\sigma)} = \sum \alpha_{\rho\sigma\tau} \eta_{il}^{(\tau)},$$

et cette formule s'applique encore au cas où l'un des nombres $\eta_{i1}^{(\rho)}$, $\eta_{i1}^{(\sigma)}$ est le module partiel e_{i1} .

Partons maintenant de

$$\eta_{11}^{(\rho)} \eta_{1\lambda}^{(\sigma)} = \sum \beta_{\rho\sigma\tau} \eta_{1\lambda}^{(\tau)};$$

on en déduit, comme tout à l'heure,

$$(27) \quad \eta_{ij}^{(\rho)} \eta_{j\lambda}^{(\sigma)} = \sum \beta_{\rho\sigma\tau} \eta_{i\lambda}^{(\tau)},$$

les constantes $\beta_{\rho\sigma\tau}$ ne dépendant pas des indices i et j ; de même

$$(28) \quad \eta_{ji}^{(\rho)} \eta_{ij}^{(\sigma)} = \sum \gamma_{\rho\sigma\tau} \eta_{ij}^{(\tau)},$$

les constantes γ ne dépendant pas des indices i et j .

59. Si nous procédons de la même façon pour la seconde série $(p+1, p+2, \dots, q)$, et pour la troisième et ainsi de suite, nous verrons qu'il suffira de considérer le système des nombres complexes formé des nombres de caractères $(1, 1), (1, p+1), (1, q+1), \dots, (p+1, 1), \dots$, et que de la loi de multiplication de ce système on déduira celle du système total.

Mais *ce système partiel est de première classe*; car, par hypothèse, il n'existe aucun nombre non pseudo-nul de la forme $\eta_{1, p+1} + \eta_{p+1, 1}$ ou d'une forme analogue.

Donc, on peut déduire un système quelconque Σ de deuxième classe d'un système Σ' de première classe.

60. Pour définir d'une façon précise cette correspondance, *supposons que nous ayons mis le système Σ' de première classe sous la forme canonique indiquée au n° 38. Soient*

$$\mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{E}^{(2)}, \dots, \mathbf{E}^{(h)}$$

les modules partiels de ce système, et soient

$$\mathbf{H}^{(1)}, \mathbf{H}^{(2)}, \dots, \mathbf{H}^{(k)}$$

les unités pseudo-nulles, dont chacune appartient à un caractère déterminé. Nous faisons correspondre à chaque module partiel $\mathbf{E}^{(i)}$ un système de p_i^2 unités $e_{\alpha\beta}^i$, où α et β prennent toutes les valeurs $1, 2, \dots, p_i$. Nous faisons maintenant correspondre à chaque unité $\mathbf{H}^{(p)}$ de caractère

(i, j) , $p_i p_j$ unités $\eta_{\alpha\beta}^{(i)}$, où α prend toutes les valeurs $1, 2, \dots, p_i$ et β toutes les valeurs $1, 2, \dots, p_j$.

Cela étant, les formules qui donnent la loi de multiplication du premier système sont

$$(29) \quad (\mathbf{E}^{(i)})^2 = \mathbf{E}^{(i)}, \quad \mathbf{E}^{(i)}\mathbf{H}^{(\rho)} = \mathbf{H}^{(\rho)}\mathbf{E}^{(j)} = \mathbf{H}^{(\rho)}, \quad \mathbf{H}^{(\rho)}\mathbf{H}^{(\sigma)} = \sum \alpha_{\rho\sigma\tau} \mathbf{H}^{(\tau)},$$

en supposant que dans la seconde formule $\mathbf{H}^{(\rho)}$ soit de caractère (i, j) ($\tau > \rho, \tau > \sigma$), et que, dans la troisième, le second indice du caractère (i, j) de $\mathbf{H}^{(\rho)}$ soit égal au premier indice du caractère (j, k) de $\mathbf{H}^{(\sigma)}$ et tous les $\mathbf{H}^{(\tau)}$ qui entrent dans le second membre étant de caractère (i, l) .

A la première formule correspondront les formules

$$(30) \quad e_{\alpha\beta}^{(i)} e_{\beta\gamma}^{(i)} = e_{\alpha\gamma}^{(i)} \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, p_i);$$

à la seconde, les formules

$$(31) \quad e_{\alpha\beta}^{(i)} \eta_{\beta\gamma}^{(\rho)} = \eta_{\alpha\gamma}^{(\rho)}, \quad \eta_{\beta\gamma}^{(\rho)} e_{\gamma\delta}^{(j)} = \eta_{\beta\delta}^{(\rho)} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, p_i; \gamma, \delta = 1, 2, \dots, p_j).$$

Enfin, à la dernière, correspondront les formules

$$(32) \quad \eta_{\alpha\beta}^{(\rho)} \eta_{\beta\gamma}^{(\sigma)} = \sum_{\tau} \alpha_{\rho\sigma\tau} \eta_{\alpha\gamma}^{(\tau)} \quad \left(\begin{array}{l} \tau > \rho, \tau > \sigma; \alpha = 1, 2, \dots, p_i; \beta = 1, 2, \dots, p_j; \\ \gamma = 1, 2, \dots, p_l \end{array} \right).$$

Tous les produits non écrits sont nuls.

On peut encore énoncer ce théorème sous la forme suivante, plus intuitive :

Tout système de la deuxième classe peut se déduire d'un système de la première classe mis sous forme canonique

$$\mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{E}^{(2)} \dots, \mathbf{E}^{(h)}; \quad \mathbf{H}^{(1)}, \mathbf{H}^{(2)}, \dots, \mathbf{H}^{(k)},$$

en regardant les coefficients des unités de ce système, non comme des nombres ordinaires, mais comme des nombres de la forme

$$\sum x_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta},$$

les $\varepsilon_{\alpha\beta}$ étant des symboles où les indices α et β prennent respectivement les valeurs $(1, 2, \dots, p_i)$, $(1, 2, \dots, p_j)$, si (i, j) est le caractère de

l'unité correspondante; ces symboles étant assujettis de plus à la loi de multiplication

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\gamma}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\delta} = 0 \quad (\beta \neq \gamma).$$

Cela revient à faire correspondre à l'unité $\mathbf{H}^{(p)}$ de caractère (i, j) les $p_i p_j$ unités

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\mathbf{H}^{(p)} = \mathbf{H}^{(p)}\varepsilon_{\alpha\beta} \\ (\alpha = 1, 2, \dots, p_i; \beta = 1, 2, \dots, p_j).$$

Si l'on désigne par N_{ij} le nombre des unités \mathbf{H} de caractère (i, j) , on voit que l'ordre du système total est

$$r = p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2 + \sum_{i,j} N_{ij} p_i p_j.$$

Naturellement, un ou plusieurs des nombres p_1, p_2, \dots, p_n peuvent être égaux à l'unité.

61. Nous voyons qu'à chacun $\mathbf{E}^{(i)}$ des modules partiels $\mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{E}^{(2)}, \dots, \mathbf{E}^{(n)}$ correspond un système de p_i^2 unités $e_{\alpha\beta}^{(i)}$, dont la loi de multiplication est donnée par la formule (30). Ces systèmes remarquables sont la généralisation des quaternions; dans le cas de $p = 3$, ils ont été appelés *nonions* par M. Sylvester, on pourrait donc les appeler *p^2 -ions*.

Tout p^2 -ion contient un q^2 -ion si q est inférieur à p ; il suffit, en effet, de ne prendre que les unités $e_{\alpha\beta}$ pour lesquels α et β ne dépassent pas q . En particulier, tout p^2 -ion contient un quaternion.

On pourrait aussi considérer le cas où p est égal à 1, et alors on aurait un système d'une seule unité e égale à son carré.

62. Considérons un p^2 -ion et calculons son équation caractéristique. Désignons par

$$\sum x_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}$$

un nombre quelconque du p^2 -ion. En rangeant les unités dans l'ordre suivant :

$$(33) \quad e_{11}, e_{21}, \dots, e_{p1}, e_{12}, e_{22}, \dots, e_{p2}, \dots, e_{p-1,p}, e_{p,p},$$

nous savons (44) que le déterminant Δ se décompose en un produit de p

déterminants partiels qui sont tous ici d'ordre p . En désignant par

$$z_1 \zeta_1 + \dots + z_p \zeta_p$$

le nombre considéré, où les ζ sont les unités rangées dans l'ordre (33), le déterminant Δ_1 est ici

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \sum z_i \alpha_{i11} - \omega & \sum z_i \alpha_{i21} & \dots & \sum z_i \alpha_{ip1} \\ \sum z_i \alpha_{i12} & \sum z_i \alpha_{i22} - \omega & \dots & \sum z_i \alpha_{ip2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum z_i \alpha_{i1p} & \sum z_i \alpha_{i2p} & \dots & \sum z_i \alpha_{ipp} - \omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} - \omega & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} - \omega & \dots & x_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{p1} & x_{p2} & \dots & x_{pp} - \omega \end{vmatrix}.$$

Les autres déterminants $\Delta_2, \dots, \Delta_p$ sont les mêmes et, par suite, Δ est la $p^{\text{ième}}$ puissance du déterminant Δ_1 ,

$$(34) \quad \Delta = |x_{ij} - \varepsilon_{ij} \omega|^p.$$

En considérant la seconde équation caractéristique, on trouve pour le premier nombre Δ' la puissance $p^{\text{ième}}$ d'un déterminant Δ'_1 qui se déduit de Δ_1 en échangeant les lignes et les colonnes; on a donc aussi

$$\Delta' = |x_{ij} - \varepsilon_{ij} \omega|^p.$$

63. L'équation obtenue en égalant à zéro le terme indépendant de ω de l'équation caractéristique exprime naturellement que le produit du nombre considéré x par un nombre convenablement choisi peut être nul; de même pour la seconde équation caractéristique.

Donc, étant donné un p^2 -ion, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre $x = \sum x_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}$ puisse donner zéro par multiplication à droite ou à gauche avec un autre nombre est que le déterminant des $x_{\alpha\beta}$ soit nul.

64. Revenons à un système quelconque et cherchons à déterminer le premier membre Δ de son équation caractéristique. Nous avons vu qu'étant donné un système de première classe mis sous sa forme canonique (38), on pouvait ranger les unités de ce système dans un ordre tel que tous les élé-

ments du déterminant caractéristique en haut et à droite de la diagonale principale fussent nuls, les éléments de la diagonale principale se réduisant chacun à l'une des quantités $x_1 - \omega, x_2 - \omega, \dots, x_h - \omega$. Supposons les unités E et H de Σ' rangées dans cet ordre. Nous rangerons alors les unités de Σ dans un ordre tel que toutes les unités que nous avons fait correspondre à $H^{(\rho)}$ par exemple de caractère (i, j) se suivent de la façon suivante :

$$\eta_{11}^{(\rho)}, \eta_{21}^{(\rho)}, \dots, \eta_{p_i 1}^{(\rho)}, \eta_{12}^{(\rho)}, \eta_{22}^{(\rho)}, \eta_{p_i 2}^{(\rho)}, \dots, \eta_{p_i p_i}^{(\rho)}.$$

De cette façon, nous remplaçons l'élément de la $\mu^{\text{ième}}$ ligne et de la $\nu^{\text{ième}}$ colonne du déterminant de Σ' par un tableau rectangulaire de $p_\alpha p_\beta$ lignes et de $p_\gamma p_\delta$ colonnes, si (α, β) est le caractère de la $\mu^{\text{ième}}$ et (γ, δ) celui de la $\nu^{\text{ième}}$ unité de Σ' .

Le déterminant caractéristique de Σ' se réduisant aux produits des éléments de la diagonale principale, le déterminant principal de Σ se réduira au produit des déterminants constitués par les tableaux carrés que nous avons substitués à ces éléments.

Prenons, par exemple, l'élément qui pour Σ' était à la $\lambda^{\text{ième}}$ ligne et à la $\lambda^{\text{ième}}$ colonne; soit (i, j) le caractère de la $\lambda^{\text{ième}}$ unité de Σ' . Nous lui substituons un tableau carré de $p_i p_j$ lignes et $p_i p_j$ colonnes. Il est facile de voir que ce déterminant est

$$\begin{vmatrix} x_{11}^{(i)} - \omega & x_{12}^{(i)} & \dots & x_{1p_i}^{(i)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_{21}^{(i)} & x_{22}^{(i)} - \omega & \dots & x_{2p_i}^{(i)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ x_{p_i 1}^{(i)} & x_{p_i 2}^{(i)} & \dots & x_{p_i p_i}^{(i)} - \omega & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_{11}^{(i)} - \omega & x_{12}^{(i)} & \dots & x_{1p_i}^{(i)} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & x_{p_i p_i}^{(i)} - \omega \end{vmatrix} = \Delta_i^{p_i},$$

en posant

$$(35) \quad \Delta_i = \begin{vmatrix} x_{11}^{(i)} - \omega & x_{12}^{(i)} & \dots & x_{1p_i}^{(i)} \\ x_{21}^{(i)} & x_{22}^{(i)} - \omega & \dots & x_{2p_i}^{(i)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{p_i 1}^{(i)} & x_{p_i 2}^{(i)} & \dots & x_{p_i p_i}^{(i)} - \omega \end{vmatrix}.$$

Il résulte finalement de là que l'on a

$$(36) \quad \Delta = \Delta_1^{p_1 + N_{11}p_1 + N_{12}p_2 + \dots + N_{1p_1}p_{p_1}} \Delta_2^{p_2 + N_{21}p_1 + N_{22}p_2 + \dots + N_{2p_2}p_{p_2}} \dots \Delta_H^{p_H + N_{H1}p_1 + \dots + N_{H p_H}p_{p_H}}.$$

65. En considérant la seconde équation caractéristique, on aurait de même

$$(37) \quad \Delta' = \Delta_1^{p_1 + N_{11}p_1 + \dots + N_{H1}p_H} \Delta_2^{p_2 + N_{12}p_1 + \dots + N_{H2}p_H} \dots \Delta_H^{p_H + N_{1H}p_1 + \dots + N_{HH}p_H}.$$

Les nombres entiers N ont la signification indiquée plus haut, N_{ij} étant le nombre des unités H de Σ' qui sont de caractère (i, j) .

On voit que les facteurs irréductibles qui entrent dans Δ et Δ' sont les mêmes et qu'ils peuvent être mis sous la forme de H déterminants tels que Δ_i (formule 35).

Nous pouvons énoncer ce résultat sous la forme suivante :

Étant donné un système de la seconde classe, les facteurs irréductibles qui entrent dans les deux déterminants caractéristiques de ce système sont les mêmes, aux degrés de multiplicité près. Si ces facteurs irréductibles sont au nombre de H et sont respectivement de degrés p_1, p_2, \dots, p_H , on peut trouver dans le système donné H systèmes respectivement de $p_1^2, p_2^2, \dots, p_H^2$ unités, toutes indépendantes entre elles, soit

$$\begin{aligned} e_{ij}^{(1)} & \quad (i, j = 1, 2, \dots, p_1), \\ e_{ij}^{(2)} & \quad (i, j = 1, 2, \dots, p_2), \\ \dots & \quad \dots\dots\dots \\ e_{ij}^{(H)} & \quad (i, j = 1, 2, \dots, p_H); \end{aligned}$$

tels que chacun de ces systèmes soit un p^2 -ion. De plus, on peut choisir $r - p_1^2 - p_2^2 - \dots - p_H^2$ autres unités indépendantes η_1, η_2, \dots , telles que si on désigne par

$$\sum x_{ij}^{(1)} e_{ij}^{(1)} + \sum x_{ij}^{(2)} e_{ij}^{(2)} + \dots + y_1 \eta_1 + y_2 \eta_2 + \dots$$

un nombre quelconque du système les H facteurs irréductibles qui entrent dans chacun des déterminants caractéristiques soient les H déterminants $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_H$ dont le premier, par exemple, est formé des éléments $x_{ij}^{(\alpha)} - \varepsilon_{ij} \omega$ ($\varepsilon_{ij} = 1$ si $i = j$, $\varepsilon_{ij} = 0$ si $i \neq j$)

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} x_{11}^{(\alpha)} - \omega & x_{12}^{(\alpha)} & \dots & x_{1p_\alpha}^{(\alpha)} \\ x_{21}^{(\alpha)} & x_{22}^{(\alpha)} - \omega & \dots & x_{2p_\alpha}^{(\alpha)} \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots \\ x_{p_\alpha 1}^{(\alpha)} & x_{p_\alpha 2}^{(\alpha)} & \dots & x_{p_\alpha p_\alpha}^{(\alpha)} - \omega \end{vmatrix}.$$

66. On voit immédiatement par là, en faisant ω égal à zéro, que la condition nécessaire et suffisante pour que l'une ou l'autre des divisions par un nombre soit possible est qu'aucun des déterminants $\Delta^{(0)}$ des $x_{ij}^{(2)}$ ne soit nul.

Si l'on appelle *diviseur de zéro* un nombre qui peut être multiplié à droite ou à gauche par un nombre convenablement choisi de façon à donner un produit nul, nous voyons que *tous les diviseurs de zéro s'obtiennent par l'équation*

$$\Delta_1^0 \Delta_2^0 \dots \Delta_n^0 = 0,$$

c'est-à-dire en égalant à zéro un ou plusieurs des déterminants de $x_{ij}^{(2)}$.

67. Quelle que soit la façon dont on fasse la réduction canonique (60) d'un système de deuxième classe, l'ensemble des nombres

$$\eta = y_1 \eta_1 + y_2 \eta_2 + \dots$$

reste toujours le même. On peut en effet obtenir cet ensemble en égalant à zéro tous les éléments de tous les déterminants facteurs irréductibles du premier membre de l'équation caractéristique; et il est clair que le système d'équations linéaires obtenu est indépendant des unités dont on part.

De même le p_1^2 -ion $e_{ij}^{(1)}$ est déterminé à des nombres η près, car l'ensemble des nombres qui se déduisent des unités de ce p_1^2 -ion et des unités η peut être obtenu en égalant à zéro tous les éléments des $H - 1$ derniers déterminants facteurs irréductibles du premier membre de l'équation caractéristique.

Il y a plus. Supposons qu'on ait déterminé en premier lieu p_1 nombres $\bar{e}_{11}^{(1)}, \bar{e}_{22}^{(1)}, \dots, \bar{e}_{p_1 p_1}^{(1)}$ se déduisant linéairement des unités du premier p_1^2 -ion et des unités η ; en second lieu p_2 nombres $\bar{e}_{11}^{(2)}, \dots, \bar{e}_{p_2 p_2}^{(2)}$ se déduisant linéairement des unités du second p_2^2 -ion et des unités η , et ainsi de suite, de telle façon enfin que chacun de ces $p_1 + p_2 + \dots + p_n$ nombres soit égal à son propre carré et que le produit de deux quelconques d'entre eux soit nul. Il en résultera que dans la première réduction (20) que nous avons fait subir au système, nous pouvons prendre ces nombres pour modules partiels $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$. Par suite, nous pourrions déterminer un p_1^2 -ion dont les éléments diagonaux seront p_1 des nombres précédents et seront, par suite, nécessairement $\bar{e}_{11}^{(1)}, \dots, \bar{e}_{p_1 p_1}^{(1)}$; de même un p_2^2 -ion dont les éléments diagonaux seront $\bar{e}_{22}^{(2)}, \dots, \bar{e}_{p_2 p_2}^{(2)}$; et ainsi de suite.

En se reportant à la façon dont nous avons déterminé les p^2 — ions du système, nous verrons même qu'on peut prendre pour $\bar{\varepsilon}_{12}^{(1)}, \dots, \bar{\varepsilon}_{1p_1}^{(1)}$ des nombres arbitraires ne se déduisant pas linéairement des η et appartenant respectivement aux caractères $(1, 2), \dots, (1, p_1)$ par rapport aux modules partiels $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{p_1}$.

Enfin, *il résulte de là qu'un nombre complexe arbitraire peut toujours, par un choix convenable des unités, être supposé de la forme*

$$(31) \quad \lambda_1^{(1)} e_{11}^{(1)} + \dots + \lambda_{p_1}^{(1)} e_{p_1 p_1}^{(1)} + \lambda_1^{(2)} e_{11}^{(2)} + \dots + \lambda_{p_n}^{(H)} e_{p_n p_n}^{(H)} + \eta.$$

68. Nous allons maintenant introduire quelques définitions qui permettront d'énoncer tous les résultats trouvés jusqu'ici sous des formes simples.

On dit qu'un système Σ de nombres complexes se décompose en deux systèmes Σ_1 et Σ_2 lorsque tout nombre de Σ_1 et tout nombre de Σ_2 , de même que la somme d'un nombre quelconque de Σ_1 et d'un nombre quelconque de Σ_2 font partie de Σ ; lorsque, de plus, réciproquement, tout nombre de Σ est, d'une manière et d'une seule, la somme d'un nombre de Σ_1 et d'un nombre de Σ_2 ; lorsque enfin le produit d'un nombre quelconque de Σ_1 et d'un nombre quelconque de Σ_2 est nul.

Bien entendu cette définition suppose que Σ_1 et Σ_2 n'ont aucun nombre commun.

69. *On dit qu'un système Σ admet un sous-système invariant σ , lorsque tout nombre de σ fait partie de Σ et que le produit, à droite ou à gauche, d'un nombre quelconque de σ par un nombre quelconque de Σ fait encore partie de σ .*

Cette définition peut encore être étendue aux systèmes σ qui satisfont à toutes les propriétés des systèmes ordinaires, sauf celle d'avoir un module, c'est-à-dire sauf la possibilité des deux divisions. Par exemple, nous viendrons de l'étendre aux systèmes σ de nombres pseudo-nuls, étudiés aux nos 29 et suiv. Nous appellerons, pour abrégé, ces derniers systèmes *pseudo-nuls*. Un système pseudo-nul n'est donc pas, au sens propre du terme, un système de nombres complexes.

Un système Σ qui n'admet pas de sous-système invariant est dit simple. Un système qui se décompose en deux ou plusieurs systèmes simples est dit semi-simple.

70. Si l'on se reporte aux résultats établis précédemment, on voit que les systèmes simples ne doivent pas contenir d'unités η ; car le système pseudo-nul formé des unités que nous avons appelées η est manifestement invariant.

Il en résulte qu'un système simple ne peut qu'être formé d'un certain nombre de p^2 — ions, p pouvant avoir la valeur 1. Mais il est bien clair que le sous-système obtenu en prenant un de ces p^2 — ions, s'il y en a plusieurs, est invariant dans le système total. Il faut donc que le système se réduise lui-même à un p^2 — ion.

Réciproquement, prenons un p^2 — ion formé des p^2 unités e_{ij} . Ce système est simple; car si un nombre

$$x = \sum x_{ij} e_{ij}$$

de ce système fait partie d'un sous-groupe invariant, il en sera de même de $e_{\alpha i} x e_{j\beta} = x_{ij} e_{\alpha\beta}$. Par suite, si l'un des coefficients x_{ij} est différent de zéro, le sous-système invariant contient toutes les unités $e_{\alpha\beta}$, et par suite se confond avec le système total.

71. D'après cela, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Tous les systèmes simples de nombres complexes rentrent dans le même type; ils sont formés de p^2 unités e_{ij} , où i et j prennent toutes les valeurs 1, 2, ..., p et la loi de multiplication de ces unités est donnée par les formules

$$e_{ij} e_{jl} = e_{il}, \quad e_{ij} e_{\lambda l} = 0 \quad (j \neq \lambda).$$

Le nombre p est un nombre entier quelconque supérieur ou égal à 1. Ces systèmes s'appellent p^2 — ions.

Il résulte de là que *les systèmes semi-simples sont formés par la composition de plusieurs p^2 — ions.*

72. En comparant ce résultat avec ceux trouvés pour la représentation canonique des systèmes de première et deuxième classe, nous trouvons le théorème suivant :

Tout système de nombres complexes est formé d'un sous-système simple ou semi-simple Σ_1 , et d'un sous-système invariant pseudo-nul σ .

De plus, la nature du sous-système semi-simple est parfaitement déterminée.

Considérons un des facteurs irréductibles qui entrent dans le déterminant caractéristique; il est égal à

$$\begin{vmatrix} x_{11} - \omega & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} - \omega & \dots & x_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{p1} & x_{p2} & \dots & x_{pp} - \omega \end{vmatrix},$$

si l'on appelle $\sum x_{ij} e_{ij}$ le nombre le plus général du sous-système simple correspondant. Si nous développons ce déterminant suivant les puissances de ω nous trouvons, au signe près,

$$\omega^p - \sum x_{ii} \omega^{p-1} + \sum (x_{ii} x_{jj} - x_{ij} x_{ji}) \omega^{p-2} + \dots$$

Si ce déterminant entre avec l'exposant q , il donne un facteur de la forme

$$\omega^{pq} - q \sum x_{ii} \omega^{pq-1} + \left[q \sum (x_{ii} x_{jj} - x_{ij} x_{ji}) + \frac{q(q-1)}{2} \left(\sum x_{ii} \right)^2 \right] \omega^{pq-2} + \dots$$

Il en résulte que le déterminant caractéristique total est égal à

$$\begin{aligned} \omega^r - \mathbf{S} \left(q \sum x_{ii} \right) \omega^{r-1} \\ + \mathbf{S} \left[q \sum (x_{ii} x_{jj} - x_{ij} x_{ji}) + \frac{q(q-1)}{2} \left(\sum x_{ii} \right)^2 + qq' \sum x_{ii} \sum x'_{ii} \right] \omega^{r-2} + \dots \end{aligned}$$

Si nous appelons $\psi(x)$ le coefficient de ω^{r-2} , et que nous prenions les dérivées de cette forme quadratique, nous trouvons par exemple

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x_{11}} &= q \left[\mathbf{S} \left(q \sum x_{ii} \right) - x_{11} \right], \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_{12}} &= -q x_{21}. \end{aligned}$$

Il en résulte que le système d'équations

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_{ij}} = \frac{\partial \psi}{\partial x'_{ij}} = \dots = 0$$

est équivalent au système

$$x_{ij} = x'_{ij} = \dots = 0,$$

c'est-à-dire détermine le plus grand sous-système invariant pseudo-nul.

73. *D'après cela le plus grand sous-système invariant pseudo-nul d'un système de nombres complexes $x_1 e_1 + \dots + x_r e_r$ à r unités indépendantes e_1, e_2, \dots, e_r s'obtient par les équations linéaires*

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial \psi}{\partial x_r} = 0,$$

en désignant par ψ la forme quadratique coefficient de ω^{r-2} dans le premier membre de l'équation caractéristique du système.

74. En général, dans un système de nombres complexes le produit des deux facteurs complexes n'est pas indépendant de l'ordre de ces facteurs. Cherchons tous les systèmes pour lesquels ce dernier cas se présente, autrement dit *tous les systèmes à multiplication commutative.*

Si l'on suppose déterminés d'une certaine façon les modules partiels $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_h$ du système et les unités qui appartiennent chacune à un caractère déterminé, il est bien clair que pour aucune de ces unités η les deux indices (α, β) du caractère ne pourront être différents, sinon on aurait

$$\varepsilon_\alpha \eta = \eta, \quad \eta \varepsilon_\alpha = 0,$$

et la multiplication ne serait pas commutative. Il en résulte que, si h est supérieur à 1, le système se *décompose* en h autres systèmes formés respectivement des nombres appartenant aux caractères $(1, 1), (2, 2), \dots, (h, h)$.

Donc, étant donné un système Σ indécomposable à multiplication associative et commutative, on peut déterminer r unités indépendantes $e, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{r-1}$ de ce système, de telle sorte qu'on ait

$$e^2 = e, \quad e \eta_i = \eta_i e = \eta_i, \quad \eta_i \eta_j = \sum_{s=1}^{s=r-1} \alpha_{ijs} \eta_s,$$

où les constantes α_{ijs} sont égales à α_{jis} , l'indice s étant supérieur à chacun des indices i et j .

Bien entendu, les constantes α_{ijs} doivent satisfaire à certaines relations qui expriment l'associativité de la multiplication.

VII.

SYSTÈMES RÉELS DE NOMBRES COMPLEXES.

75. Dans les paragraphes précédents nous avons supposé que les coefficients x_i des unités e_i dans l'expression

$$(1) \quad x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_r e_r$$

d'un nombre complexe d'un système donné Σ pouvaient prendre toutes les valeurs, *réelles ou imaginaires*. Si nous ne l'avons pas supposé explicitement, nous l'avons fait implicitement en faisant la réduction canonique des unités, puisque nous n'avons fait aucune différence entre les racines réelles et les racines imaginaires de l'équation caractéristique.

Nous allons, dans ce paragraphe, considérer les systèmes pour lesquels les variables x_1, x_2, \dots, x_r sont *essentiellement réelles*. Alors il est bien clair que, le produit de deux nombres du système faisant encore partie du système, les constantes α_{ijs} , qui entrent dans les formules

$$(2) \quad e_i e_j = \sum \alpha_{ijs} e_s,$$

sont aussi réelles. *Nous dirons qu'un système de cette nature est un système réel de nombres complexes.*

76. Il est bien évident qu'en considérant un système réel Σ à r unités indépendantes e_1, e_2, \dots, e_r , si dans l'expression (1) on donne aux x des valeurs réelles ou imaginaires quelconques, on obtient un nouveau système Σ' qui peut être dit *prolongé* du système réel Σ . Naturellement pour ce système prolongé on peut appliquer tous les résultats des paragraphes précédents.

Cela étant, pour trouver tous les systèmes réels, nous n'aurons qu'à considérer tous les systèmes obtenus dans les paragraphes précédents et chercher s'ils peuvent être regardés comme les systèmes prolongés de systèmes réels.

77. Prenons d'abord les systèmes Σ' simples, c'est-à-dire ce que nous

avons appelé les p^2 — ions, formés de p^2 unités e_{ij} satisfaisant aux relations

$$e_{ij}e_{jl} = e_{il}.$$

Si un tel système Σ' peut être regardé comme résultant du prolongement d'un système réel, les unités e_{ij} de Σ' seront p^2 combinaisons linéaires à coefficients réels ou imaginaires des unités e_1, e_2, \dots, e_{p^2} du système réel Σ .

Si une de ces unités ne fait pas partie de Σ , nous dirons qu'elle est une *unité imaginaire*, et alors il y aura dans Σ' l'unité imaginaire conjuguée. Autrement dit, si l'on a

$$e_{ij} = (x_1 + ix'_1)e_1 + (x_2 - ix'_2)e_2 + \dots,$$

le nombre

$$(x_1 - ix'_1)e_1 + (x_2 + ix'_2)e_2 + \dots$$

fera partie de Σ' et sera dit *imaginaire conjugué* de e_{ij} . Il est clair que, si l'on change les unités de Σ , deux nombres imaginaires conjugués de Σ' ne cessent pas d'être imaginaires conjugués.

78. Cela étant, supposons que l'équation caractéristique de Σ , qui admet en général p racines distinctes, puisse, pour des valeurs réelles de x_1, x_2, \dots, x_{p^2} , admettre un certain nombre de racines réelles et soit $p - 2q$ le nombre maximum de ces racines réelles.

Il y a trois cas à distinguer, suivant que q est nul, que q est positif et inférieur à $\frac{p}{2}$ et, enfin, que q est égal à $\frac{p}{2}$.

Supposons d'abord que q soit nul. Alors pour un certain nombre u de Σ l'équation caractéristique a ses p racines réelles et distinctes. Ce nombre, considéré comme appartenant à Σ' , peut toujours être supposé de la forme

$$u = \lambda_1 e_{11} + \lambda_2 e_{22} + \dots + \lambda_p e_{pp}.$$

Or les racines de l'équation caractéristique de Σ sont, pour un nombre donné, les mêmes que celles de Σ' . Mais pour le nombre u de Σ' , ces racines sont $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$. Il en résulte d'abord que ces p quantités sont réelles. De plus, l'ensemble des nombres x de Σ , pour lesquels on a

$$ux = \lambda_1 x,$$

est compris dans l'ensemble des nombres de Σ' qui satisfont à cette même

condition. Autrement dit, on peut, en partant du nombre u de Σ , trouver p^2 unités de Σ appartenant toutes chacune à un caractère déterminé. Il est alors bien clair que ces p^2 unités sont proportionnelles aux e_{ij} , les facteurs de proportionnalité pouvant peut-être être imaginaires. Soient $a_{ij}e_{ij}$ ces unités. Mais de

$$(a_{11}e_{11})^2 = a_{11}(a_{11}e_{11})$$

on déduit nécessairement que a_{11} est réel et, par suite, peut être supposé égal à l'unité; de même pour les autres constantes.

On trouve donc dans ce premier cas le système réel de p^2 unités e_{ij} satisfaisant aux relations

$$e_{ij}e_{jl} = e_{il}.$$

79. Supposons, en second lieu, que l'équation caractéristique de Σ admette pour toute valeur arbitraire des x des nombres imaginaires dont le nombre minimum $2q$ n'atteigne pas le nombre total p des racines.

Alors il existe un nombre u de Σ pour lequel l'équation caractéristique admet $2q$ racines imaginaires et $p - 2q$ réelles. Considéré comme appartenant à Σ' , ce nombre peut être supposé de la forme.

$$u = \lambda_1 e_{11} + \lambda_2 e_{22} + \dots + \lambda_p e_{pp},$$

et les racines de l'une ou l'autre équation caractéristique sont $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$. Supposons par exemple que λ_1 soit réel et que λ_2 et λ_3 soient imaginaires conjugués. Alors les nombres du système Σ pour lesquels

$$ux = \lambda_1 x$$

se déduisent tous des nombres

$$e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1p};$$

autrement dit tous les nombres

$$(3) \quad x_{11}e_{11} + x_{12}e_{12} + \dots + x_{1p}e_{1p}$$

sont des combinaisons linéaires à coefficients réels ou imaginaires de p nombres distincts de Σ ; il en est de même évidemment de tous les nombres

$$(4) \quad x_{11}e_{11} + x_{21}e_{21} + \dots + x_{p1}e_{p1};$$

par suite, les nombres communs à ces deux séries, à savoir $x_{11}e_{11}$ sont proportionnels à un certain nombre réel de Σ . Ce nombre réel est donc ae_{11} ,

où, comme on l'a déjà remarqué plus haut, on peut supposer a égal à l'unité.

De même, en considérant les deux racines imaginaires conjuguées λ_2 et λ_3 , nous verrons que les nombres imaginaires de Σ qui satisfont à

$$ux = \lambda_2 x,$$

et ceux qui satisfont à

$$ux = \lambda_3 x,$$

sont deux à deux imaginaires conjugués. Autrement dit, tout nombre de la forme

$$(5) \quad x_{21} e_{21} + x_{22} e_{22} + x_{23} e_{23} + \dots + x_{2p} e_{2p}$$

est imaginaire conjugué d'un nombre de la forme

$$(6) \quad x_{31} e_{31} + x_{32} e_{32} + x_{33} e_{33} + \dots + x_{3p} e_{3p};$$

de même pour les deux familles de nombres

$$(7) \quad x_{12} e_{12} + x_{22} e_{22} + x_{32} e_{32} + \dots + x_{p2} e_{p2},$$

$$(8) \quad x_{13} e_{13} + x_{23} e_{23} + x_{33} e_{33} + \dots + x_{p3} e_{p3}.$$

Par suite le nombre e_{12} qui entre dans (3) et (7) est imaginaire conjugué d'un nombre entrant à la fois dans (3) et (8), c'est-à-dire d'un nombre de la forme ae_{13} . De même, e_{22} est imaginaire conjugué d'un nombre de la forme be_{33} ; mais ici il en résulterait que le nombre imaginaire conjugué de u , qui doit être u lui-même, serait

$$u = \lambda_1 e_{11} + \lambda_3 b e_{33} + \dots,$$

ce qui exige que b soit égal à 1.

En procédant de même pour les unités analogues nous voyons que nous pouvons faire correspondre à un certain nombre d'unités e_{ij} des nombres imaginaires conjugués de la façon suivante :

$$\begin{array}{lll} e_{11} \text{ est imaginaire conjugué à } & & e_{11}, \\ e_{22} & \text{»} & e_{33}, \\ e_{12} & \text{»} & a e_{13}, \\ e_{21} & \text{»} & b e_{31}, \\ e_{23} & \text{»} & c e_{32}. \end{array}$$