ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

P. DUHEM

Sur un point du calcul des variations

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série, tome 2, nº 1 (1900), p. 115-136
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1900_2_2_1_115_0>

SUR

UN POINT DU CALCUL DES VARIATIONS,

PAR M. P. DUHEM.

INTRODUCTION.

La plupart des problèmes de Statique ou de Dynamique relatifs aux milieux continus se ramènent, par l'emploi du principe des vitesses virtuelles, du principe de d'Alembert ou du principe de Hamilton, à une question de la forme suivante :

Exprimer que la variation d'une certaine fonction ou d'une certaine intégrale est nulle, toutes les fois que les variations imposées au système annulent la variation première de certaines autres fonctions ou de certaines autres intégrales.

On sait de quelle manière on ramène une telle question à une autre du même genre dans laquelle les variations imposées au système ne sont plus assujetties à aucune condition. Des inconnues auxiliaires, constantes ou variables, dont on admet *a priori* l'existence, sont introduites et l'on montre ensuite que la mise en équations du problème fournit le nombre voulu de conditions (équations, équations différentielles, équations aux dérivées partielles) pour déterminer ces inconnues auxiliaires.

Bien que cette méthode soit d'un emploi continuel et que sa légitimité ne soit révoquée en doute par aucun géomètre, il semble que les raisonnements qui l'autorisent n'aient pas la sûreté et la rigueur aujourd'hui requises en Mathématiques.

Il est toutefois un problème particulier où la méthode en question est exempte de tout reproche : c'est le cas où l'on se propose d'exprimer que toutes les variations qui rendent égale à o la variation première d'une certaine intégrale rendent aussi égale à o la variation première d'une autre intégrale ; l'existence de la constante auxiliaire et indéterminée que l'on introduit dans la solution de ce problème est justifiée par un raisonnement, aussi rigoureux qu'élégant, qui se trouve exposé dans divers Traités (1).

(1) *Voir*, en particulier, C. Jordan, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, 1re édition, t. III, p. 482, fin du n° 364.

C'est ce mode de raisonnement que nous nous proposons d'étendre et d'appliquer au problème pris dans son entière généralité.

Nous aborderons d'emblée le problème tel qu'on le rencontre dans l'étude des milieux continus à trois dimensions, où l'on a à considérer à la fois des intégrales triples étendues à tout le système et des intégrales doubles étendues aux surfaces qui le limitent ou aux surfaces de discontinuité qui le divisent; il va sans dire que la méthode s'applique sans peine aux cas plus simples des milieux continus à une ou à deux dimensions.

I. — *Préliminaires.*

1. Prenons un système continu à trois dimensions et imposons-lui une variation; au point dont les coordonnées étaient x, y, z avant variation correspond, après variation, un point dont les coordonnées sont

$$x + \varepsilon u(x, y, z), \quad y + \varepsilon v(x, y, z), \quad z + \varepsilon w(x, y, z).$$

ε est une quantité infiniment petite indépendante de x, y, z et u, v, w, trois fonctions continues de x, y, z que nous désignerons désormais par δx, δy, δz.

En chaque point, ce système présente certaines propriétés dont on veut tenir compte dans la théorie de Mécanique ou de Physique mathématique que l'on développe : telles sont la densité, la température, la densité électrique, l'intensité d'aimantation, etc. Chacune de ces propriétés correspond à une ou plusieurs grandeurs. Si nous prenons un état bien déterminé du système, chacune de ces grandeurs a, en chaque point, une valeur bien déterminée, et cette valeur varie d'une manière continue d'un point au point voisin, sauf peut-être le long de certaines surfaces de discontinuité. Ainsi, la densité a, en chaque point, une valeur bien déterminée, et cette valeur varie d'une manière continue d'un point au point voisin, sauf le long des surfaces par lesquelles confinent deux corps de nature différente. Pour ne pas compliquer les raisonnements sans avantage sérieux, nous supposerons désormais que le système ne présente pas de surfaces de discontinuité, hors les surfaces qui le limitent.

En même temps que le système subit la variation géométrique δx, δy, δz, ses propriétés subissent en général certains changements; une propriété qui, dans le système non déformé, était représentée au point x, y, z par le nombre $\rho(x, y, z)$, variable d'une manière continue avec x, y, z, est représentée, dans le système déformé, au point $x + \varepsilon\,\delta x$, $y + \varepsilon\,\delta y$, $z + \varepsilon\,\delta z$, par un nombre différent

$$\rho'(x + \varepsilon\,\delta x,\; y + \varepsilon\,\delta y,\; z + \varepsilon\,\delta z),$$

la fonction ρ' variant d'une manière continue d'un point à l'autre du système déformé.

Il peut arriver que la propriété considérée soit variable d'une manière absolument indépendante : telle est la température, telles sont les trois composantes de l'intensité d'aimantation sur un corps parfaitement doux. Dans ce cas, nous conviendrons de prendre

$$\rho'(x + \varepsilon\,\delta x,\ y + \varepsilon\,\delta y,\ z + \varepsilon\,\delta z) = \rho(x, y, z) + \varepsilon\, r(x, y, z),$$

$r(x, y, z)$ étant une fonction arbitraire, variable d'une manière continue d'un point à l'autre du système non déformé.

Il peut arriver que la variation de la quantité considérée ne soit pas entièrement indépendante ; ainsi la variation de la densité électrique aux divers points d'un système conducteur est soumise à cette restriction que la charge totale du système reste invariable. Dans ce cas, nous conviendrons encore de prendre

$$\rho'(x + \varepsilon\,\delta x,\ y + \varepsilon\,\delta y,\ z + \varepsilon\,\delta z) = \rho(x, y, z) + \varepsilon\, r(x, y, z).$$

Mais la fonction $r(x, y, z)$ ne sera plus complètement arbitraire. Elle devra être choisie de manière à annuler une certaine intégrale étendue au système entier.

Il se peut, enfin, que le changement éprouvé par une certaine propriété soit déterminé en chaque point du système lorsque l'on connaît, pour tous les points du système, les changements éprouvés par certaines autres propriétés. Si, par exemple, on connaît la déformation géométrique éprouvée par un système, le changement éprouvé par la densité matérielle en chaque point de ce système est déterminé ; il en est de même du changement éprouvé par la densité électrique, si le système est privé de conductibilité.

Considérons une de ces deux densités.

Soit $\rho(x, y, z)$ sa valeur, au point x, y, z, avant la variation du système ; soit $\rho'(x + \varepsilon\,\delta x,\ y + \varepsilon\,\delta y,\ z + \varepsilon\,\delta z)$ sa valeur au point $(x + \varepsilon\,\delta x)$, $(y + \varepsilon\,\delta y)$, $(z + \varepsilon\,\delta z)$, après la variation du système ; on démontre le théorème suivant, connu sous le nom d'*équation de continuité :*

Lorsque ε tend vers o, le rapport

$$\frac{\rho'(x + \varepsilon\,\delta x,\ y + \varepsilon\,\delta y,\ z + \varepsilon\,\delta z) - \rho(x, y, z)}{\varepsilon}$$

a pour limite

$$-\rho(x, y, z)\left[\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial z}\right].$$

Cette quantité est une fonction $r(x, y, z)$, variable d'une manière continue avec x, y, z.

D'une manière générale, si $\rho(x, y, z)$ représente une certaine propriété, au point (x, y, z), du système pris avant variation et si $\rho'(x + \varepsilon\,\delta x, y + \varepsilon\,\delta y, z + \varepsilon\,\delta z)$

représente la même propriété, au point correspondant $(x + \varepsilon\,\delta x)$, $(y + \varepsilon\,\delta y)$, $(z + \varepsilon\,\delta z)$ du système pris après variation, *nous admettrons* que, ε tendant vers o, le rapport

$$\frac{\rho'(x + \varepsilon\,\delta x,\ y + \varepsilon\,\delta y,\ z + \varepsilon\,\delta z) - \rho(x, y, z)}{\varepsilon}$$

tend vers une limite $r(x, y, z)$, fonction continue de x, y, z, et c'est cette limite que nous désignerons par $\delta\rho$.

2. Indépendamment des propriétés qu'un système présente en chaque point intérieur, il peut aussi présenter certaines propriétés relatives à *chaque point de la surface qui le limite*. Ces propriétés peuvent être des propriétés purement géométriques : tels sont, par exemple, les cosinus directeurs de la normale en chaque point à la surface terminale; elles peuvent être des propriétés physiques : telle est la densité électrique superficielle en chaque point de la surface terminale d'un corps électrisé.

Au sujet de ces propriétés et de leurs variations, nous pouvons répéter presque textuellement ce que nous avons dit au numéro précédent. En particulier, désignons par

x, y, z un point de la surface qui limite le système avant la variation;

$(x + \varepsilon\,\delta x)$, $(y + \varepsilon\,\delta y)$, $(z + \varepsilon\,\delta z)$ le point correspondant de la surface qui limite le système après la variation;

$\sigma(x, y, z)$, le nombre qui représente, au point x, y, z, une propriété superficielle du système avant la variation;

$\sigma'(x + \varepsilon\,\delta x,\ y + \varepsilon\,\delta y,\ z + \varepsilon\,\delta z)$, le nombre qui représente, au point $(x + \varepsilon\,\delta x)$, $(y + \varepsilon\,\delta y)$, $(z + \varepsilon\,\delta z)$, la même propriété superficielle du système après variation;

nous admettrons que, lorsque ε tend vers o, le rapport

$$\frac{\sigma'(x + \varepsilon\,\delta x,\ y + \varepsilon\,\delta y,\ z + \varepsilon\,\delta z) - \sigma(x, y z)}{\varepsilon}$$

tend vers une limite $s(x, y, z)$, variable d'une manière continue sur la surface qui borne le système, et c'est cette quantité que nous désignerons par $\delta\sigma$.

3. Supposons qu'en chaque point x, y, z intérieur au système étudié, il y ait lieu de considérer certaines propriétés représentées par les nombres $\rho, \rho', \ldots$; qu'en chaque point de la surface qui borne ce système, il y ait lieu de considérer certaines propriétés superficielles $\sigma, \sigma', \ldots$.

Imaginons que le système éprouve une déformation définie par des variations δx, δy, δz des coordonnées de chaque point; qu'en même temps les propriétés de ce système, en chaque point, intérieur ou superficiel, éprouvent des variations

$\delta\rho$, $\delta\rho'$, ..., $\delta\sigma$, $\delta\sigma'$, ..., les unes entièrement indépendantes, les autres soumises à certaines conditions, d'autres encore entièrement déterminées lorsqu'on connaît, en tout point, les valeurs de quelques-unes des précédentes, selon ce qu'exige la définition des quantités ρ, ρ', ..., σ, σ' .... Nous dirons que *l'ensemble des valeurs prises par les quantités*

$$\delta x,\quad \delta y,\quad \delta z,\quad \delta\rho,\quad \delta\rho',\quad \ldots,\quad \delta\sigma,\quad \delta\sigma',\quad \ldots$$

aux divers points qui se trouvent à l'intérieur du système ou à sa surface, constitue une variation du système.

Soit

$$\delta x_1,\quad \delta y_1,\quad \delta z_1,\quad \delta\rho_1,\quad \delta\rho'_1,\quad \ldots,\quad \delta\sigma_1,\quad \delta\sigma'_1,\quad \ldots$$

une première variation du système; soit

$$\delta x_2,\quad \delta y_2,\quad \delta z_2,\quad \delta\rho_2,\quad \delta\rho'_2,\quad \ldots,\quad \delta\sigma_2,\quad \delta\sigma'_2,\quad \ldots$$

une seconde variation du même système.

Nous admettrons que les propriétés du système étudié sont telles que

$$\begin{aligned}\delta x_1+\delta x_2,\quad \delta y_1+\delta y_2,\quad \delta z_1+\delta z_2,\quad \delta\rho_1+\delta\rho_2,\quad \delta\rho'_1+\delta\rho'_2,\quad \ldots\\ \delta\sigma_1+\delta\sigma_2,\quad \delta\sigma'_1+\delta\sigma'_2,\quad \ldots\end{aligned}$$

soit encore une variation du système.

Ainsi se trouvent fixées les hypothèses moyennant lesquelles on peut assurer l'exactitude du théorème que nous allons énoncer.

De la dernière hypothèse découle un corollaire qui nous sera d'un fréquent usage.

Soient

$$\begin{array}{cccc}\delta x_1, & \delta x_2, & \ldots, & \delta x_n,\\ \delta y_1, & \delta y_2, & \ldots, & \delta y_n,\\ \delta z_1, & \delta z_2, & \ldots, & \delta z_n,\\ \delta\rho_1, & \delta\rho_2, & \ldots, & \delta\rho_n,\\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots,\\ \delta\sigma_1, & \delta\sigma_2, & \ldots, & \delta\sigma_n,\\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\end{array}$$

n variations du système.

Les expressions

$$\begin{array}{c}K_1\delta x_1+K_2\delta x_2+\ldots+K_n\delta x_n,\\ K_1\delta y_1+K_2\delta y_2+\ldots+K_n\delta y_n,\\ K_1\delta z_1+K_2\delta z_2+\ldots+K_n\delta z_n,\\ K_1\delta\rho_1+K_2\delta\rho_2+\ldots+K_n\delta\rho_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ K_1\delta\sigma_1+K_2\delta\sigma_2+\ldots+K_n\delta\sigma_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{array}$$

où K_1, K_2, ..., K_n sont n constantes arbitraires, constituent une nouvelle variation du système.

II. — *Énoncé du théorème à démontrer.*

4. La mise en équation des divers problèmes de Mécanique des milieux continus ou de Physique mathématique est, en général, impliquée en la question suivante :

Exprimer que toutes les variations du système qui vérifient :

1° *Les n égalités*

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} j_1 = &\int(u_1\,\delta x + v_1\,\delta y + w_1\,\delta z + a_1\,\delta\rho + a'_1\,\delta\rho' + \ldots)\,d\varpi \\ &+\int(r_1\,\delta x + s_1\,\delta y + t_1\,\delta z + b_1\,\delta\sigma + b'_1\,\delta\sigma' + \ldots)\,dS = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ j_n = &\int(u_n\,\delta x + v_n\,\delta y + w_n\,\delta z + a_n\,\delta\rho + a'_n\,\delta\rho' + \ldots)\,d\varpi \\ &+\int(r_n\,\delta x + s_n\,\delta y + t_n\,\delta z + b_n\,\delta\sigma + b'_n\,\delta\sigma' + \ldots)\,dS = 0; \end{aligned}\right.$$

2° *En tout point intérieur au système, les p égalités*

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\Phi_1 = U_1\,\delta x + V_1\,\delta y + W_1\,\delta z + A_1\,\delta\rho + A'_1\,\delta\rho' + \ldots = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\Phi_p = U_p\,\delta x + V_p\,\delta y + W_p\,\delta z + A_p\,\delta\rho + A'_p\,\delta\rho' + \ldots = 0; \end{aligned}\right.$$

3° *En tout point de la surface qui limite le système, les q égalités*

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\Psi_1 = R_1\,\delta x + S_1\,\delta y + T_1\,\delta z + B_1\,\delta\sigma + B'_1\,\delta\sigma' + \ldots = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\Psi_q = R_q\,\delta x + S_q\,\delta y + T_q\,\delta z + B_q\,\delta\sigma + B'_q\,\delta\sigma' + \ldots = 0 \end{aligned}\right.$$

vérifient aussi l'égalité

$$(4)\quad \begin{aligned} \Upsilon = &\int(\varphi\,\delta x + \chi\,\delta y + \psi\,\delta z + \alpha\,\delta\rho + \alpha'\,\delta\rho' + \ldots)\,d\varpi \\ &+\int(\xi\,\delta x + \eta\,\delta y + \zeta\,\delta z + \beta\,\delta\sigma + \beta'\,\delta\sigma' + \ldots)\,dS = 0. \end{aligned}$$

Dans ces égalités, on a désigné par

$d\varpi$ un élément du volume occupé par le système ;

dS un élément de la surface qui le limite;

$$\begin{matrix} u_i, & v_i, & w_i, & a_i, & a'_i, & \ldots, \\ \mathbf{U}_i, & \mathbf{V}_i, & \mathbf{W}_i, & \mathbf{A}_i, & \mathbf{A}'_i, & \ldots, \\ \varphi, & \chi, & \psi, & \alpha, & \alpha', & \ldots, \end{matrix}$$

des quantités qui ont une valeur déterminée en chaque point intérieur au système, avant la variation, et varient d'une manière continue d'un point au point voisin;

$$\begin{matrix} r_i, & s_i, & t_i, & b_i, & b'_i. & \ldots, \\ \mathbf{R}_i, & \mathbf{S}_i, & \mathbf{T}_i, & \mathbf{B}_i, & \mathbf{B}'_i, & \ldots, \\ \xi, & \eta, & \zeta, & \beta, & \beta', & \ldots, \end{matrix}$$

des quantités qui ont une valeur déterminée en tout point de la surface du système, avant la variation, et qui varient d'une manière continue d'un point à l'autre de cette surface.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe :

1° *n constantes*

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_n,$$

dont les valeurs sont déterminées par l'état du système avant la variation;

2° *p quantités*

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_p,$$

qui ont des valeurs déterminés en chaque point intérieur au système avant la variation, et qui varient d'une manière continue d'un point au point voisin;

3° *q quantités*

$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \ldots, \quad \mu_q,$$

qui ont des valeurs déterminées en chaque point de la surface du système avant la variation et qui varient d'une manière continue d'un point à l'autre de cette surface,

telles que l'on ait, POUR TOUTE VARIATION DU SYSTÈME, *l'égalité*

$$(5)\quad \begin{aligned} \int\Big[& \xi\,\delta x + \eta\,\delta y + \zeta\,\delta z + \beta\,\delta\sigma + \beta'\,\delta\sigma' + \ldots \\ & + \mu_1(\mathbf{R}_1\,\delta x + \mathbf{S}_1\,\delta y + \mathbf{T}_1\,\delta z + \mathbf{B}_1\,\delta\sigma + \mathbf{B}'_1\,\delta\sigma' + \ldots) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \mu_q(\mathbf{R}_q\,\delta x + \mathbf{S}_q\,\delta y + \mathbf{T}_q\,\delta z + \mathbf{B}_q\,\delta\sigma + \mathbf{B}'_q\,\delta\sigma' + \ldots)\Big]\,dS \\ & + C_1\int(r_1\,\delta x + s_1\,\delta y + t_1\,\delta z + b_1\,\delta\sigma + b'_1\,\delta\sigma' + \ldots)\,dS \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + C_n\int(r_n\,\delta x + s_n\,\delta y + t_n\,\delta z + b_n\,\delta\sigma + b'_n\,\delta\sigma' + \ldots)\,dS \end{aligned}$$

$$(5) \qquad +\int [\quad \varphi\,\delta x + \chi\,\delta y + \psi\,\delta z + \alpha\,\delta\rho + \alpha'\,\delta\rho' + \ldots$$
$$+\lambda_1\ (\mathrm{U}_1\,\delta x + \mathrm{V}_1\,\delta y + \mathrm{W}_1\,\delta z + \mathrm{A}_1\,\delta\rho + \mathrm{A}'_1\,\delta\rho' + \ldots)$$
$$+ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\lambda_p\ (\mathrm{U}_p\,\delta x + \mathrm{V}_p\,\delta y + \mathrm{W}_p\,\delta z + \mathrm{A}_p\,\delta\rho + \mathrm{A}'_p\,\delta\rho' + \ldots)]\,d\varpi$$
$$+\mathrm{C}_1\int (u_1\,\delta x + v_1\,\delta y + w_1\,\delta z + a_1\,\delta\rho + a'_1\,\delta\rho' + \ldots)\,d\varpi$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\mathrm{C}_n\int (u_n\,\delta x + v_n\,\delta y + w_n\,\delta z + a_n\,\delta\rho + a'_n\,\delta\rho' + \ldots)\,d\varpi = 0.$$

La *suffisance* des conditions énoncées est évidente; leur *nécessité* seule exige une démonstration.

III. — *Première partie de la démonstration.*

5. Toute variation

$$(6) \qquad \delta x,\ \delta y,\ \delta z,\ \delta\rho,\ \delta\rho',\ \ldots,\ \delta\sigma,\ \delta\sigma',\ \ldots$$

du système qui vérifie les conditions (2) et (3), sans être d'ailleurs assujettie à vérifier les conditions (1), sera dite une *variation* Δ.

Si

$$\delta x_i,\ \delta y_i,\ \delta z_i,\ \delta\rho_i,\ \delta\rho'_i,\ \ldots,\ \delta\sigma_i,\ \ldots,\ \delta\sigma'_i,\ \ldots$$

est une certaine variation Δ, nous désignerons par

$$j_{1i},\ j_{2i},\ \ldots,\ j_{ni},\ \gamma_i$$

les valeurs respectives qu'elle fait prendre aux expressions

$$j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_n,\ \gamma.$$

Nous supposerons que *les conditions* (1) *sont indépendantes les unes des autres et indépendantes des conditions* (2) *et* (3).

Nous entendons par là :

1° Qu'aucune des conditions (1) n'est identiquement vérifiée, quelle que soit la variation Δ que l'on substitue à

$$\delta x,\ \delta y,\ \delta z,\ \delta\rho,\ \delta\rho',\ \ldots,\ \delta\sigma,\ \delta\sigma',\ \ldots.$$

2° Qu'aucune des conditions (1) n'est vérifiée par toutes les variations Δ qui vérifient quelques autres conditions (1) ou toutes les autres conditions (1).

Cela posé, nous allons montrer que *l'on peut toujours choisir n variations* Δ :

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{lllllllll} \delta x_1, & \delta y_1, & \delta z_1, & \delta \rho_1, & \delta \rho'_1, & \ldots, & \delta \sigma_1, & \delta \sigma'_1, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \delta x_n, & \delta y_n, & \delta z_n, & \delta \rho_n, & \delta \rho'_n, & \ldots, & \delta \sigma_n, & \delta \sigma'_n, & \ldots, \end{array}\right.$$

de telle sorte que l'on ait l'inégalité

$$(8)\qquad D = \begin{vmatrix} j_{11} & j_{21} & \cdots & j_{n1} \\ j_{12} & j_{22} & \cdots & j_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ j_{1n} & j_{2n} & \cdots & j_{nn} \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

D'abord, il est évident que l'on peut choisir les n variations Δ qui forment le tableau (7) de telle sorte que les éléments du déterminant D ne soient pas tous nuls; sans quoi, les conditions (1) seraient vérifiées par tout système Δ, ce que nous savons ne pas être.

Ce premier point acquis, supposons que le déterminant D soit égal à zéro, quelles que soient les variations Δ prises pour former le tableau (7), et qu'il en soit de même de ses mineurs d'ordre $(n-1), \ldots, (q+1)$, q étant au moins égal à 1. Il existera au moins un mineur d'ordre q qui sera différent de zéro pour un certain système de variations Δ :

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{lllllllll} \delta x_1, & \delta y_1, & \delta z_1, & \delta \rho_1, & \delta \rho'_1, & \ldots, & \delta \sigma_1, & \delta \sigma'_1, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \delta x_q, & \delta y_q, & \delta z_q, & \delta \rho_q, & \delta \rho'_q, & \ldots, & \delta \sigma_q, & \delta \sigma'_q, & \ldots. \end{array}\right.$$

Soit, pour fixer les idées,

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} j_{11} & \cdots & j_{q1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ j_{1q} & \cdots & j_{qq} \end{vmatrix}$$

ce mineur.

Soit

$$(11)\qquad \delta x_{q+1},\quad \delta y_{q+1},\quad \delta z_{q+1},\quad \delta \rho_{q+1},\quad \delta \rho'_{q+1},\quad \ldots,\quad \delta \sigma_{q+1},\quad \delta \sigma'_{q+1},\quad \ldots$$

une variation Δ quelconque. Quelle que soit cette variation, on aura l'égalité

$$\begin{vmatrix} j_{11} & \cdots & j_{q1} & j_{q+1,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ j_{1q} & \cdots & j_{qq} & j_{q+1,q} \\ j_{1,q+1} & \cdots & j_{q,q+1} & j_{q+1,q+1} \end{vmatrix} = 0,$$

car le premier membre de cette égalité est un mineur d'ordre $(q+1)$ du déterminant D.

En développant le déterminant par rapport aux éléments de la dernière ligne, nous obtenons une relation linéaire et homogène en

$$j_{1,q+1}, \quad \ldots, \quad j_{q,q+1}, \quad j_{q+1,q+1}.$$

Les coefficients de cette relation dépendent des variations du tableau (9), mais nullement de la variation (11); enfin le coefficient de $j_{q+1,q+1}$ est le déterminant (10), qui est différent de zéro; si nous observons que la variation (11) est une quelconque des variations Δ, nous parvenons à la conclusion suivante :

Toute variation Δ qui vérifie les conditions

$$j_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad j_q = 0,$$

vérifie aussi la condition

$$j_{q+1} = 0.$$

Or, cette conclusion contredit notre hypothèse. Le théorème énoncé est donc démontré.

6. Prenons n variations Δ, formant le tableau (7), et telles que l'inégalité (8) soit vérifiée. Désignons ensuite par

$$(12) \qquad \delta x_0, \quad \delta y_0, \quad \delta z_0, \quad \delta\rho_0, \quad \delta\rho'_0, \quad \ldots, \quad \delta\sigma_0, \quad \delta\sigma'_0, \quad \ldots$$

une variation Δ quelconque.

Les équations

$$(13) \qquad \begin{cases} j_{10} + j_{11}c_1 + \ldots + j_{1n}c_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ j_{n0} + j_{n1}c_1 + \ldots + j_{nn}c_n = 0, \end{cases}$$

jointes à l'inégalité (8), déterminent les n quantités $c_1, c_2, \ldots, c_n$, indépendantes de x, y, z.

Considérons les expressions

$$(14) \qquad \begin{cases} \delta x_0 + c_1\,\delta x_1 + c_2\,\delta x_2 + \ldots + c_n\,\delta x_n, \\ \delta y_0 + c_1\,\delta y_1 + c_2\,\delta y_2 + \ldots + c_n\,\delta y_n, \\ \delta z_0 + c_1\,\delta z_1 + c_2\,\delta z_2 + \ldots + c_n\,\delta z_n, \\ \delta\rho_0 + c_1\,\delta\rho_1 + c_2\,\delta\rho_2 + \ldots + c_n\,\delta\rho_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \delta\sigma_0 + c_1\,\delta\sigma_1 + c_2\,\delta\sigma_2 + \ldots + c_n\,\delta\sigma_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

D'après ce que nous avons vu au n° 3, elles constituent une variation du système.

Les variations (7) et (12) vérifiant les conditions (2) et (3), il en est visiblement de même de la variation (14), qui est ainsi une variation Δ.

Enfin, les égalités (13) expriment que cette variation vérifie les conditions (1).

La variation (14) vérifiant les conditions (1), (2), (3), doit vérifier l'égalité (4), ce qui donne, on le voit sans peine, l'égalité

$$\gamma_0 + c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \ldots + c_n\gamma_n = 0, \tag{15}$$

qui est ainsi une conséquence des égalités (13).

Considérons les équations

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma_1 + C_1 j_{11} + \ldots + C_n j_{1n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \gamma_n + C_1 j_{n1} + \ldots + C_n j_{nn} = 0. \end{array}\right. \tag{16}$$

A cause de l'inégalité (8), ces équations déterminent $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Ces quantités ont des valeurs indépendantes non seulement de x, y, z, mais encore de la variation (12).

Multiplions les deux membres de la première égalité (13) par C_1, les deux membres de la seconde par C_2, etc., les deux membres de la dernière par C_n, et ajoutons membre à membre les résultats obtenus et l'égalité (15); nous obtenons une égalité qui doit, comme l'égalité (15), être vérifiée toutes les fois que c_1, $c_2, \ldots, c_n$ vérifient les équations (13); or, en vertu des égalités (16), cette égalité prend la forme

$$\gamma_0 + C_1 j_{10} + \ldots + C_n j_{n0} = 0,$$

où ne figurent plus les quantités $c_1, \ldots, c_n$.

Si l'on observe alors :

1° Que $C_1, \ldots, C_n$ ne dépendent pas de la variation (12);

2° Que cette variation (12) est une variation Δ quelconque,

nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Il existe n quantités $C_1, \ldots, C_n$, indépendantes de x, y, z et de la variation imposée au système, telles que toute variation Δ vérifie l'égalité

$$\gamma + C_1 j_1 + \ldots + C_n j_n = 0. \tag{17}$$

Cette proposition peut s'énoncer plus explicitement de la manière suivante :

Il existe n quantités $C_1, C_2, \ldots, C_n$, *indépendantes de* x, y, z, *et déterminées lorsqu'on connaît l'état du système avant la variation, telles que* *l'égalité*

$$(18)\quad \Gamma = \int [\quad (\varphi\ \delta x + \chi\ \delta y + \psi\ \delta z + \alpha\ \delta\rho + \alpha'\ \delta\rho' + \ldots)$$
$$+ C_1(u_1\ \delta x + v_1\ \delta y + w_1\ \delta z + a_1\ \delta\rho + a'_1\ \delta\rho' + \ldots)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ C_n(u_n\delta x + v_n\delta y + w_n\delta z + a_n\delta\rho + a'_n\delta\rho' + \ldots)]\, d\varpi$$
$$+ \int [\quad (\xi\ \delta x + \eta\ \delta y + \zeta\ \delta z + \beta\ \delta\sigma + \beta'\ \delta\sigma' + \ldots)$$
$$+ C_1(r_1\ \delta x + s_1\ \delta y + t_1\ \delta z + b_1\ \delta\sigma + b'_1\delta\sigma' + \ldots)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ C_n(r_n\delta x + s_n\ \delta y + t_n\ \delta z + b_n\delta\sigma + b'_n\delta\sigma' + \ldots)]\, dS = 0$$

ait lieu pour toutes les variations du système qui vérifient les égalités (2) *et* (3).

IV. — *Deuxième partie de la démonstration.*

7. Prenons, en chaque point de la surface S qui limite le système, un ensemble Σ bien déterminé de valeurs de

$$\delta x,\quad \delta y,\quad \delta z,\quad \delta\sigma,\quad \delta\sigma',\quad \ldots,$$

vérifiant, d'ailleurs, les conditions (3).

Toute variation

$$\delta x,\quad \delta y,\quad \delta z,\quad \delta\rho,\quad \delta\rho',\quad \ldots,\quad \delta\sigma,\quad \delta\sigma',\quad \ldots,$$

qui, en chaque point de la surface S, se réduit au système Σ, sera nommée une *variation* Σ; une variation Σ vérifie donc les conditions (3), mais point, en général, les conditions (2).

Nous supposerons que, *pour chacun des ensembles* Σ *que l'on peut envisager, et en chacun des points* (x, y, z) *intérieurs au système, les conditions* (2) *demeurent non illusoires et distinctes les unes des autres,* c'est-à-dire que, *parmi toutes les variations* Σ *qui vérifient toutes les conditions* (2) *sauf une d'entre elles, il s'en trouve toujours au moins une qui ne vérifie, en aucun point intérieur au système, cette dernière condition* (2), *et cela de quelque manière qu'on ait choisi cette dernière.*

Si

$$\delta x_i,\quad \delta y_i,\quad \delta z_i,\quad \delta\rho_i,\quad \delta\rho'_i,\quad \ldots$$

est une certaine variation Σ, nous désignerons par

$$\boldsymbol{\Phi}_{1i},\quad \boldsymbol{\Phi}_{2i},\quad \ldots,\quad \boldsymbol{\Phi}_{pi}$$

les valeurs qu'elle fait prendre aux premiers membres des conditions (2).

Cela posé, nous allons montrer que, *quel que soit l'ensemble* Σ, *on peut toujours choisir* p *variations* Σ

$$(19)\qquad \left\{\begin{array}{llllll} \delta x_1, & \delta y_1, & \delta z_1, & \delta \rho_1, & \delta \rho'_1, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \delta x_p, & \delta y_p, & \delta z_p, & \delta \rho_p, & \delta \rho'_p, & \ldots, \end{array}\right.$$

de telle sorte que l'on ait l'inégalité

$$(20)\qquad d = \begin{vmatrix} \mathbf{\Phi}_{11} & \mathbf{\Phi}_{21} & \ldots & \mathbf{\Phi}_{p1} \\ \mathbf{\Phi}_{12} & \mathbf{\Phi}_{22} & \ldots & \mathbf{\Phi}_{p2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{\Phi}_{1p} & \mathbf{\Phi}_{2p} & \ldots & \mathbf{\Phi}_{pp} \end{vmatrix} \gtrless 0$$

en tout point intérieur au système.

D'abord, il est clair que l'on peut choisir les variations (19) de telle sorte que les éléments du déterminant d ne soient nuls simultanément en aucun point intérieur au système; sinon, il existerait un point intérieur au système où toutes les conditions (2) seraient identiquement vérifiées par toutes les variations Σ.

Supposons maintenant qu'en un certain point intérieur au système, le déterminant d soit égal à zéro, quelles que soient les variations Σ prises pour former le tableau (19), et qu'il en soit de même de ses mineurs d'ordre $(p-1), \ldots, (q+1)$, q étant au moins égal à 1. Il existera au moins un mineur d'ordre q qui ne sera égal à zéro en aucun point intérieur du système lorsqu'on fera choix des q variations Σ :

$$(21)\qquad \left\{\begin{array}{llllll} \delta x_1, & \delta y_1, & \delta z_1, & \delta \rho_1, & \delta \rho'_1, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \delta x_q, & \delta y_q, & \delta z_q, & \delta \rho_q, & \delta \rho'_q, & \ldots. \end{array}\right.$$

Soit, pour fixer les idées,

$$(22)\qquad \begin{vmatrix} \mathbf{\Phi}_{11} & \ldots & \mathbf{\Phi}_{q1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{\Phi}_{1q} & \ldots & \mathbf{\Phi}_{qq} \end{vmatrix}$$

ce mineur.

Soit

$$(23)\qquad \delta x_{q+1}, \quad \delta y_{q+1}, \quad \delta z_{q+1}, \quad \delta \rho_{q+1}, \quad \delta \rho'_{q+1}, \quad \ldots$$

une variation Σ quelconque. Par hypothèse, nous aurons l'égalité

$$\begin{vmatrix} \mathbf{\Phi}_{11} & \ldots & \mathbf{\Phi}_{q1} & \mathbf{\Phi}_{q+1,1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \mathbf{\Phi}_{1q} & \ldots & \mathbf{\Phi}_{qq} & \mathbf{\Phi}_{q+1,q} \\ \mathbf{\Phi}_{1,q+1} & \ldots & \mathbf{\Phi}_{q,q+1} & \mathbf{\Phi}_{q+1,q+1} \end{vmatrix} = 0$$

au point, intérieur au système, où le déterminant d et ses mineurs, jusqu'à l'ordre $(q+1)$ inclusivement, sont nuls quelles que soient les variations Σ qui forment le tableau (19).

Cette égalité est une relation linéaire et homogène entre

$$\Phi_{1,q+1}, \quad \Phi_{2,q+1}, \quad \ldots, \quad \Phi_{q,q+1}, \quad \Phi_{q+1,q+1}.$$

Les coefficients des quantités précédentes en cette relation dépendent des variations du tableau (21), mais point de la variation (23); le coefficient de $\Phi_{q+1,q+1}$ est assurément différent de o, car il n'est autre que le déterminant (22); enfin, cette relation est vérifiée quelle que soit la variation Σ prise pour variation (23). Donc, toute variation Σ qui, au point considéré, vérifie les conditions

$$\Phi_1 = 0, \qquad \Phi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Phi_q = 0,$$

y vérifie aussi la condition

$$\Phi_{q+1} = 0.$$

Cela étant faux, par hypothèse, notre théorème est démontré.

8. Représentons abréviativement le premier membre de l'égalité (18) par

$$\Gamma = \int \mathrm{P}\, d\varpi + \int \Theta\, d\mathrm{S}.$$

Prenons, en chaque point de la surface S, l'ensemble Σ suivant, que nous désignerons par Σ_0 :

$$\delta x = 0, \qquad \delta y = 0, \qquad \delta z = 0, \qquad \delta\sigma = 0, \qquad \delta\sigma' = 0, \qquad \ldots.$$

Visiblement, il vérifie les conditions (3). Formons un tableau (19) de p variations Σ_0 choisies de telle sorte que l'inégalité (20) soit vérifiée. Visiblement, ces variations font prendre à Γ des valeurs qui se réduisent à

$$\int \mathrm{P}_1\, d\varpi, \quad \int \mathrm{P}_2\, d\varpi, \quad \ldots, \quad \int \mathrm{P}_p\, d\varpi.$$

Prenons ensuite une variation quelconque

$$(24) \qquad \delta x_0, \quad \delta y_0, \quad \delta z_0, \quad \delta\rho_0, \quad \delta\rho'_0, \quad \ldots, \quad \delta\sigma_0, \quad \delta\sigma'_0, \quad \ldots$$

assujettie seulement à vérifier les conditions (3). Elle transforme Γ en

$$\int \mathrm{P}_0\, d\varpi + \int \Theta_0\, d\mathrm{S},$$

tandis qu'elle fait prendre aux premiers membres des conditions (2) des valeurs $\Phi_{10}, \Phi_{20}, \ldots, \Phi_{p0}$.

Déterminons, ce qui se peut en vertu de l'inégalité (20), les quantités K_1, $K_2, \ldots, K_p$ par les égalités

$$(25)\qquad \begin{cases} \Phi_{10}+\Phi_{11}K_1+\Phi_{12}K_2+\ldots+\Phi_{1p}K_p=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_{p0}+\Phi_{p1}K_1+\Phi_{p2}K_2+\ldots+\Phi_{pp}K_p=0 \end{cases}$$

et considérons la variation

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta x_0+K_1\,\delta x_1+K_2\,\delta x_2+\ldots+K_p\,\delta x_p, \\ \delta y &= \delta y_0+K_1\,\delta y_1+K_2\,\delta y_2+\ldots+K_p\,\delta y_p, \\ \delta z &= \delta z_0+K_1\,\delta z_1+K_2\,\delta z_2+\ldots+K_p\,\delta z_p, \\ \delta\rho &= \delta\rho_0+K_1\,\delta\rho_1+K_2\,\delta\rho_2+\ldots+K_p\,\delta\rho_p, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \delta\sigma &= \delta\sigma_0, \\ \delta\sigma' &= \delta\sigma'_0, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Il est clair que cette variation vérifie les conditions (2) en tout point intérieur au système et les conditions (3) en tout point de la surface qui limite le système; elle doit donc vérifier l'égalité (18), en sorte que les égalités (25) auront pour conséquence l'égalité

$$\int(P_0+K_1P_1+K_2P_2+\ldots+K_pP_p)\,d\varpi+\int\Theta_0\,dS=0,$$

car, visiblement, la variation en question fait prendre à Θ la valeur Θ_0 et à P la valeur

$$P_0+K_1P_1+K_2P_2+\ldots+K_pP_p.$$

On peut également dire que, quels que soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, les égalités (25) auront pour conséquence l'égalité

$$(26)\qquad \begin{aligned} \int[\quad &(P_0+K_1P_1+K_2P_2+\ldots+K_pP_p) \\ &+\lambda_1(\Phi_{10}+K_1\Phi_{11}+K_2\Phi_{12}+\ldots+K_p\Phi_{1p}) \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+\lambda_p(\Phi_{p0}+K_1\Phi_{p1}+K_2\Phi_{p2}+\ldots+K_p\Phi_{pp})]\,d\varpi \\ +\int\Theta_0\,dS &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad=0. \end{aligned}$$

En particulier, assujettissons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ aux équations suivantes, ce qui est permis en vertu de l'inégalité (20),

$$(27)\quad \begin{cases} P_1 + \Phi_{11}\lambda_1 + \Phi_{21}\lambda_2 + \ldots + \Phi_{p1}\lambda_p = 0, \\ P_2 + \Phi_{12}\lambda_1 + \Phi_{22}\lambda_2 + \ldots + \Phi_{p2}\lambda_p = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_p + \Phi_{1p}\lambda_1 + \Phi_{2p}\lambda_2 + \ldots + \Phi_{pp}\lambda_p = 0. \end{cases}$$

Par ces équations, les valeurs de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont déterminées en chaque point intérieur au système; elles varient d'une manière continue d'un point au point voisin; leurs valeurs ne dépendent en aucune façon de la variation (24).

Les équations (27) transforment l'équation (26) en

$$\int (P_0 + \lambda_1\Phi_{10} + \lambda_2\Phi_{20} + \ldots + \lambda_p\Phi_{p0})\, d\varpi + \int \Theta_0\, dS = 0.$$

Si l'on observe maintenant que la variation (24) est une quelconque des variations qui vérifient les conditions (3) en tout point de la surface S qui limite le système, on parvient au théorème suivant :

Il existe p quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ qui ont des valeurs déterminées en chaque point intérieur au système, avant la variation, et qui sont variables d'une manière continue d'un point au point voisin, telles que l'on ait

$$(28)\qquad G = \int (P + \lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2 + \ldots + \lambda_p\Phi_p)\, d\varpi + \int \Theta\, dS = 0$$

pour toute variation qui vérifie les conditions (3) *en tout point de la surface* S *qui limite le système.*

V. — *Troisième partie de la démonstration.*

9. Nous admettons évidemment l'hypothèse suivante :

En aucun point de la surface S, *qui limite le système, aucune des conditions* (3) *n'est une identité, ni une conséquence de quelques-unes des autres conditions* (3).

Dès lors, nous pouvons établir le lemme suivant :

On peut toujours choisir, en chaque point de la surface S, *q systèmes de valeurs*

$$(29)\quad \begin{cases} \delta x_1, & \delta y_1, & \delta z_1, & \delta\sigma_1, & \delta\sigma'_1, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \delta x_q, & \delta y_q, & \delta z_q, & \delta\sigma_q, & \delta\sigma'_q, & \ldots, \end{cases}$$

de telle sorte que l'on ait, en tout point de la surface S, *l'inégalité*

$$(30)\qquad \Theta = \begin{vmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{21} & \dots & \Psi_{q1} \\ \Psi_{12} & \Psi_{22} & \dots & \Psi_{q2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Psi_{1q} & \Psi_{2q} & \dots & \Psi_{qq} \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Tout d'abord, il est clair que l'on peut choisir les systèmes (29) de telle sorte qu'en aucun point de la surface S les termes du déterminant Θ ne soient tous nuls, sans quoi, en ce point, les conditions (3) seraient toutes de simples identités.

Supposons maintenant qu'en un point de la surface S, quels que soient les q systèmes (29), le déterminant Θ soit égal à o, et qu'il en soit de même de tous ses mineurs d'ordre $(q-1)$, ..., $(r+1)$, r étant au moins égal à 1, tandis que l'on peut choisir les r systèmes

$$(31)\qquad \begin{cases} \delta x_1, & \delta y_1, & \delta z_1, & \delta\sigma_1, & \delta\sigma'_1, & \dots, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ \delta x_r, & \delta y_r, & \delta z_r, & \delta\sigma_r, & \delta\sigma'_r, & \dots, \end{cases}$$

de telle sorte qu'un des mineurs de Θ, le mineur

$$(32)\qquad \begin{vmatrix} \Psi_{11} & \dots & \Psi_{r1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \Psi_{r1} & \dots & \Psi_{rr} \end{vmatrix}$$

par exemple, soit différent de o au point considéré.

De quelque manière que l'on choisisse, en chaque point de la surface S, le système

$$(33)\qquad \delta x_{r+1},\quad \delta y_{r+1},\quad \delta z_{r+1},\quad \delta\sigma_{r+1},\quad \delta\sigma'_{r+1},\quad \dots,$$

on aura, au point considéré, l'égalité

$$\begin{vmatrix} \Psi_{11} & \dots & \Psi_{r1} & \Psi_{r+1,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Psi_{1r} & \dots & \Psi_{rr} & \Psi_{r+1,r} \\ \Psi_{1,r+1} & \dots & \Psi_{r,r+1} & \Psi_{r+1,r+1} \end{vmatrix} = 0,$$

car le premier membre de cette égalité est un mineur d'ordre $(r+1)$ du déterminant Θ.

Cette relation est une relation linéaire et homogène entre

$$\Psi_{1,r+1},\quad \dots,\quad \Psi_{r,r+1},\quad \Psi_{r+1,r+1}.$$

Les coefficients de cette relation ne dépendent pas du système (33); enfin le coefficient de $\Psi_{r+1,r+1}$ n'est pas nul, car il n'est autre que le déterminant (32).

Si l'on observe que le système (33) est quelconque, on arrive à la conclusion suivante :

Tout système de valeurs de

$$\delta x, \quad \delta y, \quad \delta z, \quad \delta \sigma, \quad \delta \sigma', \quad \ldots,$$

qui vérifie, au point considéré, les conditions

$$\Psi_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Psi_r = 0,$$

y vérifie aussi la condition

$$\Psi_{r+1} = 0,$$

qui est ainsi, en ce point, conséquence des r premières.

Cette conclusion étant contraire à l'hypothèse faite, le théorème énoncé est démontré.

10. Nous désignerons abréviativement le premier membre de l'égalité (28) par

$$G = \int \Pi \, d\varpi + \int \Theta \, dS.$$

Prenons q variations

$$(34) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} \delta x_1, & \delta y_1, & \delta z_1, & \delta \rho_1, & \delta \rho'_1, & \ldots, & \delta \sigma_1, & \delta \sigma'_1, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \delta x_q, & \delta y_q, & \delta z_q, & \delta \rho_q, & \delta \rho'_q, & \ldots, & \delta \sigma_q, & \delta \sigma'_q, & \ldots, \end{array} \right.$$

choisies de telle sorte que l'inégalité (30) soit vérifiée en tout point de la surface S. A la quantité Π, elles donnent respectivement les valeurs

$$\Pi_1, \quad \Pi_2, \quad \ldots, \quad \Pi_q,$$

et à la quantité Θ, les valeurs

$$\Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \ldots, \quad \Theta_q.$$

Prenons ensuite une variation entièrement indéterminée

$$(35) \qquad \delta x_0, \quad \delta y_0, \quad \delta z_0, \quad \delta \rho_0, \quad \delta \rho'_0, \quad \ldots, \quad \delta \sigma_0, \quad \delta \sigma'_0, \quad \ldots.$$

Aux quantités Π, Θ, elle fait prendre les valeurs Π_0, Θ_0.

Considérons ensuite q quantités $K_1, K_2, \ldots, K_q$, assujetties seulement à varier d'une manière continue d'un point à l'autre du système et à prendre, en chaque point de la surface S, les valeurs que déterminent, grâce à l'inégalité (30), les égalités

(36)
$$\left\{\begin{array}{l}\Psi_{10}+K_1\Psi_{11}+\ldots+K_q\Psi_{1q}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \Psi_{q0}+K_1\Psi_{q1}+\ldots+K_q\Psi_{qq}=0.\end{array}\right.$$

Considérons la variation

$$\begin{aligned}\delta x &= \delta x_0+K_1\,\delta x_1+\ldots+K_q\,\delta x_q,\\ \delta y &= \delta y_0+K_1\,\delta y_1+\ldots+K_q\,\delta y_q,\\ \delta z &= \delta z_0+K_1\,\delta z_1+\ldots+K_q\,\delta z_q,\\ \delta \rho &= \delta \rho_0+K_1\,\delta \rho_1+\ldots+K_q\,\delta \rho_q,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \delta \sigma &= \delta \sigma_0+K_1\,\delta \sigma_1+\ldots+K_q\,\delta \sigma_q,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

D'après les égalités (36), il est visible qu'elle vérifie les conditions (3) en tous les points de la surface S; elle doit donc vérifier l'égalité (28). Or, visiblement, elle donne à la quantité Π la valeur

$$\Pi_0+K_1\Pi_1+\ldots+K_q\Pi_q$$

et à la quantité Θ la valeur

$$\Theta_0+K_1\Theta_1+\ldots+K_q\Theta_q.$$

Les égalités (36) ont donc pour conséquence l'égalité

$$\int(\Pi_0+K_1\Pi_1+\ldots+K_q\Pi_q)\,d\varpi + \int(\Theta_0+K_1\Theta_1+\ldots+K_q\Theta_q)\,dS=0.$$

Évidemment, on peut dire encore que les égalités (36) entraînent, quelle que soit, sur la surface S, la loi de variation des quantités $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q$, l'égalité

(37)
$$\begin{aligned}&\int(\Pi_0+K_1\Pi_1+\ldots+K_q\Pi_q)\,d\varpi\\ &+\int[(\Theta_0+K_1\Theta_1+\ldots+K_q\Theta_q)\\ &\quad+\mu_1(\Psi_{10}+K_1\Psi_{11}+\ldots+K_q\Psi_{1q})\\ &\quad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\quad+\mu_q(\Psi_{q0}+K_1\Psi_{q1}+\ldots+K_q\Psi_{qq})]\,dS=0.\end{aligned}$$

Déterminons, en chaque point de la surface S, les quantités $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q$ par les équations

$$(38) \qquad \begin{cases} \Theta_1 + \mu_1 \Psi_{11} + \ldots + \mu_q \Psi_{q1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Theta_q + \mu_1 \Psi_{1q} + \ldots + \mu_q \Psi_{qq} = 0, \end{cases}$$

ce qui est possible, d'après l'inégalité (30). Ces équations donneront pour μ_1, $\mu_2, \ldots, \mu_q$ des valeurs variables d'une manière continue d'un point à l'autre de la surface S et absolument indépendantes de la variation (35).

Moyennant ce choix des quantités $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q$, l'égalité (37) devient

$$(39) \qquad \begin{aligned} &\int (\mathrm{II}_0 + \mathrm{K}_1 \mathrm{II}_1 + \mathrm{K}_2 \mathrm{II}_2 + \ldots + \mathrm{K}_q \mathrm{II}_q)\, d\varpi \\ &+ \int (\Theta_0 + \mu_1 \Psi_{10} + \mu_2 \Psi_{20} + \ldots + \mu_q \Psi_{q0})\, dS = 0. \end{aligned}$$

Je dis que cette égalité exige, en premier lieu, que l'on ait, en tout point intérieur au système,

$$(40) \qquad \mathrm{II}_1 = 0, \qquad \mathrm{II}_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{II}_q = 0.$$

Supposons qu'une de ces quantités, II_1 par exemple, soit différente de 0 en un point M du système, et, pour fixer les idées, imaginons qu'elle y soit positive. Comme elle varie d'une manière continue d'un point à l'autre du système, on pourra entourer le point M d'un domaine d'étendue finie A, intérieur au système, et tel que II_1 admette, dans le domaine A, une limite inférieure positive a.

Soit Σ la surface qui limite A, et B ce qui reste du système entier C lorsqu'on retranche le domaine A.

Les quantités $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \ldots, \mathrm{K}_q$ sont assujetties seulement aux conditions suivantes:

1° Elles varient d'une manière continue d'un point à l'autre du système C;

2° Leurs valeurs vérifient les conditions (36) en tout point de la surface S.

Pour les déterminer, il nous est loisible d'opérer de la manière suivante :

Pour $\mathrm{K}_2, \ldots, \mathrm{K}_q$, nous choisissons $(q-1)$ quantités, prenant sur S les valeurs indiquées et variant d'une manière continue à l'intérieur de C; pour K_1, nous choisissons une quantité, prenant en chaque point de S la valeur indiquée, variant d'une manière continue dans B, et prenant, en chaque point de la surface Σ, une valeur positive arbitrairement choisie α.

Ce choix laisse encore indéterminée la valeur de K_1 en chaque point intérieur au domaine A; il fixe seulement cette valeur à la limite de ce domaine.

Le choix indiqué fixe la valeur de la quantité

$$\int_B K_1 \Pi_1 \, d\varpi + \int_C (\Pi_0 + K_2 \Pi_2 + \ldots + K_q \Pi_q) \, d\varpi$$
$$+ \int (\Theta_0 + \mu_1 \Psi_{10} + \ldots + \mu_q \Psi_{q0}) \, dS.$$

Soit b la valeur absolue de cette quantité.

Nous pouvons maintenant, dans A, assujettir K_1 aux conditions suivantes :

En chaque point de la surface Σ, K_1 prend la valeur positive α; en A, K_1 est constamment positif et prend des valeurs assez grandes pour que l'on ait l'inégalité

$$\int_A K_1 \, d\varpi > \frac{b}{a}.$$

Alors on aura sûrement

$$\int_A K_1 \Pi_1 \, d\varpi > b$$

et

$$\int_C (\Pi_0 + K_1 \Pi_1 + K_2 \Pi_2 + \ldots + K_q \Pi_q) \, d\varpi$$
$$+ \int (\Theta_0 + \mu_1 \Psi_{10} + \ldots\ldots\ldots + \mu_q \Psi_{q0}) \, dS > 0,$$

ce qui est en contradiction avec l'égalité (39).

Les égalités (40) sont donc démontrées.

L'égalité (39) se réduit à

$$\int \Pi_0 \, d\varpi + \int (\Theta_0 + \mu_1 \Psi_{10} + \ldots + \mu_q \Psi_{q0}) \, dS = 0.$$

Si l'on remarque maintenant que la variation (35) est une variation absolument quelconque, on arrive au théorème suivant :

Il existe q quantités $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q$, qui ont des valeurs déterminées en chaque point de la surface S *qui limite le système avant la variation et qui sont variables, d'une manière continue, d'un point à l'autre de cette surface, telles que pour toute variation*

$$\delta x, \quad \delta y, \quad \delta z, \quad \delta\rho, \quad \delta\rho', \quad \ldots, \quad \delta\sigma, \quad \delta\sigma', \quad \ldots,$$

on ait l'égalité

$$\int \Pi \, d\varpi + \int (\Theta + \mu_1 \Psi_1 + \ldots + \mu_q \Psi_q) \, dS = 0.$$

Il suffit, dans cette égalité, de remplacer les lettres Π, Θ, Ψ_1, ... Ψ_q par les expressions qu'elles représentent abréviativement, pour retrouver l'égalité (5).

Le théorème énoncé est donc démontré.