

H. BOUASSE

Sur les courbes de déformation des fils

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2^e série, tome 2, n° 1 (1900), p. 5-65

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1900_2_2_1_5_0

© Université Paul Sabatier, 1900, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANNALES
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE.

SUR LES
COURBES DE DÉFORMATION DES FILS,

PAR M. H. BOUASSE,
Professeur à l'Université de Toulouse.

DEUXIÈME PARTIE.

CHAPITRE IV.

DES COURBES DE TORSION, DE TRACTION ET DE LEURS RELATIONS.

Le Chapitre actuel, malgré le nombre des faits qu'il renferme, est une sorte de catalogue d'expériences dont plusieurs seront étudiées en détail dans les Chapitres suivants. Nous chercherons à acquérir une vue d'ensemble des phénomènes, à préciser les opérations complexes qui participent à l'expérience en apparence la plus simple, enfin à énumérer les techniques possibles. Le tour de ces techniques est d'ailleurs vite fait et nous sommes condamnés, par les exigences expérimentales, à rester pendant longtemps dans un petit cercle.

Nous espérons que ce travail ne sera pas inutile, en épargnant aux physiciens les longs tâtonnements après lesquels nous nous sommes rendu un compte exact de la topographie du sujet.

Les schémas qui précèdent les principaux cas traités sont indispensables pour

fixer les idées et pour nous rappeler, à chaque instant, à la définition rigoureuse des opérations.

1. *Appareils employés.* — Il faut produire des mouvements de rotation de vitesse parfaitement constante. Une petite dynamo fait tourner un arbre portant un volant de grand moment d'inertie et dont la vitesse est réglée par un régulateur à boules. La dynamo est montée en dérivation. La résistance du circuit inducteur est invariable; la résistance du circuit de l'anneau peut être modifiée au moyen d'un rhéostat mû à la main et aussi au moyen de la mise automatique en circuit, par le régulateur à boules, d'une petite résistance auxiliaire. Il se produit bien des oscillations de vitesse d'une période de quelques secondes, mais elles n'ont pratiquement aucune importance. Sur cet arbre, dont la vitesse est invariable, sont calés les divers systèmes de poulies communiquant la rotation aux appareils.

Des appareils de rotation, l'un est décrit dans les *Annales de Physique et de Chimie* pour 1897; il permet des mouvements dans les deux sens ou l'arrêt. Nous l'avons employé pour les grandes torsions; il était généralement disposé au sommet de l'appareil de traction décrit dans le Chapitre III: il servait pour préparer, par torsion, un fil dont on étudiait ensuite la courbe de traction sans le sortir de l'appareil.

Quand l'étude devait porter sur les courbes de torsion proprement dites, l'appareil était très analogue à celui qui est décrit page 243 du *Journal de Physique* pour 1899 (partie inférieure de la figure, à partir du disque EE inclusivement). Le plateau EE a 0^m,40 de diamètre et 0^m,005 d'épaisseur; la tige FF, au lieu de servir de pivot à sa partie inférieure, comme le montre la figure, s'amincit brusquement, traverse la base de l'appareil, la planche sur laquelle il est fixé et reçoit ensuite les pinces décrites au Chapitre I, page 191. Une poulie PP donne les mouvements rapides; les mouvements lents sont communiqués au plateau EE par un train comprenant une poulie commandant une vis sans fin, une roue dentée engrenant sur la vis et un cylindre de bois coaxial avec cette roue: le cylindre peut, à volonté, entraîner le disque EE par friction. La vitesse du disque peut varier de un tour en 1 seconde à un tour en 1200 secondes; l'arbre de couche fait un tour par seconde environ.

Quand la torsion est rapide, on enregistre les demi-tours à l'aide d'un compteur électrique, et, pour tracer les courbes de torsion, on lit les couples tous les demi-tours. Voici le dispositif employé pour les torsions lentes et petites. Le disque EE porte une jante plate sur laquelle on colle une bande de papier télégraphique. Un récepteur Morse modifié trace au crayon des traits verticaux sur ce papier, quand on produit un contact. On suit les couples dans une lunette et l'on inscrit les torsions correspondantes. On décolle ensuite le papier et l'on relève les tor-

sions : le pourtour a 1258^{mm} ; le degré valant un peu plus de 3^{mm} , on relève facilement le $\frac{1}{10}$ de degré. Si la torsion est supérieure à un tour, les traits risquent de se confondre. Le même papier peut pourtant servir à plusieurs expériences, pour lesquelles la torsion est moindre qu'un tour; après chacune d'elles, on marque à la plume, d'un trait, de deux traits, etc., les signaux déjà obtenus.

2. *Dynamomètres de torsion.* — Dans nos expériences précédentes, nous avons employé, comme dynamomètres de torsion, deux formes de bifilaire. Dans la première (*Annales de Chimie et de Physique*, 1897), le bifilaire est attaché au fil en expérience; dans la seconde (*Annales de Chimie et de Physique*, 1898), il forme un appareil indépendant. Ces appareils ne conviennent plus lorsque le fil doit s'allonger sensiblement. Nous avons dû employer deux autres dynamomètres: pour les petites torsions, un fil d'acier; pour les grandes, un ressort spiral plat. Il fallait que dans l'appareil de torsion le fil, de $0^{\text{m}},80$ de longueur par exemple, pût s'allonger de $0^{\text{m}},10$ (nous verrons pourquoi cela est suffisant) et décrire sa courbe de torsion à un instant quelconque, même en s'allongeant.

Première disposition. — La pièce à laquelle s'attache l'extrémité inférieure du fil en expérience se prolonge par un fil d'acier dont l'extrémité inférieure est fixée à l'un des bouts d'une planchette longue et mince, dont l'autre bout peut tourner autour d'un axe horizontal. Elle empêche tout mouvement de rotation de l'extrémité inférieure du fil d'acier et permet les mouvements dans le sens vertical, avec un déplacement latéral insignifiant, pourvu qu'elle soit assez longue (1^{m}) et presque horizontale dans les positions utilisées. La pièce de laiton qui sert d'intermédiaire entre le fil en expérience et le fil dynamomètre porte un miroir et deux fils minces horizontaux, qui se recourbent à angle droit et plongent dans des godets, larges et profonds, pleins d'huile; on supprime ainsi les trépidations sans gêner les mouvements verticaux et de rotation. Pour rendre possibles les réglages, l'extrémité inférieure du fil d'acier est fixée à une pièce de laiton qui peut tourner et qu'on peut invariablement fixer dans la planchette. Le miroir se déplaçant verticalement, l'échelle de lecture est portée par la monture de la lunette d'un cathétomètre; on peut l'élever ou l'abaisser sans secousses et sans changement du zéro.

L'inconvénient de ce dynamomètre est que le fil du dynamomètre doit être suffisamment tendu. Pour de petites torsions, cette condition est satisfaite aisément, parce que les couples sont faibles et qu'on peut prendre un fil dynamomètre mince. Pour de grandes torsions, il faut un fil plus gros et l'on ne peut l'employer que sous d'assez fortes charges.

Deuxième disposition. — Le second dynamomètre se compose d'une tige de laiton prolongée, de part et d'autre, par deux fils minces d'acier: l'ensemble est fixé verticalement dans un bâti, les fils d'acier étant tendus et jouant le rôle de

pivots. Un ressort spiral plat est fixé horizontalement, intérieurement à la tige de laiton, extérieurement au bâti. Un tube mince d'aluminium traverse la tige de laiton, y est invariablement fixé et se prolonge dans un sens par une paille servant d'index et se déplaçant sur un cercle de $0^m,30$ de rayon. Reste à rendre le fil en expérience solidaire de ce dynamomètre de flexion.

Par l'intermédiaire d'une pince, ce fil porte un rectangle allongé dont les côtés horizontaux, haut et bas, sont rigides et longs de $0^m,08$, dont les verticaux sont formés de deux fils de $0^m,60$. Ce rectangle porte, par un crochet, le seau de charge : il passe, dans le bâti du dynamomètre, sur la tige d'aluminium duquel s'appuient les fils verticaux. Bien entendu, un tel dynamomètre ne peut mesurer que les couples d'un sens unique. Je ne décris pas la disposition des divers godets qui amortissent les oscillations, ni la forme qu'on donne au seau de charge dans le même but, ni les précautions prises pour que la rupture du fil n'endommage pas l'appareil.

3. *Notations.* — Suivant les idées exposées dans le *Journal de Physique* pour 1899, les allongements et les torsions seront comptés en millièmes ou millièmes, ces unités étant plus commodes que les centièmes ordinairement employés.

Un allongement de 1524 millièmes, par exemple, signifie que, si nous découpons dans un fil un cylindre de $0^m,01$ de hauteur au début de l'expérience, la base supérieure restant fixe, la base inférieure se déplace pendant l'expérience parallèlement aux génératrices de $1^m,524$.

Une torsion de 1524 millièmes, par exemple, signifie que, si nous découpons dans un fil un cylindre de $0^m,01$ de hauteur, la base supérieure restant fixe, un point du pourtour de la base inférieure se déplace, pendant l'opération, de $0^m,001524$ le long de la circonférence de cette base, *quel qu'en soit d'ailleurs le rayon.*

Le champ des torsions que nous avons employées est fort étendu. Sur un fil de $0^{mm},5$ de diamètre et de 1^m de longueur, une torsion de 1 millièmes vaut une rotation d'une des extrémités de $0^o,229$; réciproquement une torsion de 1^o vaut 4,36 millièmes; de telles torsions ne sont pas négligeables. D'autre part, un tel fil supporte des torsions de 500 tours, soit 5 tours centimètres, soit 785 millièmes. Ainsi nous aurons pratiquement à considérer des torsions pouvant varier de 1 à 1 million.

4. *Torsion d'un cylindre creux infiniment mince.* — Si l'expérience était réalisable, il faudrait opérer sur le cylindre creux mince : le phénomène serait homogène. Est-il possible de déduire du phénomène observé (cylindre plein) le phénomène simple (cylindre creux infiniment mince)?

Soient r et $r + dr$ les rayons du cylindre, $f(r\alpha)$ la force tangentielle produite

par la torsion α sur l'unité d'aire d'une section normale de ce cylindre; le couple dû au cylindre entier est $2\pi r^2 dr f(r\alpha)$. Si nous admettons que *la fonction f , quelle qu'elle soit, est indépendante du rayon*, comme on peut toujours et *quelle que soit la loi de torsion*, représenter le couple total par l'expression $R^3 \varphi(R\alpha)$, on a donc identiquement

$$(1) \quad R^3 \varphi(R\alpha) = \int_0^R 2\pi r^2 dr f(r\alpha),$$

ce qui entraîne entre les fonctions f et φ la relation

$$(2) \quad \varphi(\theta) + \frac{\theta}{3} \frac{d\varphi(\theta)}{d\theta} = \frac{2\pi}{3} f(\theta),$$

θ étant une variable quelconque et, en particulier, pouvant représenter le produit $r\alpha$.

Cette équation nous permettrait, *dans l'hypothèse énoncée*, de passer de la fonction φ à la fonction f . Malheureusement l'hypothèse que la fonction f est la même pour tous les cylindres coaxiaux est fautive, parce qu'elle revient à négliger l'influence de la vitesse de déformation, qui est proportionnelle au rayon. Pour une même valeur de $\theta = r\alpha$, les $f(r\alpha)$ correspondant à deux cylindres inégalement distants de l'axe sont différents (1). Il manque donc un terme sous le signe somme du second membre de l'équation (1), terme qu'il serait imprudent de mettre dans l'état de nos connaissances.

Nous nous contenterons pour le moment d'énoncer la fonction φ sans chercher à en déduire la fonction f . D'ailleurs par ce procédé on ne parviendrait pas à déterminer exactement les valeurs de f ; nous verrons, dans un des chapitres suivants, comment l'expérience directe permet de les atteindre.

Si $\varphi = A - \frac{B}{\theta^3}$, il vient, en substituant, $f = \frac{3A}{2\pi}$ valeur constante; malheureusement l'hypothèse de J. Thomson est à l'antipode des résultats expérimentaux.

Le temps influe assez peu sur la forme générale de la courbe de torsion, quand on ne fait que l'essai de torsion. Mais le raisonnement ici critiqué est général et l'on pourrait être tenté de l'appliquer à des cas (perte de couple à torsion constante, par exemple) où l'action du temps est le principal du phénomène: de plus, dans le cas simple de l'essai de torsion, la fonction φ étant en gros parabolique, la fonction f a la même forme; on peut éviter avec profit des calculs sans intérêt.

C'est à cause de la non-homogénéité des phénomènes qu'il est nécessaire de comparer les résultats obtenus sur des fils de diamètres différents, de la manière qu'il est indiqué dans un article du *Journal de Physique* (1899).

(1) On doit à M. Brillouin d'avoir insisté sur la non-homogénéité du phénomène et montré son importance.

§. *Comparaisons des résultats avec l'hypothèse de J. Thomson.* — Dans l'introduction de ce Mémoire, nous avons dit quelles conséquences on peut tirer de l'hypothèse d'un effort tangentiel limite, unique et déterminé une fois pour toutes. Représentons par 1000 le couple total que supporterait le fil pour une torsion infinie : nous savons que la courbe de torsion doit être rectiligne jusqu'au couple 750; avec un choix convenable d'unités, on aura donc $C = \alpha$ au-dessous de ce couple. Au-dessus de ce couple, des calculs faciles donnent, pour la courbe, l'équation

$$C = 1000 - \frac{1,0548 \cdot 10^{11}}{\alpha^3},$$

α allant de 750 à ∞ .

Pour faciliter les comparaisons, nous avons calculé cette courbe; nous donnons, dans le Tableau suivant, dans la première colonne, les azimuts α ; dans la seconde, dix fois le gain de couple ΔC quand on passe d'un azimut au suivant.

$\alpha = 750$	$10 \Delta C = 234$	$\alpha = 1100$	$10 \Delta C = 100$	$\alpha = 1900$	$10 \Delta C = 22$
775	216	1150	83	2000	18
800	182	1200	70	2100	15
825	161	1250	60	2200	12
850	143	1300	51	2300	11
875	127	1350	45	2400	8
900	114	1400	38	2500	8
925	103	1450	34	2600	6
950	92	1500	55	2700	6
975	83	1600	42	2800	5
1000	144	1700	34	2900	4
1050	118	1800	27	3000	

En particulier, le calcul montre que pour

$\alpha = 2 \times 750$	3×750	4×750
$C = 969$	991	995

Pour une torsion quatre fois celle pour laquelle le fil cesse de se comporter comme parfaitement élastique, on doit avoir atteint la limite à 0,5 % près. Le couple ne doit croître que de $\frac{1}{3}$ de la valeur qu'il a, quand le fil cesse d'être parfaitement élastique. Il est difficile de déterminer la valeur du couple pour lequel la courbe de torsion cesse d'être rectiligne, puisque cela revient à déterminer le point de tangence de deux courbes. On procède d'une manière inverse; on dé-

termine le couple limite, on en prend les $\frac{3}{4}$ et l'on regarde si la courbe de torsion est encore rectiligne ou non pour ce couple.

6. *Courbes de torsion des fils étirés à la filière.* — Nous savons que le fil fortement allongé à la filière présente une courbe de traction qui, en gros, se compose de deux droites, l'une presque verticale, l'autre presque horizontale, raccordées par une courbe de faible rayon de courbure; ce fil vérifie donc, au moins approximativement, l'hypothèse que la matière qui le forme est incapable de changer de nature, qu'à partir d'un certain effort il s'allongerait indéfiniment sans augmentation de cet effort, s'il était possible de l'attacher correctement. Or c'est là, pour la traction, l'hypothèse de J. Thomson pour la torsion. Il est donc naturel de chercher tout d'abord si les fils allongés à la filière vérifient l'hypothèse de J. Thomson.

Voici le résultat d'une série d'expériences :

On part d'un fil pesant par mètre 2,553. On l'allonge à la filière : on obtient ainsi des fils qui pèsent

2,434 2,029 1,778 1,239

ce qui correspond à des allongements n qui, en millièmes, sont

49 258 436 1060

On décrit la courbe de torsion; les résultats sont donnés par le Tableau suivant, où les torsions sont exprimées en millièmes, les couples en unités arbitraires, mais ramenés au même diamètre par la loi du cube; la charge sous laquelle l'essai a été fait est de 500^{gr} pour tous les fils.

$n = 49.$		$n = 258.$		$n = 436.$		$n = 1060.$	
Rx.	C.	Rx.	C.	Rx.	C.	Rx.	C.
1,16	108	1,06	97	0,99	88	0,83	74
2,32	197	2,12	184	1,98	168	1,65	138
3,48	264	3,17	262	2,96	238	2,48	194
4,64	307	4,23	328	3,95	302	3,30	245
6,95	348	6,35	422	5,93	395	4,96	330
9,27	365	8,46	474	7,90	457	6,61	394
11,59	374	10,58	502	9,88	495	8,26	443
17,38	386	15,87	530	14,82	540	12,39	512
23,18	393	21,16	538	19,76	555	16,52	544
28,98	399	26,45	541	24,70	562	24,78	574
				29,64	565		

L'hypothèse de J. Thomson est loin d'être satisfaite. Prenons, par exemple, la dernière de ces courbes.

Le couple 574 n'est pas le couple maximum que puisse supporter le fil;

or $574 \times 0,75 = 430$. Pour que l'hypothèse soit vérifiée, le fil devrait certainement être parfaitement élastique jusqu'à ce couple ; il ne l'est pas. Car, à supposer qu'il le soit jusqu'à la torsion 0,83, il ne l'est pas jusqu'à la torsion 1,65 et, par conséquent, jusqu'au couple 138. Au voisinage du couple 430, l'accroissement de couple, pour une torsion de 0,83, est égale à 23, tandis qu'au voisinage du couple nul il est égal ou supérieur à 74.

Nous avons répété cette expérience sur un autre fil allongé de 1106 à la filière, à partir de l'état recuit.

Les torsions, poussées jusqu'à 487 millièmes, donnent un couple de 3268 (unités arbitraires) dont les $\frac{3}{4}$ sont 2451. Or, pour ce dernier couple, le $\frac{dC}{d\alpha}$ est seulement 0,19 du $\frac{dC}{d\alpha}$ à l'origine de la courbe de torsion.

L'inspection des nombres du Tableau montre aussi combien vite la courbe de torsion s'infléchit ; ainsi, il est curieux de constater que, sur un fil allongé de plus de 100 % à la filière, l'élasticité parfaite ne se maintient certainement pas au delà d'une torsion de 0,83. Si l'on a des fils parfaitement élastiques dans des limites plus étendues, cela vient de ce qu'on leur a fait parcourir de nombreux cycles ; et il se pourrait même que, sur la première courbe de torsion, le fil ne fût élastique que jusqu'à des torsions plus faibles encore que celles du Tableau, si l'on pouvait le mettre dans l'appareil d'essai sans le tordre aucunement.

Ainsi, même pour des fils fortement allongés à la filière, l'hypothèse de J. Thomson ne s'applique pas. Il est bon d'ajouter qu'elle s'applique encore moins à des fils plus ou moins recuits ou à des fils d'abord parfaitement recuits, puis plus ou moins allongés sans filière.

C'est assurément pour des fils allongés à la filière qu'on atteint le plus rapidement un véritable couple limite, à partir duquel la torsion n'entraîne plus aucun accroissement de couple. On a étiré le fil pesant 2,553 par mètre, de manière qu'il pèse

1,983 1,716 1,212

ce qui fait des allongements de

293 487 1106

On décrit les courbes de torsion sous la charge de 210^{gr} :

$n = 293.$		$n = 487.$		$n = 1106.$	
R α .	C.	R α .	C.	R α .	C.
52	2167	48	2354	41	2436
467	2195	773	2390	487	2440

Les torsions sont exprimées en millièmes, les couples en unités arbitraires et rapportés au même diamètre.

A partir d'une certaine torsion, le fil peut être considérablement tordu, sans que le couple augmente notablement. Sous des charges aussi faibles que celles sous lesquelles les essais précédents ont été faits, l'allongement, pendant la torsion, est insignifiant. Enfin le couple limite, ramené à un diamètre constant par la loi du cube, croît avec l'allongement à la filière.

7. *Forme du faisceau précédemment obtenu.* — La variation de la constante de torsion par l'allongement à la filière complique la comparaison des courbes. Bien que les expériences ici rapportées ne soient pas et n'aient pas besoin d'être d'une extrême précision pour le but que nous poursuivons actuellement, elles montrent une diminution notable de cette constante; ainsi, d'après les nombres du Tableau du n° 6, on trouve

$$\begin{array}{cccc} n = 49 & 258 & 436 & 1060 \\ \frac{\Delta C}{\Delta z} = \frac{108}{116} = 0,93 & \frac{97}{106} = 0,91 & \frac{88}{99} = 0,89 & \frac{74}{83} = 0,89 \end{array}$$

La quantité $\frac{\Delta C}{\Delta z}$, au début de la courbe de torsion, diminue donc de plus de 4 0/0. Aussi les courbes de torsion (ramenées au même diamètre) sont, vers leur origine, d'autant plus basses que n est plus grand et, à leur partie terminale, d'autant plus hautes que n est plus grand. La courbe de cote n_1 coupe de haut en bas toutes celles dont les cotes n sont plus petites que n_1 . C'est ce qu'on peut voir en construisant les courbes du n° 6.

8. *Variation des courbes avec la charge.* — Il est important, dans la comparaison des courbes, de tenir compte de la charge. Ainsi les courbes du n° 6 ont été obtenues sous la charge absolue de 550^{gr} qui, rapportée au fil pesant 1^{er} par mètre, devient

$$\begin{array}{cccc} n = 49 & 258 & 436 & 1060 \\ P = 226^{\text{gr}} & 271^{\text{gr}} & 309^{\text{gr}} & 444^{\text{gr}} \end{array}$$

Nous sommes amenés à chercher quelle est l'influence d'un changement dans la charge.

*Fil allongé à la filière de 1060; poids par mètre 1,239.
Casse sans torsion pour 5200^{gr} environ.*

Torsions en millièmes.	P = 550.	P = 1026.	P = 2016.	P = 3667.	P = 4286.
0,83.....	74	74	73	73	73
1,65.....	138	139	140	131	127
2,48.....	194	198	196	183	172
3,30.....	245	249	248	228	212
4,96.....	330	333	332	299	273
6,61.....	394	397	396	349	314

*Fil allongé à la filière de 1060; poids par mètre 1,239.
Casse sans torsion pour 5200^{gr} environ (suite).*

Torsions en millièmes.	P = 550.	P = 1026.	P = 2016.	P = 3667.	P = 4286.
8,26.....	443	444	441	384	338
12,39.....	512	511	508	432	Cassé
16,52.....	544	545	542	450	
20,65.....	»	563	558	Cassé	
24,78.....	574	575	570		

La courbe de torsion d'un fil fortement étiré à la filière est sensiblement indépendante de la charge, tant que celle-ci est assez faible; elle s'abaisse rapidement quand la charge s'approche de la charge de rupture. Les différentes courbes ont, à l'origine, à peu près même tangente, mais ces expériences ne permettent pas de dire si le $\frac{\Delta C}{\Delta \alpha}$, à l'origine, est ou non indépendant de la charge. Le fil casse pour des torsions d'autant plus petites que la charge est plus grande. L'hypothèse de J. Thomson ne s'applique pas, quelle que soit la charge. Les phénomènes de torsion présentent donc le même caractère que ceux de traction, changement de nature de la matière par déformation. Nous allons maintenant aborder le cas général; nous verrons que les phénomènes de torsion offrent cette complication de plus que les phénomènes de traction, qu'ils ne peuvent généralement pas être obtenus indépendamment de ces derniers.

9. *Cas général. Classement des techniques.* — Le problème expérimental complet est défini quand on se donne deux des quatre fonctions du temps l, P, α, C ; il reste à déterminer les deux autres. Ce que nous pouvons imaginer de plus simple, au point de vue pratique, est de maintenir constantes deux de ces fonctions ou leurs dérivées premières par rapport au temps; d'où résultent 12 techniques fondamentales; on a inscrit dans le Tableau suivant les quantités maintenues constantes.

1.....	l	$\frac{d\alpha}{dt}$	3.....	l	$\frac{dC}{dt}$
2.....	α	$\frac{dl}{dt}$	4.....	α	$\frac{dP}{dt}$
5.....	P	$\frac{d\alpha}{dt}$	7.....	P	$\frac{dC}{dt}$
6.....	C	$\frac{dl}{dt}$	8.....	C	$\frac{dP}{dt}$
9.....	$\frac{dl}{dt}$	$\frac{d\alpha}{dt}$	11.....	$\frac{dP}{dt}$	$\frac{d\alpha}{dt}$
10.....	$\frac{dP}{dt}$	$\frac{dC}{dt}$	12.....	$\frac{dl}{dt}$	$\frac{dC}{dt}$

Les techniques 2 et 4 admettent comme cas particulier $\alpha = 0$, $C = 0$; $\frac{dl}{dt} = \text{const.}$ ou $\frac{dP}{dt} = \text{const.}$; ce sont les essais de traction que nous avons étudiés dans le Chapitre précédent. Les essais de torsion doivent être définis par analogie, au moyen des techniques 1 et 3; il faut poser $P = 0$, $l = \text{const.}$; $\frac{d\alpha}{dt} = \text{const.}$ ou $\frac{dC}{dt} = \text{const.}$ Malheureusement, pour le tordre, il faut tendre le fil peu ou prou et, par conséquent, il est impossible d'obtenir un phénomène de torsion qui ne se complique pas de traction. Les essais de traction peuvent aussi bien être considérés comme des cas particuliers des techniques 6 et 8; les essais de torsion seraient aussi bien des cas particuliers des techniques 5 et 7.

Plusieurs de ces techniques sont difficilement réalisables; de plus, il ne faut pas se faire illusion sur la simplicité des définitions théoriques auxquelles elles correspondent.

Soient

v la vitesse de torsion rapportée au rayon et à la longueur actuelle;

V la vitesse d'allongement rapportée à la longueur actuelle;

l_0, R_0 la longueur et le rayon initiaux;

l, R la longueur et le rayon actuels.

Puisque α est la torsion totale, on peut admettre que

$$v = d\left(\frac{\alpha R}{l}\right),$$

d'où

$$v = \frac{R}{l} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\alpha}{l} \frac{dR}{dt} - \frac{\alpha R}{l^2} \frac{dl}{dt}.$$

En admettant la densité constante, condition que nous savons très près d'être vérifiée, on a

$$R^2 l = R_0^2 l_0,$$

d'où enfin

$$v = \frac{R}{l} \frac{d\alpha}{dt} - \frac{3}{2} \frac{\alpha R}{l^2} \frac{dl}{dt}, \quad V = \frac{1}{l} \frac{dl}{dt},$$

$$m = \frac{v}{V} = R \frac{d\alpha}{dl} - \frac{3\alpha R}{2l} = R_0 \sqrt{\frac{l_0}{l}} \frac{d\alpha}{dl} - \frac{3\alpha R_0}{2} \sqrt{\frac{l_0}{l^3}}.$$

Non seulement ces formules ne sont pas simples, mais celle qui donne v est douteuse; il y a de bonnes raisons pour soutenir que v est égal, non pas à $d\left(\frac{\alpha R}{l}\right)$, mais bien à $\frac{R}{l} \frac{d\alpha}{dt}$; en d'autres termes qu'il faut calculer la vitesse de torsion sur le rayon et la longueur actuels considérés un instant comme fixes, quels que

puissent être les allongements et diminutions de rayon simultanés. Nous admettrons cette seconde hypothèse et poserons

$$v = \frac{R}{l} \frac{d\alpha}{dt}, \quad V = \frac{1}{l} \frac{dl}{dt}, \quad m = R \frac{d\alpha}{dt} = R_0 \sqrt{\frac{l_0}{l}} \frac{d\alpha}{dt}.$$

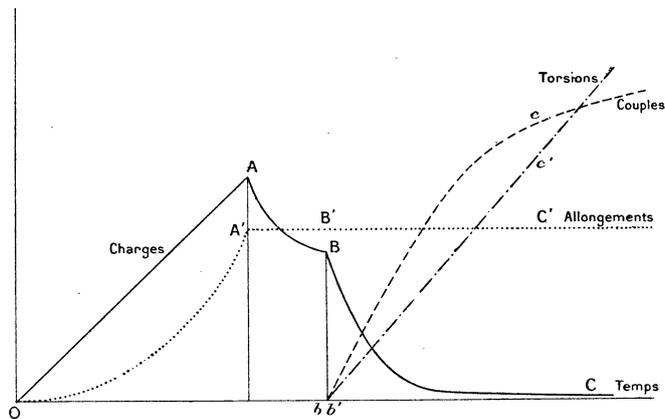
Pendant l'expérience, le couple total et la charge totale sont C et P; mais le couple rapporté à l'unité de rayon est $\frac{C}{R^3}$, la charge rapportée à l'unité de rayon est $\frac{P}{R^2}$.

Pour réaliser les techniques théoriquement les plus simples, il faudrait maintenir constants, non pas α , l , P, C ou leurs dérivées premières par rapport au temps, mais bien v , V, le couple et la charge rapportés à l'unité de rayon, ce qui est pratiquement impossible.

Une expérience complète consiste à appliquer successivement un certain nombre de ces techniques; on peut donc en imaginer une infinité par la combinaison des techniques dans un ordre quelconque. Nous allons, dans la suite de ce Chapitre, passer en revue les plus importantes, nous bornant à une description schématique de celles que nous étudierons en détail dans les Chapitres suivants.

10. *Diminution de la tension par l'effet d'une torsion, la longueur étant maintenue constante.* — La fig. 1 donne la marche de l'expérience : on a tracé

Fig. 1.



en fonction du temps, porté en abscisses, les courbes des charges et des longueurs, des couples et des torsions portés en ordonnées. C'est un schéma en ce sens seulement que les courbes sont faites à une échelle arbitraire; on a cherché à reproduire le mieux possible la forme des courbes expérimentales, comme il sera facile

d'en juger par de nombreux exemples. Enfin, les notations (nature des lignes et des lettres) sont les mêmes dans toutes les figures analogues à la *fig. 1*.

A torsion nulle, on installe une charge P (courbes OA, OA'), par exemple, suivant un débit constant; on maintient alors la longueur l constante dans toute la suite de l'expérience. Après un certain temps, pendant lequel la tension baisse suivant AB, on impose une torsion α croissant linéairement avec le temps; le couple croît; l'expérience montre que la tension décroît (courbes bc, b'c', BC). Cette expérience complexe consiste dans l'application successive des techniques 4, 1, 1; la dernière est appliquée d'abord dans le cas particulier $\frac{d\alpha}{dt} = 0$, puis dans le cas général. Il est d'ailleurs plus commode, dans la pratique, d'employer les techniques 2, 1, 1; mais nous allons voir que, de toutes façons, l'expérience est difficilement réalisable.

Remarquons d'abord que la condition $dl = 0$ correspond généralement à des phénomènes compliqués. Une part de la déformation est permanente, l'autre est fonction de l'effort actuel; la condition $dl = 0$ est généralement obtenue par deux variations égales et de signes contraires de la partie permanente et de la partie temporaire. Dans l'expérience étudiée, l'allongement permanent total produit par la torsion est égal au raccourcissement élastique produit par la diminution de la tension. Partant, il est facile de préciser les conditions expérimentales.

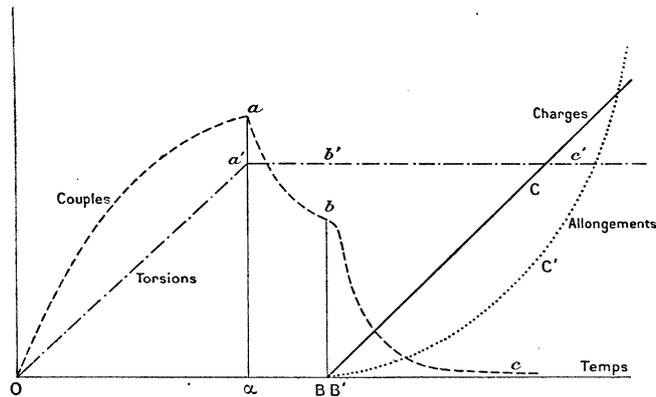
L'allongement élastique d'un fil, même dans les conditions les plus favorables, est inférieur à 2 ou 3 millièmes: pour que l'expérience ait un sens, il faut qu'une des extrémités du fil soit parfaitement fixe, et que l'autre n'ait que des déplacements petits vis-à-vis de cet allongement, soit petits vis-à-vis de 2^{mm} ou 3^{mm} par mètre de fil. D'autre part, il faut mesurer la tension. Ces deux conditions sont contradictoires, à moins d'utiliser un dynamomètre à indications continues d'une course extrêmement petite et qui ne doive sa sensibilité qu'à la précision des moyens d'observation des déformations (franges d'interférence). Pour ces raisons et plusieurs autres, l'expérience est d'une réalisation difficile.

Une méthode extrêmement simple en fournit pourtant les résultats généraux. Attachons un fil sur un appareil quelconque qui nous permette de l'allonger et de le tordre et étudions le son qu'il rend à longueur constante. Il est aisé de suivre l'abaissement du son et de vérifier que certainement les choses se passent en gros comme la figure le montre.

Si l'on cherchait à étudier en détail cette expérience, on verrait que la forme de la courbe BC dépend essentiellement de la forme de la courbe OAB qui la précède. On serait conduit à étudier d'abord la courbe AB (perte de charge à longueur constante); on constaterait que cette courbe elle-même dépend pour un fil donné de la charge P. Nous le répétons, tous ces phénomènes qui sont faciles à étudier dans d'autres expériences, seraient ici parfaitement inextricables.

11. *Effet sur le couple d'une surcharge à torsion constante (fig. 2).* — L'expérience actuelle est pour le couple ce qu'est la précédente pour la charge : on suivra les opérations sur la *fig. 2*. Nous ne répéterons pas à propos de la condition $dx = 0$ les remarques faites à propos de la condition $dl = 0$: elles s'appliquent absolument. Les difficultés expérimentales sont bien moindres que dans le cas précédent : la détorsion élastique, dans des conditions par trop défavorables, peut atteindre une fraction notable de tour-mètre pour des fils de diamètres voisins de $0^{\text{mm}},05$ (une torsion de 1 millièmètre vaut $229''$ pour un fil de ce

Fig. 2.



diamètre et de 1^{m} de longueur). On peut donc utiliser un dynamomètre à indications continues, en lui maintenant une certaine sensibilité et sans trop s'écarter de la définition théorique de l'expérience.

Comme nous le disions à propos du cas précédent, la forme de la courbe bc dépend de toutes les particularités de la courbe qui la précède Oab : le phénomène est donc d'une complexité que le schéma met bien en évidence.

Des expériences que nous avons faites se dégagent cette conclusion générale : *la courbe des couples en fonction des allongements tend vers le couple nul suivant une loi rapide qui la confond bientôt avec l'axe du couple nul, de sorte que pour des allongements qui atteignent tout au plus 10 ou 20 millièmes le couple est rigoureusement nul.* Ce fait a une grande importance expérimentale, parce qu'il permet des réglages qui sans lui seraient à peu près impossibles.

12. *Étude d'un cas particulier.* — Les fils utilisés ont été avant l'opération allongés de n millièmes sans filière. On leur fait subir l'expérience actuelle en prenant des torsions assez faibles pour que la courbe Oa soit rectiligne et que le couple ax soit stable. On détermine la loi suivant laquelle les couples diminuent en fonction des allongements. Pour cela, une échelle d'ivoire verticale est liée à la

partie inférieure du fil : on suit dans une lunette les passages de ses divisions et l'on détermine les couples correspondants.

Voici l'allure générale de la courbe : le $\frac{dC}{dl}$ a d'abord, au voisinage du point *b* (*fig. 2*), une valeur assez petite $\left(\frac{dC}{dl}\right)_0$, croît rapidement, passe par un maximum et décroît ensuite pour devenir nul quand le couple lui-même devient nul. Il ne faut pas s'attendre à ce que les expériences aient une grande précision, les difficultés sont multiples et le problème est particulièrement complexe.

A. Supposons d'abord que, les fils ayant été préparés de même, on fasse seulement varier la grandeur du couple imposé αa (*fig. 2*) : la loi de déperdition est indépendante de la valeur initiale du couple, toutes les vitesses se trouvent multipliées par un facteur proportionnel à cette valeur, pourvu que les couples initiaux soient à peu près également stables.

Fil de 0^{mm},5 de diamètre et de 80^{cm} de longueur, $n = 120$. Les couples sont en unités arbitraires; on donne la déperdition entre les passages de deux traits consécutifs de l'échelle d'ivoire, c'est-à-dire les valeurs moyennes de $\frac{dC}{dl}$.

Fil 1.....	$\frac{\Delta C}{\Delta l} =$	850	1700	1240	760	440	Couple initial.	5670
Fil 2.....		117	223	190	90	60		750
Rapports.		7,2	7,6	6,1	8,5	7,3		7,5

Le rapport des couples initiaux est 7,5; la moyenne des rapports des $\frac{\Delta C}{\Delta l}$ est 7,3.

Le phénomène de perte de couple sous l'influence de l'allongement n'a donc aucune analogie avec un phénomène de refroidissement; il n'y a pas pour un couple *C* donné une vitesse $\frac{dC}{dl}$ donnée : le phénomène entier forme un tout indivisible.

On peut faire varier à son gré la loi de diminution des couples en fonction de l'allongement. Pour faire croître la valeur $\left(\frac{dC}{dl}\right)_0$ au point *b*, il suffit que le couple αa soit instable (fil 3) : pour faire décroître cette valeur, il suffit d'installer ce couple αa suivant des valeurs décroissantes du couple (fil 4); on produit d'abord une forte torsion qu'on diminue ensuite. Voici des exemples :

Fil 1.....	$\frac{\Delta C}{\Delta l} =$	850	1700	1240	760	440	270	»
Fil 3.....		1130	1680	1240	800	500	290	»
Fil 4.....		250	870	710	420	280	170	»

Par ce procédé on ne change, d'ailleurs, notablement que l'allure du début de la courbe.

B. Dans une autre série d'expériences, nous avons pris l'allongement n comme paramètre variable, ce qui revient à étudier le phénomène actuel en tous les points d'une courbe de traction. Supposons stable le couple imposé $\alpha\alpha$: ramenons les expériences au même couple initial d'après les résultats précédents; nous trouvons que la loi de déperdition est d'autant plus rapide au début que n est plus petit :

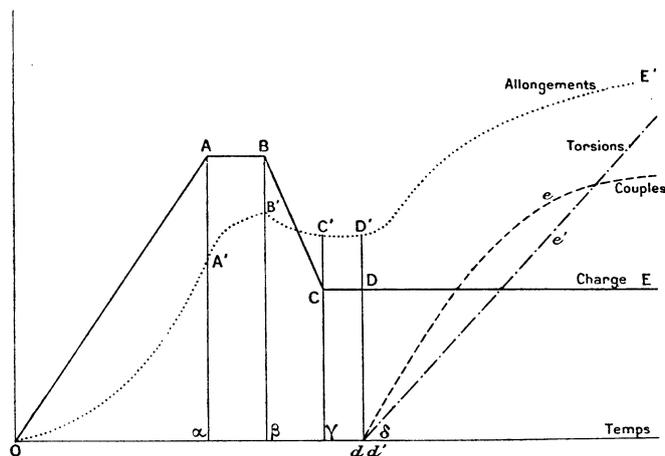
Fil 5.....	$n = 40$	$\frac{\Delta C}{\Delta t} = 2328$	1656	828	384	216	120
Fil 1.....	$n = 120$	850	1700	1240	760	440	270
Fil 6.....	$n = 200$	800	1554	1277	821	500	289

Les couples ont été ramenés à l'égalité, pour les trois fils $\sum \frac{\Delta C}{\Delta t} = 5580$, en allant jusqu'au couple nul. (*N. B.* — On ne donne pas dans le Tableau les courbes jusqu'au couple nul.)

Ce résultat assez paradoxal pouvait se prévoir : l'effet d'un allongement sur le couple est d'autant plus grand, non pas que l'on est plus près de l'allongement de rupture, mais qu'à cet allongement correspond une plus grande modification de la nature du fil. Nous savons que cette circonstance se présente pour les plus petits allongements et non pas au voisinage de la rupture.

13. *Fil allongé sans filière de n millièmes par une charge P . Courbes de déformation sous la charge $p < P$ (fig. 3). — Première série d'expé-*

Fig. 3.



riences; n et P restent constants, on fait varier p . — Le lecteur s'apercevra qu'avec toute sa complication cette technique est la plus simple qu'on puisse imaginer, qu'une expérience de torsion, faite sur un fil initialement recuit, com-

prend nécessairement toutes les phases que nous allons décrire ; mais on néglige généralement de les préciser et l'on obtient des résultats dénués de signification.

Il serait impossible de produire dans l'appareil de torsion l'allongement de n millièmes : une circonstance permet heureusement d'en faire la plus grande partie hors de l'appareil et seulement 10 ou 20 millièmes dans l'appareil même. Nous savons, en effet, que, si l'on décrit une courbe de traction avec retour à la charge nulle, les branches successivement obtenues se raccordent à la courbe qui donne l'essai sans discontinuité (principe de Tresca rectifié). Partant de là, voici comment on opère : nous expliquons la technique sur un exemple.

Le fil est allongé de 120 hors de l'appareil ; il est mis en place et allongé de 12,5 (calculé sur la longueur initiale) ; l'ensemble de ces deux opérations revient à décrire les courbes \overline{OA} , $\overline{OA'}$. On supprime brusquement l'écoulement de charge et la charge est maintenue constante ($P = 4300^{\text{gr}}$), pendant le temps $\overline{\alpha\beta} = 5^{\text{m}}$. On ramène alors la charge à la valeur $p = \overline{\gamma C}$. On attend un temps $\overline{\gamma\delta} = 5^{\text{m}}$; enfin, on produit la torsion sous charge constante p et l'on étudie les courbes des allongements et des couples.

Comme cas particulier, on peut faire $P = p$; le phénomène n'en devient que plus compliqué. Nous aurons à revenir longuement sur ce cas.

Couples.	$P - p = 1000^{\text{gr}}$.	500^{gr} .	200^{gr} .	100^{gr} .	0^{gr} .
0.....	86	84	88	92	102
1.....	89	90	95	100	120
2.....	90	90	101	111	138
3.....	95	95	107	123	167
4.....	95	96	111	132	209
5.....	95	99	126	149	307
6.....	96	103	132	174	525
7.....	97	108	140	215	
8.....	102	111	160	287	
9.....	103	118	185		
10.....	106	123	222		
11.....	109	130	291		
12.....	109	139			
13.....	118	146			
14.....	120	160			
15.....	126				
16.....					
Torsions totales....	1636	1692	1758	1579	1568

Les couples sont en unités arbitraires, les torsions en millionnièmes, le Tableau donne les valeurs successives de $\frac{\Delta\alpha}{\Delta C}$.

L'expérience montre que, pour les torsions inférieures à 100 millionnièmes, les courbes sont sensiblement rectilignes; mais leurs inclinaisons ne sont pas les mêmes; ainsi, même pour les plus petites torsions, l'influence de la quantité $P - p$ se fait sentir.

La différence entre les courbes s'exagère à mesure qu'on fait la comparaison pour un couple plus grand. Ainsi, pour atteindre le couple 7, on a

$P - p$	1000	500	200	100	0
Torsions (en millionnièmes).	639	657	758	880	1568

Un fil qui n'a jamais été tordu est donc fort peu élastique. Tout se passe comme s'il n'avait jamais été tordu, parce qu'il a été notablement allongé dans l'appareil même de torsion, et que nous savons d'ailleurs que cet allongement, non seulement détruit le couple préexistant (n° 11), mais aussi la dissymétrie qui en peut provenir pourvu que la torsion ait été faible.

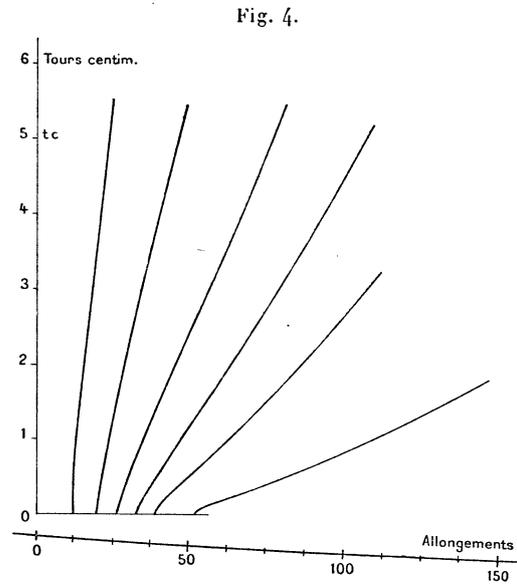
Ce n'est pas seulement au début de la courbe que l'influence de la décharge $P - p$ se fait sentir. On observe exactement les mêmes phénomènes pour de fortes torsions : le phénomène devient, il est vrai, plus compliqué, puisque alors l'allongement est notable et qu'on ne peut plus dire que la charge P est constante. D'ailleurs, le diamètre diminuant, les couples obtenus doivent décroître; ces deux causes tendent à diminuer les couples observés. On peut, par le calcul, les corriger de la deuxième cause, la première est inhérente au phénomène. Quoi qu'il en soit, les courbes sont d'autant plus basses que p est plus voisin de P .

14. *Deuxième série d'expériences : p reste constant, n et P varient.* — Le fil parfaitement recuit pèse 1,804 par mètre. Dans le Tableau suivant, on donne en n_1 l'allongement pendant la torsion, en p_1 la charge $p = 210^{\text{sr}}$ rapportée au fil pesant 1^{sr} par mètre. Les couples sont donnés en unités arbitraires, mais rapportés à un diamètre invariable. Torsions et allongements sont exprimés en millièmes. On a partout $C = 0$ pour la torsion nulle.

	$n = 0,$	$n_1 = 0,$	$p_1 = 116$			
Torsions...	49	148	247	396	594	792
Couples...	2070	2709	3216	3736	4166	4466
	$n = 40,$	$n_1 = 18,2,$	$p_1 = 121.$			
Torsions...	48	145	242	388	582	776
Couples....	3002	3419	3756	4152	4522	4762
	$n = 80,$	$n_1 = 15,6,$	$p_1 = 125.$			
Torsions...	48	142	238	381	571	762
Couples...	3568	3828	4062	4356	4651	4849

	$n = 120,$	$n = 14,1,$	$p_1 = 136.$			
Torsions...	47	140	234	374	560	747
Couples....	4034	4195	4355	4584	4821	4981
	$n = 160,$	$n_1 = \text{»},$	$p_1 = 135.$			
Torsions...	46	138	230	368	552	736
Couples....	4213	4319	4430	4606	4822	4993
	$n = 200,$	$n_1 = 11,5,$	$p_1 = 139.$			
Torsions...	45	136	226	362	542	723
Couples....	4438	4497	4583	4729	4909	5038

15. *Loi des allongements pendant la torsion.* [Courbe D'E' (fig. 3).] — Le quotient $\frac{dl}{d\alpha}$ sur la courbe D'E' est d'abord nul au voisinage du point D', croît très vite, pour décroître ensuite de plus en plus lentement. La fig. 4 donne les courbes d'allongements d'une série de fils étirés d'abord



sans filière de $n = 120$, correspondant à la charge $P = 4400^{gr}$, puis tordus ensuite sous des charges

p	125	625	1125	1625	2125	3125
-----------	-----	-----	------	------	------	------

On a donné à ces courbes des origines différentes pour qu'elles ne se con-

fondent pas : les allongements et les tours-centimètres sont mesurés par rapport à la longueur initiale du fil en expérience. Le tour-centimètre vaut sur le fil employé (poids du mètre avant l'allongement, 1,806) 148 millièmes.

Les courbes sont légèrement déformées par le fait que l'une des abscisses est courbe; mais le rayon de ce cercle est énorme, plus de 25 fois la distance 0 — 5 comptée sur l'axe des ordonnées : la forme générale des courbes n'est pas modifiée.

Sur la courbe $p = 125 \dots$ le point d'inflexion correspond à plus de 5 tc .

» $p = 1125 \dots$ » tombe entre les torsions 2 et 3 tc .

» $p = 1625 \dots$ » correspond à une torsion inférieure à 1 tc .

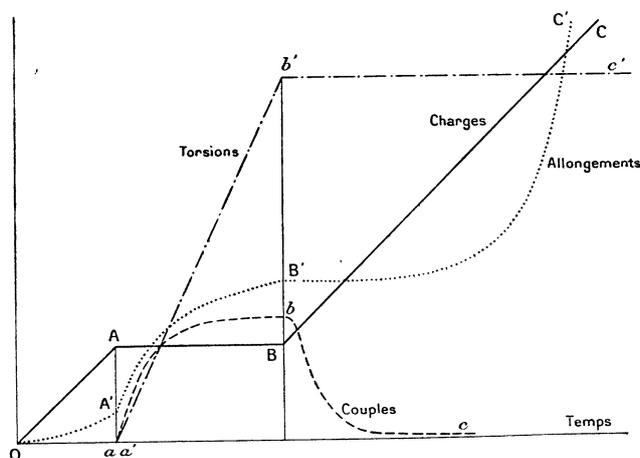
enfin, il s'approche extrêmement de l'origine pour les autres.

Si l'on arrête la torsion, l'allongement cesse brusquement. Ce n'est donc pas que le fil est tordu, en d'autres termes, qu'il résiste à un couple, qui permet au poids p de produire l'allongement, mais le fait que le fil *se tord*, en produisant un certain couple. Si l'on arrête la torsion, le couple décroît immédiatement.

FIL ÉCROUI PAR UNE TORSION PERMANENTE (*fig. 5*).

16. *Fil parfaitement recuit; allongement n invariable, torsion variable* (*fig. 6*). — L'opération tout entière se fait sans que le fil quitte l'appareil.

Fig. 5.

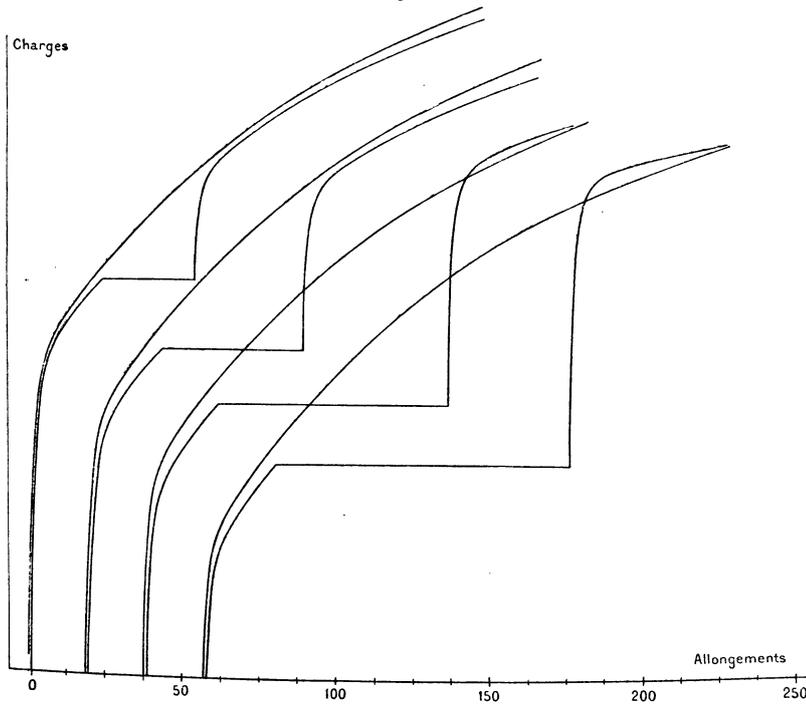


Dans l'expérience de la *fig. 6* $n = 25$, le fil pèse 1,806 par mètre : les quatre courbes correspondent à des torsions en millièmes de 39, 78, 155, 233, calculées sur la longueur au début de la torsion.

On a tracé, en outre, expérimentalement les courbes de traction ordinaires sans

interruption, pour servir de comparaison : elles sont reculées vers le haut par un changement d'origine, pour qu'elles ne se confondent pas avec les autres. D'une expérience à l'autre on fait reculer le système des deux courbes pour la même raison. Les premières seules sont données tout entières.

Fig. 6.



Aux extrémités des courbes on pèse la charge; on a trouvé

Courbes.	I.	II.	III.	IV.
Avec torsion.....	4630	4630	4720	4945
De comparaison..	4590	4610	4585	4805

Les allongements pendant la torsion croissent beaucoup moins vite que la torsion.

Torsions.....	39	78	155	233
Allongements....	30,6	46,8	75,0	96,2
Rapports.....	808	600	484	413

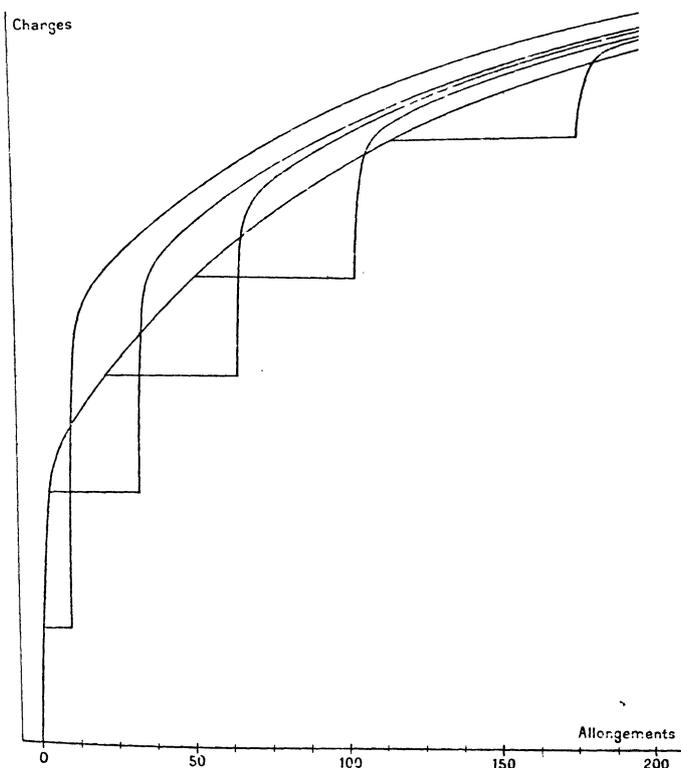
Non seulement les courbes du fil écroui par torsion et les courbes de comparaison ne se raccordent pas, mais on voit qu'elles ne sont pas parallèles; la courbe de traction du fil écroui par torsion est plus horizontale que la courbe ordinaire de traction dans sa partie terminale.

17. *Fil parfaitement recuit; allongement n variable, torsion invariable* (fig. 7). — Fil parfaitement recuit; poids par mètre 1,805. Pour les différentes courbes, voici au commencement de la torsion quels étaient les allongements et les charges (allongements en millièmes) :

n	1,2	4,4	23,8	53,1	116,9
P.....	817	1769	2586	3283	4234

La torsion calculée sur la longueur et le diamètre du fil, avant toute opération, était de 78 millièmes. On donne comme courbe de comparaison une courbe ordi-

Fig. 7.



naire de traction. Enfin, après un allongement total de 200 (allongement sur les deux courbes de traction et pendant la torsion), les charges supportées par le fil étaient :

4880	4900	4920	4960	4990	5070
------	------	------	------	------	------

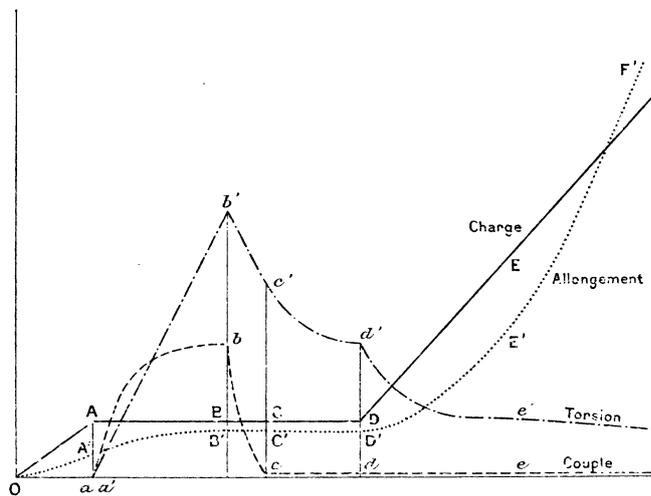
D'après ce qui précède, la torsion qui était bien la même, 78, calculée pour le diamètre initial, est donc un peu plus petite à mesure qu'elle se produit, pour un n plus grand, mais cela ne change pas les résultats généraux.

A mesure que n ou P augmentent, la courbe du fil écroui par torsion vient de mieux en mieux se raccorder à la courbe de comparaison. Sous faible charge, la torsion écrouit beaucoup sans grand allongement; sous forte charge, l'écrouissage ne semble plus dû qu'à l'allongement qui résulte de la torsion. Mais sans torsion cet allongement eût exigé pour se produire une charge beaucoup plus forte.

Le phénomène étudié dans ce numéro et dans le précédent est très complexe : la torsion n'est pas homogène. Le fil sur lequel nous faisons l'essai de traction a un écrouissage variable et croissant à partir de l'axe jusqu'à la surface. Chaque cylindre creux infiniment mince, coaxial, aurait une courbe de traction différente et la courbe observée est la résultante de toutes les courbes élémentaires. Nous aurons à revenir sur ces phénomènes.

18. *Détorsion par allongement pour un fil écroui par torsion (fig. 8).* — La série des opérations indiquées dans la *fig. 8* a une grande importance, comme renfermant la technique correcte de l'expérience historique de Weber

Fig. 8.



(Élasticité résiduelle) et une autre expérience sur laquelle nous reviendrons dans un prochain Chapitre (dissymétries produites et décelées par l'allongement).

L'expérience de Weber consiste en l'étude de la courbe de détorsion $c'd'$, à couple nul, à charge constante, et (comme l'expérience le montre) à longueur sensiblement constante. Nous avons dit, dans un article paru dans le *Journal de Physique* (1899), combien elle est difficile à réaliser, et encore ne lui supposons-nous pas toute l'ampleur qu'on peut lui donner. D'une façon tout à fait générale, les paramètres de cette expérience sont :

L'inclinaison de la courbe de charge OA et la grandeur de la charge aA ; la loi

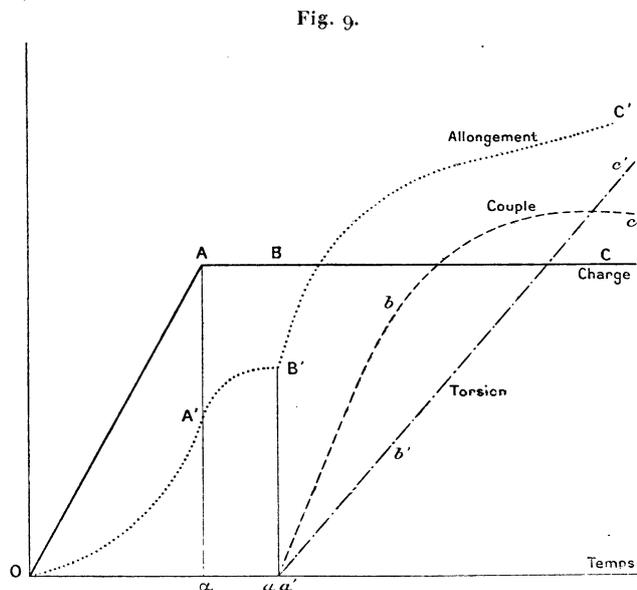
de torsion qui conduit aux points B; la loi de détorsion qui ramène au couple nul.

Mais l'expérience de Weber n'est qu'une partie de l'expérience complète. Quand le fil, à couple nul et charge constante ne se détord plus, on peut le forcer encore à se détordre en produisant une surcharge; on obtient alors le système des courbes DEF, D'E'F', d'e'f'.

Tandis que le phénomène de Weber, comme nous l'avons montré, § XXVI et suivants de notre travail *Sur la torsion des fils fins* (*Annales de Chimie et de Physique*, 1897), est un cas très particulier d'un phénomène général, et qu'il vaut mieux aborder directement le cas général, le phénomène de détorsion suivant d'c' permet de traiter la question des dissymétries, en les mettant en évidence par l'allongement. Nous n'insisterons pas pour le moment.

COURBES DE DÉFORMATIONS SOUS CHARGE SUBIE POUR LA PREMIÈRE FOIS (*fig. 9*).

Les expériences des n^{os} 16 et 17 étaient faites principalement en vue d'étudier l'écroutissage produit par la torsion. On se propose d'étudier maintenant les phénomènes qui se produisent pendant cette torsion même. Le schéma *fig. 9* ne



diffère de la première partie du schéma *fig. 5* qu'en ce qu'il admet qu'avant la torsion on peut laisser le fil un temps T sous charge constante (courbes AB, A'B').

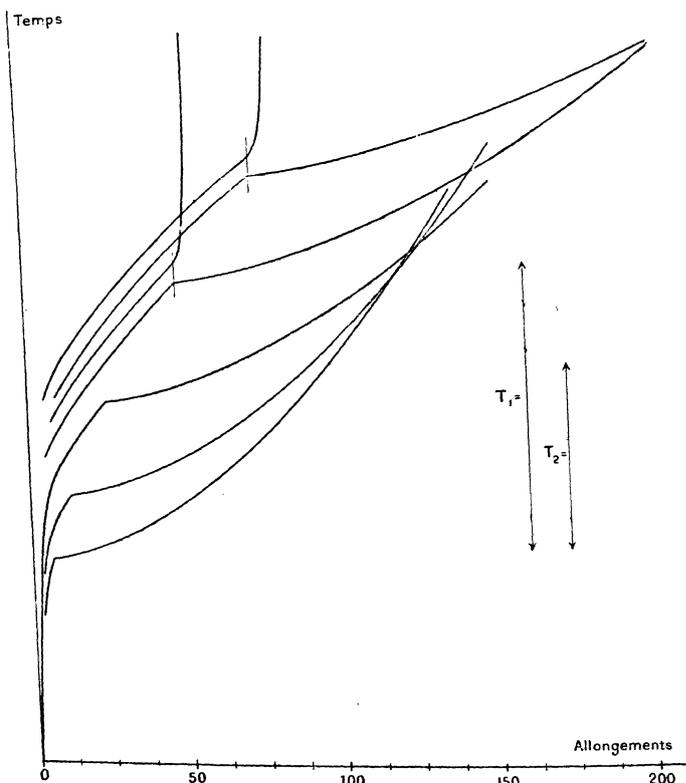
19. *Étude de la loi d'allongement — Première série : T = 0 (fig. 10),*

n variable. — Dans l'expérience suivante on fait varier l'allongement $n = \alpha \Lambda'$ obtenu sans filière et la charge correspondante $P = \alpha \Lambda$ (*fig.* 9). Voici pour les cinq courbes les valeurs de *n* (en millièmes) et de *P* (en grammes) :

<i>n</i>	6,3	12,5	25	50	75
<i>P</i>	2075	2260	2645	3235	3720

Le fil employé pèse 1^{er},80 par mètre; il a sensiblement un diamètre de 0^{mm},05, le tour-centimètre correspond à une torsion de 157 millièmes pour le fil non

Fig. 10.



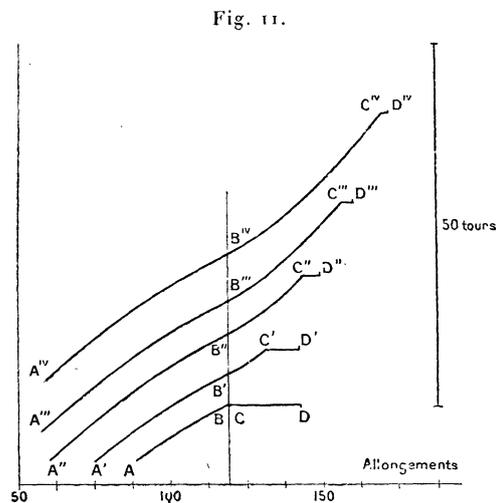
étiré, la longueur T_1 de la *fig.* 10 est la longueur de l'ordonnée correspondant à un écoulement de 2000^{gr}; la longueur T_2 correspond à un nombre de tours qui donnerait au fil non allongé une torsion de 314.

Enfin, on donne aussi pour les courbes $n = 50$ et $n = 75$, les courbes d'allongement à charge constante sans torsion après l'arrêt; elles correspondent à la courbe $A'B'$ du schéma *fig.* 9 et permettent de juger de la modification profonde amenée par la torsion.

Le rapport $\frac{dl}{dx}$ est d'abord considérable, il décroît ensuite; $\frac{d^2l}{dx^2}$ tend vers 0.

Toutes choses égales d'ailleurs $\frac{dl}{dx}$, surtout au début des courbes d'allongement par torsion, croît beaucoup plus vite que proportionnellement au poids P sous lequel se fait l'expérience.

On peut se demander à partir de quelle torsion l'écroûissage est tel que le fil qui, au voisinage des points AA' (*fig. 9*), n'est pas stable sous la charge P, le soit devenu. L'expérience (*fig. 11*) répond à la question. On allonge des fils de 119



(courbes AB); on maintient la charge constante ($= P$) et l'on commence ($T = 0$) la torsion que l'on maintient jusqu'à ce que l'allongement ait une valeur choisie à l'avance (courbes BC); on arrête alors la torsion et le cylindre enregistreur, et l'on attend que l'opération complète (de B en D) ait duré un certain temps (40 minutes); le fil s'allonge sous la charge P.

L'expérience prouve que si, d'une part, le fil est encore instable devant la charge P, lorsque l'allongement sous l'influence de la torsion est déjà considérable (tel qu'il faudrait des heures et des jours même pour l'atteindre à charge constante sans torsion), d'autre part, par des torsions sous charge constante, on peut rapidement écroûer le fil et le rendre stable pour cette charge P.

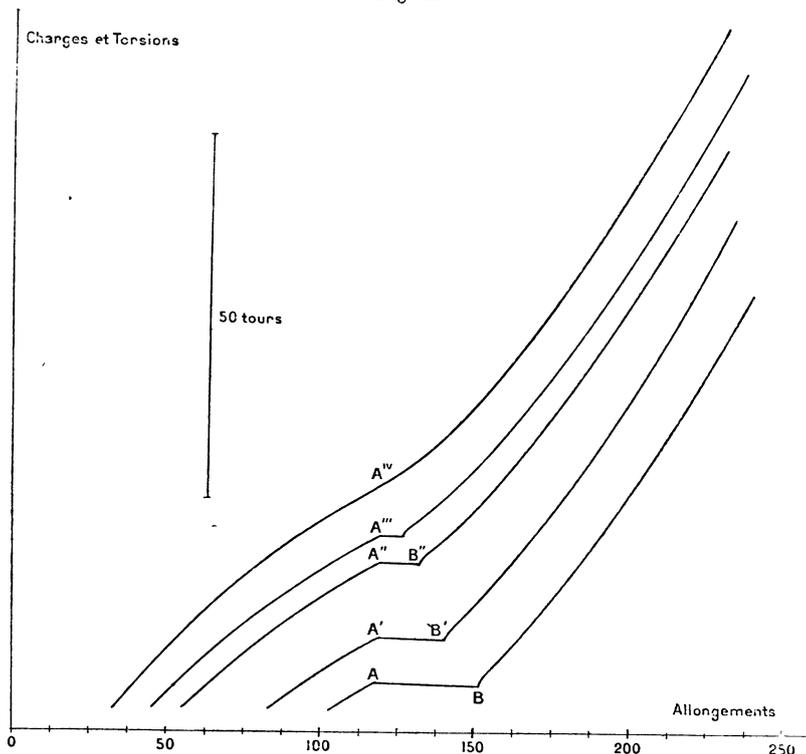
Deuxième série: $T > 0$ (*fig. 12*), n constant. — Fil pesant par mètre 1^{er}, 806; allongé jusqu'à $n = 119$ millièmes. On attend des temps T variables d'un fil à l'autre, pendant lesquels le fil (initialement de 80^{cm}, puis porté par l'allongement de 119 millièmes à 89^{cm}, 5) s'allonge de m millimètres; on tord alors à vitesse constante d'un même nombre de tours et l'on mesure l'allongement m' en millimètres pendant la torsion.

T.	0 ^m	1 ^m	5 ^m	30 ^m	133 ^m
P.	4310	4260	4300	4295	4280
m.	0	6,0	10,5	17,0	26,5
m'.	77,5	76,0	73,5	69,5	68,5
m + m'.	77,5	82,0	84,0	86,0	95,0

Si les fils étaient rigoureusement identiques, les valeurs de P devraient être les mêmes; elles diffèrent peu.

Il résulte de ces expériences que m' décroît : donc la modification éprouvée par le fil à charge constante influe sur la suite du phénomène, de façon qu'il se fasse

Fig. 12.



une compensation imparfaite. Il faut remarquer de plus qu'aux points B (*fig. 12*) les courbes d'allongement par torsion partent verticalement : après l'arrêt $\frac{dl}{d\alpha}$ est nul. L'effet est d'autant plus marqué que l'arrêt a été plus long.

Dans les expériences précédentes la torsion était de 50 tours : rapportée à la longueur et au diamètre que le fil possède aux points A, cela fait une torsion de 83 millièmes : la vitesse de torsion était de 1 tour en 85^s.

Mêmes expériences sur des fils étirés raides à la filière. — Ils rentrent dans la règle générale de ne pouvoir être tordus sous charge sans allongement. On

ne peut pousser l'expérience bien loin, parce qu'ils cassent sous de faibles torsions, surtout si la charge est grande. Ils s'allongent, toutes choses égales d'ailleurs, d'autant mieux qu'ils sont étirés moins raides.

20. *Faisceau des courbes de torsion pour une charge P et une vitesse de torsion constante, le temps T servant de paramètre variable.* — Fil recuit allongé sans filière hors de l'appareil de torsion de 120, puis de 12,5 dans l'appareil (voir n° 13 la justification de cette technique). Il pèse après l'allongement de 120, 1^{er}, 610 par mètre, et une torsion de 1 *tc* vaut 150,5 millièmes.

Si, le fil étant ainsi préparé, on le laisse s'allonger sous charge constante, on décrit la courbe A'B' du schéma (*fig. 9*). Pour fixer les idées, nous avons déterminé cette courbe dans une expérience préliminaire. Les nombres du Tableau suivant représentent, d'une part, les allongements totaux en millimètres (fil de 81^{cm}, chaque millimètre fait un allongement de 1,23 sur la longueur actuelle), de l'autre les temps nécessaires à les produire.

Enfin, dans la troisième colonne, on inscrit les vitesses moyennes d'allongement V en millièmes par seconde.

mm	s	V = 250	mm	m s	V = 18,7
1.....	5		9.....	4. 2	
		179			14,7
2.....	12		10.....	5.30	
		125			12,3
3.....	22		11.....	7.12	
		83,3			9,1
4.....	37		12.....	9.30	
		59,5			7,3
5.....	58		13.....	12.20	
		44,6			5,7
6.....	^m 1.26		14.....	16. 0	
		32,1			4,6
7.....	2. 5		15.....	20.30	
		26,0			
8.....	2.53				

Ceci posé, revenons à l'expérience que nous étudions. Après des temps T, on tord avec une vitesse de 10,75 en millièmes-seconde. D'après le fait seul que le fil a été allongé dans l'appareil de torsion, nous savons (n° 11) que le dynamomètre est au zéro. On trouve, dans le Tableau suivant, $\frac{\Delta\alpha}{\Delta C}$ pour des ΔC égaux : on a donc pu se dispenser d'écrire la valeur des couples ; les $\Delta\alpha$ sont exprimés en millièmes.

Le Tableau suivant montre qu'après $T = 10^m$ le fil est loin d'avoir atteint son état définitif. Lorsque le temps T diminue, les courbes se modifient profondément. Une courbe du faisceau qui, au début, est plus verticale qu'une autre est ensuite plus horizontale : elle correspond à un T plus grand.

T = 5 ^s .	T = 1 ^m .	T = 2 ^m .	T = 10 ^m .	T = 20 ^m .
113	64	59	54	54
148	84	72	60	57
170	104	83	66	60
210	128	105	66	62
227	157	123	76	68
250	188	146	90	72
268	233	186	96	78
300	267	224	114	86
	309	264	133	93
		327	169	112
			213	120
			307	149
				193
				457
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
1686	1534	1589	1444	1660

Enfin, même après un arrêt de 20^m, le fil n'est certainement pas parfaitement élastique pour une torsion de 80 millièmes. Pour un fil de 1^m et de 0^{mm}, 5 de diamètre, cela fait une torsion de 18°, 5.

Nous pourrions, tout en conservant les mêmes valeurs T₁, T₂, ... de T, obtenir un second faisceau en prenant une autre vitesse de torsion. Les courbes de chacun de ces faisceaux diffèrent d'autant moins entre elles que ν est plus petit.

Ainsi, pour la vitesse $\nu = 10,75$ (expériences précédentes), pour atteindre le couple 6, il fallait

$$T = \frac{5^s}{2^m}, \quad \alpha = 1118; \quad \text{Rapport} \dots \dots \dots 1,90$$

588.

Pour la vitesse 19 fois plus petite, $\nu = 0,577$, il fallait, pour atteindre le couple 6,5,

$$T = \frac{5^s}{2^m}, \quad \alpha = 1628; \quad \text{Rapport} \dots \dots \dots 1,04$$

1563.

Si petite que soit la vitesse ν , les courbes de torsion conservent leur courbure dans le même sens et n'ont pas d'inflexion, pourvu, bien entendu, que la vitesse soit constante.

Allure générale des courbes de torsion. — A mesure que les torsions deviennent plus grandes, les courbes correspondant à des temps d'arrêt T différents vont tendre à coïncider. On a employé, pour le vérifier, la seconde forme de l'appareil de torsion. Le fil, préalablement allongé de 120, est allongé de 25 dans l'appareil. La charge est maintenue constante, 30^s et 30^m. Les torsions produites, inscrites

et calculées pour le diamètre initial étaient 46,5 et 93 millièmes, soit 25 et 50 fois plus grandes que la plus grande des torsions employées pour étudier le début de courbe. Les courbes coïncidaient sensiblement, même pour la plus petite de ces deux torsions. On pouvait prévoir le fait d'après la forme des courbes à leur début.

21. *Faisceau des courbes de torsion pour une charge P et un temps T constant, quand on fait varier la vitesse de torsion ν .* — Fil précédent. Allongement hors de l'appareil 120, dans l'appareil 12,5. $T = 2^m$. On donne les $\frac{\Delta\alpha}{\Delta C}$, pour des ΔC constants.

$\nu = 10,75.$ — 1 tour en 156 ^s .	$\nu = 1,59.$ — 1 tour en 1051 ^s .	$\nu = 0,577.$ — 1-tour en 3010 ^s .
57	102	163
67	150	223
77	182	240
90	211	281
103	251	309
124	269	346
145	303	
179		
214		
287		
328		

Nous savons déjà que l'écart entre ces courbes à vitesses différentes est d'autant plus grand que T est plus petit.

Il n'y a aucune raison *a priori* pour que les phénomènes de torsion restent les mêmes, lorsque les trois quantités V , $\frac{1}{T}$ et ν varient dans le même rapport : la valeur absolue de ces quantités peut et doit influencer.

22. *Faisceau des courbes de torsion pour un temps T grand, en fonction de la charge P.* — Pour que le phénomène soit bien défini, il faut que T soit déterminé. On peut, par exemple, le prendre très grand, égal à 30^m par exemple ; probablement le fil n'a pas encore atteint son état définitif, mais on ne peut pratiquement faire plus sans rendre les expériences d'une durée insupportable. Cherchons à construire le faisceau des courbes de torsion pour un fil recuit en prenant l'allongement n ou la charge correspondante pour paramètre variable.

Les trois fils (poids par mètre 1,806) subissent à charge variable des allonge-

ments de 65, 105 et 145. On attend 30^m pendant lesquels se produisent des allongements qu'on mesure (en millimètres).

Temps :	2 ^m .	5 ^m .	10 ^m .	20 ^m .	30 ^m .
Fil 65. . . .	3,0	4,3	5,4	6,5	7,0
Fil 105. . . .	5,2	7,4	9,2	11,3	12,5
Fil 145. . . .	8,6	12,6	16,1	20,3	23,1

On peut vérifier sur ce Tableau les lois énoncées (Chapitre III, page 360 de ce Mémoire) sur les vitesses d'allongement à charge constante en un point d'une courbe de traction. La vitesse d'allongement diminue de moins en moins rapidement à mesure qu'on va vers les grandes charges.

Au moment où commence la rotation les allongements totaux subis étaient en millièmes : 74, 121, 174. La torsion se fait avec une vitesse de 1 tour en 1170^s. L'allongement pendant la torsion est, pour les trois fils, en millimètres, 2^{mm}, 6, 3^{mm}, 0, 4^{mm}, 5; rapporté à la même longueur et à l'unité de torsion, on trouve en valeurs relatives 185, 235, 337.

On donne dans le Tableau suivant les couples en unités arbitraires rapportés à un fil de diamètre et de longueurs constantes : pour les obtenir on multiplie les couples observés par $lR^{\frac{3}{2}}$. Les torsions sont exprimées en millièmes.

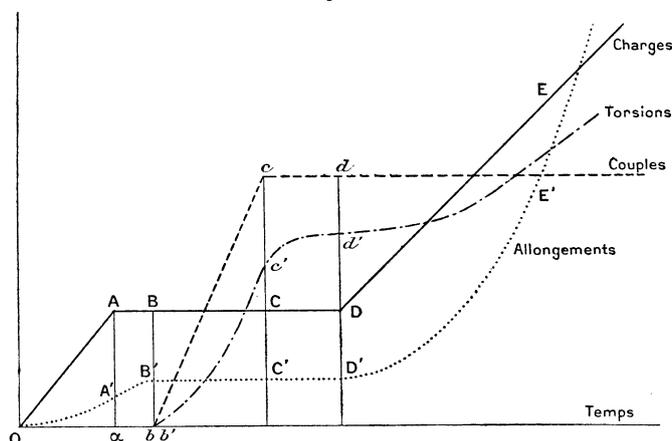
Fil 65.		Fil 105.		Fil 145.	
C.	$\alpha R.$	C.	$\alpha R.$	C.	$\alpha R.$
22	41	24	45	25	53
45	83	48	96	51	116
67	131	71	154	76	195
89	181	95	215	102	287
111	234	119	286	127	410
134	294	142	364	140	486
156	357	166	457	153	572
178	430	190	565	165	665
200	513	214	697	178	785
223	609	226	779	191	933
245	721	237	851	204	1112
267	859	249	964	216	1318
278	945	261	1075	229	1584
289	1035	273	1204		
301	1139	285	1355		
312	1258	297	1533		
323	1388				
334	1533				
345	1697				

La courbe de torsion s'infléchit davantage à mesure que P grandit; le fait que le

fil a été plus étiré ne compense pas le fait qu'on décrit la courbe sous la charge même qui a servi à étirer le fil. Au n° 14, la préparation des fils est analogue; mais les courbes de traction sont décrites sous une charge p petite et la même pour tous les fils : les courbes du faisceau se disposent dans un ordre inverse. Ce résultat n'a rien qui nous doive étonner d'après les expériences du n° 13.

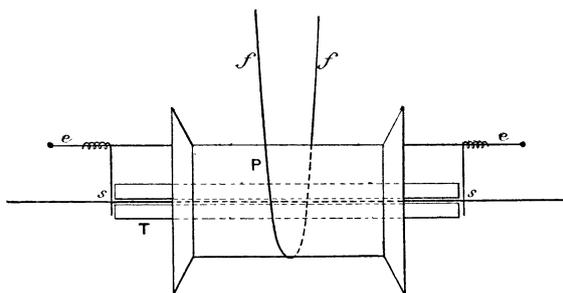
23. *Courbe de traction sous couple constant (fig. 13).* — Il faut appliquer un couple constant au fil. Le fil est placé horizontalement : une de ses

Fig. 13.



extrémités est fixe, l'autre est tendue par une corde qui passe sur une poulie à l'axe horizontal et qui supporte le seau de charge. Le fil passe dans une bobine de bois P (fig. 14) dont on a formé l'axe d'un tube de verre dont le trou capil-

Fig. 14.



laire est juste du diamètre du fil. La bobine doit être au milieu du fil et ne pas pouvoir tourner sans tordre le fil. On a planté dans ses joues deux pointes e ; deux bouts de fil sont soudés en s et font un tour sur les pointes. Le rayon r de

la poulie est $0^{\text{cm}}, 842$; on le déduit de la longueur d'un fil métallique fin enroulé de 10 tours : la circonférence ainsi trouvée est de $5^{\text{cm}}, 29$.

La bobine doit être entraînée par un couple constant. Un fil à coudre *ff* passe sur elle, puis sur deux petites poulies très légères et très mobiles d'aluminium fixées au plafond du laboratoire; il retombe verticalement et porte deux poids p, p' ; le couple agissant est $0,842(p - p')$; la différence $p - p'$ variait de 0^{gr} à 100^{gr} . Pour que le fil adhère suffisamment à la bobine, p' doit être proportionnel à p ; si $p - p' = 50^{\text{gr}}$, par exemple, p' doit égaler 20^{gr} . Il est évident aussi que l'on ne peut faire des expériences sur de grands couples, que si la charge $A\alpha$ est suffisante pour que le fil en expérience reste à peu près rectiligne.

Pour que l'on puisse tordre d'un grand nombre de tours, il faut que les poulies d'aluminium soient placées très haut au-dessus du sol; elles sont à 3^{m} ; on peut tordre de 55 tours environ. Le fil en expérience a un peu plus de $0^{\text{m}}, 80$, la torsion porte donc sur deux bouts de $0^{\text{m}}, 40$; elle atteint donc $1,40$ tour-centimètre.

Courbe d'allongement. — Pour comprendre ce qui se passe, il faut considérer successivement l'effet des différentes phases du phénomène. Si nous supprimons d'abord du schéma la partie BCD et que nous construisions alors la courbe d'allongement en fonction des charges, nous savons (principe de Tresca rectifié) que la courbe obtenue se raccorde à celle qu'une opération continue (non interrompue suivant AB) aurait donnée. Si, d'autre part, nous nous reportons au n° 7, nous voyons que l'établissement du couple suivant BCD, qui correspond à une torsion assez faible, ne modifie sensiblement pas la courbe d'allongement en fonction des charges, ou, s'il la modifie, c'est pour la relever (faire que, pour une charge donnée, l'allongement soit moindre).

L'expérience montre que dans l'opération complète la courbe de traction est fort peu modifiée, qu'elle se trouve seulement un peu au-dessus de celle qu'on obtiendrait sans couple, en supprimant du schéma la partie BCD, et que cette élévation croît avec le couple employé. L'existence du couple et la torsion qui en résulte écrout donc le fil.

24. Valeurs du quotient $\frac{d\alpha}{dl}$ le long des courbes D'E' et d'e'. — L'expérience montre que ce quotient diminue lorsqu'on se déplace vers la droite de la figure (charges croissantes); la proposition vaut *a fortiori* si l'on considère le rapport $m = \frac{v}{V}$, puisqu'il se déduit du précédent par le facteur $l^{-\frac{1}{2}}$ et que l croît (n° 9). *A fortiori* encore on déduit la règle suivante :

Pour des charges croissant linéairement dans le temps et un couple qui serait maintenu constant, non pas en valeur absolue mais rapporté à un diamètre constant, le rapport m diminuerait plus vite que l^{-2} ; le phénomène tient à l'écroutissage de torsion du fil.

Exemple. — Fil recuit, poids du mètre, 1,806; chargé de 580^{gr} produisant un allongement initial négligeable. Les allongements sont donnés en millièmes.

C = 2,10 gr.-cent.		C = 4,21 gr.-cent.		C = 21,0 gr.-cent.	
All. = 13	<i>m</i> = 0,148	All. = 11	<i>m</i> = 0,347	All. = 15	<i>m</i> = 2,714
40	134	34	344	25	1,880
72	112	57	305	47	1,571
109	109	84	274	78	1,408
144	85	112	248	100	1,408
187	88	144	226	140	1,285
230	75	178	214		
279	70	212	191		
		250	193		

Toutes choses égales d'ailleurs, *m* croît plus vite que proportionnellement au couple. Quand on passe du couple 2,10 au couple 21,0, dix fois plus fort, *m* croît dans le rapport de 1 à 18,3. Mais cette variation diminue et se rapproche de 1 à 10 à mesure qu'on la prend pour des allongements plus grands; ainsi, pour un allongement de 140, elle n'est plus que de 1 à 15,1. Cela revient à dire que $\frac{d\alpha}{dl}$ diminue plus vite pour les grands couples que pour les petits.

Au lieu des nombres *m*, il revient au même de comparer les quantités $\frac{d\alpha}{dl} \frac{1}{C}$, puisque la comparaison en fonction de C se fait pour les mêmes allongements.

25. *Valeur du quotient $\frac{d\alpha}{dl}$, pour le même couple et le même allongement total, quand on fait varier l'allongement au moment de l'installation du couple.* — Fil recuit pesant 1,806 par mètre. Dans une première série, on installe le couple pour la charge 580^{gr} et un allongement insignifiant. Dans une seconde, on l'installe pour la charge 4000^{gr} et l'allongement 120. On détermine le $\frac{\Delta\alpha}{\Delta l}$ moyen, Δl représentant la variation de longueur entre un allongement initial de 120 et un allongement final de 250; α est évalué en radians, Δl en centimètres. La première série de fil subit le couple à partir de l'allongement 0, mais on ne détermine les $\Delta\alpha$ qu'à partir de l'allongement 120, comme pour la seconde série.

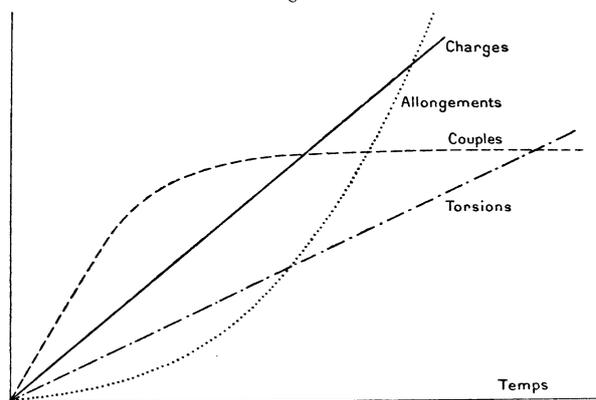
Couple.	2,10.	4,21.	8,42.	12,63.
Série I	$\frac{\Delta\alpha}{\Delta l} = 3,48$	8,97	19,66	30,02
Série II	» 4,63	11,04	24,29	36,58

Ainsi, pour un fil d'abord très peu allongé, soumis à un couple de 12,63, puis

allongé, il faut, par centimètre d'allongement en moyenne, à partir de l'allongement 120 jusqu'à l'allongement 250, tordre de 30,02 radians pour maintenir le couple; tandis qu'il faut tordre de 36,58 radians pour maintenir le même couple sur le fil qui ne subit ce couple (et, par conséquent, la torsion correspondante) que depuis l'allongement 120. C'est donc que le premier fil a été fortement écroûi par torsion pendant qu'on l'allonge sous couple de 0 à 120.

26. *Courbe de traction décrite avec $\frac{d\alpha}{dt}$ et $\frac{dP}{dt}$ constants (fig. 15).* — Nous limiterons l'étude de cette technique au cas où les torsions et les charges com-

Fig. 15.



mencent à croître en même temps; il est clair qu'on pourrait la compliquer de bien des manières en supprimant cette restriction.

La fig. 16 représente un faisceau de 8 courbes décrites comme il vient d'être dit. Fil recuit pesant, par mètre, 1^{er},806. Pendant qu'il s'écoule 1000^{es} d'eau dans le seau de charge, les torsions, évaluées en millièmes et calculées sur le diamètre initial, seraient

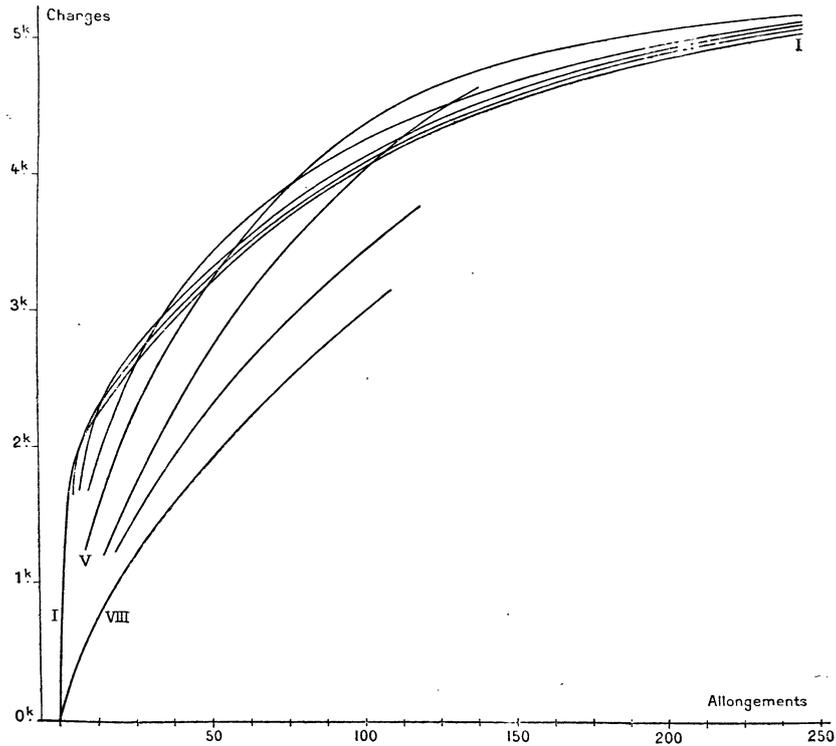
Fils.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
Torsions.....	0	3,8	8,7	24,1	48,4	109	178	275

Les courbes semblent avoir, dès l'origine, des tangentes différentes, d'autant plus inclinées que la vitesse de torsion est plus grande. Mais, comme dans les premières parties d'une courbe avec torsion, il y a torsion sous charge faible et, par conséquent, écroûissage, cette courbe va couper plus loin la courbe de comparaison I sans torsion. Il doit même arriver que la courbe de traction avec torsion coupe deux fois la courbe I; malheureusement, dès que la vitesse de torsion est grande, le fil casse pour d'assez petits allongements et c'est sur ces courbes que

l'on pourrait constater le plus facilement l'existence de ces deux points d'intersection.

Nous venons de passer en revue les expériences les plus commodes pour faire

Fig. 16.



agir simultanément des charges et des couples. Il est impossible de traiter convenablement un seul cas de torsion sans connaître, au moins en gros, l'ensemble de ces phénomènes. On a pu s'en dispenser quelquefois et obtenir des résultats exacts, simplement parce qu'on se bornait à étudier des cycles fermés.

CHAPITRE V.

ÉCROUISSAGE. THÉORIE DES DÉFORMATIONS PERMANENTES DE M. DUHEM.

Si tout le monde reconnaît que les déformations permanentes changent la nature du métal, on diffère d'opinion sur la manière dont les modifications s'accomplissent. N'a-t-on pas soutenu, par exemple, qu'elles ne dépendaient que

de la déformation géométrique et non des procédés employés pour l'obtenir? Quels que soient l'interprétation à donner aux expériences et le degré de confiance minimum à leur accorder, elles nous permettent d'éliminer un certain nombre de théories. Car, s'il est difficile de dire comment les choses se passent, il l'est beaucoup moins de prouver comment elles ne se passent pas.

Bornons notre discussion au cas de la torsion sous charge aussi faible que possible. Le phénomène est plus compliqué que la traction, parce qu'il n'est pas homogène, mais il est au moins renversable. On peut tordre et détordre un fil : il est matériellement impossible de raccourcir un fil allongé d'une façon permanente. Sous charge faible, le phénomène de torsion est le moins possible compliqué de traction.

Nous représentons les phénomènes dans le plan OAx en prenant les torsions α pour abscisses et les couples A pour ordonnées. La température est supposée constante.

Du nombre des variables indépendantes.

Dans les conditions précisées, il n'y a qu'une variable indépendante. Le phénomène entier est déterminé par la fonction $\alpha = f(t)$, définie à partir du début de l'expérience, $t = 0$. Pour définir l'état du fil à ce moment $t = 0$, il faut nous donner des paramètres dont le nombre, d'ailleurs inconnu, se réduit peut-être à un, mais peut être infini; ce qui équivaut à connaître la fonction $\alpha = f(t)$ pour tous les temps antérieurs au temps $t = 0$ et, plus généralement, l'histoire tout entière de la matière qui forme le fil.

Appelons β, γ, \dots , ces paramètres supposés en nombre fini : ce sont, pour tous les temps $t > 0$, des fonctions de α complètement déterminées par la fonction $\alpha = f(t)$ et une série d'équations différentielles à poser. On peut les appeler variables, parce qu'elles varient; mais elles sont à l'origine ($t = 0$) des constantes d'intégration, des conditions aux limites, ou tout ce qu'on voudra d'analogue; elles sont ensuite des fonctions de α .

Quant à la question de savoir si nous pouvons maintenir la température constante et fixer expérimentalement la fonction $\alpha = f(t)$, en nous rapprochant aussi près que nous voulons de sa définition théorique, question qui est celle des trépidations de température, de couple et d'azimut, nous y reviendrons avec un soin qui ne laissera place pour aucun malentendu.

Du temps comme variable indépendante.

Le temps est en un sens la variable essentielle, puisque tous les phénomènes se déroulent nécessairement en fonction de lui; ce n'est pas une variable indépendante ordinaire, puisque nous n'avons aucune prise sur lui. En parler comme tel

veut dire que sa différentielle intervient directement dans les équations et qu'on doit poser

$$dA = M dx + \tau dt.$$

Cherchons la signification de ce terme τdt et montrons son rôle essentiellement provisoire.

Il peut exister dans le phénomène de torsion, pour modifier actuellement la valeur du couple, deux groupes de causes : les causes *immédiates*, qui se réduisent aux variations de température et de torsion; les causes *médiates*, qui peuvent avoir eu les mêmes causes immédiates, qui peuvent même actuellement être modifiées par elles, mais qui n'en ont pas moins actuellement un rôle indépendant sur les phénomènes. Leurs différentielles devraient, elles aussi, être explicitées dans l'équation reliant A et α ; mais elles ne nous sont actuellement connues que par leurs effets. Si l'expérience prouve qu'elles ne sont pas négligeables, il faut trouver un moyen, au moins provisoire, pour les enrôler dans nos équations.

Appelons p, q, r, \dots ces causes inconnues; il faudrait écrire

$$dA = M dx + P dp + Q dq + \dots$$

Si elles sont fonction du temps, on peut aussi bien écrire

$$dA = M dx + \left(P \frac{dp}{dt} + Q \frac{dq}{dt} + \dots \right) dt = M dx + \tau dt.$$

Il vaut encore mieux garder une fonction τ assez mystérieuse et complexe que de poser systématiquement, malgré l'expérience, $dp = dq = \dots = 0$ identiquement.

Pour expliquer ce qui précède, prenons l'exemple caractéristique d'un chronomètre.

Soient A l'angle que fait à chaque instant une des aiguilles avec un azimut invariable, α l'angle dont on fait tourner la clef de remontage, T la température. Les variables extérieures α et T sont les causes immédiates : dans le cas particulier du chronomètre, elles n'ont d'action sur la marche des aiguilles que par l'intermédiaire du grand ressort dont la tension est la cause médiate. Nous pouvons modifier la marche par des changements de température (si le chronomètre n'est pas compensé), par un remontage plus ou moins à fond (si la fusée est imparfaite); mais la cause principale de la marche est hors de notre atteinte.

Imaginons, maintenant, que nous ne connaissions pas le mécanisme du chronomètre et qu'il nous soit impossible de l'étudier. Le physicien qui voudrait écrire

$$dA = M d\alpha + \tau dT,$$

négligerait tout le phénomène, puisque nous pouvons poser simplement

$$dA = \tau(\alpha, t, T) dt,$$

et même

$$dA = \tau dt,$$

en prenant pour τ une constante, si la compensation et la fusée sont parfaites.

C'est évidemment là un cas extrême, mais particulièrement suggestif.

Changeons les mots; nous avons les phénomènes d'élasticité résiduelle. Tordons un fil, puis ramenons le couple à zéro (remontage de la montre); le fil continue à se détordre (la montre marche).

Ainsi, suivant que cette détorsion dépendra uniquement des causes extérieures *actuelles* ou que le fil tordu sera, en quelque sorte, comparable à une montre montée, nous pourrons ou nous ne pourrons pas négliger le terme τdt .

Voici donc posé, sous sa forme générale, un problème fondamental :

Les phénomènes élastiques ont-ils des causes toutes actuelles et immédiates et, par conséquent, extérieures? ou, si quelques-unes des causes sont médiatees et, par conséquent, intérieures, comment peut-on les introduire dans les équations, au moins en bloc et d'une façon provisoire?

La réponse à cette question précise n'est plus douteuse; elle a été fournie identique par tous les expérimentateurs qui ont regardé le phénomène; à lui seul, le nom que lui a donné Weber, effet tardif élastique, comprend tout le commentaire qui précède. Cette réponse ne dépend pas de la réussite de telle théorie particulière, et c'est raisonner d'une façon rudimentaire que de dire avec l'un des élèves de M. Duhem, M. Marchis : « Nous avons, pour la première fois, mis en évidence expérimentalement un caractère particulièrement remarquable des modifications permanentes.... Si l'on désigne par α la variable qui caractérise la déformation permanente, par A l'action extérieure correspondant à cette variable et par T la température à laquelle le système est porté, les transformations ne peuvent être représentées en fonction du temps par une équation de la forme

$$\frac{d\alpha}{dt} = f(\alpha, A, T).$$

Cette propriété, *déduite de l'expérience*, exclut donc toutes les théories qui se proposent de rendre compte des déformations des *solides* en complétant les équations de la Thermodynamique classique au moyen de termes proportionnels à $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$ et à $\frac{d\alpha}{dt}$ La seule méthode qui semble jusqu'ici rendre le mieux compte des faits expérimentaux est celle qui consiste à introduire dans les équations de la Thermodynamique un terme proportionnel à la variation absolue de la va-

riable qui représente la déformation permanente et en marque les différents degrés. » (*Sur les modifications permanentes du verre.*)

Je n'insiste pas sur le procédé qui consiste à étudier le verre et à conclure pour les métaux : cette argumentation est-elle solide par ailleurs?

Si à tort on a voulu parfois représenter *généralement* les déformations permanentes par l'équation

$$d\alpha = f(\alpha, A, T) dt;$$

il n'en est pas moins vrai que les idées d'hystérésis sont entrées dans la Science, il y a cinquante ans, avec l'hypothèse de J. Thomson, et n'ont jamais été sérieusement contestées. Or, telles que l'expérience permet de les préciser aujourd'hui, elles sont inconciliables avec les conceptions de M. Duhem.

Admettons qu'on ne puisse pas borner la théorie à des frottements intérieurs analogues à ceux des liquides et fonctions de la vitesse ; mais n'oublions pas que cette hypothèse est un cas particulier parmi toutes celles, en nombre théoriquement infini, qui contiennent des causes médiate. Introduire le temps comme variable indépendante et les causes médiate ne revient pas nécessairement à assimiler les phénomènes d'élasticité résiduelle à une éthérification ; voyez l'exemple du chronomètre. Pourquoi conclure, de ce que les modifications permanentes ne sont pas analogues aux changements d'état de la mécanique chimique (et encore est-ce bien sûr?), que le temps n'intervient pas comme variable indépendante ?

N'est-il pas imprudent d'étudier presque uniquement les effets de la température et de conclure ce qui se passe pour d'autres variables, alors que la température joue un rôle nettement à part, produit des modifications dont seule elle est capable ?

Enfin comment M. Marchis, qui s'est fait le champion des idées de M. Duhem (idées intéressantes mais qui, pour les déformations métalliques, du moins, sont fausses), ne s'est-il pas aperçu qu'il y a, dans la thèse qu'il défend, deux parts distinctes et qu'on pourrait être de son avis sur le rôle que M. Duhem fait jouer aux trépidations (idées énoncées avant lui par M. Brillouin) et pourtant se refuser, comme l'ont fait tous les expérimentateurs, à admettre que les trajectoires puissent être tracées à l'avance et une fois pour toutes dans le plan $AO\alpha$?

Du rôle des trépidations, ébranlements, etc.

Voici les expériences qu'il s'agit d'expliquer qualitativement et *quantitativement* :

1° On tord le fil jusqu'au point A_1, α_1 ; on veut maintenir alors le couple constant ; il faut continuer à tordre suivant une fonction du temps (il est pour le moment inutile de la connaître) *qui dépend PRINCIPALEMENT de la façon dont la torsion s'est effectuée.*

2° On tord le fil jusqu'au point A_1, α_1 , on maintient l'azimut α_1 constant : le couple décroît suivant une fonction du temps (peu importe laquelle) *qui dépend PRINCIPALEMENT de la façon dont la torsion s'est effectuée.*

Cet énoncé est incompatible avec toutes les théories qui n'admettent pas des causes internes et médiatees et veulent expliquer tous les phénomènes par des *variations actuelles* des deux seules variables indépendantes α et T : et cela, quelle que puisse être la loi de variation dans le temps de l'azimut $\alpha (dA = 0)$ ou du couple $A (d\alpha = 0)$, quelle que puisse être aussi la forme et les propriétés de la courbe de torsion qui amène au point A_1, α_1 .

Il est évident que, si les seules variables indépendantes *actuelles* sont A et T (1^{er} cas) ou α et T (2^e cas) et si nous pouvons *effectivement* poser $dA = dT = 0$ identiquement (1^{er} cas) ou $d\alpha = dT = 0$ identiquement (2^e cas), nous devons nécessairement tirer $\alpha = 0$ ou $A = 0$, ce qui est contraire à l'expérience. En définitive deux hypothèses en présence :

1° Ou bien les conditions $dA = 0, d\alpha = 0, dT = 0$ ne peuvent être *rigoureusement et effectivement* réalisées, et alors la conséquence ne tient plus ;

2° Ou bien nous pouvons ou ne pouvons pas, peu importe, réaliser ces conditions, mais le phénomène dépend d'autres causes intérieures et médiatees qui n'ont aucun lien actuel avec les variables apparentes A, T ou α, T . Ce sont ces variables qui font le principal du phénomène, la non-réalisation effective et rigoureuse des conditions n'intervenant que comme accessoire.

La première hypothèse, soutenue en dernier lieu par M. Duhem, revient à faire jouer le rôle fondamental aux variations actuelles inévitables de couple, d'azimut et de température, à ce que nous appellerons les *trépidations, ébranlements, etc.*

Il n'est pas douteux que ces ébranlements ont un rôle. En 1888, M. Brillouin disait (*Journal de Physique*, 2^e série, t. VIII) : « Il me paraît probable que les phénomènes d'élasticité résiduelle, pour lesquels on a cru nécessaire de faire intervenir le temps directement comme variable indépendante, peuvent, *en grande partie*, être expliqués par des déformations, dus à la répétition quotidienne de cycles très peu différents, dus aux variations *diurnes* des éléments météorologiques, principalement de la température ; *tel serait le cas pour les variations du zéro des thermomètres.* » Tout ceci peut être conservé à la lettre ; les ébranlements jouent un rôle considérable dans les phénomènes à longue échéance, de cristallisation, par exemple. Les essieux de locomotives sont rapidement hors d'usage ; les chutes des ponts suspendus, d'appareils d'éclairage en fonte, etc., sont des preuves certaines de modifications de cet ordre. Mais une part des phénomènes d'élasticité résiduelle, et la plus importante en un sens, ne sont pas dus à cette cause : M. Brillouin l'a soutenu lui-même dans une série remarquable de Mémoires.

M. Duhem prétend, au contraire, que tous les phénomènes sont dus aux trépidations. « Aucun moyen physique ne permet de maintenir rigoureusement invariable l'action extérieure qui s'exerce sur un système, ou la température à laquelle il est porté.

» Tout séjour de longue durée sous l'influence d'une force en apparence constante et d'une température en apparence invariable, doit être, en réalité, assimilé à une série de chocs de très petite amplitude, mais de très grande fréquence; il doit agir comme de tels ébranlements....

» Ainsi s'expliquent ces déformations en apparence spontanées, que des systèmes élastiques, abandonnés dans des conditions qui semblent invariables, éprouvent à la longue, déformations auxquelles Weber avait donné le nom d'*action mécanique résiduelle*. » (4^e Mémoire sur les *Déformations permanentes*, p. 26.)

M. Duhem de cette hypothèse et de sa théorie des déformations permanentes prévoit des phénomènes *qui ressemblent à la réalité en gros et qualitative-ment*. Ce que je vais démontrer c'est que toute explication *quantitative* basée sur les trépidations est impossible et, en particulier, qu'il est contradictoire d'admettre cette explication et une loi de variation de couple à azimut constant (ou de l'azimut à couple constant) régulière et qui dépende systématiquement des conditions de la torsion précédente.

Quant à la réalité du fait précédent, on en trouvera la démonstration dans mes Mémoires et dans ceux de tous les physiciens qui se sont occupés de la question : je le répète, peu importe la forme de la relation; il nous suffit qu'elle existe.

De la nature essentielle des trépidations, etc.

Soit N le nombre moyen par seconde des oscillations petites et incessantes de A , de α ou de T ; soit $|\Delta A|$, $|\Delta \alpha|$, $|\Delta T|$, leur amplitude moyenne, le symbole $|\quad|$ représentant la valeur absolue. Admettons que l'effet à chaque instant de la partie oscillatoire des causes soit proportionnel aux produits $N|\Delta A|$, ...; nous appellerons ces quantités les *coefficients de dérèglement* D . (Définition de M. Duhem.)

D'après leur définition même, ces coefficients D ne peuvent dépendre que des valeurs *actuelles* de A et de T , de toutes les conditions *actuelles* de montage des appareils, de technique, de lieu et d'heures d'expérience, toutes causes *actuelles* et extérieures au fil lui-même. Il serait absurde de les faire dépendre de causes antérieures et, en particulier, de la vitesse avec laquelle nous avons *antérieurement* tordu le fil.

Nous sommes sûrs de ne pas être contredit par M. Duhem sur ce point. Quand par hasard il a voulu préciser la valeur de ses coefficients de dérèglement, il a dû

faire des suppositions conformes à ce qu'exigeaient ses hypothèses et le bon sens, et qui sont particulièrement suggestives.

Dans un opuscule sur la viscosité magnétique (*Société des Sciences physiques de Bordeaux*; 1899), il cherche à retrouver dans sa théorie les résultats d'un de nos Mémoires [*Sur les pertes d'énergie dans les phénomènes de torsion (Annales de Physique*; 1898)]; il admet, d'ailleurs arbitrairement, que le coefficient de dérèglement $D = N |\Delta A|$ garde une valeur invariable tout le long du cycle. Aussi bien, puisque nous n'avons aucun moyen de mesurer l'amplitude et le nombre des oscillations du couple, de l'azimut et de la température, *toutes les hypothèses sont également légitimes, excepté une seule* (la seule qui peut expliquer les phénomènes) *qui ferait dépendre la grandeur des oscillations de la grandeur des phénomènes antérieurs et de la manière dont ils se sont effectués.*

Mais si, d'une part, la nature essentielle des trépidations interdit au coefficient de dérèglement de dépendre de causes dont l'expérience montre qu'il dépend, elle lui impose de dépendre de conditions dont le phénomène ne dépend point ou qui n'interviennent que comme accessoire. Car, si je veux bien admettre que D est une fonction quelconque, au choix de M. Duhem, de A et de T , je ne peux pas consentir à ce qu'il soit le même pour un appareil accroché à un mur principal ou à une cloison, dans une maison de Paris ou de la campagne, en hiver ou en été, etc. Et comme de lui dépend par hypothèse *la partie principale du phénomène et qu'il entre EN FACTEUR pour déterminer la vitesse du phénomène à chaque instant*, les phénomènes d'élasticité résiduelle devraient être une fonction du lieu, de la saison et de toutes les circonstances extérieures, *au même titre que la visibilité des fils réticulaires d'une lunette dans un bain de mercure nadiral*. J'ai installé mes appareils dans les conditions les plus diverses, sans que jamais le lien intime du phénomène d'élasticité résiduelle avec les conditions antérieures de préparation du fil ait été masqué, ou même sensiblement altéré.

En définitive, tordre un fil ou l'allonger, c'est bander plus ou moins le ressort de la montre qui nous a servi d'exemple; une fois montée, le mouvement de la montre est à peu près hors de notre atteinte : nous pouvons à peine le modifier. Pour M. Duhem, la montre n'a pas de ressort : c'est un jouet d'enfant qu'on fait marcher en l'agitant : comment le mouvement peut-il être régulier?

De l'utilité d'explicitement les paramètres β , γ , ..., comme variables.

Imaginons l'expérience suivante. Un rayon de lumière rectilignement polarisé traverse successivement un bloc de verre et un compensateur de Bravais à teinte plate. *Un même système mécanique* permet, simultanément et d'une façon non indépendante, de comprimer le bloc suivant une direction normale au faisceau

lumineux et de déplacer l'un des prismes du compensateur dont les sections principales sont parallèles et normales à la direction de compression. On demande d'étudier en fonction du déplacement α du système mécanique, la différence de phase A , produite entre les composantes principales du faisceau par l'ensemble du système optique.

Nous avons $A = \varphi(\alpha)$; mais appelons β le déplacement d'une des lames du compensateur et K une constante; d'après la théorie de Bravais, nous pouvons poser $A = K\beta + \varphi_1(\alpha)$. A la vérité β est une fonction $\varphi_2(\alpha)$; il n'y a toujours qu'une variable indépendante; mais nous sommes parvenus à décomposer le problème primitif en trois autres plus simples, qui peuvent être traités indépendamment les uns des autres (étude séparée des fonctions φ_1 et φ_2 , détermination de la constante K) et qu'il n'est pas une simple fiction mathématique de distinguer. Ce n'est qu'accidentellement qu'ils se trouvent réunis.

Revenons au problème de l'érouissage.

La variable indépendante est la torsion α , l'action correspondante est le couple A . En nous appuyant sur l'essai de traction, par exemple, nous pouvons démontrer que la matière du fil se modifie par la torsion. Nous pouvons donc chercher à exprimer ces modifications par des variables supplémentaires β, γ, \dots

En d'autres termes, nous avons seulement une équation nécessaire

$$dA = M d\alpha + \tau dt \quad (\tau \equiv 0 \text{ pour certains auteurs}).$$

Nous pouvons poser

$$\begin{aligned} dA &= M_0 d\alpha + N_0 d\beta + P_0 d\gamma + \dots + \tau_0 dt, \\ 0 &= M_1 d\alpha + N_1 d\beta + P_1 d\gamma + \dots + \tau_1 dt, \\ 0 &= \dots, \\ &\dots, \end{aligned}$$

en tout $n + 1$ équations, dont n servent à relier les n quantités β, γ, \dots à α ; l'élimination redonnant bien entendu la première équation seule nécessaire.

Cette explicitation mathématiquement licite est inutile et même nuisible, si l'on ne peut pas donner des variables β, γ, \dots des définitions indépendantes; si, à chaque instant, l'expérience ne fournit pas un moyen de déterminer leur valeur numérique. Or, quel que soit le nom qu'on donne à ces variables β, γ, \dots , érouissage, dureté, mollesse, etc., ai-je besoin de dire que pour le moment nos connaissances sont à ce point restreintes sur leur nature que l'on n'a jamais pu, dans le cas général, en donner une définition expérimentale? A peine, dans le cas particulier des cycles fermés, avons-nous pu en proposer une conforme à l'expérience. (*Ann. Phys.*; 1898). Expliciter les variables β, γ non seulement ne nous avance guère, mais risque de nous jeter dans l'arbitraire le plus complet. Nous verrons plus loin l'application de ces propositions.

De la nature de la matière aux différents points du plan.

Généralement lors de deux passages successifs par le même point A, α du plan OAx , la matière ne jouit pas des mêmes propriétés, surtout si les déformations permanentes subies entre les deux passages ont été considérables. Le changement de nature peut se traduire par une modification de la trajectoire traversant le point A, α , par une variation de l'inclinaison de cette trajectoire en ce point, par exemple.

Mais il peut arriver, et c'est le cas des cycles fixés ou à peu près fixés dans le plan, qu'on repasse aux différents points du plan, ou en des points très voisins, selon une direction identique, ou à peu près telle. Le phénomène de torsion ne nous permet plus de dire que la matière s'est modifiée d'un passage à l'autre, si grandes que les déformations permanentes aient pu être alternativement dans les deux sens.

Nous sommes forcés, pour définir l'état de la matière, de recourir à un criterium tiré d'un autre phénomène, par exemple à la forme de la courbe de l'essai de traction; on admettra facilement qu'à des formes différentes correspondent des états différents, et réciproquement que, le cycle de torsion étant fixé, si la courbe de traction correspondant à des passages successifs en un même point est la même, il y a fortes chances pour que l'état de la matière soit le même.

L'expérience montre que des déformations permanentes de torsion toujours de même sens, écrouissent le fil, c'est-à-dire allongent la partie initiale rectiligne de l'essai de traction et rendent plus horizontale la partie finale. Le problème que nous allons chercher à résoudre, on verra plus loin pourquoi, consiste à savoir comment se produit l'écrouissage quand on fixe un cycle entre deux azimuts donnés.

Écrouissage par des cycles plusieurs fois répétés.

Voici, *fig. 17*, le résultat d'une expérience.

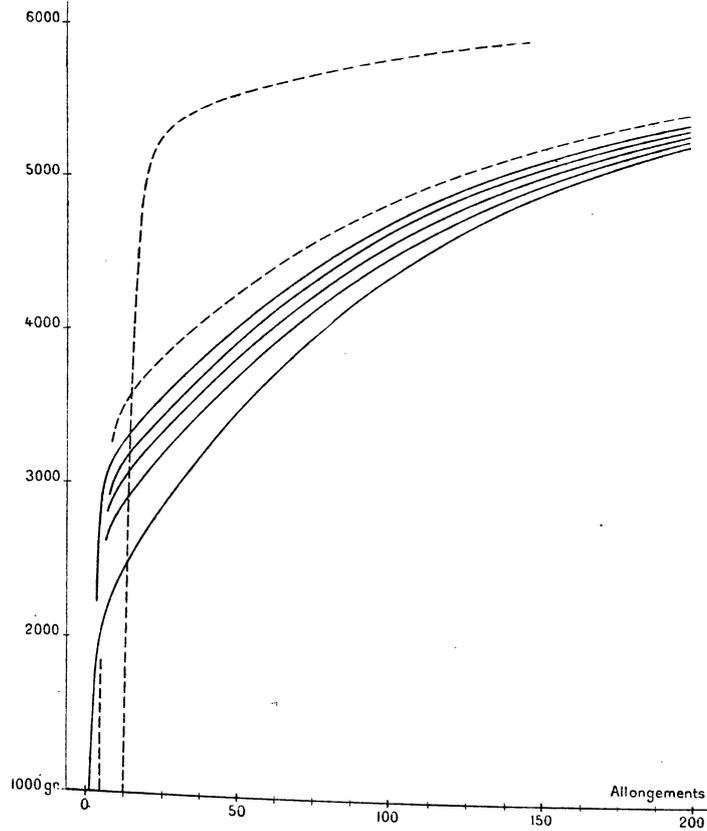
On prend du fil recuit, pesant 1^{er} , 806 par mètre. On le charge de 225^{gr} ; on lui fait parcourir m fois un cycle : 10 tours aller, 10 tours retour (longueur du fil 80^{cm}). Enfin, on fait l'essai de traction à la manière ordinaire. Cherchons à évaluer la somme des valeurs absolues des torsions permanentes éprouvées par le fil après m cycles.

Sur chaque branche du cycle, la torsion permanente n'est pas 10 tours, une partie est temporaire. Cette partie temporaire dépend évidemment du nombre de fois que le cycle a été parcouru.

Comme nous ne voulons pas une estimation exacte qui n'a pas d'intérêt, mais une estimation certainement par défaut, admettons qu'il n'y ait en moyenne que 7 tours de déformation permanente (le nombre exact est compris entre 7 et 8 tours).

Ceci posé, la somme des valeurs absolues des torsions permanentes alternativement dans un sens et dans l'autre est certainement inférieur à $\frac{28m\pi}{80}$ en radians centimètres et sur le fil employé elle est de 27,5 *m* en millièmes.

Fig. 17.



Les cinq premières courbes de la *fig.* 17 à partir du bas, correspondantes à des torsions permanentes absolues qui sont certainement inférieures à

0 55 137,5 275 550

Les deux autres courbes dessinées en traits interrompus correspondent, au contraire, à un écrouissage produit par des torsions faites dans un sens unique et ayant pour valeur 98 et 392. Elles sont beaucoup plus redressées que les courbes où la torsion, tout en conservant la même valeur absolue, se faisait alternativement dans un sens et dans l'autre. Ainsi, à mesure que le cycle se fixe au point de vue torsion, il semble que le fil cesse de s'écroûir au point de vue traction. La matière tend vers un état limite bien défini, malgré la valeur croissante de la somme absolue des déformations.

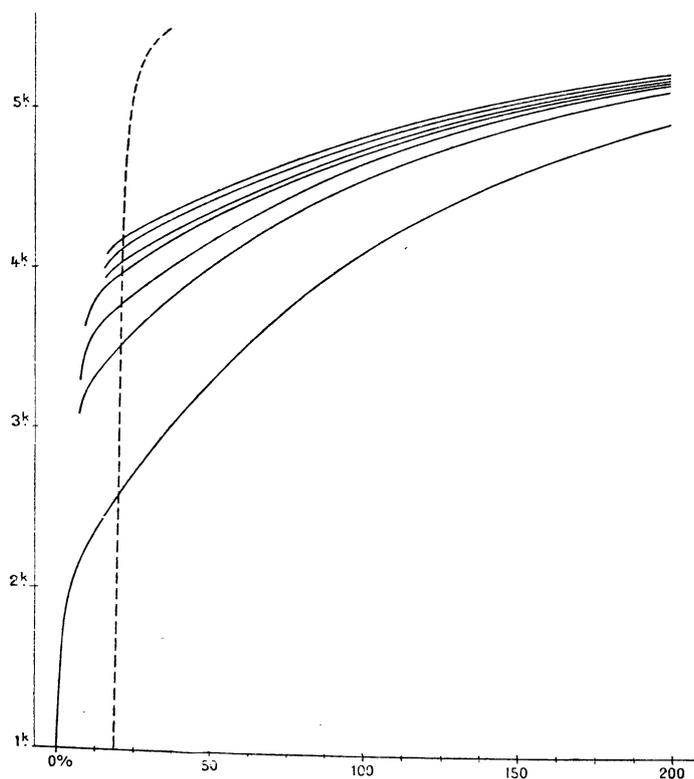
Pour un allongement de 20 %, c'est-à-dire au bout des cinq premières courbes, les charges étaient

4925^{gr} 4970^{gr} 5025^{gr} 5050^{gr} 5075^{gr}.

Pour mieux distinguer les effets des deux branches du cycle sur l'écroûissage, on a recommencé avec des cycles de 50 tours (longueur du fil 80^{cm}, charge 275^{gr}).

Les huit courbes de la figure correspondent :

Fig. 18.



La première correspond à une torsion nulle, la $n^{\text{ième}}$ jusqu'à la septième inclusivement à $n - 1$ demi-cycles; la septième, par exemple, correspond à trois cycles complets avec retour au couple nul, soit à peu près à une torsion permanente de 300 tours en valeur absolue (exactement 280); enfin la huitième en traits interrompus correspond à une torsion préalable dans un sens unique de 300 tours.

Outre la conclusion de l'expérience précédente, l'expérience montre que les six courbes 2-7 se classent deux par deux; il semble que les parcours effectués dans le sens de la torsion initiale écroûissent plus que les parcours effectués en sens contraire.

Phénomènes d'allongement.

Nous savons qu'un fil sous charge ne peut être tordu sans qu'il en résulte un allongement. Cherchons comment se font ces allongements quand on cherche à fixer un cycle entre azimuts donnés.

Fil pesant 1,806. On le charge à débit constant de 2635^{gr}, ce qui l'allonge de 25. Puis sous cette charge constante on lui fait parcourir des cycles de 25 tours. Évalués en centimètres, les allongements correspondant au parcours de chaque branche des cycles successifs ont été

2,70	1,25	1,00	0,75	0,80	0,65	0,65	0,55	0,55	0,50
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

La dissymétrie qui existe sûrement est ici masquée par la grandeur de la charge. Les allongements sont naturellement très différents aux différents points de chaque branche du cycle de torsion.

Le quotient $\frac{dl}{d\alpha}$ est nul au moment où la torsion vient de changer de sens (origine d'une branche); il croît ensuite, passe par un maximum, puis décroît; ce qui est conforme aux résultats du n° 19, Chapitre IV.

Est-il possible de diminuer l'écrouissage par des torsions de sens contraire se succédant suivant certaines lois?

On a voulu identifier dans leurs lois fondamentales les déformations permanentes et l'aimantation : c'est une des formes de cette manie, que certains croient philosophique, et qui conduit à expliquer des phénomènes obscurs par d'autres eux-mêmes tout aussi obscurs. On trouve dans les Mémoires de Wiedemann un Tableau, reproduit par les traités classiques, d'où ressortirait une similitude absolue. Les analogies qui semblaient si frappantes à Wiedemann, ne sont que de vagues ressemblances qu'exagère encore notre ignorance.

On ne saurait trop insister sur le fait suivant : d'après les auteurs les plus sûrs, on peut ramener un morceau de fer à l'état neutre magnétique; je dis qu'on ne peut pas désécrouir un métal par des déformations permanentes.

Un barreau est ramené à l'état neutre magnétique quand il possède à nouveau les qualités qu'il avait avant toute aimantation; il n'est pas à l'état neutre parce que son aimantation est nulle; on peut, d'une infinité de manières, le ramener à l'aimantation nulle sans qu'il soit revenu à l'état neutre.

Les auteurs s'accordent à dire (*Erick Gérard*, 1^{re} édition, t. I, p. 57) que « pour ramener un barreau à l'état neutre, il faut le soumettre à des champs périodiques d'intensité décroissantes; les cycles décrits se rapprochent de plus en plus de l'origine ».

Quoi qu'il en soit d'ailleurs, peut-on, par des opérations analogues, désécrouir un fil tordu ou une barre fléchie? Il semblerait que M. Cantone l'ait affirmé : un de ses Mémoires (*Nuovo Cimento*, t. XXXV, p. 253) commence ainsi : « *Sur le moyen d'éliminer la déformation permanente.* Une grave difficulté s'est opposée au début à l'étude des procédés de déformation; je ne connaissais pas le moyen de ramener le corps déformé à l'état primitif, etc. » On croirait qu'il s'agit de le désécrouir, de le ramener à l'état neutre, de le recuire par des déformations convenablement choisies. M. Cantone rappelle les résultats obtenus pour le magnétisme au moyen de champs alternativement de sens contraires et décroissants, et emploie un procédé analogue de déformations alternées décroissantes. La lecture du Mémoire montre que M. Cantone confond l'état neutre et l'aimantation nulle. On s'aperçoit bientôt qu'il cherche seulement à ramener le point figuratif de l'expérience au point du plan dont il était parti, à obtenir l'équivalent d'une aimantation nulle, c'est-à-dire une déformation totale nulle. Quant à l'état réel de la pièce ainsi déformée, il ne s'en préoccupe pas. Au reste, nous montrerons plus loin que les expériences elles-mêmes n'ont guère de sens, indépendamment du but que poursuivait l'auteur.

Reprenons la question sur un fil tordu en nous servant de l'essai de traction comme réactif de l'état du fil.

Les six courbes du haut de la *fig. 19* sont les essais de traction de fils qui avaient supporté d'abord tous une torsion de 100 tours dans un sens (fil pesant 1,806, longueur 80^{cm}). Le premier, en partant du bas, est essayé tel quel; le second est essayé après une détorsion de 50 tours, le troisième après une détorsion de 75, le quatrième de 100, . . . , le sixième de 150. On voit que la détorsion ne désécrouit pas le fil, que les courbes commencent à s'infléchir pour des charges qui croissent avec la détorsion.

L'écrouissage dû à la détorsion ne croît pas proportionnellement à cette détorsion : petite, elle ne produit qu'un effet négligeable (*voir plus haut, page 51*), qui croît ensuite plus vite qu'elle.

Les courbes correspondant aux détorsions 0 et 50 se coupent, de sorte que si l'on avait, non pas tracé les courbes complètes, mais mesuré les charges correspondant à un allongement de 150, le fil détordu de 50 tours aurait paru désécroui; cette conclusion eût été absurde. L'essai de traction, comme nous l'avons dit bien des fois, ne définit pas seulement l'état initial, mais encore les aptitudes à la déformation permanente jusqu'à la rupture. Ce qui correspond le mieux à une mesure de l'état initial est la charge jusqu'à laquelle la courbe de traction est rectiligne (*voir Chap. III, p. 356*). Il ne faut pas oublier aussi que les fils ne sont pas parfaitement identiques. Nous avons repris au-dessous l'expérience pour des détorsions de 0, 25, 50 tours : la courbe 50 ne coupe plus la courbe 0. Les moindres imperfections peuvent expliquer ces intersections pour de

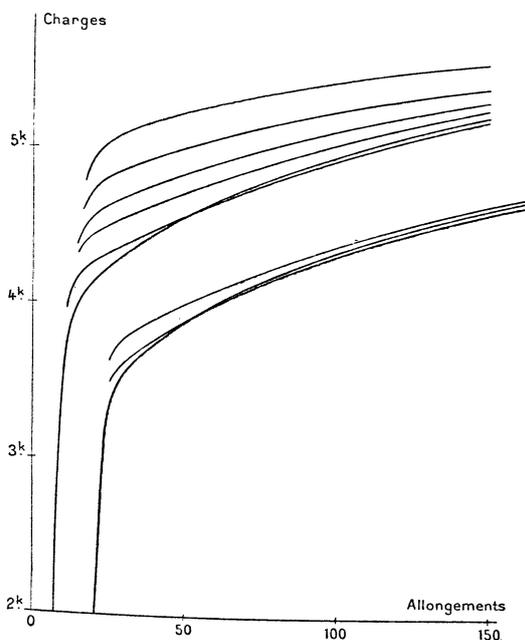
forts allongements ; mais seraient-elles hors de doute qu'elles ne prouveraient rien contre nos conclusions.

Voici les charges correspondant à l'allongement de 150 :

Courbes du haut.....	0	50	75	100	125	150
	5205gr	5190gr	5260gr	5325gr	5420gr	5540gr
Courbes du bas.....	0	25	50			
	5330gr	5285gr	5320gr			

Il est certain que la charge p , pour laquelle la courbe commence à s'infléchir,

Fig. 19.



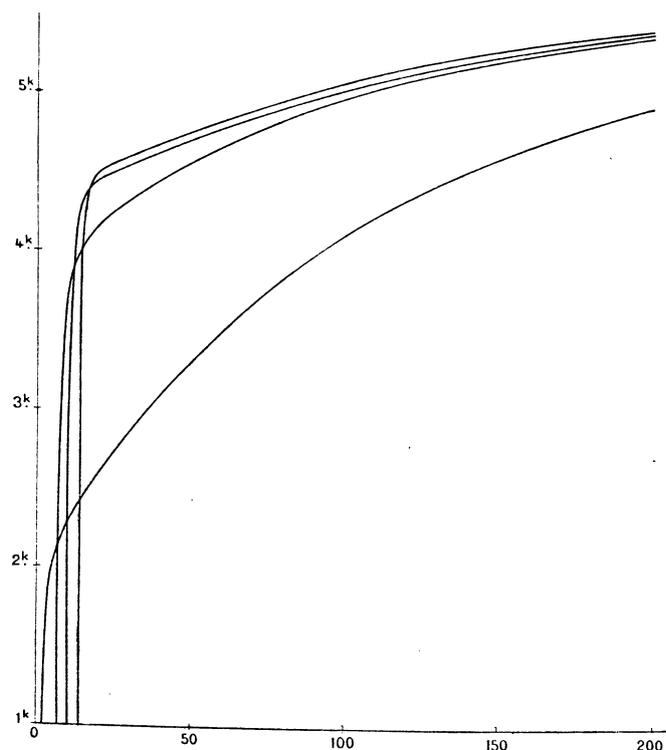
croît continuellement avec la détorsion α ; le quotient $\frac{dp}{d\alpha}$ est d'abord nul et croît ensuite. Rien ne peut amener à supposer qu'il y ait par la détorsion retour à l'état initial.

Mais dans une question si importante, nous avons voulu ne pas laisser place pour un doute. Nous avons cherché directement quelle était l'influence d'une série de déformations permanentes alternées et décroissantes. Les quatre courbes de la *fig.* 20 correspondent en partant du bas, la première à un fil tel qu'on le prend dans le paquet ; la seconde à un fil tordu de 100 tours ; la troisième à un fil tordu alternativement de + 100, - 80, + 60, - 40, 20 tours ; la quatrième à un fil tordu de + 100, - 90, + 80, . . . , - 10 tours. Loin de décroître, l'écrouis-

sage augmente à mesure que la raison de la progression arithmétique diminue.

Les résultats seraient les mêmes si les torsions décroissaient en progression géométrique: l'écroissage serait d'autant plus grand que la raison serait plus

Fig. 20.



voisine de l'unité. Cela tient à ce que seuls les premiers termes de la progression agissent. Les expériences (*voir plus haut*) dans lesquelles nous faisons alternativement des torsions $+100$, -100 , ... rentrent dans la progression arithmétique (raison 0) ou géométrique (raison 1); la seconde courbe de la *fig. 19* rentre dans la progression arithmétique (raison 100) ou géométrique (raison 0).

En définitive, il est impossible de diminuer l'écroissage par des déformations permanentes convenablement choisies ⁽¹⁾. Ceci posé, revenons à notre sujet.

(1) LE CHATELIER, *R. G. des S.*, 1891 : « *Recuit spontané*. L'expérience montre... que si un métal est maintenu, après avoir été déformé, à la température qu'il avait pendant cette opération, sa limite d'élasticité et sa charge de rupture diminuent lentement pour tendre vers des valeurs déterminées; en un mot il se recuit à la température même où il a été écroui ». L'expérience montre tout le contraire. *Voir*, entre autres passages de mes *Mémoires*, Chap. III, p. 368.

Théories proposées pour représenter les déformations permanentes.

Nous ne voulons pas discuter *dans leurs hypothèses* les théories qu'on a proposées pour déterminer dans le plan AOz les trajectoires (A, α) . Dans tous nos Mémoires, nous n'avons donné de règles que comme résumés d'expériences. Conséquemment, nous ne nous inquiétons des théories qu'autant qu'elles sont vérifiables par l'expérience et qu'elles peuvent servir de guide à l'expérience. En particulier, si nous attaquons celle de M. Duhem, c'est parce qu'elle induit les expérimentateurs dans des voies que l'expérience a montrées fausses.

Les théories des déformations permanentes peuvent se classer en deux groupes selon la manière dont elles répondent à la question suivante : Peut-on dire *a priori* quelle est la trajectoire qui passe en un point (A, α) indépendamment des chemins suivis antérieurement, ou ne peut-on connaître la trajectoire au point (A, α) que si l'on connaît les chemins suivis antérieurement? En allant plus loin, l'intégration des équations reliant A et α est-elle possible *a priori*, ou ne peut-elle se faire que si l'on connaît l'équation supplémentaire $\alpha = f(t)$?

La réponse n'est pas douteuse: Cependant, la première de ces deux hypothèses ⁽¹⁾ a été soutenue avec beaucoup de talent par M. Duhem. Pour permettre au lecteur de se faire une idée de cette théorie, sans recourir aux volumineux Mémoires de l'auteur, je vais en résumer les points fondamentaux.

Théorie de M. Duhem.

Si, dans le plan AOz , on fait varier α par valeurs toujours croissantes, on décrit une des lignes dites *ascendantes* d'un certain faisceau tracé une fois pour toutes. Si l'on fait varier α par valeurs toujours décroissantes, on décrit une des lignes dites *descendantes* d'un autre faisceau tracé une fois pour toutes. Par chaque point du plan il passe une, et une seule ascendante, une, et une seule descendante. Les lignes de même nom ne peuvent se couper. Quelles que soient les variations imposées à α , les parcours sont donc connus sans ambiguïté : nous pouvons déterminer à chaque instant les valeurs de A correspondantes.

D'une manière générale, à la fin d'une modification isothermique infiniment petite, A reprenant sa valeur initiale, α ne la reprend pas : car on est allé sur une ligne ascendante, on est revenu sur une ligne descendante, et généralement ces

⁽¹⁾ La théorie de M. Duhem n'est pas un progrès sur les théories antérieures. Elle ne s'accorde pas avec l'hystérésis telle qu'on la connaît aujourd'hui. Les expérimentateurs devront se rallier aux théories dualistiques de Coulomb, qui rentrent dans la seconde hypothèse et auxquelles M. Brillouin a donné un remarquable développement. L'idée correcte d'hystérésis apparaît avec J. Thomson en 1848; elle est généralisée par Duguet en 1882 : elle a été utilisée par Wiedemann et par Tomlinson.

lignes ne sont pas tangentes au point de contact. Si pourtant cette dernière condition était réalisée, à la fin d'une modification isothermique infiniment petite, A et α reprendraient simultanément leurs valeurs initiales. On appelle *ligne des états naturels* le lieu des points du plan $OA\alpha$ où les lignes ascendantes et descendantes sont tangentes.

Il ne reste plus pour parfaire la théorie des modifications permanentes isothermiques, dans le cas d'un écrouissage constant, que d'explicitier la forme des lignes du double faisceau et de calculer la courbe des états naturels.

M. Duhem y parvient par des hypothèses supplémentaires dont nous ne parlerons pas. M. Duhem publie sur la question trois Mémoires et demi (215 pages in-quarto) le long desquels il développe certaines hypothèses; il nous annonce alors *en note* qu'il s'est trompé sur la forme de la ligne des états naturels, forme sur laquelle il s'appuie constamment. Ses contradictions, dont il ne prévient pas, déroutent un peu le lecteur. Il affirme, par exemple, dans le Mémoire I que les métaux abandonnés à eux-mêmes s'éloignent indéfiniment de la ligne des états naturels (page 38) et dans le Mémoire IV qu'ils s'en rapprochent indéfiniment.

Il semblerait cependant qu'une ligne aussi importante ne devrait pas être très difficile à déterminer, au moins dans sa forme générale, au moins dans le cas limite et non hypothétique de la torsion à écrouissage constant et l'on devrait pouvoir, sans hésiter, dire si le métal s'en rapproche ou s'en éloigne. Malheureusement pour la théorie de M. Duhem cette ligne n'existe pas. M. Duhem se contredit, parce qu'il identifie l'action des trépidations et celle des causes médiate, qui jouent des rôles très différents. Laissons cela : retenons seulement l'affirmation qu'à écrouissage constant nous pouvons supposer les trajectoires tracées à l'avance, et une fois pour toutes dans le plan $AO\alpha$.

Généralisation nécessaire.

Certaines observations contredisent absolument cette théorie : il n'est pas difficile, par exemple, de faire que deux courbes ascendantes ou descendantes se coupent. Les expériences d'Ewing sur le magnétisme n'ayant rien à voir ici, on peut citer celle de Cantone dont j'ai déjà parlé; il est vrai, comme l'a montré M. Brillouin, qu'elles ne signifient pas grand'chose. Il s'agit de la flexion d'une lame de laiton fixée dans un étau par une de ses extrémités; on représente dans le plan suivant les A les poids fléchissants, suivant les α les flèches. Or ces flèches ne définissent en aucune façon la déformation, car l'expérience la plus grossière montre qu'à deux flèches égales ne correspondent pas nécessairement deux formes identiques de la lame fléchie. Le phénomène n'est pas homogène, non seulement parce que les déformations ne sont pas les mêmes en tous les points d'une section droite (la torsion présente le même inconvénient), mais encore parce qu'elles ne

sont pas les mêmes en tous les points d'une génératrice du cylindre fléchi. Quoi qu'il en soit, et sans parler des exemples *expérimentaux* que j'ai donnés dans ma Thèse (*Annales de Chimie et de Physique*, 1897), M. Duhem ne pouvait pas ne pas tenir compte de ces intersections non douteuses et devait généraliser sa théorie. Voyons si cette généralisation en changera le caractère fondamental.

Explicitation des paramètres β , γ , ...

Mémoire V, Chapitre III : « Considérons un système défini par une variable normale α à laquelle correspond l'action extérieure A et étudions les modifications isothermiques réalisables de ce système; nous savons qu'une telle modification sera représentée sur le plan AO α par des segments de lignes ascendantes alternant avec des segments de lignes descendantes; par un point du plan AO α passe une ligne ascendante et une seule, et une ligne descendante et une seule, en sorte que deux lignes ascendantes ne peuvent jamais se couper, non plus que deux lignes descendantes.

» Il n'en est plus de même si le système dépend de deux variables normales privilégiées α et β ; maintenons constantes la température T et l'action B relative à la variable β et faisons varier l'action A; la trajectoire du point figuratif du système est une courbe gauche dans l'espace OA $\beta\alpha$; la projection de cette courbe sur le plan AO α peut présenter des intersections apparentes entre les projections de deux lignes qui, dans l'espace, ne se coupent pas. » Tout ceci est-il bien compréhensible?

Il est bien entendu, même pour M. Duhem, qu'il n'y a qu'une seule variable indépendante, la torsion α . Quand l'auteur parle de *variables privilégiées* α , β , il ne faut pas qu'on prenne le change; cela veut dire, comme il l'explique ailleurs, que l'on peut logiquement les considérer comme indépendantes et non qu'elles le soient; en fait, elles ne le sont pas. De plus (Mémoire III, page 6) l'auteur précise que A, B, ... sont les actions extérieures qui correspondent aux variables α , β , ... Ceci posé, je demande quelle est l'action extérieure B qui correspond à la variable β , écrouissage, dureté, mollesse, ou tout ce qu'on voudra d'analogue. Nous ne connaissons qu'une action extérieure, le couple; B serait-elle une fonction du couple, comme β est une fonction de α ? Non, certes, car nous verrons tout à l'heure M. Duhem poser identiquement $dB = 0$ quand dA n'est pas nul; B serait-elle là pour la symétrie? C'est évidemment la supposition la plus probable; mais qu'en ferons-nous tout à l'heure dans les équations?

Les hypothèses fondamentales de M. Duhem se traduisent, dans le cas d'une seule variable α , par l'équation

$$dA = M(\alpha) d\alpha \pm g(\alpha, A) |d\alpha|,$$

le symbole $|dx|$ représentant la valeur absolue de dx , les signes $+$ et $-$ correspondent, l'un aux lignes ascendantes, l'autre aux lignes descendantes.

Introduisons maintenant la nouvelle variable β ; M. Duhem pose (Mémoire V, page 158) ($dT = 0$)

$$\begin{aligned} dA &= M(\alpha, \beta) d\alpha + N(\alpha, \beta) d\beta + g_\alpha(\alpha, \beta, A, B) |d\alpha|, \\ dB &= N'(\alpha, \beta) d\alpha + M'(\alpha, \beta) d\beta + g_\beta(\alpha, \beta, A, B) |d\beta|, \end{aligned}$$

M' et N' ayant la même forme que M et N .

Je ne discute pas les conceptions thermodynamiques de M. Duhem; tout de même, qui aurait jamais supposé que α et β puissent jouer dans le phénomène des rôles parallèles, alors que α est une variable géométrique et que β définit un état, « fixe l'état chimique » (Mémoire IV, page 93).

Que faire maintenant de l'action extérieure B ? Puisqu'elle n'était là que pour la symétrie et qu'elle nous gêne, nous la supprimons et nous écrivons (Mémoire IV, page 94)

$$\begin{aligned} dA &= M(\alpha, \beta) d\alpha + N(\alpha, \beta) d\beta + g_\alpha(\alpha, \beta, A) |d\alpha|, \\ 0 &= N'(\alpha, \beta) d\alpha + M'(\alpha, \beta) d\beta + g_\beta(\alpha, \beta, A) |d\beta|. \end{aligned}$$

N'ayant pas une foi exagérée dans la valeur des applications qu'on fait *a priori* des principes, je me contenterais fort bien des équations, si du moins elles fournissaient la solution du problème. Malheureusement nous avons gagné, à l'explication de β , de remplacer deux fonctions inconnues M et g , par six fonctions non moins inconnues. Il est vrai que le problème est devenu parfaitement inextricable; l'insuffisance des hypothèses fondamentales est à peu près masquée. Encore un effort dans ce sens, elles seront à l'abri de toute attaque; nous lisons page 345 de la Thèse de M. Marchis : « Il est, d'ailleurs, à prévoir qu'en général il s'introduira un bien plus grand nombre de variables dans la définition du système représentatif des corps présentant des déformations permanentes. La représentation schématique d'un tel système sera dès lors fort complexe. »

Laissons tous ces symboles et voyons leur sens géométrique.

Imaginons superposés, comme les feuillets d'un livre, tous les plans parallèles à $AO\alpha$ et correspondant à des écrouissages différents β . Sur tous ces feuillets sont tracés les deux faisceaux de courbes ascendantes et descendantes de cote β . Mais sur chacun de ces faisceaux nous ne pouvons généralement décrire qu'un parcours infiniment petit, puisque automatiquement ce parcours change la cote β et nous fait passer sur un feuillet voisin.

Or il est bien évident qu'avant de chercher comment se fait le passage d'un feuillet à l'autre, il est nécessaire d'être fixé sur ce que renferme chacun des feuillets. En d'autres termes, la généralisation que M. Duhem donne à sa

théorie ne change pas la nature de ses explications, et nous sommes ramenés aux conclusions suivantes :

Existe-t-il des cas où l'on peut admettre que les parcours se font dans un feuillet toujours le même, c'est-à-dire que l'écroutissage est constant?

Si oui, les hypothèses de M. Duhem sont-elles conformes à la réalité?

Cas d'un écroutissage invariable.

Il résulte de l'expérience que, si l'on se promène indéfiniment dans une même portion du plan, on est en droit de supposer que la nature de la matière devient de moins en moins variable, et de demander aux théories des déformations permanentes, sous leur forme la plus simple (écroutissage constant), de s'appliquer au moins en gros aux phénomènes. C'est la réponse à la première des questions ci-dessus posées; mais je ne crains pas d'être contredit par M. Duhem, puisqu'il énonce exactement la même proposition (Mémoire V, page 161).

J'ai prouvé, dans un Mémoire paru en 1898, dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, que toutes les expériences connues, faites sur des fils dont l'écroutissage pouvait être admis constant, s'expliquent dans leur ensemble par deux hypothèses qui contredisent toutes les théories de premier groupe, y compris celle de M. Duhem. Pour ne pas me répéter, je dirai seulement quelles sont ces hypothèses. Voici la première : la courbe de torsion *commence* en un point quelconque du plan où l'on renverse le sens du mouvement (avec les restrictions énoncées); l'autre appartient à M. Brillouin et complète la précédente : cette courbe possède une forme indépendante du point où elle commence.

Ces règles renferment toutes les règles bizarres de Wiedemann avec une fidélité telle qu'on pourrait soutenir que Wiedemann les connaissait, si l'étrangeté de ses énoncés et leurs restrictions inutiles ne montraient qu'il n'en est rien; il attachait, comme tout le monde, au couple nul une importance qu'il n'a pas. Il résulte immédiatement de ces règles que l'on peut parvenir au même point du plan $AO\alpha$, suivant une infinité de tangentes, ce qui est en contradiction avec la théorie de M. Duhem.

Toutefois il semble que les expériences précédentes, pas plus qu'aucune expérience *possible*, ne puissent servir de critérium *direct* aux théories. En effet, les courbes expérimentales sont la résultante d'un phénomène complexe, puisque la torsion n'est pas homogène. Nous avons rappelé ce fait au n° 4 du Chapitre précédent; M. Brillouin a longuement insisté sur son importance dans ses Mémoires.

L'objection vaudrait, s'il s'agissait de déterminer la forme même des trajectoires dans le plan $AO\alpha$; à cause des effets du temps, l'équation du n° 4 ne permet plus de passer des courbes expérimentales aux phénomènes dus à un cylindre creux infiniment mince.

Mais il ne s'agit pas de cela. Nous allons démontrer que si, pour un cylindre creux infiniment mince considéré isolément, la théorie de M. Duhem est admissible, c'est-à-dire si l'on parvient en un point du plan $AO\alpha$ suivant deux tangentes déterminées correspondant aux valeurs croissantes et aux valeurs décroissantes de α , il en sera nécessairement de même pour un cylindre plein, à la seule condition d'admettre, ce que l'expérience montre, que les cylindres élémentaires coaxiaux ne se déplacent pas les uns par rapport aux autres dans la torsion.

Or ce théorème est de toute évidence. Numérotons de 1 à n les cylindres creux coaxiaux élémentaires (n étant aussi grand que l'on voudra). Représentons sur un plan les trajectoires (A, α) pour le cylindre plein, et sur n autres plans les trajectoires (A_i, α) , A_i étant le couple dû au cylindre i , ces faisceaux de trajectoires élémentaires étant d'ailleurs quelconques et même de formes différentes (remarque importante sur laquelle nous reviendrons dans le Chapitre suivant). Tout parcours sur une trajectoire du plan $AO\alpha$ détermine complètement les trajectoires sur les n plans, puisque la valeur α est la même pour tous les cylindres, autrement dit à tout point du plan $AO\alpha$ correspond un point et un seul des n plans. Il est donc évident que, sur le plan $AO\alpha$, $\frac{dA}{d\alpha}$ ne peut avoir que deux valeurs (α croissant et α décroissant) au voisinage du point αA , puisque, au voisinage des points correspondants des n autres plans, $\frac{dA_i}{d\alpha}$ n'a que deux valeurs, et que $\frac{dA}{d\alpha} = \sum_1^n \frac{dA_i}{d\alpha}$. Il est donc parfaitement légitime de conclure que, si dans le plan $AO\alpha$ on peut parvenir en un point suivant une infinité de tangentes, le phénomène élémentaire n'obéit pas à la théorie de M. Duhem.

Comment se fait-il, maintenant, que M. Duhem prétende sa théorie conforme aux expériences de Wiedemann? Comment se fait-il aussi qu'il cite parfois nos expériences à l'appui de sa thèse, quand aucune d'entre elles, *exactement et complètement rapportée*, ne peut rentrer dans ses vues? Comment se fait-il enfin qu'il allègue souvent, pour étayer ses idées, des faits complexes et peu sûrs, et passe sous silence les phénomènes les plus généraux et les mieux prouvés? A ces questions, je ne sais que répondre.

En résumé :

Il est impossible de représenter les faits sans introduire des causes médiate, inconnues, dont on ne tient compte que par des hypothèses mécaniques ou en prenant explicitement le temps comme variable indépendante.

Il est impossible, même dans le cas de l'écroutissage constant, de tracer sur le plan $AO\alpha$, *a priori* et une fois pour toutes, les trajectoires du point figuratif de l'expérience.

Expliciter les variables β , γ , ... ne servira efficacement que si l'on en peut avoir, à chaque instant, une définition expérimentale.

Les théories de M. Duhem sont absolument contraires aux faits.

Il ne s'agit ici, bien entendu, que des déformations permanentes des métaux tels que le cuivre, l'argent, le platine. Si M. Duhem ou M. Marchis veulent défendre leurs idées et nous font l'honneur de répondre, ils ne rendront la discussion profitable qu'en la maintenant sur le terrain bien limité des déformations permanentes isothermiques de ces métaux, qui ne sont certainement pas des alliages et donnent les résultats les plus simples possibles. Il ne peuvent d'ailleurs me blâmer de restreindre la discussion, puisqu'ils citent à chaque page Weber, Wiedemann et Cantone, qui ont presque uniquement opéré sur le cuivre.

Dans le Chapitre VI, nous étudierons les dissymétries créées par la torsion et la structure intérieure d'un fil tordu.

NOTE SUR LA THÉORIE DE M. BRILLOUIN.

On sait que M. Brillouin a proposé une théorie des déformations permanentes qui s'adapte aux faits d'une si remarquable façon qu'il est impossible qu'elle ne renferme pas une grande part de vérité. D'après elle, un corps est formé de grains cristallins, isolés, très petits, empâtés dans un réseau à peu près continu d'une matière visqueuse. M. Brillouin tire d'hypothèses simples la formule générale suivante :

$$(1) \quad x = kX + \Phi\left(\int_0^t X dt - A\right) - \Phi(A),$$

dans laquelle X désigne la force actuelle, x la déformation actuelle, A la constante qui définit, pour M. Brillouin, l'écroutissage ou le recuit initial; la fonction Φ est entièrement définie par la forme et la grandeur du réseau visqueux.

Si M. Brillouin prenait nécessairement le mot *écroutissage* dans le même sens que moi, sa théorie et mes expériences se contrediraient. Il résulte en effet de l'équation (1) qu'on peut ramener « à l'état initial, sans recuit, par une série de déformations cycliques d'amplitude décroissante, telles que les oscillations naturelles amorties; si une opération ne suffit pas (1^{er} Mémoire, *Ann. Phys.*, 1898; n^o 6), on n'a qu'à réitérer. On part d'une certaine valeur de $\int X dt$. Par des oscillations spontanées amorties, $\int X dt$ change toujours dans le même sens, à chaque période; si donc on a lancé l'oscillation dans un sens convenable, on peut diminuer la valeur de $\int X dt$ à volonté. Toutefois, pour revenir à l'état initial

sans le dépasser, il faut régler l'amplitude initiale ou arrêter, *sans choc*, au bon moment . . .

» Pour ramener le corps à l'état initial après lui avoir communiqué une impulsion totale I , il faut le faire osciller librement une fois à partir de la force maximum $-\frac{2\pi}{T}I$, ou n fois à partir de la force $-\frac{2\pi}{T}\frac{I}{n}$, en laissant chaque fois les oscillations s'amortir d'elles-mêmes. On peut obtenir le même résultat par des chocs mesurés, dont l'impulsion totale soit égale et de signe contraire à l'impulsion communiquée antérieurement au corps. »

A la vérité, il s'agit, dans mes expériences, du cas complexe où les déformations ne sont pas homogènes, et M. Brillouin traite les déformations homogènes, celles qu'éprouverait pendant la torsion un tube de parois infiniment minces. Mais si l'on admet l'exactitude de mes expériences, la nature même de leurs résultats permet d'étendre mes conclusions au cas du tube creux et des déformations homogènes.

Heureusement, l'interprétation que M. Brillouin donne de sa théorie ne me paraît pas nécessaire; le tout est de s'entendre sur le mot *écrouissage*, et de situer un peu différemment, dans l'étude des déformations permanentes, la théorie de M. Brillouin.

Ce que j'ai désigné par *écrouissage ou mollesse*, correspond à une modification du corps autrement profonde que ne serait le résultat d'un simple changement dans la valeur de l'impulsion: elle ne peut résider qu'en une transformation de la forme et des propriétés du réseau visqueux lui-même. Ce n'est donc pas A ou $I = \int X dt$ qui définit l'écrouissage, mais la forme même de la fonction Φ .

Ceci posé, voici comment je me représente les choses. A chaque instant, dans une portion convenable du plan Xx , on peut considérer l'écrouissage comme invariable, la fonction Φ comme constante: la théorie de M. Brillouin s'applique. Si l'on sort de cette aire, l'écrouissage varie, la fonction Φ se modifie; elle peut, dans une autre partie du plan et pour des valeurs convenables des impulsions I , être encore considérée comme constante; la théorie de M. Brillouin s'applique de nouveau, mais avec une nouvelle valeur pour Φ . Or, rien n'empêche que ces transformations de la fonction Φ , écrouissage tel que je l'entends, n'aient un caractère indélébile, tandis que l'écrouissage plus passager, tel que l'entend M. Brillouin, qui dépend des valeurs de l'impulsion, ne puisse être modifié, accru ou diminué par des valeurs convenables de l'impulsion.

Il me reste à montrer que cette interprétation est d'accord avec une loi que j'ai énoncée d'après mes expériences, et que M. Brillouin déduisait simultanément de sa théorie: je transcris les nos 17 et 18 de son premier Mémoire (*Ann. Phys.*, mars 1898).

« 17. *Loi d'une déformation produite à vitesse constante.* — Dans l'équation générale, faisons $x = at$ et comptons les impulsions à partir de $t = 0$,

$$at - K \frac{\partial I}{\partial t} - \Phi(I) - \Phi(0) = 0.$$

» Pour un intervalle de temps assez petit, supposons que la fonction Φ soit linéaire; si la force est nulle au début, l'équation devient

$$(1) \quad at - K \frac{\partial I}{\partial t} - \varphi I = 0,$$

qui, par intégration, donne

$$I = -\frac{a}{\varphi} \left(\frac{K}{\varphi} + t - \varepsilon \frac{\varphi t}{K} \right),$$

et, en mettant x en évidence au lieu de t ,

$$X = -\frac{a}{\varphi} \left(1 - \varepsilon \frac{\varphi x}{Ka} \right) \dots$$

» 18. Si l'on prend pour coordonnées, au lieu de x et de X , les quantités $\frac{\varphi x}{Ka}$ et $\frac{\varphi X}{a}$, le début de la courbe de déformation est le même pour tous les fils.

» Cette loi a été découverte par M. Bouasse, sur la torsion des fils de platine, sous une forme plus générale encore (*Comptes rendus*, février 1898).

» Si l'on part d'un état déjà déformé, on a

$$x_0 = KX_0 + \Phi(I_0) \quad \text{et} \quad x = KX + \Phi(I),$$

d'où, par différence,

$$x - x_0 = K(X - X_0) + \Phi(I) - \Phi(I_0).$$

» Pour un intervalle dans lequel la fonction Φ croît linéairement, on pourra poser

$$\Phi(I) - \Phi(I_0) = \varphi(I - I_0),$$

de sorte qu'en comptant toutes les quantités $x - x_0$, $X - X_0$, $I - I_0$, à partir d'un état initial quelconque, l'équation reprend la forme déjà étudiée (n° 17) et fournit des intégrales de même forme; mais la valeur de φ peut être sensiblement différente de la valeur initiale, si I_0 est très grand. C'est ce coefficient de réduction φ , variable de 1 à 10 et davantage pour un même fil écroû et recuit, que M. Bouasse propose pour définir la *mollesse* du fil. »

Au point de vue analytique, il n'y a pas un mot à changer à ce qui précède; mais j'attribuerais les variations de la *mollesse* à une variation de φ provenant

d'une modification dans la structure du réseau et, par conséquent, à une modification dans les paramètres ou la forme de la fonction Φ , tandis que M. Brillouin la met au compte d'une variation de I sans variation de Φ . A la vérité, ce sont toujours les forces qui interviennent, mais elles le font de deux manières : d'abord comme le veut la théorie de M. Brillouin, ensuite pour modifier plus ou moins profondément le réseau.

Voici déjà longtemps que le caractère irréversible des grandes déformations m'avait frappé. Dans mon premier Mémoire, § I (janvier 1897), en note, je disais : « Une déformation permanente produit des stries; deux déformations permanentes égales et de sens contraires produisent deux fois des stries. Elles ne se détruisent pas, elles se superposent ; à ce point de vue particulier elles sont toutes positives. »

Aussi bien ce serait méconnaître la véritable pensée de M. Brillouin que d'oublier les restrictions qu'il a posées lui-même à l'application de sa théorie.

Tout d'abord aux n^{os} 3 et 4 il insiste sur les changements, dans les propriétés du réseau, qui peuvent résulter de l'aplatissement de certains joints; pour de grandes déformations la fonction Φ peut être ainsi notablement modifiée et corrélativement toutes les propriétés des déformations permanentes. On s'explique ainsi les régions de variation progressive de la fonction Φ , si les joints sont d'abord très inégaux et se ferment les uns après les autres.

En second lieu, il n'admet en aucune manière que des déformations ou des forces aient des effets indépendants des autres déformations ou forces qui peuvent agir simultanément. « N^o 7. Il importe de remarquer que l'écroutissage obtenu [par un certain procédé] se rapporte au type de déformation qui l'a produit. Il faudrait discuter dans chaque cas particulier, pour savoir si le corps est écrouti ou recuit pour un autre type de déformations et dans quelle mesure. »

Enfin, au n^o 22, il rappelle que l'adoption des lois linéaires pour l'élasticité du grain et la viscosité du ciment, choisies pour la facilité du calcul, ne sont là qu'à titre de première indication : « J'ai adopté un type schématique évidemment trop simplifié.... J'ajoute que, dans les déformations non homogènes, comme la torsion et la flexion, les circulations locales et rapides de la matière visqueuse sont accompagnées de migrations lointaines des couches superficielles vers les couches profondes, qui modifient complètement la répartition des forces dans une section droite.... » Il nous met ainsi en garde contre une assimilation hâtive des phénomènes complexes observés et des phénomènes correspondant à une déformation homogène.

