ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

G. DEMARTRES

Détermination des surfaces (W) à lignes de courbure isothermes

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série, tome 4 (1902), p. 341-355
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1902_2_4__341_0>

DÉTERMINATION DES SURFACES (W)

A LIGNES DE COURBURE ISOTHERMES,

PAR M. G. DEMARTRES,

Professeur à l'Université de Lille.

1. Nous nous proposons de trouver toutes les surfaces dont les courbures principales sont fonction l'une de l'autre et qui sont divisées en carrés infiniment petits par leurs lignes de courbure. Les cônes et les surfaces de révolution satisfont évidemment à cette double condition; on sait qu'il en est de même des surfaces minima, et, plus généralement, de toute surface à courbure moyenne constante; nous laisserons de côté ces solutions déjà connues et nous démontrerons que toute surface répondant à la question, en dehors de celles que nous venons de rappeler, est nécessairement un hélicoïde.

On démontre bien aisément que toute surface canal dont les lignes de courbure sont isothermes ne peut être qu'un tore ou un cylindre; nous n'aurons donc pas à tenir compte des surfaces canaux. (*Voir* la Note II.)

Imaginons la surface rapportée à ses lignes de courbure $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$ Si l'élément linéaire est donné par la formule

$$ds^2 = f^2\,du^2 + g^2\,dv^2, \tag{1}$$

les courbures principales satisfont aux deux relations

$$\left\{\begin{aligned} \frac{2}{f}\frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial v}\right), \\ \frac{2}{g}\frac{\partial g}{\partial u} &= -\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial u}\right), \end{aligned}\right. \tag{2}$$

en posant

$$\frac{1}{R_1} = P - Q, \qquad \frac{1}{R_2} = P + Q. \tag{3}$$

La condition pour que les lignes coordonnées forment un système isotherme est alors

$$(4) \qquad 2\,Q\,\frac{\partial^2 P}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial P}{\partial u}\,\frac{\partial Q}{\partial v} + \frac{\partial Q}{\partial u}\,\frac{\partial P}{\partial v}$$

et les deux fonctions P, Q devront satisfaire à une relation constante.

2. L'équation (4) est évidemment vérifiée si $dP = 0$, c'est-à-dire dans le cas des surfaces à courbure moyenne constante; laissant de côté cette solution, nous supposerons d'abord que P ne dépende que d'une seule des deux variables, de v, par exemple.

On aura alors, d'après l'équation (4),

$$P = \varphi(v), \qquad Q = \psi(v).$$

Les équations (3), (2) nous donneront alors pour $\frac{1}{R_1}$ et g des fonctions de cette même variable v; donc la surface cherchée sera une enveloppe de sphères et aura pour lignes de courbure non circulaires une famille de géodésiques. Il est à peu près évident, et d'ailleurs très facile à établir, que ces deux conditions ne se vérifient que pour les surfaces de révolution; nous devrons donc supposer que P est effectivement une fonction des *deux* variables u, v.

Nous pouvons exprimer la dépendance entre les courbures principales en posant

$$(5) \qquad Q = \frac{1}{H'(P)},$$

H étant une fonction qu'il s'agit de déterminer de manière à satisfaire à la condition (4). Or, si nous considérons H comme une fonction de u, v et si nous substituons dans cette équation (4), il vient immédiatement

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u\,\partial v} = 0, \qquad H = U + V,$$

U étant fonction de u, V fonction de v; comme rien ne nous empêche de prendre U et V comme variables indépendantes, nous supposerons $H = u + v$.

P sera alors une fonction de $(u + v)$. Si nous désignons par φ cette fonction, l'équation (5) nous donne $Q = \varphi'(u + v)$. On aura donc en définitive

$$(6) \qquad P = \varphi(u + v), \qquad Q = \varphi'(u + v).$$

Donc, enfin, les surfaces cherchées sont caractérisées analytiquement par la propriété suivante :

On peut choisir les variables u, v de telle sorte que la somme et la différence des courbures principales soient représentées par les équations (6).

3. Si l'on porte les valeurs de P, Q dans les équations (2), il vient

$$\frac{2}{f}\frac{\partial f}{\partial v} = 1 - \frac{\varphi''}{\varphi'}, \qquad \frac{2}{g}\frac{\partial g}{\partial u} = -1 - \frac{\varphi''}{\varphi'}.$$

D'où, en intégrant,

$$f^2 = \frac{U^2}{\varphi'} e^{u+v}, \qquad g^2 = \frac{V^2}{\varphi'} e^{-u-v}, \tag{7}$$

U étant une fonction de u, V une fonction de v. On a alors l'expression du ds^2 :

$$ds^2 = \frac{e^{v-u}}{\varphi'(u+v)}(U^2 e^{2u} du^2 + V^2 e^{-2v} dv^2).$$

Mais ces deux fonctions, U, V, ne peuvent pas être choisies arbitrairement; si, en effet, nous calculons la courbure totale à l'aide des formules (7) et que nous l'égalions à $\varphi^2 - \varphi'^2$, nous aurons une équation de condition qu'on peut écrire sous la forme

$$\gamma = 2p\alpha' + p'\alpha + 2q\beta' + q'\beta \tag{8}$$

en posant, pour abréger,

$$2p = \frac{1}{U^2}, \qquad 2q = \frac{1}{V^2}, \tag{9}$$

$$\gamma = \varphi' - \frac{\varphi^2}{\varphi'}, \qquad \alpha = -\tfrac{1}{2}e^{-u-v}\left(1 + \frac{\varphi''}{\varphi'}\right), \qquad \beta = \tfrac{1}{2}e^{u+v}\left(1 - \frac{\varphi''}{\varphi'}\right). \tag{10}$$

Cette équation (8) contient en réalité la solution de la question; elle relie entre elles les trois fonctions p, q, φ, qui dépendent respectivement des trois variables différentes u, v, $u+v$; nous verrons tout à l'heure, par une discussion complète de cette équation, que p et q doivent se réduire à de simples constantes, toujours en admettant qu'on laisse de côté les solutions, évidentes *a priori,* dont nous avons parlé; on voit alors que la fonction φ est complètement déterminée par la condition de satisfaire à une certaine équation différentielle du troisième ordre (l'équation 8).

Remarque. — Les courbures principales et les courbures géodésiques des lignes de courbure sont données par les formules

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{R_1} = \varphi - \varphi', && \frac{1}{R_2} = \varphi + \varphi',\\ &\frac{1}{\rho_1} = -\beta\sqrt{2q\varphi'}\, e^{-\frac{l}{2}}, && \frac{1}{\rho_2} = \alpha\sqrt{2p\varphi'}\, e^{\frac{l}{2}}, \end{aligned}\right.$$

les indices 1, 2 correspondant respectivement à $v =$ const., $u =$ const., et nous supposons $u + v = l$.

4. *Discussion de l'équation* (8). — 1° Supposons d'abord qu'on ait, à la fois,

$$\alpha''\alpha = \alpha'^2, \qquad \beta\beta'' = \beta'^2.$$

On en déduira sans peine, en tenant compte des expressions de α, β,

$$\varphi = ce^{-(a+b)l} + c',$$
$$\alpha = ae^{-l}, \qquad \beta = be^{l},$$

a, b, c, c' étant quatre constantes dont les deux premières vérifient l'égalité $a - b + 1 = 0$. Mais on tire de l'équation (8)

$$(8')\qquad 2p'v' + p''\alpha = 2q'\beta' + q''\beta$$

ou

$$ae^{-2u}(p'' - 2p') = be^{2v}(q'' + 2q'),$$

les deux membres dépendant, l'un de u, l'autre de v, doivent être égaux à une même constante h et l'on doit avoir

$$p'' - 2p' = \frac{h}{a}e^{2u}, \qquad q'' + 2q' = \frac{h}{b}e^{-2v},$$

d'où, en intégrant et désignant par k, k', r, s de nouvelles constantes,

$$p = \left(\frac{h}{2a}u + \varepsilon\right)e^{2u} - \frac{k}{2}, \qquad q = \left(s - \frac{h}{2b}v\right)e^{-2v} + \frac{k'}{2}.$$

Portons ces valeurs de p, q, α, β dans l'équation (8), nous aurons enfin

$$2p\alpha' + p'\alpha = he^{u-v} - k\,ae^{-l},$$
$$2q\alpha' + q'\alpha = -he^{u-v} + k'be^{l},$$

$$-(a+b)Ce^{-(a+b)l} + \frac{[Ce^{-(a+b)l} + c']^2}{(a+b)Ce^{-(a+b)l}} = k'be^{l} - kae^{-l}.$$

Si C était nul, φ serait constant; nous devons donc supposer $C \neq 0$; mais alors l'identité qui précède ne peut avoir lieu, à moins qu'on n'ait $a + b = \pm 1$, et, comme on a déjà $a - b = -1$, il faut que a ou b soit nul.

Mais, dans ce cas, α ou β sera nul, ce qui ne peut avoir lieu que pour une surface canal. Nous rentrons donc alors dans le cas des surfaces de révolution. On aura, par exemple,

$$a = 0, \qquad b = 1, \qquad k' = 0, \qquad c' = 0, \qquad \varphi = Ce^{-t}.$$

2° Revenons à l'équation (8) et dérivons-la par rapport à u, ce qui donne

$$\gamma = 2p\alpha' + p'\alpha + 2q\beta' + q'\beta, \tag{8}$$

$$\gamma' = 2p\alpha'' + 3p'\alpha' + p''\alpha + 2q\beta'' + q'\beta'. \tag{12}$$

Nous pouvons supposer $\beta'^2 - \beta\beta'' \neq 0$, car, si cette expression était nulle, comme il n'en serait pas de même de $\alpha'^2 - \alpha'\alpha''$, nous pourrions raisonner sur la fonction q comme nous le faisons actuellement sur p; cette inégalité permet de résoudre les deux équations précédentes par rapport aux fonctions q et q'.

Supposons qu'on ait trouvé $p = f(u)$; si nous faisons $u = -v$ dans l'équation précédente, nous aurons

$$q = a + bf(-v) + cf'(-v) + df''(-v), \tag{13}$$

a, b, c, d étant des constantes.

Or, si l'on différentie une fois de plus l'équation (8) par rapport à u, ce qui donne

$$\gamma'' = 2p\alpha''' + 5p'\alpha'' + 4p''\alpha' + p'''\alpha + 2q\beta''' + q'\beta'', \tag{14}$$

on pourra éliminer q et q' entre les équations (8), (12), (14), et l'on trouvera ainsi une équation linéaire pour déterminer p; cette équation sera de la forme

$$(p'''\alpha + p''\alpha')(\beta'^2 - \beta\beta'') + Mp' + Np + T = 0,$$

M, N, T étant des fonctions de t; on voit que le coefficient de p''' ne peut disparaître que dans le cas d'une surface canal; donc, si nous faisons $u = -v$, nous aurons, pour déterminer p, une équation linéaire à coefficients constants qui sera toujours du troisième ordre.

Supposons qu'il y ait, dans cette valeur de p, un terme de la forme ae^{mu}, q contiendra, d'après l'équation (13), un terme correspondant et de la forme $a'e^{-mv}$; si l'on substitue les valeurs de p et q dans l'équation (8), on aura une identité de la forme

$$\gamma = (2\alpha' + m\alpha)ae^{mu} + (2\beta' - m\beta)a'e^{-mv} + \ldots.$$

Faisons $u = h - v$, h étant une constante quelconque, nous aurons, en désignant par l'indice v le résultat de la substitution de h à l,

$$\gamma_0 = (2\alpha'_0 + m\alpha_0)ae^{mh-mv} + (2\beta'_0 - m\beta_0)a'e^{-mv} + \ldots;$$

cette identité ne peut avoir lieu, quel que soit v, que si l'on a

$$a'(2\beta'_0 - m\beta_0)e^{-mh} + a(2\alpha'_0 + m\alpha_0) = 0,$$

et, comme h doit avoir une valeur quelconque, on devra avoir

$$a(2\alpha' + m\alpha)e^{\frac{mh}{2}} + a'(2\beta' - m\beta)e^{-\frac{mh}{2}} = 0,$$

équation qui s'intègre immédiatement et donne

$$a\alpha e^{\frac{mh}{2}} + a'\beta e^{-\frac{mh}{2}} = C,$$

C étant une constante arbitraire. On en déduirait $\frac{\varphi''}{\varphi'}$ et, par suite, φ' par une simple quadrature :

$$\varphi' = e^{-\frac{\int Ce^{\frac{m-1}{2}l} + ae^{(m-1)l} - a'}{ae^{(m-1)l} + a'}}.$$

D'autre part, si l'on désigne par h, h' les deux constantes qui figurent dans p et q, l'identité générale donne évidemment

$$\gamma = 2h\alpha' + 2h'\beta',$$

équation qui, comme nous le verrons, s'intègre (§ 5) et donne

$$2(h\alpha + h'\beta)^2 + \frac{1}{\varphi'}[h'e^l(\varphi - \varphi')^2 + he^{-l}(\varphi + \varphi')^2] = C',$$

C' étant une nouvelle constante.

Or, on démontrera aisément que les deux intégrales auxquelles nous venons d'arriver et qui déterminent, l'une et l'autre, la fonction φ, ne peuvent être compatibles que si m est nul ou si l'on a, à la fois, $a = 0$, $b = 0$. Dans les deux cas, p, q ne contiennent aucun terme exponentiel.

On démontrerait de la même manière que p et, par suite, q ne peuvent contenir aucun terme tel que ue^{mu}, u^2e^{mu}, ve^{-mv}, ... Donc, enfin, p, q doivent *l'une et l'autre se réduire à des constantes,* en écartant, bien entendu, comme nous l'avons fait jusqu'ici, les surfaces de révolution et les cônes.

5. *Intégration de l'équation* (8). — L'équation (8) se réduit, d'après ce qui

précède, à

$$(8) \qquad \gamma = 2p\alpha' + 2q\beta',$$

p et q étant maintenant deux constantes. Cette équation est du troisième ordre; si l'on parvenait à l'intégrer, la fonction φ serait connue, et, par suite, sa dérivée, et contiendrait en tout *cinq* constantes. La relation (W) qui doit régner entre les courbures principales serait alors connue; tout ce que l'on peut dire, c'est que cette relation est purement paramétrique et ne contient aucune fonction arbitraire.

Il paraît d'ailleurs assez difficile d'intégrer complètement cette équation (8); nous n'essaierons pas de faire cette intégration, mais nous pouvons donner dès à présent une intégrale première de l'équation (8), dont nous avons fait usage dans le paragraphe précédent.

Posons pour cela

$$M = \frac{1}{\varphi'}[qe^l(\varphi - \varphi')^2 + pe^{-l}(\varphi + \varphi')^2],$$

nous en déduirons en différentiant

$$\frac{dM}{dl} = -2\gamma(p\alpha + q\beta).$$

Multiplions alors l'équation (8) par $2p\alpha + 2q\beta$, ce qui donne

$$M' + 4(p\alpha + q\beta)(p\alpha' + q\beta') = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$(15) \qquad 2(p\alpha + q\beta)^2 + \frac{1}{\varphi'}[qe^l(\varphi - \varphi')^2 + pe^{-l}(\varphi + \varphi')^2] = C.$$

Cette équation, qui n'est plus que du second ordre, admet bien une solution particulière de la forme $\varphi = a(pe^{-l} - qe^l)$; mais cette solution est à rejeter; on s'assurera aisément qu'elle ne vérifie pas l'équation (8) et qu'elle est due au facteur $p\alpha + q\beta$ par lequel nous avons multiplié celle-ci.

Quant à l'intégrale (15) elle-même, elle se présente peu naturellement au point de vue analytique, mais on y est conduit très simplement, comme nous allons le voir, par des considérations géométriques.

6. *La surface cherchée est un hélicoïde.* — Les quantités p, q étant des constantes, il est naturel d'étudier sur la surface les lignes le long desquelles $u + v$ reste constant. Soit i l'inclinaison d'une de ces lignes (L) sur les lignes de

courbure $v =$ const. Nous aurons d'abord

$$\operatorname{tang} i = -\frac{g}{f} = -\sqrt{\frac{p}{q}}\, e^{-2(u+v)}.$$

L'angle i reste donc constant le long de la ligne (L).

La courbure géodésique de L est alors donnée par la formule

$$\frac{1}{\rho} = \frac{di}{ds} + \frac{\cos i}{\rho_1} + \frac{\sin i}{\rho_2};$$

di étant nul, et les quantités ρ_1, ρ_2, i étant des fonctions de $u+v$, il en est de même de $\frac{1}{\rho}$; donc *les lignes* L *forment une famille de cercles géodésiques.*

De ces deux propriétés, on peut déduire que la surface cherchée est un hélicoïde (Raffy, *Bulletin de la Société mathématique,* t. XXV, p. 120); mais on peut aussi, bien aisément, le démontrer à l'aide des formules (11). Si l'on remarque que la courbure normale est donnée par la formule de Dupin

$$\frac{\cos^2 i}{R_1} + \frac{\sin^2 i}{R_2} = \varphi - \varphi' \cos 2i,$$

on voit que cette courbure reste elle-même constante le long de (L). Si donc on désigne par θ l'angle que fait la normale principale de cette ligne avec la normale à la surface, par R, T ses rayons de courbure et de torsion, on voit d'abord que $\frac{\cos\theta}{R}$ et $\frac{\sin\theta}{R}$ sont des fonctions de $u+v$; donc θ et R restent constants le long de (L); d'ailleurs, on a, d'après une formule connue,

$$\frac{d\theta}{ds} = \pm\frac{1}{T} \pm \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\sin i \cos i$$

et, $d\theta$ étant nul le long de (4), T sera aussi une fonction de $u+v$.

Ainsi, *la surface cherchée est engendrée par des hélices circulaires, et le long de chacune de ces hélices le plan osculateur fait un angle constant avec le plan tangent à la surface.*

Cette dernière condition ne peut d'ailleurs être remplie, ainsi que nous le démontrons en Note, que si l'axe de l'hélice variable est fixe et son pas constant; la surface est donc bien un hélicoïde [1]; cette démonstration constitue évidemment une première intégration de l'équation (8) et va nous permettre de la remplacer par une équation du second ordre.

---

[1] Note I, p. 353.

7. *Formules générales des hélicoïdes.* — Prenons les équations de l'hélicoïde sous la forme

$$(16)\qquad \begin{cases} x = \rho\cos(\omega + t), \\ y = \rho\ \sin(\omega + t), \\ z = kt, \end{cases}$$

ρ étant le rayon de l'hélice génératrice, k son pas qui est constant, ω une fonction de ρ, t un angle qui fixe la position de chaque point sur la génératrice. ρ et t seront nos coordonnées. Les équations qui donnent l'élément linéaire et les lignes de courbure sont

$$(17)\qquad ds^2 = \mathrm{E}\,d\rho^2 + 2\mathrm{F}\,d\rho\,dt + \mathrm{G}\,dt^2,$$

$$(18)\qquad (\rho m m' - 1 - m^2)\,d\rho^2 + \left[m'(\rho^2 + k^2) + \frac{k^2}{\rho} m(1 + m^2)\right] d\rho\,dt + [\rho^2 + k^2(1 + m^2)]\,dt^2 = 0$$

en posant

$$(19)\qquad m = \rho\frac{d\omega}{d\rho}, \qquad \mathrm{E} = 1 + m^2, \qquad \mathrm{F} = m\rho, \qquad \mathrm{G} = \rho^2 + k^2,$$

$$\mathrm{H}^2 = \mathrm{EG} - \mathrm{F}^2 = \rho^2 + k^2(1 + m^2).$$

Les courbures principales se calculent par les procédés ordinaires; supposons l'équation (13) des lignes de courbure scindée dans les deux suivantes :

$$dt + \varpi_1\,d\rho = 0, \qquad dt + \varpi_2\,d\rho = 0,$$

ϖ_1, ϖ_2 étant évidemment des fonctions de ρ; le théorème de Rodrigues nous donnera pour les courbures principales correspondantes :

$$(20)\qquad \frac{1}{\mathrm{R}_1} = k\frac{\varpi_2}{\mathrm{H}}, \qquad \frac{1}{\mathrm{R}_2} = k\frac{\varpi_1}{\mathrm{H}}.$$

On peut vérifier les identités suivantes :

$$(21)\qquad \mathrm{G}\varpi_1\varpi_2 - \mathrm{F}(\varpi_1 + \varpi_2) + \mathrm{E} = 0,$$

$$(22)\qquad \frac{1}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2} = -\frac{1}{2\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho^2}{\mathrm{H}^2}\right), \qquad \frac{1}{\mathrm{R}_1} + \frac{1}{\mathrm{R}_2} = \frac{k}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{m\rho}{\mathrm{H}}\right).$$

La première (16) exprime simplement l'orthogonalité des lignes de courbure; les deux dernières (17) permettent, ainsi que l'a fait voir M. Raffy (*loc. cit.*, t. XIX, p. 169), d'obtenir par des quadratures les hélicoïdes dont la courbure totale et la courbure moyenne vérifient une relation linéaire.

8. *Hélicoïdes isothermiques.* — Tous les hélicoïdes étant des surfaces W, il nous reste à déterminer ω en fonction de ρ par la condition que les lignes de courbure soient isothermes; nous devons d'ailleurs écarter le cas où la courbure moyenne est constante et où le problème a d'ailleurs été résolu, ainsi que nous venons de le rappeler; il s'agit donc de former une équation différentielle à laquelle satisfasse tout hélicoïde isothermique, *à courbure moyenne variable;* pour cela, nous reviendrons aux coordonnées u, v qui conviennent aux lignes de courbure.

Si l'on désigne par λ_1 et λ_2 des facteurs d'intégrabilité, on aura

$$dv = \lambda_1(dt + \varpi_1\,d\rho), \qquad du = \lambda_2(dt + \varpi_2\,d\rho);$$

comme les deux parenthèses sont des différentielles exactes, puisque ϖ_1 et ϖ_2 ne dépendent que de ρ, λ_1 sera une fonction de v, λ_2 une fonction de u.

On aura d'ailleurs

$$d(u+v) = (\lambda_1+\lambda_2)\,dt + (\lambda_1\varpi_1 + \lambda_2\varpi_2)\,d\rho.$$

Mais les hélices ayant pour équation $\rho = \text{const.}$, aussi bien que $u+v = \text{const.}$, ρ est une fonction de $u+v$ et, par suite, $\lambda_1+\lambda_2 = 0$; et comme λ_1, $-\lambda_2$ dépendent chacune d'une variable différente, elles sont égales à une même constante a; on a donc, en posant $l = u+v$,

$$dl = a(\varpi_1 - \varpi_2)\,d\rho. \tag{23}$$

Cette équation fera connaître l en fonction de ρ par une quadrature; on peut lui donner une autre forme; on déduit, en effet, des formules (15),

$$\varpi_1 - \varpi_2 = \frac{H}{k}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right),$$

ou, en revenant aux notations du n° **1**,

$$\varpi_1 - \varpi_2 = \frac{2H}{k}\varphi'(l).$$

L'équation (18) peut donc s'écrire

$$\frac{dl}{d\rho} = \frac{2aH}{k}\varphi'(l). \tag{24}$$

Si, maintenant, on identifie les deux expressions du ds^2 pour les deux systèmes de variables (u, v), (ρ, t), on obtient immédiatement

$$G\varpi_1 - F = \frac{a^2 H}{kp}e^l, \qquad -G\varpi_2 + F = \frac{a^2H}{kq}e^{-l},$$

et l'équation d'orthogonalité (16) donne alors entre les constantes la relation

$$a^4 = pqk^2. \tag{25}$$

Si enfin nous posons

$$\lambda = \frac{m\rho}{\mathrm{H}}, \qquad \mu = \frac{\rho}{\mathrm{H}}, \tag{26}$$

les formules qui permettront de passer d'un système de variables à l'autre seront les suivantes :

$$2\mathrm{G}\,\varphi(l) - 2k\lambda = \frac{k^2}{a^2}(qe^l - pe^{-l}), \tag{27}$$

$$2\mathrm{G}\,\varphi'(l) = \frac{k^2}{a^2}(qe^l + pe^{-l}), \tag{28}$$

$$2\mathrm{G}\,\varphi''(l) + \frac{2k}{a}\mu = \frac{k^2}{a^2}(qe^l - pe^{-l}). \tag{29}$$

9. 1° Cherchons d'abord l'équation différentielle qui convient à nos hélicoïdes dans le système de coordonnées (ρ, t). On doit avoir

$$\frac{1}{\mathrm{R}_2} - \frac{1}{\mathrm{R}_1} = \frac{d}{dl}\left(\frac{1}{\mathrm{R}_2} + \frac{1}{\mathrm{R}_1}\right)$$

ou

$$\mathrm{Q} = \frac{d\mathrm{P}}{dl} = \frac{d\mathrm{P}}{d\rho}\frac{d\rho}{dl},$$

ou, à cause de l'équation (19),

$$a\mathrm{H}\mathrm{Q}^2 = k\frac{d\mathrm{P}}{d\rho}. \tag{30}$$

Telle est l'équation différentielle cherchée; si nous tenons compte des équations (17), qui donnent la courbure totale et la courbure moyenne, cette équation peut être remplacée par les deux suivantes qui font connaître λ et μ, définis par les formules (26)

$$\left\{\begin{array}{l} \rho^2 - k^2\lambda^2 = \mu^2(\rho^2 + k^2), \\ k^2 a\rho\lambda'^2 + 4a\rho^2 p\mu' = k^2 p(\lambda''\rho - \lambda'). \end{array}\right. \tag{31}$$

Les accents désignent ici des dérivées prises par rapport à ρ; λ, μ une fois connus, on aurait les deux courbures principales [équation (24)].

2° *Variable* l. — L'équation différentielle, dans le système de variables (u, v), s'obtient aussi sans difficulté. Il suffit d'éliminer λ, μ, ρ entre les équations (27), (28), (29) et la première des équations (31), en tenant compte de ce que

$G = \rho^2 + k^2$. On trouve ainsi

$$\varphi'^2(A' - k^2\varphi') = \varphi'(A\varphi' - \varphi A')^2 + \frac{a^2}{k^2}A'(A'\varphi'' - A\varphi')^2 \tag{32}$$

en posant

$$A = \frac{k^2}{2a^2}(qe^l - pe^{-l})$$

et en désignant toujours par des accents les dérivées prises par rapport à l. Cette équation (32) peut être légèrement simplifiée; si l'on tient compte de la relation évidente

$$A'^2 - A^2 = k^2 = \frac{k^4 pq}{a^4},$$

on peut tout diviser par A' et l'on obtient enfin

$$\frac{a^2}{k^2}(A'\varphi'' - A\varphi')^2 + \varphi'(A'\varphi^2 + A'\varphi'^2 - 2A\varphi\varphi' + \varphi') = 0. \tag{33}$$

On constate aisément que $\varphi = \frac{A}{k^2}$ est une solution. Ce fait est d'ailleurs évident pour l'équation sous la forme (32); mais cette solution est à rejeter, car elle correspond au cas où les équations (27), (28), ... admettraient la solution commune $\rho = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$, qui n'a évidemment aucun sens.

Si l'on résout l'équation (33) par rapport à $\frac{k^2}{a^2}$, on peut vérifier qu'elle se réduit à

$$2(p\alpha + q\beta)^2 + \frac{1}{\varphi'}[qe^l(\varphi - \varphi')^2 + pe^{-l}(\varphi + \varphi')^2] = \frac{2a^2}{k^2}.$$

On retombe donc sur l'équation (15). L'existence d'une solution étrangère $\varphi = \frac{A}{k^2}$ s'explique d'ailleurs aussi bien pour cette dernière équation, car elle correspond, comme on peut le voir, au facteur $p\alpha + q\beta$ que nous avons dû introduire pour les besoins de l'intégration (n° 5).

NOTES.

I. — Surfaces engendrées par des hélices.

Théorème. — *Lorsqu'une surface admet une famille d'hélices circulaires telles que, le long de chacune d'elles, le plan osculateur soit incliné d'un angle constant sur le plan tangent à la surface, celle-ci est un hélicoïde.*

En d'autres termes, l'hélice génératrice conserve un axe invariable et un pas constant.

Attachons à l'hélice mobile un trièdre trirectangle OX, OY, OZ dont la troisième arête soit dirigée suivant l'axe. Soient l le paramètre dont dépendent la grandeur et la position de l'hélice; $a\,dl$, $b\,dl$, $c\,dl$, $p\,dl$, $q\,dl$, $r\,dl$ les composantes, suivant les axes, des vitesses de translation et de rotation; désignons par ρ, k le rayon et le pas de l'hélice, par t une seconde coordonnée déterminant la position d'un point M sur cette hélice.

Nous aurons, pour le déplacement absolu de ce point,

$$(1)\qquad \begin{cases} \delta x = -\rho\sin t\,dt + (a + qkt - r\rho\sin t + \rho'\cos t)\,dl, \\ \delta y = \rho\cos t\,dt + (b + pkt + r\rho\cos t + \rho'\sin t)\,dl, \\ \delta z = k\,dt + (c + k't + p\rho\sin t - q\rho\cos t)\,dl, \end{cases}$$

les accents désignant des dérivées prises par rapport à l. Soit $f(l)$ le cosinus de l'angle θ que fait la normale avec le rayon de courbure; nous aurons une équation de la forme

$$M^2 = N^2 f^2(l),$$

M, N étant des fonctions entières de t, $\sin t$, $\cos t$; cette relation doit être une identité; elle est du second degré en t, et, si l'on égale à zéro le coefficient de t^2, on obtient d'abord la condition

$$\begin{aligned}[][k'\rho + k^2(p\cos t + q\sin t)^2] - f^2(l)[k^2\rho^2(q\cos t - p\sin t)^2 \\ + k'^2\rho^2 + k^4(p^2+q^2) + 2k'k^2\rho(p\cos t + q\sin t)] \equiv 0,\end{aligned}$$

qui doit être elle-même vérifiée quel que soit t; en écrivant qu'il en est ainsi, on obtient immédiatement

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad k' = 0, \qquad a = 0, \qquad b = 0,$$

ce qui démontre le théorème énoncé. Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes et conduisent à la formule

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\rho'\sqrt{k^4\rho^2}}{\rho(c-kr)}.$$

II. — Sur les surfaces canaux.

Théorème. — *Toute surface canal isothermique est un tore ou un cylindre.*

Les formules (1) de la Note précédente s'appliquent au cas actuel en supposant ρ constant et en faisant $k=0$, $a=0$, $b=0$. On peut d'ailleurs supposer $q=0$, ce qui revient à compter l'angle t à partir d'une parallèle à la caractéristique du plan du cercle.

Ces équations (1) deviennent alors

$$\begin{aligned} \delta x &= -\rho \sin t\, dt - r\rho \sin t\, dl,\\ \delta y &= \quad \rho \cos t\, dt + r\rho \cos t\, dl,\\ \delta z &= (c+p\rho \sin t)\, dl, \end{aligned}$$

d'où

$$ds^2 = \rho^2(dt + r\,dl)^2 + (c+p\rho\sin t)^2\, dl^2.$$

Les lignes de courbure non circulaires ont alors pour équation

$$dt + r\,dl = 0.$$

Si l'on pose $r\,dl = d\tau$, $t+\tau = \varphi$, le ds^2 sera mis sous la forme

$$ds^2 = \rho^2\, d\varphi^2 + [c+p\rho\sin(\varphi-\tau)]^2\, dl^2.$$

La courbure géodésique de la ligne $\varphi =$ const. aura donc pour expression

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{p\rho\cos(\varphi-\tau)}{c+p\rho\sin(\varphi-\tau)}.$$

Si nous voulons que les lignes soient isothermes, nous devons exprimer que

$$\frac{c+p\rho\sin(\varphi-\tau)}{p\cos(\varphi-\tau)}$$

est une fonction de φ. Or, cela a lieu évidemment si $p=0$, ce qui donne évidemment pour notre surface un cylindre de révolution.

Si, maintenant, on suppose $p \neq 0$ et que l'on exprime que le rapport ci-dessus ne dépend que de φ, on devra avoir

$$r = 0, \qquad cp' - pc' = 0.$$

D'après la première condition, le plan du cercle tourne autour de sa caractéristique.

Pour interpréter la seconde, $p' = 0$, il suffit d'observer que l'équation de la caractéristique du plan du cercle est

$$c + py = 0,$$

et l'on voit sans peine que si $pc' = cp'$ cette droite doit être immobile.

La surface est donc engendrée par un cercle de rayon constant tournant autour d'une droite fixe de son plan. C'est donc bien un tore.