

H. BOUASSE

**Sur les métaux du type visqueux**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2<sup>e</sup> série*, tome 7, n° 4 (1905), p. 383-415

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1905\\_2\\_7\\_4\\_383\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1905_2_7_4_383_0)

© Université Paul Sabatier, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

# SUR LES MÉTAUX DU TYPE VISQUEUX,

PAR M. H. BOUASSE,

Professeur à l'Université de Toulouse.



1. Quand on commence à étudier un groupe de phénomènes, la tentation est grande d'en chercher une théorie d'ensemble, une explication générale. Ce n'est que peu à peu qu'on s'aperçoit de la vanité de tels efforts et qu'on se résigne, pour un temps plus ou moins long, à classer les phénomènes en sous-groupes et à n'en présenter que des explications partielles. L'étude des déformations permanentes n'a pas échappé à cette règle; il faut réagir contre cet esprit de généralisation hâtive qui, dans un sujet aussi peu avancé et aussi difficile, ne conduit qu'à des déceptions et à des erreurs. Je vais montrer dans ce Mémoire la nécessité de classements rigoureux, par l'étude d'un cas extrême, celui de l'eutectique plomb et étain (Pb : 37 pour 100, Sn : 63 pour 100), qui représente le type des métaux à *frottement liquide* ou à *viscosité*. Il est entendu que j'emploie les mots dans le sens où je les définis, sans me préoccuper des sens qu'on leur a donnés et qui, chez les divers auteurs, sont le plus souvent contradictoires entre eux.

2. Voici d'abord le classement d'ensemble que mes expériences amènent à proposer. Il va de soi que dans mes précédents Mémoires la question ne se présente pas avec cette symétrie et cette netteté, d'ailleurs relatives; ce n'est que peu à peu que je suis parvenu à me représenter les phénomènes sous des formes aussi tranchées.

Nous rencontrons quatre types fondamentaux de déformations dont voici le Tableau :

A. Déformations essentiellement temporaires.

a. Déformations parfaitement élastiques.

b. Déformations parfaitement élastiques, mais à élasticité retardée. Nous les appellerons *déformations à réactivité* ou *subpermanentes*.

## B. Déformations permanentes.

*a.* Déformations à frottement solide.

*b.* Déformations à frottement liquide ou visqueux.

Je dis qu'il y a *écrouissage* quand les déformations produisent une transformation *permanente* plus ou moins profonde de la matière. Toutes les propriétés sont alors modifiées, et naturellement aussi celles qui se rattachent aux déformations elles-mêmes : le frottement solide ou la viscosité, suivant les corps, sont généralement accrus.

Je dis qu'il y a *hystérésis* dans le cas suivant. Une opération est représentée par une courbe *parcourue dans un sens*; rien ne dit qu'il soit possible de la parcourir en sens inverse. Parvenus en un point d'une courbe, changeons le sens de la déformation; *nous obtiendrons une courbe de retour qui généralement ne se superpose pas à la courbe d'aller; il y a alors hystérésis*. L'existence de l'hystérésis n'implique rien sur le mécanisme du phénomène. Elle peut exister dans toutes les déformations, *les déformations parfaitement élastiques exceptées*.

3. Avant d'exposer à quels caractères on reconnaît les quatre sortes de déformations typiques, je présenterai une remarque.

La matière est-elle homogène ou hétérogène? Dans ma façon de raisonner cela n'a absolument aucun intérêt.

Il est clair que si l'on découvre, par l'étude micrographique, que les métaux ont une structure complexe, *on sera plus naturellement porté à admettre* des groupes de propriétés en quelque sorte distinctes. Mais, *outré qu'il est purement gratuit sans preuve directe de rattacher tel ou tel de ces groupes à telle ou telle matière séparément visible*, ce serait une erreur logique grossière de refuser le droit de les admettre sous prétexte que la matière paraît homogène au microscope. Qui nous dit, en effet, que chacune de ces matières distinctes ne jouit pas de toutes les propriétés dans des proportions plus ou moins considérables? Existe-t-il un lien nécessaire entre l'homogénéité réelle et l'homogénéité apparente? Chaque particule infiniment petite ne peut-elle pas être un monde complet, *absolument hétérogène*, dont l'ensemble, parfaitement homogène au microscope, n'en continuera pas moins de jouir de toute l'hétérogénéité de l'élément constitutif?

Je ne discute pas l'intérêt des procédés micrographiques; leur utilité industrielle est incontestable comme moyen de discerner des états divers; il est nécessaire de classer scientifiquement les textures. Mais j'attends qu'on me montre en quoi ils ont fait avancer d'un pas l'étude des déformations permanentes. Je veux bien que, suivant leurs structures micrographiques, les métaux aient une dureté, une résistance, des modules... différents; mais ce qu'on oublie de dire, et précisé-

ment ce que je cherche depuis des années, c'est le sens de ces mots, dureté, résistances, modules... Des mesures, les ingénieurs passent leur temps à en faire; ce qu'ils recherchent le moins, c'est la signification scientifique des résultats de leurs mesures.

Donc peu nous importe que la matière soit homogène ou qu'elle ne le soit pas; les groupes de phénomènes seront définis *par leurs formes*, peu importe pour l'instant leur mécanisme réel. Les tentatives d'explication que je proposerai seront donc purement *formelles*. Que ma manière de procéder soit la plus conforme à l'état de la question, c'est ce que la suite de ce Mémoire prouvera sans conteste.

4. *Déformations parfaitement élastiques*. — J'emprunte les définitions qui suivent au Chapitre premier d'un petit livre qui vient de paraître dans la Bibliothèque de l'élève ingénieur (BOUASSE, *Essais des matériaux; notions fondamentales relatives aux déformations élastiques et permanentes*. Gratien et Rey, Grenoble; Gauthier-Villars, Paris), où ces considérations sont plus longuement développées.

Pour déformer un corps, il faut faire agir sur ce corps une force ou un système de forces. Je raisonnerai dans l'hypothèse où le système de forces dépend d'une seule variable, *la variable mécanique*, et où les déformations peuvent s'exprimer par une seule quantité, *la variable géométrique*. Toute déformation peut se représenter en même temps que sa cause sur un plan; je porte toujours la variable géométrique en abscisses et la variable mécanique en ordonnées.

Le langage adopté suppose que l'on a tracé la courbe de déformation: ces courbes ont un sens de parcours; c'est le sens dans lequel se déplace le point figuratif de l'expérience; généralement une courbe ne peut être réellement parcourue que dans une direction unique.

Ceci posé, je dis que *la déformation est parfaitement élastique quand la courbe peut être parcourue arbitrairement dans les deux sens*.

Ces déformations jouissent de propriétés importantes:

1° Le parcours aller et retour d'un arc de courbe correspondant à une déformation parfaitement élastique n'entraîne aucune absorption d'énergie. Nous ne tenons pas compte des petites variations thermiques produites par la déformation qui compliquent fort inutilement le problème.

2° Si un arc de courbe correspond dans des conditions déterminées à une déformation parfaitement élastique, une portion de cet arc y correspond aussi.

3° Si un arc de courbe correspond à une déformation parfaitement élastique pour une certaine loi de déplacement du point figuratif par rapport au temps, il y correspond encore pour une autre loi, à la condition que la vitesse ne devienne pas trop considérable: dans ce cas on retombe dans les difficultés signalées au 1°; les variations thermiques peuvent ne plus être négligeables.

5. *Déformations parfaitement élastiques, mais à élasticité retardée. Réactivité.* — La caractéristique de ces phénomènes est l'existence d'une forme déterminée pour chaque valeur de la variable mécanique; mais cette forme n'est pas atteinte instantanément : elle se présente comme une limite. J'ai donné à la fin du Chapitre VI du Mémoire *Sur les courbes de déformation* paru dans les *Annales de Toulouse*, et l'on trouvera dans l'Ouvrage que je signale au numéro précédent, la description d'un modèle mécanique qui fait aisément comprendre les caractères fondamentaux du phénomène. Une telle représentation est schématique.

D'une manière générale, la réactivité fait intervenir des causes intérieures et médiatees; elle ne peut s'expliquer par les causes extérieures actuelles et immédiates, elle dépend de toutes les forces antérieurement appliquées au corps. Elle est compatible avec une élasticité parfaite, en ce sens que les déformations ne sont pas permanentes; on dit que les déformations sont *subpermanentes*.

Il n'existe aucune parenté ni dans l'allure, ni dans les causes, entre les phénomènes de réactivité et les phénomènes de déformations permanentes que nous passerons en revue plus loin, que ces déformations permanentes dépendent d'un frottement solide ou d'un frottement liquide (viscosité). Mais ils peuvent se superposer; dans la pratique il est difficile de faire le départ entre les deux groupes : ce que moi-même j'ai souvent appelé *réactivité* participe à la fois de la réactivité proprement dite et des déformations permanentes.

6. *Déformations permanentes non visqueuses. Écrouissage. Principe de Coulomb.* — L'hypothèse que les déformations permanentes dépendent d'un *frottement solide* et se font par glissement est l'une des premières en date; elle a été énoncée par Coulomb. Si la force  $X$  est inférieure à une certaine valeur  $X_0$ , il n'y a pas déformation; sitôt qu'elle dépasse la valeur  $X_0$ , la déformation commence et se poursuit indéfiniment. Comme première approximation, la force serait constante, indépendante de la vitesse et égale à  $X - X_0$ .

Il y a alors une déformation permanente dont le caractère fondamental est de ne pouvoir se produire que pour une force supérieure à une certaine force qui mesure le frottement solide.

*Écrouissage.* — Sous cette forme vraiment trop schématique, l'hypothèse n'aurait aucune utilité. Elle se complète immédiatement par la définition de l'*écrouissage*. *A mesure que, sous l'influence de la force  $X$ , la déformation permanente se produit, le métal se modifie, s'écrouit, de sorte que la limite  $X_0$  devient égale à  $X$  (à condition toutefois que  $X$  reste lui-même inférieur à une deuxième limite  $X_1$ ). A partir de ce moment le corps cesse de se déformer.* Une fois le corps déformé par une certaine force, une force inférieure de

même direction est incapable de lui donner une nouvelle déformation permanente.

L'ensemble de ces deux hypothèses constitue le *principe de Coulomb*.

L'écroutissage a une certaine limite  $X_1$ ; cela veut dire que si la force  $X$  est supérieure à  $X_1$ , il ne peut y avoir équilibre, quelle que soit la déformation.

On remarquera que le mot *écroutissage* a un sens très vague : il est équivalent de dire que le métal s'écroute ou que la matière se modifie. *Un corps écrouti signifie donc un corps dont la matière a été plus ou moins modifiée par des déformations permanentes.*

7. *Déformation permanente visqueuse. Écroutissage.* — Le caractère fondamental de ce second groupe de déformations permanentes consiste en ce que la force qui s'oppose à la déformation est une fonction de la vitesse; elle est nulle quand la vitesse est nulle, au moins comme cas schématique et limite. On peut donc comparer les phénomènes à ceux qui sont produits par les frottements dans les liquides plus ou moins visqueux.

Si petite que soit la force, la déformation permanente est sans limite; toutefois sa vitesse diminue quand la force tend vers zéro. L'équilibre ne peut strictement exister que si la force est nulle.

*Écroutissage.* — Conformément au sens général de *modification par déformation permanente* que j'ai attribué au mot *écroutissage*, il y a écroutissage, dans le cas d'une déformation purement visqueuse, quand le frottement liquide (viscosité) varie du fait même de la déformation. Naturellement cet écroutissage n'a aucun rapport avec celui qui est défini au n° 6; c'est bien encore une modification, mais portant sur une propriété différente.

On observera que le sens dans lequel je prends ce mot est, avec plus de précision, conforme au sens usuel.

8. *Hystérésis.* — Il résulte immédiatement de la définition de l'hystérésis donnée au n° 2 qu'elle existe pour des raisons fort diverses.

Un corps parfaitement élastique, mais à élasticité retardée (réactivité, n° 5), présente de l'hystérésis; un corps qui subit des déformations permanentes à frottement solide ou visqueux présente aussi de l'hystérésis. L'hystérésis est une propriété caractéristique de la forme solide qui apparaît dans des conditions si diverses qu'elle ne peut servir *sans plus* à établir de l'analogie entre les phénomènes. Les courbes de torsion des métaux ont une hystérésis qu'on doit principalement attribuer à des déformations permanentes. Les courbes de traction du caoutchouc ont au contraire de l'hystérésis dans des conditions où les déformations permanentes sont toujours petites.

L'hystérésis entraîne généralement une absorption d'énergie pour tout parcours effectué entre deux mêmes valeurs de la variable géométrique.

9. *Remarque.* — Je viens de définir les cas typiques de déformation; malheureusement les phénomènes ne se présentent pas avec cette simplicité schématique. D'abord les déformations ne sont pas nécessairement homogènes, ce qui complique considérablement l'interprétation des résultats. Ensuite il peut exister une superposition des cas typiques. Enfin les phénomènes réels peuvent ne rentrer qu'en gros et approximativement dans les cases que nous venons de distinguer.

En particulier, il n'est pas douteux que les déformations actuelles ne soient fonction de toutes les déformations antérieures et ne dépendent de la loi suivant laquelle les forces ont été appliquées en fonction du temps. L'effet actuel ne détermine donc pas à lui seul la grandeur de déformation pour les métaux à frottement solide, pas plus qu'il ne détermine la vitesse de déformation dans le cas des métaux visqueux.

Quoi qu'il en soit, cette classification est commode et vraie dans son ensemble. Le lecteur qui pense qu'elle va d'elle-même et qu'il n'était pas besoin d'un effort pour la trouver, ignore probablement l'historique de la question et les innombrables erreurs qu'on aurait évitées en prenant pour guide des distinctions qu'il juge peut-être enfantines.

Je vais traiter avec détail le cas des métaux visqueux; je montrerai qu'il est impossible de les confondre avec les métaux de l'autre type, si l'on se borne aux cas extrêmes. Je prendrai comme type des métaux à frottement solide le cuivre, que j'ai étudié d'une façon complète, et comme type des métaux visqueux l'eutectique de plomb et d'étain, dont M. Carrière a fait sous ma direction l'étude expérimentale (Thèse, *Annales de Toulouse*, 1905).

#### MÉTAUX A FROTTEMENT LIQUIDE OU MÉTAUX VISQUEUX. GRANDES DÉFORMATIONS.

10. Pour préciser le problème, je vais traiter le cas d'un cylindre qui s'allonge sous l'influence d'une charge constante ou variable. L'accroissement de longueur  $dL$  est dû à deux causes, la déformation élastique et la déformation visqueuse. Je néglige d'abord la première, qui est toujours extrêmement petite par rapport à la seconde.

L'hypothèse la plus simple consiste à écrire que la vitesse d'allongement  $v = \frac{dL}{dt}$  est à chaque instant une fonction parfaitement définie de la charge par unité de section  $P : s$ . Admettons de plus que la densité ne change pas (hypothèse toujours très approchée, mais nécessaire si la matière ne se transforme pas, *ne s'écrout pas*): nous aurons les conditions  $s_0 L_0 = sL$ ,  $P : s = PL : s_0 L_0$ .

Nous écrirons donc

$$(1) \quad v = \varphi \left( \frac{P}{s} \right) = \varphi_1(PL).$$

Admettre que les fonctions  $\varphi$  et  $\varphi_1$  sont déterminées une fois pour toutes revient à dire que la matière ne s'écrout pas, ne se transforme pas d'une manière permanente du fait de la déformation. L'écroissage modifierait la forme des fonctions  $\varphi$  et  $\varphi_1$ , probablement dans un sens unique, et la ferait tendre vers une forme limite.

Mais poser l'équation (1), c'est admettre aussi que la vitesse actuelle de déformation ne dépend pas de la manière dont les déformations antérieures ont été obtenues. Cette influence subpermanente des déformations antérieures est tout autre chose qu'un écroissage qui doit être considéré comme une modification stable de la matière. Nous nous contenterons d'abord de l'hypothèse la plus simple, quitte à la compliquer si elle ne suffit pas.

11. *Charge constante par unité de section.* — L'expérience consiste à imposer brusquement une charge  $P_0$  et à retirer des poids convenables à mesure que le fil s'allonge, de manière que le quotient  $P:s$  (ou ce qui revient au même le produit  $PL$ ) demeure constant pendant toute l'opération. Si l'hypothèse simple du n° 10 est vérifiée, la vitesse d'allongement doit se maintenir constante, sauf tout à fait au début, où elle part de 0 et croît rapidement : négligeons cette période initiale toujours très courte.

Pour l'eutectique, on trouve généralement une vitesse *croissante* : il semble qu'on doive conclure nécessairement un *écrouissage*, une modification de la matière dont la viscosité *diminue*, qui devient plus fluide à mesure qu'elle s'allonge. Cette interprétation ne doit être admise qu'à la dernière extrémité. On pourrait expliquer l'accroissement de vitesse par une modification non plus permanente, mais subpermanente, due aux déformations *immédiatement antérieures*, suivant la distinction du n° 9. On conclurait qu'un fil qui vient d'être allongé devient de ce fait plus allongeable. Mais cette interprétation est contradictoire avec certains résultats dont il sera parlé plus loin.

Une distinction fondamentale est nécessaire entre la matière du corps qui se déforme et le corps lui-même considéré comme espace occupé par la matière. Rien ne dit que le fil, en se déformant, reste cylindrique; plus exactement tout prouve le contraire : en particulier, il devient rugueux. Il se peut donc que le fil semble *s'écrourir* en devenant plus fluide, tandis qu'à la matière qui le forme, ou ne s'écrout pas, ou tout au contraire s'écrout en devenant moins fluide. Il faut, dans l'interprétation des résultats, avoir toujours cette distinction fondamentale présente à l'esprit : c'est pourquoi nous en parlons dès à présent.

12. *Charge constante.* — Imposons brusquement une charge constante  $P_0$  et maintenons-la indéfiniment; comparons ce qui arrivera pour le métal non écrouissable à frottement visqueux et pour le métal à frottement solide, que nous savons être éminemment écrouissable. Négligeons toujours la déformation élastique.

*Métal à frottement visqueux non écrouissable.* — La vitesse est définie par l'équation  $v = \frac{dL}{dt} = \varphi_1(PL)$ .

Réolvons par rapport à  $P$ ; il vient  $P = \frac{1}{L} f(v)$ .

L'accélération du corps  $P_0$  sera donnée par une expression de la forme

$$\frac{dv}{dt} = K(P_0 - P) = K \left[ P_0 - \frac{1}{L} f(v) \right].$$

Il est clair que la vitesse part de 0 et croît indéfiniment. En effet, si elle devenait constante pour une certaine valeur  $v_0$ , on aurait  $P_0 = \frac{1}{L} f(v_0)$ , équation qui ne serait plus satisfaite au bout d'un instant, puisque  $L$  croît.

Cette conclusion vaut, quelle que soit la charge initiale.

Comme nous savons qu'à charge constante par unité de section, l'eutectique s'allonge avec une vitesse croissante (pour des raisons dont nous avons indiqué la probabilité au numéro précédent), il va de soi qu'à charge constante la vitesse n'en croîtra que plus vite. Les phénomènes sont entièrement différents avec un métal écrouissable à frottement solide.

*Métal écrouissable à frottement solide.* — On peut admettre très exactement que la force qui s'oppose à chaque instant à la déformation est une fonction de l'allongement actuel, à peu près indépendante de la vitesse de déformation. L'allongement mesure en effet la déformation et par conséquent le changement de propriété de la matière, ce qui est précisément son écrouissage. La loi du mouvement de la masse suspendue est donc de la forme  $\frac{dv}{dt} = K[P_0 - F(L)]$ , toute différente de la loi précédemment obtenue. La vitesse croît jusqu'à ce que la longueur prenne la valeur  $L_1$  annulant la parenthèse; après quoi elle diminue et s'annule quand le travail total est nul (au moins approximativement), condition qui définit une certaine longueur  $L_2$

$$\int_{L_0}^{L_2} [P_0 - F(L)] dL = 0 = P_0(L_2 - L_0) + \int_{L_0}^{L_2} F(L) dL.$$

Le corps suspendu arrive donc alors au repos et s'y maintient pratiquement. Je

néglige, bien entendu, les phénomènes de réactivité qui se superposeraient aux précédents : il ne s'agit, en effet, ici que d'un schéma considérablement simplifié.

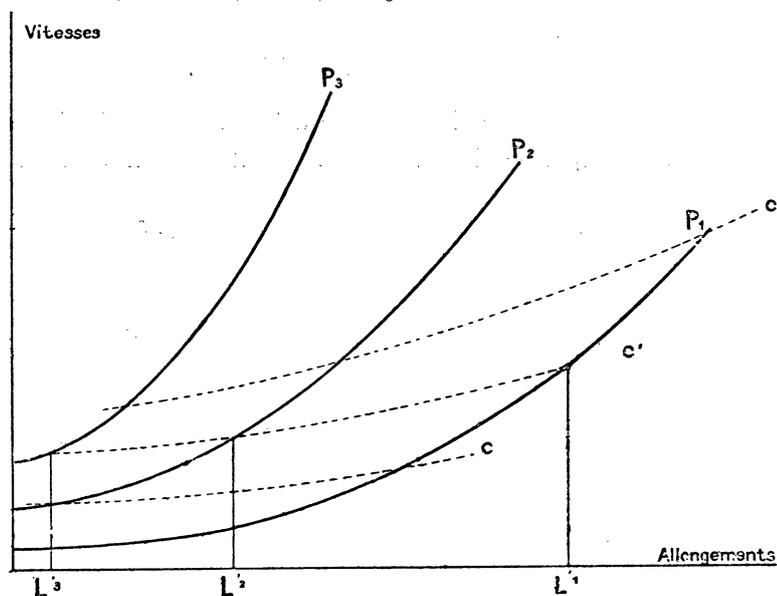
L'expérience montre qu'au moins en gros le cuivre recuit rentre dans ce cas typique.

13. *Étude du faisceau de courbes à charge constante.* — Il serait du plus haut intérêt de déterminer la forme de la fonction  $\varphi$  qui entre dans l'équation fondamentale  $v = \varphi(PL)$ .

Cette fonction résulterait immédiatement de l'étude d'une seule courbe à charge constante, si le phénomène dont il est parlé au n° 11 ne compliquait singulièrement le problème. Comme, en définitive, nous ne pouvons agir sur la matière du fil qu'en agissant sur le fil lui-même, nous sommes bien obligés d'interpréter le résultat complexe.

Soient tracées les courbes expérimentales, vitesses-longueurs, correspondant à des bouts de fils aussi identiques que possible au début et de même longueur initiale  $L_0$ , pour des charges constantes  $P_1, P_2, \dots$ . Elles sont marquées en traits pleins dans la figure 1.

Fig. 1.



Soient  $(L_1, P_1)$  un point de la première,  $(L_2, P_2)$  un point de la seconde et ainsi de suite, tels que l'on ait  $L_1 P_1 = L_2 P_2 = L_3 P_3 = \dots = C$ , où  $C$  est une constante. Ces points sont sur une courbe tracée en pointillés. Si l'hypothèse fondamentale était satisfaite, les courbes correspondant à diverses valeurs de la constante  $C$  seraient des horizontales. Si par l'allongement il se produisait un écrouissage

diminuant la fluidité, ces courbes tourneraient leur concavité vers le bas. Or, l'expérience montre qu'elles tournent leur concavité vers le haut.

On est donc bien forcé d'admettre, indépendamment de toute théorie, que la vitesse d'allongement  $v$  est fonction, non seulement de la charge par unité de surface de la section (c'est-à-dire du produit  $PL$ ), mais encore fonction de la longueur actuelle. L'allongement a pour effet de rendre la fluidité *apparente* plus grande, de diminuer la *viscosité*. On doit écrire  $v = \varphi_L(PL)$ ,  $\varphi_L$  indiquant que la fonction  $\varphi$  dépend de l'allongement; de plus  $\varphi$  croît quand  $L$  croît.

Mais on ne saurait trop insister sur ce point, rien ne prouve qu'il s'agisse d'un écrouissage de la matière du fil; il est plus probable que le fil se désagrège plus ou moins en tant que solide géométrique, sans que la matière se modifie sensiblement.

14. *Détermination de la fonction  $\varphi$ .* — Pour se rendre compte de la variation de la vitesse avec la charge par unité de section, on est donc conduit à opérer sur des fils *également allongés*; comme les fils ne sont pas nécessairement identiques, on doit croiser les expériences.

Une circonstance rend moins inextricable le problème: l'expérience prouve que *la vitesse pour une longueur donnée est indépendante de la manière dont on atteint cette longueur*.

La démonstration repose sur deux séries d'expériences.

*Première série.* — On amène le fil d'une même longueur initiale  $L_0$  à une même longueur finale  $L_1$  avec des vitesses différentes. Pour cela on opère à

Fig. 2.

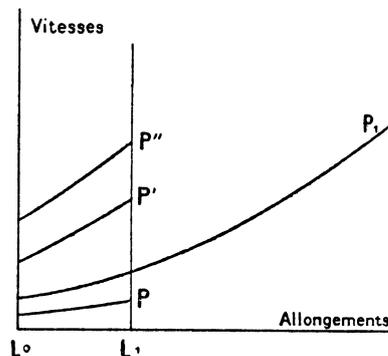
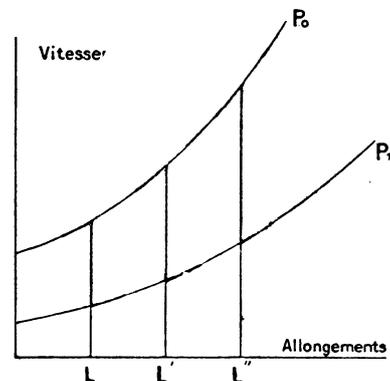


Fig. 3.



charge  $P$ ,  $P'$ ,  $P''$ , constante pour un essai, variable d'un essai à l'autre. Il s'agit de démontrer que le fil est dans le même état sous la longueur finale  $L_1$ , quelle que soit la valeur de la charge  $P$  qui l'amène à cette longueur (*fig. 2*).

Pour prouver cette identité, au moment où l'on atteint la longueur  $L_1$ , on rem-

place brusquement la charge P par une charge  $P_1$ , la même pour tous les fils. L'expérience montre que les vitesses d'allongement, sous cette charge invariable  $P_1$  et pour les mêmes longueurs, sont identiques, quelle qu'ait été la préparation. Les courbes  $v = \varphi_L(P_1 L)$  doivent se superposer.

On pourrait faire l'expérience en amenant à la longueur invariable  $L_1$ , non plus à charge constante, mais par un procédé quelconque.

*Seconde série.* — Elle n'est qu'une modification de la première (*fig. 3*).

Avec chacun des fils on décrit : 1° une portion de la courbe de charge avec une charge, toujours la même  $P_0$ , jusqu'à des allongements  $L, L', L''$  pour les expériences consécutives; 2° on continue avec une charge, toujours la même,  $P_1$ . D'une expérience à l'autre et, par conséquent, d'un fil à l'autre, on fait varier  $L$ . On doit obtenir pour les vitesses, si les fils sont identiques, deux courbes en tout,  $v_0 = \varphi_L(P_0 L)$  et  $v_1 = \varphi_L(P_1 L)$ ; l'une correspondant à la charge  $P_0$ , l'autre à la charge  $P_1$ . On utilise seulement dans les expériences successives des portions plus ou moins grandes de chacune de ces courbes.

15. *Comparaison des courbes à charge constante. Croisement des expériences.* — Grâce aux expériences précédentes, on peut, dans la comparaison des courbes à charge constante, procéder d'une manière qui élimine la part d'incertitude provenant de la non identité des fils sur lesquels on expérimente. Si la manière d'atteindre un allongement n'influe pas sur l'état du fil sous cet allongement, on peut obtenir sur un même fil les courbes à charge constante correspondant à plusieurs charges, deux ou trois dans la pratique. L'expérience consistera à imposer successivement et en les croisant les deux charges  $P_0$  et  $P_1$ , ou les trois charges  $P_0, P_1, P_2$  et à déterminer les vitesses d'allongement en fonction des longueurs. On obtiendra deux ou trois systèmes de points qu'on joindra par des courbes continues. On aura ainsi les courbes  $v_0, v_1, v_2$  à charge constante, comme si on les avait obtenues sur des fils différents et identiques.

*Vitesses initiales.* — On appellerait *vitesses initiales* les vitesses qu'on obtient en prolongeant par extrapolation les courbes jusqu'à la longueur initiale  $L_0$ . Il est clair que l'une d'entre elles seule peut être effectivement obtenue pour  $L_0$ . L'expérience montre que ces vitesses sont très sensiblement proportionnelles aux carrés des charges.

16. *Fonction de désagrégation.* — Toutes les expériences précédentes satisferaient à l'hypothèse suivante :

$$v = \varphi(PL) \Phi(L).$$

La fonction  $\Phi$ , déterminée une fois pour toutes, pourrait s'appeler *fonction de*

*désagrégation.* Cherchons quelles conséquences résulteraient de la forme précédente.

Considérons deux courbes  $P_0$  et  $P_1$  ( $P_1 > P_0$ ); elles auront pour équation

$$v_0 = \varphi(P_0 L) \Phi(L), \quad v_1 = \varphi(P_1 L) \Phi(L);$$

d'où

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{\varphi(P_1 L)}{\varphi(P_0 L)}.$$

Il paraît difficile de ne pas admettre que, si grande que soit la vitesse de déformation, on ne pourra pas dépasser une certaine valeur limite  $F$  du produit  $PL$  qui mesure la force par unité de surface.

On peut poser, par exemple,  $v = \frac{\varphi P^2 L^2}{F^2 - P^2 L^2} \Phi(L)$ ; d'où  $\frac{v_1}{v_0} = \frac{P_1^2 F^2 - P_0^2 L^2}{P_0^2 F^2 - P_1^2 L^2}$ .

Pour deux charges,  $P_1$  et  $P_0$ , le rapport  $v_1 : v_0$  doit croître avec la longueur  $L$  sous laquelle se fait la comparaison.

Pour de petites charges, les vitesses sont sensiblement comme le carré des charges.

Si le produit  $P, L$  s'approche de  $F$ , la vitesse  $v_1$  croît au delà de toute limite.

Une hypothèse plus générale consiste à admettre que la fonction  $\Phi$  n'intervient pas en facteur, mais s'introduit comme une modification des paramètres  $\varphi$  et  $F$ .

17. *Décharges décroissantes.* — Les corps à frottement solide, dont le cuivre est le type, deviennent parfaitement élastiques (au moins approximativement et en négligeant la réactivité) pour toute charge supérieure à celle qu'ils ont subie une fois. Au début de la décharge, le cuivre continue bien de s'allonger; il ne présente pas, en effet, le type à frottement solide pur; mais, dès que la charge est suffisamment inférieure à la charge maxima, tout allongement cesse.

Pour les métaux visqueux, rien de semblable.

On charge un fil d'un tel métal proportionnellement au temps, on décharge suivant la même loi; *on devrait obtenir, d'après les hypothèses précédentes*, un allongement plus grand que pendant la charge, parce que les mêmes charges sont appliquées le même temps :

1° A un fil dont le diamètre est plus petit;

2° A un fil plus facilement déformable, puisqu'il est allongé.

Or, l'expérience prouve que *l'allongement pendant la décharge est plus petit que pendant la charge, pourvu qu'on n'opère pas sur un fil déjà considérablement allongé.* Donc les phénomènes sont plus complexes que nous ne l'avions d'abord imaginé : *les vitesses de déformation actuelles ne sont pas indépendantes des vitesses de déformation antérieures.* Il faut admettre que, pour

*une charge actuelle donnée, la vitesse d'allongement est plus petite quand elle est décroissante que quand elle est croissante, pourvu, bien entendu, que la variation soit assez rapide.*

Cette généralisation ne peut servir à expliquer les anomalies du n° 11, puisque alors on devrait obtenir une charge constante; nous sommes forcés de maintenir l'hypothèse de la désagrégation.

Le fil, une fois déchargé, recommence l'opération. Tandis qu'un fil en cuivre ne s'allongerait pas pour les petites charges et ne recommencerait à s'allonger que pour des charges peu inférieures à la charge maxima subie, le fil d'eutectique s'allonge dès le début de la charge. On obtient ainsi les courbes représentées dans une des figures du Mémoire de M. Carrière. La confusion entre les deux types n'est pas possible.

Si l'on opère toujours sur un fil de cuivre, mais à des températures de plus en plus élevées, on trouve des courbes dont l'allure se rapproche exactement de celle qui caractérise les métaux visqueux. J'ai déjà montré que la vitesse de déformation intervient déjà fortement à 300° sur la forme des courbes de traction.

18. *Décharge brusque, on recharge proportionnellement au temps.* — Chargeons jusqu'à la charge  $P_1$  proportionnellement au temps. Déchargeons *brusquement*; la longueur reste ce qu'elle était pour la charge  $P_1$ , au petit raccourcissement purement élastique et à la réactivité près. Rechargeons de nouveau jusqu'à  $P_1$ , recommençons l'opération un certain nombre de fois : les phénomènes sont alors singulièrement différents pour le cuivre et pour l'eutectique.

A mesure que le nombre des opérations croît, la courbe de charge du cuivre devient de plus en plus parfaitement rectiligne et verticale, la courbe de charge de l'eutectique de plus en plus inclinée. D'après le principe de Coulomb, le cuivre, *dès la seconde opération*, est à peu près parfaitement élastique; l'eutectique a, pour les opérations successives, un diamètre initial plus petit, une longueur plus grande; il est devenu aussi plus déformable du fait de son allongement même.

19. *Écrouissage.* — Si nous opérons avec de fortes charges, l'écrouissage, à supposer qu'il consiste dans une augmentation de la viscosité, se trouvera immédiatement masqué par l'augmentation *apparente* de fluidité que j'attribue à une modification, non de la matière, mais de la forme géométrique du fil. Il faut donc essayer avec de très petites charges. L'expérience prouve que la vitesse d'allongement, sous charge faible et *constante*, commence par décroître; elle passe par un minimum et croît à nouveau. Le minimum a lieu pour un allongement petit et sensiblement le même, quelle que soit la charge employée.

Cet écrouissage peut être de deux sortes. Ou bien il peut se produire une

modification dans la grandeur du frottement visqueux, ou bien il peut exister un petit frottement solide. Dans ce dernier cas, pour une charge suffisamment petite, l'allongement permanent doit être strictement nul, à température constante. Dans le premier, il ne peut jamais y avoir équilibre, si petite que soit la charge; il y a toujours allongement permanent. C'est bien ce qui semble se produire.

Il ne faut pas oublier que le métal le moins écroui est ici celui qui sort de la filière, parce qu'il passe dans la filière, autant dire à l'état liquide.

En définitive, nous avons trois phénomènes qui se superposent :

1° Un petit écrouissage dû à la déformation, c'est-à-dire une petite modification permanente que les déformations ultérieures ne supprimeront pas, mais feront au contraire tendre vers une limite par des modifications de même sens.

2° Une désagrégation qui doit principalement porter sur la forme géométrique, peut-être sans modification dans la matière.

3° Des modifications *subpermanentes*, fonctions de la manière dont on a produit les déformations immédiatement antérieures, en particulier fonction de l'accélération  $\frac{dv}{dt}$ ; ces modifications moins profondes disparaissent rapidement.

Nous verrons plus loin avec quelle facilité on met en évidence ces derniers phénomènes.

20. *Grandes déformations par torsion.* — Quand on opère par torsion, il y a une simplification due à ce que la forme géométrique reste la même, et une complication due à la non homogénéité de la déformation. Tant qu'il s'agit des phénomènes généraux et de leur étude qualitative, l'inconvénient cède le pas à l'avantage. On trouve immédiatement, en imposant des vitesses de torsion connues, que le couple croît moins vite que la vitesse. La courbe (vitesse de déformation en abscisses et couple en ordonnées) est parabolique et tourne sa concavité vers l'axe des abscisses. On peut admettre, comme nous l'avons fait plus haut (n° 16), que, la vitesse de déformation croissant indéfiniment, le couple tend vers une limite : la courbe aurait dans ces conditions une asymptote horizontale.

#### PETITES ET MOYENNES DÉFORMATIONS. ÉLASTICITÉ PARFAITE ET RÉACTIVITÉ.

21. *Élasticité parfaite.* — Nous supposons maintenant les déformations assez petites pour qu'on puisse considérer la forme comme à peu près invariable. Nous ne pouvons plus négliger l'élasticité parfaite, l'équation fondamentale devient

$$dx = K dX + \varphi(X) dt.$$

Si la déformation est grande, la vitesse de déformation est énorme par rapport

à la vitesse de variation de charge et nous revenons à l'équation

$$\frac{dx}{dt} = v = \varphi(X).$$

Admettons, pour fixer les idées, que  $\varphi(X)$  soit de la forme

$$\frac{\varphi X^2}{F^2 - X^2}.$$

Produisons une déformation brusque; la force atteint une valeur  $X_0$ . Si l'on maintient invariable la valeur de  $x$ , la force décroît suivant l'équation

$$-\frac{dX}{dt} = \frac{1}{K} \varphi(X), \quad t = -\int \frac{K dX}{\varphi(X)}.$$

Avec la forme particulière admise

$$t = -\int \frac{K}{\varphi} \frac{F^2 - X^2}{X^2} dX, \quad \frac{\varphi t}{K} = F^2 \left( \frac{1}{X} - \frac{1}{X_0} \right) - (X_0 - X),$$

en prenant pour origine des temps le moment où l'on abandonne le système lui-même. Aussi la force doit redevenir *nulle* en un temps que l'équation précédente indique comme infini et qui, pratiquement, est considérable.

Mais le caractère de cette déperdition est tout différent dans les métaux à frottement solide. Ici la limite de  $X$  est bien nulle, si petite qu'ait été la force initiale  $X_0$ .

On peut étudier directement la loi de déperdition pour la torsion avec un dynamomètre.

**22. Étude de la courbe de torsion à vitesse constante.** — En utilisant la courbe de torsion, on peut opérer sur des déformations beaucoup plus petites et suivre le phénomène dans la région où interviennent les déformations élastiques.

Admettons que la déformation se fasse avec une vitesse constante,  $x = at$ . L'équation générale devient  $dx[a - \varphi(X)] = aK dX$ .

Quelle que soit la fonction  $\varphi$ , on peut avoir une idée nette de la courbe. Développons le calcul, dans le cas où la fonction  $\varphi(X)$  est de la forme  $\varphi X^2$ ,

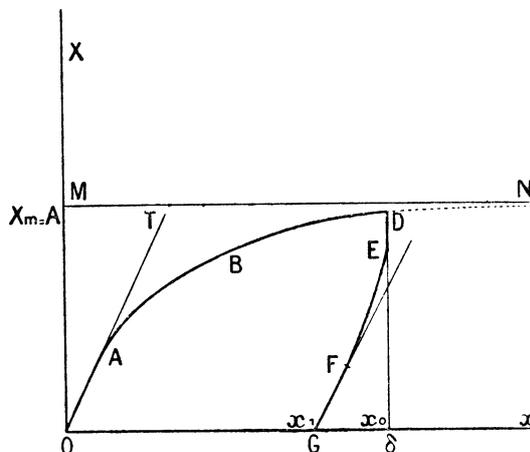
$$dx = aK \frac{dX}{a - \varphi X^2}.$$

Posons  $a : \varphi = A^2$ ; on a  $x = \frac{KA}{2} \log \frac{A + X}{A - X}$ .

La courbe OABD (fig. 4) part de l'origine suivant l'inclinaison OT caractéristique,  $dx = K dX$ . Elle aboutit à une asymptote MN, définie par la condition  $X_m = A = \sqrt{a : \varphi}$ .

Le couple limite est proportionnel à la racine carrée de la vitesse constante de torsion.

Fig. 4.



Si l'on choisissait la forme

$$\varphi(X) = \frac{\varphi X^2}{F^2 - X^2},$$

les positions de l'asymptote seraient données par la condition

$$a = \varphi \frac{X^2}{F^2 - X^2}, \quad X_m = F \sqrt{\frac{a}{a + \varphi}};$$

les couples  $X_m$  croissent encore moins vite. Pour une vitesse infinie,  $X_m = F$ .

23. *Cycle parcouru à vitesse constante avec arrêt au bout du cycle.* — Supposons que l'on déforme suivant la loi  $x = at$  jusqu'à la valeur  $x_0$ , puis qu'on revienne à la force nulle suivant la même loi, avec un arrêt T plus ou moins grand, à l'extrémité du cycle. On peut se proposer de calculer la valeur  $x_1$  qui correspond au retour à la force nulle et qui mesure la déformation permanente. Il est évident, quelle que soit la fonction  $\varphi$  employée, que la déformation  $x_1$  est, pour un  $x_0$  donné, d'autant plus grande que  $a$  est plus petit et T plus grand.

Parvenu en un point D de la courbe précédemment étudiée, où le couple est  $X_0$ , nous maintenons l'azimut constant : la déperdition se fait suivant la loi :

$$K dX + \varphi(X) dt = 0.$$

Si par exemple  $\varphi(X) = \varphi X^2$ , on détermine le couple  $X_1$  au point E, en fonction du temps d'arrêt T, par l'équation

$$T = \frac{K}{\varphi} \left( \frac{1}{X_1} - \frac{1}{X_0} \right).$$

Enfin, revenons suivant la même loi  $x = at$ , au couple nul : nous décrivons la courbe EFG qui aboutit à l'axe des  $x$ , suivant l'inclinaison caractéristique. Pour peu que le temps T soit long, le point E est assez bas,  $X_1$  est assez petit pour qu'on puisse admettre que la courbe de retour EFG est rectiligne et possède l'inclinaison caractéristique.

Cette expérience ne peut pas distinguer les métaux visqueux des métaux à frottement solide, *autrement que par la grandeur du parcours* ED et ce fait que la limite du point E est *pratiquement* le point  $\delta$  lui-même.

24. *Étude de la courbe de torsion parcourue à vitesse toujours de même sens, mais variant suivant la loi  $v = a + b \sin \omega t$ .* — Une équation de la forme

$$v = a + b \sin \omega t = K \frac{dX}{dt} + \varphi(X)$$

rend compte au moins qualitativement des phénomènes observés.

Si la période  $T = \omega : 2\pi$  est très longue, la variation du couple est lente et l'équation se réduit sensiblement à  $v = \varphi(X)$ . On peut poser, comme première approximation,  $v = \varphi X^2$ ; on se rend compte ainsi de la forme en croissant que prennent les cycles à longue période dans le plan des  $v$ ,  $X$ . Ils se réduisent à peu près à des morceaux d'une même courbe parabolique, quand on fait varier  $a$  et  $b$ .

Si au contraire la période est courte, le premier terme du second membre n'est plus négligeable. On peut poser, comme première approximation,

$$\varphi(X) = \varphi X^2, \quad X = A + B \sin(\omega t - \beta) + C \sin(2\omega t - \gamma).$$

Substituant, on tire d'abord les conditions

$$a = \varphi A^2, \quad B = \frac{b}{\sqrt{K^2 \omega^2 + 4\varphi\alpha}}, \quad \text{tang } \beta = \frac{K\omega}{2\sqrt{a\varphi}}.$$

Les deux premiers termes de  $X$  sont les plus importants; ils donnent un cycle elliptique : B diminue à mesure que la période décroît, c'est-à-dire que  $\omega$  croît. Le grand axe de l'ellipse se redresse,  $\beta$  se rapproche de  $\frac{\pi}{2}$  quand la période décroît.

25. *Réactivité.* — L'expérience prouve que l'eutectique présente de la réacti-

tivité et que ce phénomène y suit sensiblement les mêmes lois que dans le cuivre. Dans l'hypothèse d'une hétérogénéité de la matière, on est ainsi amené à conclure que la réactivité forme avec l'élasticité parfaite un groupe connexe dont les lois sont indépendantes de la manière dont les éléments qui leur servent de substratum sont liés les uns aux autres (frottement solide ou visqueux).

Mais, et j'insiste sur ce point pour des raisons qu'on verra plus tard, il ne faut pas chercher dans les équations que nous avons admises jusqu'à présent (au moins comme forme) une représentation même grossière des phénomènes de réactivité. Il faudrait ajouter un ou plusieurs termes dépendant d'une hypothèse supplémentaire.

Dans une classification correcte des phénomènes, les pertes de couple signalées au n° 23 à azimut constant suivant DE ne sont qu'*en partie* dues à la réactivité; en partie, elles correspondent à un glissement permanent. Il existe à ce sujet dans mes Mémoires un flottement de nomenclature bien excusable, si l'on pense à la difficulté de distinguer les éléments constitutifs de phénomènes aussi complexes.

CYCLES DE TORSION IMPOSÉS SUIVANT UNE LOI SINUSOÏDALE EN FONCTION DU TEMPS.

26. *Résultats expérimentaux.* — La description de ces cycles a atteint une grande perfection grâce à la technique que j'ai proposée depuis longtemps. Ils sont destinés à servir de tests aux théories. Je vais résumer les résultats de M. Carrière pour l'eutectique et leur comparer les résultats des diverses théories.

La torsion est représentée par l'équation  $x = A \sin \omega t$ . On attend que le cycle soit fixé; il admet alors l'origine des coordonnées comme centre et se rapproche beaucoup d'une ellipse, tant que l'amplitude n'est pas énorme. Nous admettrons cette forme dans la discussion et poserons :  $X = X_0 \sin(\omega t - \chi)$ .

Le couple maximum est  $X_0$ ; appelons  $W$  l'aire de l'ellipse;  $\psi$  l'angle que fait avec l'axe des  $x$  le diamètre des cordes verticales,  $\varepsilon$  l'angle que fait avec l'axe des  $x$  le diamètre des cordes horizontales. On a

$$W = \pi A X_0 \sin \chi, \quad \tan \psi = \frac{X_0 \cos \chi}{A}, \quad \tan \varepsilon = \frac{X_0}{A \cos \chi}.$$

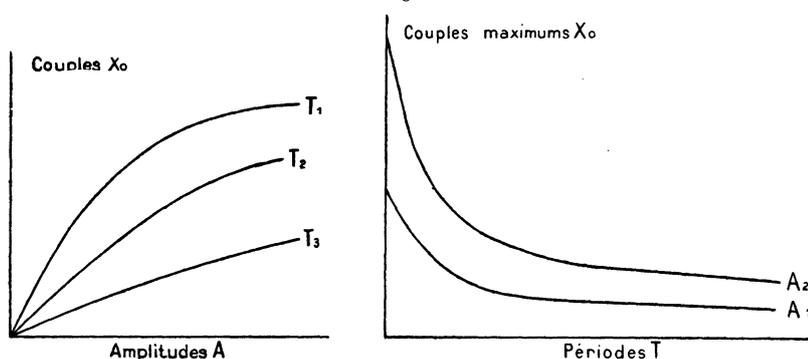
*Étude des couples maximums  $X_0$  (fig. 5).* — On peut poser

$$X_0 = f_1(T) [A - f_2(T) A^2], \quad \frac{df_2}{dT} < 0,$$

$T$  est la période du mouvement oscillatoire imposé  $x = A \sin \omega t$ .

En fonction des amplitudes (période constante) les courbes (faisceau I) donnant

Fig. 5.



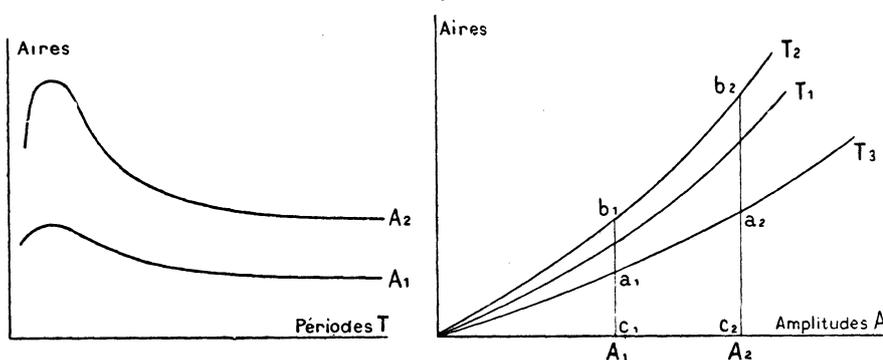
$X_0$  en fonction de  $A$  sont paraboliques :  $X_0$  croît moins vite que l'amplitude. A mesure que  $T$  diminue, le coefficient du terme  $A^2$  augmente,  $f_2$  croît.

En fonction de la période (amplitude constante) les courbes (faisceau II) sont hyperboliques.

Si  $f_2$  était une constante, elles se déduiraient les unes des autres par dilatation verticale dans un rapport constant. Comme  $f_2$  décroît quand  $T$  croît, le terme soustractif décroît. La quantité par laquelle il faut multiplier les ordonnées de la courbe  $A_1$  pour obtenir  $A_2$  croît donc quand la période croît. Comme il s'en faut d'assez peu que  $f_2$  ne soit une constante, les courbes du faisceau II se déduisent à peu près les unes des autres par dilatation verticale dans un rapport constant.

Étude des aires  $W$  (fig. 6). — On peut écrire :  $W = f_3(T)[A + f_4(T)A^2]$ .

Fig. 6.



En fonction de l'amplitude (période constante) les courbes I sont des paraboles. En fonction de la période, les courbes II présentent un maximum qui a lieu pour une période croissante à mesure que l'amplitude diminue.

Si  $f_4$  était constant, les courbes de chacun des deux faisceaux se déduiraient de l'une d'entre elles par dilatation verticale dans un rapport constant. Il n'en est pas ainsi, ne serait-ce qu'à cause du déplacement du maximum du faisceau II.

En fait :  $\frac{df_4}{dT} < 0$ . Voici deux preuves à l'appui.

Comparons deux courbes de faisceau II, l'une pour une amplitude  $A_1$  petite, l'autre pour une amplitude  $A_2$  grande. Pour la première nous avons sensiblement  $W_1 = f_3(T)A_1$ , le second terme devenant négligeable. Pour la seconde,  $W_2 = f_3(T)A_2[1 + f_4(T)A_2]$ .

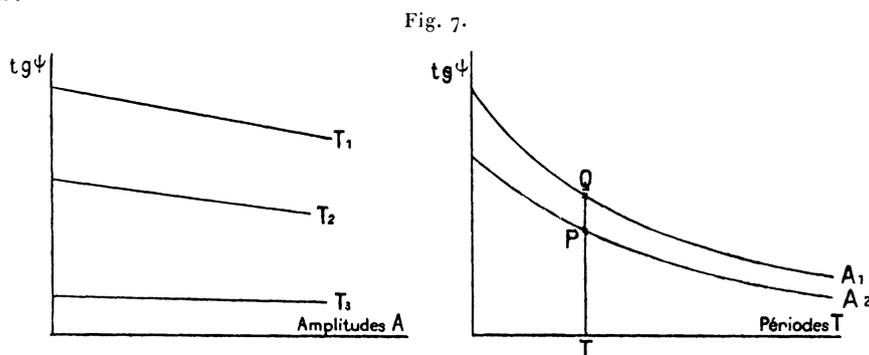
Pour que le minimum corresponde sur la courbe II à une période plus petite, il faut que  $1 + f_4(T)A_2$  diminue à mesure que  $T$  croît. Donc  $f_4(T)$  diminue quand  $T$  croît.

Partons d'un courbe I correspondant à la période  $T_3$ . Comparons les aires pour deux amplitudes  $A_1$  et  $A_2$ . Le rapport

$$\frac{W_{23}}{W_{13}} = \frac{A_2}{A_1} \frac{1 + f_4(T_3)A_2}{1 + f_4(T_3)A_1}$$

a une certaine valeur. Pour une autre courbe  $T_2$  de période plus petite, le même rapport a une valeur plus grande. Donc  $f_4$  doit croître quand  $T$  diminue.

*Étude du diamètre des cordes verticales (fig. 7).* — Le diamètre des cordes verticales de l'ellipse fait un angle  $\psi$  avec l'axe des abscisses sur lequel sont portés les  $x$ .



En fonction de l'amplitude ( faisceau I), on a

$$\text{tang } \psi = f_5(T) - f_6(T)A; \quad \frac{df_5}{dT} < 0, \quad \frac{df_6}{dT} < 0.$$

A la vérité, les courbes obtenues ne sont pas strictement des droites, mais des courbes hyperboliques qui admettraient l'axe des amplitudes pour asymptotes.

En fonction de la période ( faisceau II), les courbes sont hyperboliques.

Comparons deux courbes pour les amplitudes  $A_1$  et  $A_2$  :

$$\overline{PQ} = \text{tang} \psi_1 - \text{tang} \psi_2 = (A_2 - A_1) f_6(T) \quad \frac{d \cdot \overline{PQ}}{dT} = (A_2 - A_1) \frac{df_6}{dT}.$$

Or PQ diminue quand T augmente, ce qui est bien conforme aux conditions posées.

*Étude du diamètre des cordes horizontales.* — On obtient des courbes tout à fait analogues à celles qui se rapportent au diamètre des cordes verticales.

27. *Hypothèse de Coulomb, Stokes, L. Kelvin.* — Il y aurait une sorte de frottement proportionnel à la vitesse de déformation :

$$\begin{aligned} X &= \Gamma x + f \frac{dx}{dt}; & X_0 &= A \sqrt{\Gamma^2 + \frac{4\pi^2 f^2}{T^2}}, & \text{tang} \chi &= -f\omega : \Gamma, \\ W &= \frac{2\pi^2 A^2 f}{T}, & \text{tang} \psi &= \Gamma, & \text{tang} \varepsilon &= \Gamma + \frac{4\pi^2 f^2}{T^2 \Gamma}. \end{aligned}$$

Cette hypothèse ne satisfait pas aux résultats expérimentaux. L'aire n'a pas de maximum en fonction de T; elle tend vers  $\infty$  quand T tend vers 0. L'angle  $\psi$  est constant. Le couple maximum croît linéairement en fonction de l'amplitude; il tend vers une limite finie,  $X_0 = A\Gamma$ , quand T devient infini. Il n'y a donc aucune chance pour que ce système d'hypothèses ait quelque rapport avec la réalité : c'est cependant pour les métaux visqueux qu'il est le moins improbable.

28. *Hypothèse de M. Brillouin.* — Un cas particulier d'hypothèses plus générales proposées par M. Brillouin se traduit par l'équation que nous avons déjà utilisée comme cas particulier d'hypothèses très différentes :

$$\begin{aligned} dx &= K dX + \varphi X dt, \\ X_0 &= \frac{2\pi A}{\sqrt{\varphi^2 T^2 + 4\pi^2 K^2}}, & \text{tang} \chi &= -\varphi : K\omega, \\ W &= \frac{2\pi^2 A^2 \varphi T}{\varphi^2 T^2 + 4\pi^2 K^2}, & \text{tang} \psi &= \frac{4\pi^2 K}{\varphi^2 T^2 + 4\pi^2 K^2}, & \text{tang} \varepsilon &= \frac{1}{K}. \end{aligned}$$

Remarquons que, dans cette hypothèse et dans le cas plus général où l'on aurait

$$dx = K dX + \varphi(X) dt,$$

la courbe couperait l'axe des  $x$  suivant une direction invariable définie par la condition  $dx = K dx$ ; car, d'après la nature du phénomène, on devrait avoir  $\varphi(0) = 0$ .

Lorsque la courbe est une ellipse, le diamètre des cordes horizontales est parallèle à cette direction : l'angle  $\varepsilon$  est constant. Nous savons que l'expérience ne confirme pas ce résultat.

L'expression donnant les aires est *qualitativement* conforme à l'expérience; nous avons une courbe parabolique en fonction de  $A$  (il est vrai, privée du terme en  $A$  que donne l'expérience) et un maximum en fonction de  $T$ . L'aire est nulle pour  $T=0$  et  $T=\infty$ . L'aire est maxima pour une période  $T_m = 2\pi K : \varphi$ ; on a  $W_m = \pi A^2 : 2K$ .

Pour les courtes périodes, on a sensiblement  $W = A^2 \varphi T : 2K^2$ .

Pour les longues périodes,  $W$  diminue hyperboliquement suivant la formule

$$W = 2\pi^2 A^2 : \varphi T.$$

On peut écrire : longues périodes,  $W = 2W_m T_m : T$ ; courtes périodes,  $W = 2W_m T : T_m$ .

Pour les courtes périodes,  $X_0$  est constant; la courbe  $X_0$  en fonction de  $T$  débute normalement à l'axe des ordonnées. Ce n'est pas conforme à l'expérience; reste à savoir si l'on possède bien *le début* de la courbe expérimentale.

Même remarque pour  $\tan \psi$ .

En somme, ce système d'hypothèses, tout en n'étant pas parfaitement satisfaisant pour ce qui a trait au diamètre des cordes horizontales, redonne l'essentiel des résultats expérimentaux. Il faut remarquer qu'il suppose les phénomènes actuels indépendants des phénomènes antérieurs; il laisse de côté non seulement la réactivité, mais encore les modifications que les variations de vitesse apportent sûrement à la forme de la fonction  $\varphi$ . Il peut donc être complété sans difficultés mathématiques et sans contradiction logique.

29. *Généralisation de M. Brillouin.* — M. Brillouin propose une généralisation qui revient à superposer l'hypothèse de Coulomb et se traduit par l'équation

$$\frac{dx}{dt} + f_1 \frac{d^2x}{dt^2} = K \frac{dX}{dt} + \varphi X,$$

$$X_0 = \frac{2\pi A}{\sqrt{T^2 \varphi^2 + 4\pi^2 K^2}} \sqrt{1 + \frac{4\pi^2 f_1^2}{T^2}}, \quad \tan \chi = \frac{1}{\omega} \frac{\varphi + K f_1 \omega^2}{\varphi f_1 - K},$$

$$W = \frac{2\pi^2 A^2}{T} \frac{\varphi T^2 + 4\pi^2 K f_1}{\varphi^3 T^2 + 4\pi^2 K^2}, \quad \tan \psi = -\frac{\omega^2 (\varphi f_1 - K)}{\varphi^2 + K^2 \omega^2}, \quad \tan \varepsilon = -\frac{1 + f_1^2 \omega^2}{\varphi f_1 - K}.$$

Il est douteux que cette généralisation soit acceptable. Elle donne bien pour  $\varepsilon$  un angle croissant quand la période diminue, mais l'aire ne présente plus de maximum; pour  $T=0$ ,  $W=\infty$ .

30. *Autres généralisations.* — 1° Reprenons l'équation plus générale

$$dx = K dX + \varphi(X) dt.$$

Nous avons déjà vu que, quelle que soit la forme de la fonction  $\varphi$ , puisque par essence on doit avoir  $\varphi(0) = 0$ , la courbe doit couper l'axe des  $x$  suivant l'inclinaison caractéristique de l'élasticité parfaite :  $dx = K dX$ .

Donc l'hypothèse est certainement insuffisante.

On peut montrer que, quelle que soit la forme de la fonction  $\varphi$ , l'aire  $W$  comprise dans la courbe s'annule pour une période nulle et varie proportionnellement à la période pour une période petite. Comme pour  $T = \infty$ , on a sûrement  $W = 0$ , il n'y aura pas de difficulté du côté des aires.

2° *On suppose le frottement visqueux ou l'élasticité fonction de la période.* — Il est bon de remarquer que cet ordre d'hypothèses n'a plus rien qui ressemble à une théorie. On pourra toujours, en introduisant la période dans les paramètres, faire coïncider le résultat avec ce que l'on voudra; mais on ne pourra plus interpréter ce résultat d'une manière générale et indépendante de la forme sinusoïdale imposée au parcours.

Il est clair que, si nous remplaçons  $K$  par  $K - K'\omega$ , la courbe coupera l'axe des  $x$  suivant une direction qui devient d'autant plus verticale que  $\omega$  est plus grand et par conséquent que la période diminue. Comme la courbe reste une ellipse, le diamètre des cordes horizontales se redresse à mesure que la période diminue. Quant à l'aire  $W$ , elle reste encore nulle pour  $T = 0$  et  $T = \infty$ .

En définitive, il n'y a chance d'espérer représenter les résultats que par une théorie plus complète comprenant la réactivité et faisant influencer sur la loi de déformation actuelle les déformations antérieures. Mais j'hésite à penser que la manière dont jusqu'à présent on a traité la réactivité puisse être de quelque utilité.

#### OSCILLATIONS LIBRES.

31. *Impossibilité d'emploi de la méthode des oscillations libres.* — Cette méthode consiste à suspendre une masse de moment d'inertie  $I$  au fil étudié, à écarter de la position d'équilibre et à déterminer la loi des oscillations de torsion.

Elle est souvent inapplicable, parce que : 1° le fil de matière franchement visqueuse ne supporte que des charges très petites; 2° l'amortissement est si grand que le nombre des oscillations est insuffisant pour qu'on puisse déterminer sur elles quoi que ce soit avec précision.

M. Brillouin a étudié théoriquement ce cas (*loco citato*, n<sup>os</sup> 32 et 37) dans

l'hypothèse simple du n° 28. On a

$$X = -I \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \frac{dx}{dt} = u, \quad IK \frac{d^2 u}{dt^2} + \varphi I \frac{du}{dt} + u = 0.$$

La durée d'oscillation est  $T = 2\pi : \sqrt{\frac{I}{IK} - \frac{\varphi^2}{4K^2}}$ .

L'oscillation est sinusoidale amortie, de la forme  $X = X_0 e^{-\lambda t} \sin \omega t$ ,  $t = \varphi : 2K$ .

Le décrément logarithmique est :  $\lambda T = \varphi T : 2K$ .

Il est *proportionnel* à la période et indépendant de l'amplitude.

Comparons à ce que donne l'hypothèse classique de Coulomb (n° 27) :

$$\begin{aligned} X &= \Gamma x + f \frac{dx}{dt}, & X &= -I \frac{d^2 x}{dt^2}, \\ I \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + \Gamma x &= 0, & T &= 2\pi I \frac{2}{\sqrt{4\Gamma I - f^2}}, \\ \lambda &= \frac{f}{2I}, & \lambda T &= fT : 2I. \end{aligned}$$

Éliminons I en nous servant de la formule approchée :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\Gamma}};$$

il vient  $\lambda T = 2\pi^2 f : \Gamma T$ . Ainsi le décrément est ici *en raison inverse* de la période et indépendant de l'amplitude. Les caractères des deux amortissements en fonction de la période sont tout différents.

Étudions la variation de la période

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{I}{IK} - \frac{\varphi^2}{4K^2}}} = \frac{2\pi\sqrt{IK}}{\sqrt{1 - \frac{\varphi^2 I}{4K}}}$$

Si I est assez petit, le premier terme l'emporte beaucoup sur le second; on a simplement  $T = 2\pi\sqrt{IK}$ , absolument comme pour un fil parfaitement élastique. La période est proportionnelle à  $\sqrt{I}$ . Pour de grands moments d'inertie, il n'en est plus ainsi. La période croît plus vite que  $\sqrt{I}$ , puisque le dénominateur décroît à mesure que I augmente.

Si l'on admettait que la durée d'oscillation doit se calculer comme première approximation avec l'inclinaison des cordes verticales,

$$T = 2\pi\sqrt{IK'}, \quad K' = \frac{I}{\text{tang} \psi} = \frac{\varphi^2 + K^2 \omega^2}{K \omega^2} \quad (\text{n° 28}).$$

On trouverait pour la période :

$$T = 2\pi \frac{\sqrt{IK}}{\sqrt{1 - \frac{I\varphi^2}{K}}}$$

32. *Oscillateur suspendu par un fil aussi parfaitement élastique que possible et soumis au couple de torsion du fil visqueux et à son amortissement.* — Malheureusement la méthode des oscillations libres est inapplicable pour les raisons que nous avons dites. On doit la modifier dans un sens qui la rapproche beaucoup de la méthode des cycles de torsion imposés : *il devient impossible de déterminer les amortissements.* D'ailleurs, si intéressantes que soient les méthodes que nous allons passer en revue, elles doivent céder le pas à la méthode dynamométrique, quand des considérations d'installation matérielle ou de grandeurs de la période ne forcent pas à abandonner cette dernière.

J'ai indiqué, voici plusieurs années, une méthode pour étudier l'énergie perdue par un fil tordu dans un cycle d'opérations. Un oscillateur, de moment d'inertie  $I$ , est suspendu à un fil auxiliaire *aussi parfaitement élastique que possible*. Soit  $\Gamma$  la constante de torsion : tordu d'un angle  $x$ , l'énergie potentielle est  $W = \frac{\Gamma x^2}{2}$ .

L'étude de la loi d'amortissement, c'est-à-dire de la loi de variation de l'amplitude en fonction du numéro d'ordre de l'oscillation, fournit l'énergie dissipée  $\Delta W$  pendant chacune des oscillations.

On peut, en faisant varier le moment d'inertie, déterminer à l'avance l'énergie absorbée par le système pour une oscillation, en fonction de la période et de l'amplitude. Cette absorption est due tant au fil qu'à l'air dans lequel se fait l'oscillation.

Suspendons maintenant le fil à étudier (fil 2) axialement sous le fil auxiliaire, et fixons l'extrémité inférieure sous une charge convenable et de manière qu'il soit parfaitement vertical.

Supposons que tout se passe comme s'il était caractérisé par une constante  $\Gamma_1$ , et comme s'il absorbait par cycle une quantité d'énergie  $\Delta W_1$ .

Pour le même moment d'inertie  $I$  de l'oscillateur, les périodes avec ou sans le fil 2, sont

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\Gamma}}, \quad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\Gamma + \Gamma_1}};$$

d'où

$$\frac{\Gamma + \Gamma_1}{\Gamma} = \frac{T^2}{T_1^2}, \quad \Gamma_1 = \Gamma \left( \frac{T^2}{T_1^2} - 1 \right).$$

On peut ainsi déterminer  $\Gamma_1$  en fonction de  $T_1$ .

Mais d'autre part nous savons que, pour cette période  $T_1$  et pour l'amplitude actuelle  $x_0$ , la diminution d'amplitude sans le fil 2 est  $\Delta x$ . Avec le fil 2 elle est  $\Delta x_1$ .

On a donc  $\Delta W = \Gamma x_0 \Delta x$ ,  $\Delta W' = \Gamma x_0 \Delta x_1$ .

L'énergie dissipée par le fil 2 est  $\Delta W_1 = \Gamma x_0 (\Delta x_1 - \Delta x) = \Delta W' - \Delta W$ .

Il n'y a dans cette façon de procéder qu'une hypothèse. Quand on ajoute le fil 2, la période passe de  $T$  à  $T_1$ , sans qu'on ait changé le moment d'inertie. Or, pour déterminer l'absorption  $\Delta W$  du fil 1 seul avec cette même période  $T_1$ , on doit diminuer le moment d'inertie. Il faut donc admettre que l'absorption d'énergie par l'air est, pour une période donnée, très sensiblement indépendante du moment d'inertie et, par conséquent, de la forme de l'oscillateur, si l'on modifie le moment d'inertie par un changement de forme.

Il est facile de voir dans quel sens est l'erreur. Généralement, pour diminuer le moment d'inertie, on rapproche des masses de l'axe de torsion; on diminue donc la résistance par l'air. On risque donc d'évaluer trop bas la déperdition  $\Delta W$  et par suite trop haut la dissipation  $\Delta W_1$ . Il serait imprudent de changer le moment d'inertie en modifiant la charge du fil 1. On peut tourner la difficulté en échangeant les places de corps de même forme extérieure et de masses différentes.

33. *Application de la méthode.* — La méthode n'est donc vraiment pratique que si l'amortissement dû à l'air et au fil 1 est petit vis-à-vis de l'amortissement dû au fil 2. Il faut de plus que ce dernier amortissement soit lui-même petit vis-à-vis de la réserve d'énergie potentielle du fil 1. D'où résultent des conditions contradictoires.

Pour que  $W$  soit grand, il faut que  $\Gamma$  soit grand. La détermination de  $\Gamma_1$  se fait alors sans grande approximation, parce que le rapport  $T : T_1$  est très voisin de 1. D'autant qu'une erreur sur  $T$  ou  $T_1$  donne une erreur double sur  $T^2 : T_1^2$ .

On est conduit à scinder l'expérience en deux parties. Dans une première, on prend le fil 1 relativement gros. La durée d'oscillation est peu modifiée par l'adjonction du fil 2, ce qui a l'avantage d'une détermination commode de  $\Delta W$ . On détermine ainsi les dissipations d'énergie dues au fil 2; son module de torsion est mal déterminé. Dans une seconde expérience, on prend le fil 1 fin. On détermine avec une approximation meilleure le rapport  $\Gamma : \Gamma_1$ , mais l'absorption; d'énergie est mal déterminée, parce qu'on est forcé d'avoir recours à un entretien extérieur de l'oscillation qui, sans changer notablement la durée d'oscillation, introduit une complication considérable dans la mesure de l'énergie formée et dissipée.

M. Carrière n'a utilisé que cette dernière méthode.

Nous savons (*Journal de Physique*, t. I, 1902, p. 21) que, pour des fils de cuivre étirés ou recuits, il est à peu près impossible de constater une différence

entre la période calculée par la formule  $T = 2\pi\sqrt{I:\Gamma}$  et la période déterminée expérimentalement. Au contraire pour le fil d'eutectique il n'existe pas une constante  $\Gamma$ , indépendante de la période. Conformément à l'expression plus générale de M. Brillouin, ce paramètre décroît à mesure que la période augmente.

34. *Diverses formes d'entretien.* — Le mode d'entretien théoriquement le plus simple consiste à imposer à l'oscillateur un couple connu  $C$  sur un parcours angulaire connu  $\Delta\theta$ , au voisinage de la position d'équilibre pour ne pas changer la durée d'oscillation. Le travail fourni est  $C\Delta\theta$ . Comme la durée d'oscillation est variable, et par conséquent aussi la vitesse maxima au passage par la position d'équilibre, il est à peu près impossible d'appliquer cette méthode sans employer un entretien automatique, contacts à mercure et passage d'un courant  $i$  connu agissant sur des aimants permanents liés à l'oscillateur. La longueur  $l$  des contacts est indépendante et de l'amplitude et de la vitesse : l'énergie fournie est proportionnelle à  $li$ . J'ai appliqué cette méthode à l'étude du caoutchouc.

Si l'entretien n'est pas automatique, il n'est pratique que d'imposer un couple pendant un temps donné,  $C\Delta t$ , ou plus généralement de produire une impulsion  $\int_0^{\Delta t} C dt$ . Par exemple on lance dans une bobine un courant  $i$  constant pendant un temps invariable  $\Delta t$ ; le champ agit sur un aimant permanent lié à l'oscillateur. Ou bien on lance une quantité d'électricité connue  $\int_0^{\Delta t} i dt$ ; le courant n'a plus besoin d'être constant, ni le temps  $\Delta t$  connu. Cette méthode d'entretien est beaucoup moins simple que la précédente, comme le montre le calcul suivant.

On donne à un pendule une impulsion  $\delta$  lors du passage par la verticale, on demande quel est le travail fourni au pendule.

Soient  $I$  le moment d'inertie,  $C$  le couple à chaque instant. Par définition l'impulsion a pour expression

$$\delta = \int C dt.$$

Soient  $u$  la vitesse angulaire,  $W$  l'énergie contenue dans le système oscillant  $W = Iu^2 : 2$ . On a d'ailleurs, d'après les lois de la dynamique,

$$C = I \frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad \delta = \int C dt = I \int \frac{d^2\theta}{dt^2} dt = I \Delta u, \quad \Delta W = Iu \Delta u = u\delta.$$

*L'énergie fournie est mesurée par l'impulsion multipliée par la vitesse angulaire actuelle.* — Soit  $\theta = \theta_0 \sin \omega t$  la loi du mouvement. La vitesse  $u$  au

passage par la position d'équilibre est

$$u = \theta_0 \omega = \frac{2\pi\theta_0}{T}, \quad \Delta W = 2\pi \frac{\theta_0 \delta}{T}.$$

On a vu dans le Mémoire de M. Carrière quelles difficultés présente l'application de cette méthode quand la quantité d'énergie à fournir est faible. On ne peut compter dessus pour mesurer la dissipation d'énergie.

THÉORIE DE M. BRILLOUIN (*Ann. de Phys.*, 7<sup>e</sup> série, t. XIII, 1898).

35. *Théorie de M. Brillouin.* — M. Brillouin a donné en 1898 une théorie des déformations permanentes, fort remarquable en soi, mais que, faute d'expériences, il a appliquée à des cas pour lesquels elle ne semble pas faite. Il est aisé de trouver une interprétation plus satisfaisante des hypothèses sur lesquelles il s'appuie, l'interprétation actuelle modifiant complètement la physionomie des expériences qu'il cherche à expliquer.

Tandis qu'il applique sa théorie aux métaux à frottement solide (cuivre), elle convient plus exactement aux métaux visqueux (eutectique par exemple).

J'ai montré que l'hypothèse d'une viscosité est immédiatement traduite par les formes équivalentes

$$(1) \quad dx = \mathbf{K} d\mathbf{X} + \varphi(\mathbf{X}) dt;$$

$$(1') \quad x = \mathbf{K}\mathbf{X} + \int_0^t \varphi(\mathbf{X}) dt.$$

M. Brillouin propose une forme peu différente

$$x = \mathbf{K}\mathbf{X} + \Phi\left(\int_0^t \mathbf{X} dt + \mathbf{A}\right) - \Phi(\mathbf{A}),$$

où  $\mathbf{A}$  est une constante d'intégration. Il est clair que, si l'on se borne à des comparaisons qualitatives de la théorie et de l'expérience, les deux expressions reviennent au même. En particulier, si l'on pose  $\varphi(\mathbf{X}) = \varphi\mathbf{X}$ ,  $\Phi(\mathbf{X}) = \Phi\mathbf{X}$ , elles sont rigoureusement identiques. C'est pour cela qu'en discutant cette forme simple, je lui donne le nom de M. Brillouin.

Il suffit d'ailleurs d'énoncer les hypothèses mécaniques qui sont à la base de la théorie, pour voir quelle est sa nature intime. M. Brillouin considère les corps comme formés de grains cristallins, isolés, très petits, noyés dans une matière

visqueuse. Les grains sont dépourvus de viscosité et le ciment visqueux dépourvu d'élasticité.

Il n'est pas possible d'énoncer plus nettement le problème des solides visqueux : la théorie conviendra donc, au moins qualitativement, à l'eutectique. Mais elle ne peut convenir, *même grossièrement*, aux métaux pour lesquels le principe de Coulomb est la pierre de touche. Si le métal est composé de grains cristallins noyés dans un ciment visqueux, il est impossible de l'amener à être parfaitement élastique.

36. Ceci posé, pourquoi M. Brillouin a-t-il essayé de faire rentrer dans sa théorie les phénomènes observés dans le cuivre? L'explication repose sur les idées qu'on se faisait en 1898 sur l'érouissage :

« On sait, dit-il (n° 6), qu'on ramène à l'état initial, sans recuire, par une série de déformations cycliques d'amplitudes décroissantes, telles que les oscillations naturelles amorties. » Voilà qui était universellement admis, en particulier sur l'affirmation de M. Cantone qui disait avoir vérifié cette proposition par l'expérience; j'ai montré depuis que, *par aucun procédé*, on ne peut désécrouir un métal par des déformations; ce qui revient au même, que les transformations obtenues par déformation permanente ne sont pas renversables. Comme la définition que j'admets pour l'érouissage (transformation dans un sens unique de la nature du métal par déformations permanentes) est la traduction du sens le plus vulgaire du mot, ni l'une ni l'autre des formes (1') et (2') ne sont compatibles avec un érouissage, *tant qu'on suppose invariable la forme des fonctions  $\varphi$  ou  $\Phi$* . L'érouissage correspond, non pas à un changement de la valeur de la variable  $X = f(t)$  et, par conséquent, à un changement dans la valeur des termes  $\int_0^t \varphi(X) dt$  et  $\Phi\left(\int_0^t X dt + A\right)$ , mais à une modification, *dans un sens unique et non renversible*, des fonctions  $\varphi$  ou  $\Phi$ . La théorie de M. Brillouin s'applique donc aux métaux que j'appelle *visqueux et non érouissables*, au lieu de convenir aux métaux que j'appelle *non visqueux et érouissables*.

37. Entrons un peu plus avant dans le détail de la théorie et comparons les formes (1) et (2). *En un sens* la forme (2) est trop simple en ce qu'elle admet la loi linéaire pour la viscosité : c'est grâce à cette hypothèse que s'introduit partout l'impulsion  $I = \int_0^t X dt$ .

Mais on ne doit pas faire à une théorie le reproche de simplifier au début les fonctions arbitraires qu'elle introduit : ma critique signifie seulement qu'on n'a pas encore trouvé de corps satisfaisant à cette hypothèse simplifiée.

*En un autre sens, la forme (2) est plus complète que la forme (1).*

Les déformations parfaitement élastiques étant toujours très petites par rapport aux déformations permanentes, on peut dire que M. Brillouin pose l'équation

$$dx = K dX + F(x)X dt.$$

L'adjonction de cette fonction  $F(x)$  revient à supposer que les déformations modifient la grandeur du coefficient  $\varphi$  de l'équation simplifiée

$$dx = K dX + \varphi X dt.$$

Cette fonction  $F(x)$  est inopérante au point de vue *écrouissage*, parce que ses variations ne sont pas de sens unique. Elle ne peut produire que des modifications *subpermanentes, et cependant bien différentes de la réactivité, puisqu'elles portent sur la viscosité.*

M. Brillouin admet pour la fonction  $F$  une forme nécessitée par ses idées sur la structure; je crois cependant qu'il reste assez d'indétermination dans le mécanisme *grains cristallins noyés dans un ciment* pour laisser à peu près à notre choix la forme de cette fonction.

En définitive, comme dans son second Mémoire entier, M. Brillouin remplace la fonction  $\Phi$  par une fonction linéaire, ou si l'on veut la fonction  $F$  par une constante, c'est à l'équation simplifiée qu'il aboutit : les formes (1) et (2) se confondent.

Existe-t-il parmi les résultats expérimentaux quelques faits particulièrement favorables à l'hypothèse la plus générale de M. Brillouin? La réponse est négative, au moins pour l'eutectique. Je citerai en particulier que *l'état du fil allongé est très sensiblement le même pour un même allongement alors qu'on peut obtenir cet allongement avec des impulsions très différentes.*

38. « Pour les physiciens qui seraient plus frappés des cas d'exception à la loi que je propose, dit l'auteur au n° 22, que de l'ensemble des faits généraux qu'elle coordonne, je rappellerai que, pour mettre en évidence les caractères distinctifs de la loi nouvelle, j'ai adopté un type schématique, évidemment trop simplifié; les cristaux élastiques ne sont certainement pas absolument dépourvus de viscosité; le ciment visqueux n'est pas absolument dépourvu d'élasticité. »

C'est précisément dans cet esprit très large qu'il faut toujours discuter les théories; mais toutes les complications qu'on introduira ne peuvent faire qu'une théorie de la viscosité ait pour conséquence le principe de Coulomb. Sous ce rapport rien n'est instructif comme l'étude du n° 21 du Mémoire de M. Brillouin. Toutes les restrictions sur la généralité des formules, toutes les hypothèses sur la

fonction  $\Phi$  ne peuvent amener un métal visqueux à être parfaitement élastique, du seul fait qu'il a déjà subi des efforts. Aussi, ce principe de Coulomb, *qui n'est qu'approché mais qui est très général*, est-il donné comme cas limite réalisable dans des conditions infiniment particulières. Cet exemple suffit à montrer le tort que se fait une théorie, en voulant expliquer ce qui évidemment sort de son domaine.

Le deuxième Mémoire de M. Brillouin traite des oscillations. Les phénomènes présentés par l'eutectique satisfont qualitativement à la théorie. En particulier, on déduit immédiatement de l'équation simplifiée la diminution du module apparent quand la durée d'oscillation croît et simultanément l'augmentation de l'absorption d'énergie.

#### EXPÉRIENCES ANTÉRIEURES SUR LES MÉTAUX VISQUEUX.

39. Wertheim ayant tout mesuré, le plomb et l'étain n'ont naturellement pas échappé à sa sollicitude. Il donne des nombres parce qu'on en trouve toujours; ces nombres ne signifient rien comme la plupart des résultats de ses expériences. Ce serait perdre notre temps que de les discuter.

Tresca devant son universelle réputation à ses expériences sur l'écoulement des métaux, et du plomb en particulier, on devrait s'attendre à ce que le problème des déformations des métaux visqueux y soit posé, ne serait-ce qu'en termes vagues. L'étonnement n'est pas petit de se convaincre, par la lecture de son volumineux travail, qu'il ne s'est même pas douté qu'il y eût un problème. C'est ce que je vais établir, en résumant ce que contient le Mémoire (*Savants étrangers*).

Il a censément pour objet :

« 1° De montrer, par les résultats de nombreuses expériences, que les corps solides peuvent, sans changer d'état, s'écouler à la manière des liquides, lorsqu'on exerce sur leur surface des pressions suffisamment grandes;

» 2° De donner la théorie de cet écoulement et indiquer les déductions les plus importantes que l'on peut en tirer pour l'étude des mouvements moléculaires, pour celle du travail mécanique qu'ils exigent et pour diverses autres applications. »

Ces nombreuses expériences se réduisent à une seule. On place du métal dans un corps de pompe dont la base est percée d'un orifice et l'on comprime avec un piston. Tresca s'imagine, apparemment, que les expériences deviennent spécifiquement différentes parce qu'on modifie les dimensions du corps de pompe et de l'orifice, car il recommence consciencieusement ses expériences après des modifications de ce genre : d'où leur nombre. Je me suis maintes fois élevé contre cette manière de faire foisonner les résultats.

Tresca ne démontre pas la première proposition pour l'excellente raison qu'elle

est grossièrement erronée. Elle reviendrait à prétendre que les métaux, mous ou durs, plomb ou cuivre, ne s'écroutissent pas par la déformation; que la matière ne se modifie pas, ce qui est contraire pour le cuivre à l'expérience la plus vulgaire, ce qui est inexact pour le plomb et l'étain, et douteux même pour l'eutectique.

D'ailleurs avant lui on avait fabriqué des tubes de plomb avec un appareil très analogue au sien pour ne pas dire tout à fait pareil. On avait aussi étiré du fil à la filière; et, si ce n'est parce qu'on remplace une pression par une traction, je ne vois pas en quoi les deux expériences, celle de Tresca et celle du tréfilage, diffèrent spécifiquement. Ai-je besoin de dire que dans le tréfilage il y a véritablement écoulement au sens de Tresca et simultanément changement d'état pour presque tous les corps? Ce n'est qu'exceptionnellement et comme cas limite que le métal ne s'écrout pas.

40. Reste donc la « théorie de l'écoulement ».

Or, cette soi-disant théorie repose sur une hypothèse *géométrique*. « Il a suffi de faire une hypothèse, dit Tresca (*Savants étrangers*, t. XVIII, 1868, p. 770); il a suffi d'admettre que toutes les sections des anneaux que l'on pouvait concevoir à l'intérieur du cylindre central conservent toujours entre leurs sections horizontales et pendant qu'ils sont ensemble soumis à la même pression, un rapport constant, pour que tous les déplacements moléculaires puissent être étudiés et soumis au calcul. » Et, en effet, les résultats découlent tous de cette hypothèse et de la supposition d'une densité invariable.

Il suffit, dès lors, d'une minute de réflexion, pour comprendre que s'il en est ainsi ces résultats ne nous apprennent absolument rien sur le mécanisme des phénomènes, puisqu'ils peuvent se déduire d'une hypothèse qui n'implique en rien une constitution particulière des corps.

Et c'est franchement s'abuser sur l'importance de ces résultats que de prétendre avoir « mis hors de doute, par un nouveau procédé expérimental applicable à d'autres recherches, une des propriétés fondamentales de la matière, en même temps que d'avoir apporté des preuves nouvelles en faveur de l'unité de sa constitution » (p. 797).

C'est avec de tels dithyrambes qu'on retarde la solution des questions au lieu de l'avancer : on confond des choses absolument dissemblables en invoquant cette turlutaine : *l'unité de la matière*.

41. En définitive, l'expérience *unique* de Tresca et sa théorie *géométrique* (le mot est de Tresca lui-même, p. 768) délayées en 67 pages de texte (sans parler des Mémoires qui suivent) nous apprennent ce qu'on aurait pu déduire de l'expérience journalière du tréfilage.

Lorsqu'on augmente considérablement la pression, les forces de liaison, *quelles*

*qu'elles soient* entre les particules des corps, deviennent négligeables par rapport à cette pression. En un sens tous les corps se conduisent alors comme un liquide; les pressions s'y transmettent, d'une manière plus ou moins approchée, suivant la règle de Pascal. Il y a déformation par glissement, comme depuis longtemps l'avait suggéré Coulomb.

D'autre part, sous l'action de ces pressions, les failles ne peuvent se produire, parce que, suivant des expériences plus récentes de Spring, la pression suffit à ressouder, *si besoin est*, les particules qui tendraient à se séparer. Telle est, en gros, la théorie de l'emboutissage, du tréfilage, etc.

Loin de nous apprendre quoi que ce soit de spécifique sur la matière et de nous prouver son unité de constitution, ces résultats généraux proviennent, au contraire, de ce qu'on se place dans un cas limite où *l'importance des différences spécifiques disparaît*.

Il est bien clair que les expériences d'*écoulement* doivent d'autant mieux réussir que, d'après la nature des liaisons, le corps se rapproche davantage d'un liquide visqueux : c'est donc avec le plomb que Tresca opère de préférence; l'eutectique de plomb et d'étain lui aurait donné encore plus de satisfaction. Mais on conçoit que, partant sur une piste aussi fautive que celle de l'unité de constitution de la matière, il lui ait été précisément impossible de poser, même en termes vagues, le problème que nous traitons, à savoir s'il existe des métaux visqueux et des métaux qui ne le sont pas, formant deux groupes distincts, puisqu'il posait *a priori* que tous se comportent comme des liquides.

#### CONCLUSIONS.

Il existe deux groupes, au moins, de métaux dont les types extrêmes peuvent être désignés sous les noms de *métaux à frottement solide* et de *métaux visqueux*. On rencontre, bien entendu, tous les cas intermédiaires entre ces deux types. L'alliage eutectique de plomb et d'étain est le type à peu près pur des métaux visqueux. Le cuivre réalise à peu près le type des métaux à frottement solide.

Pour des déformations considérables et à mesure qu'on élève la température, tous les métaux se rapprochent du type visqueux, ainsi qu'il résulte, en particulier, de mes expériences sur le cuivre. Les expériences de Tresca n'ont pas d'autre signification.

Avec des modifications très légères, la théorie de M. Brillouin s'applique à froid aux métaux visqueux et, par conséquent, de mieux en mieux à tous les métaux, à mesure que les forces augmentent et que la température croît.

Les phénomènes de réactivité existent indépendamment du type auquel le métal appartient.

