ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

GEORGES REMOUNDOS

Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série, tome 8 (1906), p. 1-72
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1906_2_8__1_0>

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE.

SUR LES ZÉROS

D'UNE

CLASSE DE FONCTIONS TRANSCENDANTES,

PAR M. GEORGES REMOUNDOS,

Διδάκτορος de l'Université d'Athènes,
Ancien Élève (étranger) de l'École Normale supérieure.

INTRODUCTION.

1. Le célèbre théorème, découvert par M. Picard en 1880, est aujourd'hui assez classique pour me dispenser de la nécessité d'en signaler l'importance dans la théorie des fonctions analytiques. Son auteur l'a établi à l'aide de la théorie des fonctions modulaires et il concerne les valeurs d'une fonction analytique uniforme dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé.

C'est M. Borel qui a, le premier, donné une démonstration directe, en se bornant aux fonctions entières, et signalé son importance toute remarquable dans la théorie des fonctions entières. M. Borel a donné des généralisations importantes du théorème de M. Picard en montrant que le *cas d'exception* a un sens plus large, si l'on tient compte du mode, dont le module des zéros croît indéfiniment avec leur rang.

Dans son Mémoire *Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta mathematica*, t. XX), M. Borel a utilisé sa théorie des fonctions croissantes pour établir la généralisation la plus étendue, que l'on puisse exiger, du théorème de M. Picard pour les fonctions entières ou méromorphes (¹).

(¹) Nous avons obtenu, M. Wiman et moi, des généralisations plus précises de la notion du *cas d'exception* concernant les fonctions uniformes elles-mêmes; mais j'exposerai ces résultats ultérieurs dans d'autres Mémoires qui paraîtront prochainement. *Voir* mes Notes (*Comptes rendus*, 20 juin 1904, 8 mai 1905).

A cette occasion, il a démontré l'impossibilité de certaines identités, où il figure un nombre fini d'exponentielles (Mémoire cité, p. 387).

M. Borel, en énonçant cette proposition, s'exprime ainsi :

« C'est là, semble-t-il, la généralisation proprement dite la plus étendue que l'on puisse exiger pour le théorème de M. Picard. »

Or, parmi les identités de M. Borel, il n'y a que celles qui contiennent deux exponentielles qui ont servi pour établir les généralisations du théorème de M. Picard, concernant les fonctions *uniformes*. Donc, la proposition fondamentale disait quelque chose de plus.

Je démontre dans ce Mémoire que cette généralisation ne concerne pas seulement les fonctions uniformes; dans le cas où le nombre des exponentielles, figurant dans les identités de M. Borel, est supérieur à deux, sa proposition fondamentale se traduit par l'extension du théorème de M. Picard aux fonctions *multiformes*.

Ce fait justifie d'une façon remarquable l'assertion, plus haut citée, de M. Borel.

Ce Mémoire est divisé en trois Parties :

Dans la première Partie, j'étudie les zéros des fonctions analytiques ayant un nombre fini de branches dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé.

Le théorème fondamental de M. Borel, dont nous venons de parler, y sert de base.

Dans la deuxième Partie, je traite le même sujet pour une classe étendue de fonctions multiformes, ayant un nombre infini de branches dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé. C'est toujours au point de vue de l'extension du théorème de M. Picard. J'y établis des théorèmes généraux qui comprennent comme cas particuliers ceux qui ont été démontrés dans la première Partie.

Dans le Chapitre I de la première Partie, je me borne au cas où le point essentiel est à l'infini et unique, de sorte que la fonction multiforme considérée n'a d'autres singularités à distance finie que des pôles et des points critiques algébriques. Ce sont les fonctions que j'ai appelées *transcendantes algébroïdes* et qui comprennent comme cas particuliers les fonctions entières et méromorphes. Il est clair que ces transcendantes sont les plus simples parmi les transcendantes multiformes et leur étude doit être précédée de celle des autres.

Dans le Chapitre II de la même Partie, je passe au cas général que je traite en m'appuyant sur les résultats récents de M. Maillet [*Sur les fonctions monodromes à point singulier essentiel isolé* (*Bulletin de la Société mathématique,* 1903, fasc. 1)]. On sait que l'origine de ces résultats se trouve dans une lettre de M. Hadamard adressée à M. Picard en 1896 et insérée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. CXXII.

La deuxième Partie est subdivisée en trois Chapitres. Dans le premier, j'étudie certaines classes de fonctions multiformes qui jouissent de propriétés remarquables. Je signale, en particulier, des fonctions d'un nombre infini de branches pour lesquelles le nombre des valeurs exceptionnelles est limité et je donne le moyen de les reconnaître.

Dans le Chapitre II, je tâche d'étendre les résultats précédents aux fonctions définies par une équation telle que

$$F(z, u) = 0,$$

$F(z, u)$ étant une fonction entière des z et u, absolument quelconque. J'établis un théorème général au sujet de la nature de l'ensemble des valeurs exceptionnelles.

A cette occasion, j'aborde le problème intéressant de l'extension de la proposition fondamentale de M. Borel au cas où le nombre des exponentielles, figurant dans ses identités, est infini, et j'indique un artifice qui me paraît destiné à surmonter les difficultés.

Je me suis toujours borné, pour fixer les idées, au cas où les coefficients de $F(z, u)$ sont des fonctions entières. Les remarques de MM. Hadamard et Maillet suffisent pour étendre les résultats au cas d'un point singulier essentiel quelconque.

Dans le Chapitre III, j'expose quelques applications à la théorie des équations différentielles en rattachant ces considérations avec les points singuliers *d'indétermination incomplète,* signalés par M. Painlevé.

Enfin, dans une troisième Partie, je me propose la tâche de compléter les théorèmes donnés par M. E. Borel sur les fonctions entières à *croissance régulière* et je fais une étude systématique de ces fonctions, en établissant des théorèmes intéressants. J'y signale les problèmes importants, qui se rattachent au but que nous nous sommes proposé.

J'entrevois, dans cette étude, la nécessité de considérer les arguments des zéros dans le cas où l'ordre ρ est un nombre entier.

2. Ce travail est le développement de trois Notes, dont deux ont été insérées dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* (20 avril 1903, *Une nouvelle généralisation du théorème de M. Picard sur les fonctions entières,* et 8 février 1904, *Sur les zéros d'une classe de transcendantes multiformes*).

La troisième Note a été publiée dans le *Bulletin de la Société mathématique de France,* 1904, fasc. I, sous le titre : *Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes.*

Voici les Ouvrages principaux qui ont traité du théorème de M. Picard et de ses généralisations :

E. Picard, *Mémoire sur les fonctions entières* (*Annales de l'École normale,* 1880).

E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 231, et t. III, p. 347.

J. Hadamard, Mémoire couronné en 1892 par l'Académie des Sciences et publié en 1893 dans le *Journal de Mathématiques*.

J. Hadamard, *Sur les fonctions entières* (*Comptes rendus*, extrait d'une lettre adressée à M. Picard, t. CXXII, 1896).

E. Borel, *Mémoire sur les zéros des fonctions entières* (*Acta mathematica*, t. XX, 1897).

E. Borel, *Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions* (*Leçons sur les fonctions entières* et *Leçons sur les fonctions méromorphes*).

E. Borel, *Contribution à l'étude des fonctions méromorphes* (*Annales de l'École normale*, 1902).

E. Maillet, *Mémoire sur les fonctions entières et quasi-entières* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1902, fasc. IV).

E. Maillet, *Sur les fonctions monodromes à point singulier essentiel isolé* (*Bulletin de la Société mathématique*, 1903, fasc. I).

A. Kraft, *Ueber ganze transcendante Functionen von unendlicher Ordnung. Inaugural Dissertation* (Universität zu Göttingen, 1903) (1).

3. Il est nécessaire, avant tout, de présenter au lecteur cette proposition fondamentale de M. Borel, qui est la base de la plus grande partie de notre travail.

Soient deux séries de n fonctions entières $G_1(z)$, $G_2(z)$, $\ldots$, $G_n(z)$; $H_1(z)$, $H_2(z)$, $\ldots$, $H_n(z)$, et supposons que le module maximum des $G_i(z)$ pour $(z)=r$ croît moins vite que $e^{\mu(r)}$, tandis que le module maximum des différences $H_i(z)-H_k(z)$ croît plus vite que $[\mu(r)]^{1+\alpha}$, $\mu(r)$ désignant une fonction croissante quelconque et α un nombre positif, aussi petit que l'on voudra, mais fini.

Le théorème de M. Borel consiste en ce que l'identité

$$G_1(z)\,e^{H_1(z)}+G_2(z)\,e^{H_2(z)}+\ldots+G_n(z)\,e^{H_n(z)}=0$$

entraîne nécessairement

$$G_1(z)=0,\qquad G_2(z)=0,\qquad \ldots,\qquad G_n(z)=0.$$

Dans sa démonstration, M. Borel distingue deux cas. Le premier cas s'applique toutes les fois où les différences H_i-H_k n'ont pas des ordres de croissance très différents; dans ce cas, la démonstration est plus simple. Nous verrons que c'est le cas qui nous intéresse ici, puisque dans toutes les identités de M. Borel, que nous allons rencontrer dans ce travail, les $H_i(z)-H_k(z)$ croissent de la même façon; j'entends par là que, si $e^{M_1(r)}$ et $e^{M_2(r)}$ désignent le module maximum de

(1) Il y a aussi d'autres travaux plus récents, que je citerai au cours du travail.

deux fonctions $H_i - H_k$, on a

$$e^{[M_2(r)]^{1-\varepsilon}} < e^{M_1(r)} < e^{[M_2(r)]^{1+\varepsilon}},$$

aussi petit que soit ε, à partir d'une certaine valeur de r.

On se trouve dans le second cas, lorsque l'une des différences $H_i(z) - H_k(z)$ croît plus vite que toute puissance des autres [1].

4. J'ai été amené à entreprendre ces recherches par suite d'une remarque faite par M. Painlevé dans son cours à l'École normale sur les fonctions abéliennes (année 1902-1903), auquel j'avais l'honneur d'assister. M. Painlevé a énoncé comme vraisemblable la proposition suivante :

Une fonction ayant ν branches dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé (on entend par là qu'il n'y a pas d'autres singularités essentielles dans un cercle assez petit décrit autour de ce point $z = \alpha$) prend dans le voisinage de ce point toutes les valeurs, sauf 2ν au plus.

Il a même ajouté que parmi les deux voies qui pourraient nous y conduire : la voie de M. Picard et la voie de M. Borel, c'est la première qui est plus aisée. Suivant cette indication de mon maître, j'ai commencé par la voie de M. Picard, mais, les résultats n'étant pas satisfaisants, j'ai dû entrer dans la voie de M. Borel, ce qui devait réussir.

Je suis heureux de pouvoir ici rendre publiquement témoignage de la profonde reconnaissance que je dois à la France, à ses savants, à la science desquels j'ai eu l'honneur de puiser.

Si j'ai pu accomplir jusqu'au bout la tâche que je me suis proposée, c'est surtout grâce à l'*École Normale supérieure* qui m'a fourni une excellente hospitalité et ses avantages scientifiques bien connus.

J'adresse ici mes remercîments respectueux au directeur de l'École, M. Perrot, dont le philhellénisme a développé une sollicitude constante à l'égard des élèves hellènes de l'École; au directeur de la Section scientifique, M. Jules Tannery, et à tous mes maîtres de l'École.

En particulier, j'adresse mes vifs remercîments à MM. P. Painlevé et Émile Borel pour leurs conseils et pour l'accueil excellent qu'ils ont bien voulu faire à mes recherches.

---

(1) Il est, d'ailleurs aisé de voir que ce cas se laisse ramener immédiatement au précédent par la décomposition de l'identité en plusieurs autres appartenant au premier cas.

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE I.

EXTENSION DU THÉORÈME DE M. PICARD AUX FONCTIONS A UN NOMBRE FINI DE BRANCHES.

1. Une fonction u de z, ayant un nombre ν de branches, satisfait à une équation de la forme

$$(1) \qquad f(z, u) = u^\nu + A_1(z)\, u^{\nu-1} + A_2(z)\, u^{\nu-2} + \ldots + A_{\nu-1}(z)\, u + A_\nu(z) = 0,$$

où $A_1(z)$, $A_2(z)$, $\ldots$, $A_\nu(z)$ désignent des fonctions entières ou méromorphes de z.

Suivant une expression déjà employée (*voir*, par exemple, les *Leçons de M. Borel sur les fonctions entières et méromorphes*) appelons [1] *valeur exceptionnelle* de la fonction $u = \varphi(z)$ à ν branches, définie par l'équation (1), toute valeur $u = u_1$ telle que l'équation

$$\varphi(z) = u_1$$

n'admette qu'un nombre fini de racines; il est clair que, alors, il en est de même de l'équation

$$f(z, u_1) = 0.$$

Nous allons démontrer ici que le nombre de ces valeurs est *fini* et jamais supérieur à 2ν.

2. Nous nous bornerons d'abord à un cas particulier où la démonstration est très élémentaire, c'est celui où l'*ordre* (ou le genre) des $A_1(z)$, $\ldots$, $A_\nu(z)$ est

---

(1) D'une façon plus précise nous démontrerons qu'une telle valeur de u doit être considérée comme exceptionnelle.

fini. Nous adoptons la définition bien naturelle donnée par M. Borel pour l'*ordre* d'une fonction méromorphe ([1]).

Nous appelons, avec M. Borel, *ordre* d'une fonction méromorphe $\frac{G_1(z)}{G_2(z)}$ le plus grand des ordres de $G_1(z)$ et $G_2(z)$, et nous démontrons aisément que l'ordre ainsi défini reste invariable par les substitutions de la forme

$$\left[f(z), \frac{M_1 f(z) + N_1}{M_2 f(z) + N_2}\right], \qquad f(z) = \frac{G_1(z)}{G_2(z)},$$

où M_1, N_1, M_2, N_2 désignent des fonctions entières d'ordre inférieur.

M. Borel, par la considération de l'ensemble de telles transformées d'une fonction méromorphe, a présenté le théorème de M. Picard (étendu aux fonctions méromorphes) sous une forme bien élégante (Mémoire cité, *Annales de l'École normale,* 1901), ainsi que ses généralisations.

Nous pensons qu'il est bien commode d'appeler *transcendantes algébroïdes à* ν *branches d'ordre* ρ toutes les fonctions $u(z)$ définies par une équation de la forme (1), ρ étant le plus grand des *ordres* des coefficients $A(z)$. En admettant cette définition, il est facile de prouver que l'ordre ainsi défini reste invariable lorsqu'on effectue sur u une transformation homographique. Si nous posons, en effet,

$$u = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,$$

$w(z)$ vérifiera une équation de la forme

$$w^\nu + a_1(z) w^{\nu-1} + a_2(z) w^{\nu-2} + \ldots + a_{\nu-1}(z) w + a_\nu(z) = 0,$$

où les $a_i(z)$ sont des expressions linéaires des $A_i(z)$ très faciles à obtenir. Les deux termes des fonctions méromorphes $a_i(z)$ sont au plus d'*ordre* ρ et, par conséquent, la transformation homographique n'a pas élevé l'ordre. Elle ne peut non plus l'abaisser, car alors la transformation inverse, qui est de même nature, l'élèverait.

La propriété d'invariance subsiste si l'on suppose que α, β, γ, δ désignent, au lieu des constantes, des fonctions entières d'*ordre* inférieur à ρ.

3. Après cette digression, revenons à notre sujet.

Nous remarquons d'abord que nous pouvons nous borner, sans restreindre la généralité de la question, au cas où les $A_i(z)$ sont toutes des fonctions entières,

---

([1]) Voir *Contribution à l'étude des fonctions méromorphes* (*Annales de l'École normale,* 1901) et ses *Leçons sur les fonctions méromorphes.*

car une valeur exceptionnelle (u_0) nous suffit pour ramener à ce cas le cas contraire, en faisant la transformation

$$u - u_0 = \frac{1}{w} \quad ({}^1).$$

Plaçons-nous donc dans ce cas et remarquons que l'infini et toutes les valeurs de u, pour lesquelles $f(z, u)$ est une constante ou un polynome, sont bien des *valeurs exceptionnelles*. Ces valeurs, quand elles existent, se calculent algébriquement, parce qu'elles ne dépendent pas du tout de la nature des transcendantes qui figurent dans l'équation (1). Il est donc tout naturel de les distinguer des autres, qui sont pour ainsi dire *intrinsèques*. Les premières pourraient être appelées *formelles*.

Nous appellerons (E) l'ensemble des valeurs de u pour lesquelles $f(z, u)$ soit une constante ou un polynome et nous démontrerons que le nombre de toutes les autres valeurs exceptionnelles ne dépasse jamais le nombre ν, lorsque toutes les $A_i(z)$ ne sont pas des polynomes.

Soient, en effet, $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_\nu$, $\nu + 1$ telles valeurs : on aura

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} f(z, u_0) = P_0(z)\, e^{Q_0(z)}, \\ f(z, u_1) = P_1(z)\, e^{Q_1(z)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f(z, u_\nu) = P_\nu(z)\, e^{Q_\nu(z)}, \end{array}\right.$$

$Q_0(z), Q_1(z), \ldots, Q_\nu(z)$ et $P_0(z), P_1(z), \ldots, P_\nu(z)$ désignant des polynomes, les premiers de degré au plus égal à ρ.

En éliminant $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ entre ces $\nu + 1$ équations (ce qui est toujours possible), on arrivera à la relation

$$(3) \qquad \alpha_0 P_0(z)\, e^{Q_0(z)} + \alpha_1 P_1(z)\, e^{Q_1(z)} + \ldots + \alpha_\nu P_\nu(z)\, e^{Q_\nu(z)} = \alpha,$$

où l'on a

$$\alpha_i = \begin{vmatrix} 1 & u_0 & u_0^2 & \ldots & u_0^{\nu-1} \\ 1 & u_1 & u_1^2 & \ldots & u_1^{\nu-1} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdots \\ 1 & u_{i-1} & u_{i-1}^2 & \ldots & u_{i-1}^{\nu-1} \\ 1 & u_{i+1} & u_{i+1}^2 & \ldots & u_{i+1}^{\nu-1} \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & u_\nu & u_\nu^2 & \ldots & u_\nu^{\nu-1} \end{vmatrix}, \qquad \alpha = \begin{vmatrix} 1 & u_0 & u_0^2 & \ldots & u_0^\nu \\ 1 & u_1 & u_1^2 & \ldots & u_1^\nu \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ 1 & u_\nu & u_\nu^2 & \ldots & u_\nu^\nu \end{vmatrix}.$$

Après cette transformation, les coefficients n'auront pas des pôles dans le domaine de infini; pour qu'ils deviennent des fonctions entières proprement dites, il faut faire encore la

Nous distinguons deux cas :

1° Aucun des polynomes $Q(z)$ n'est une constante; alors, quelle que soit la réduction qui puisse avoir lieu dans les termes du premier membre de (3), le terme algébrique (qui n'a pas d'exponentielle) sera toujours égal à α, quantité essentiellement différente de zéro. Quant à la réduction dont je viens de parler, elle arrive dans le cas où il y a des exponentielles dont le rapport est un polynome; cela est évidemment impossible lorsque les fonctions $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ sont linéairement distinctes, j'entends par là qu'il n'y a entre elles aucune relation linéaire à coefficients polynomes.

2° Il y a des polynomes $Q(z)$ qui sont des constantes; il est clair que cela ne se présentera pas, puisque aucune des valeurs $u_0, u_1, \ldots, u_\nu$ n'appartient, par hypothèse, à l'ensemble (E).

On arrive donc, dans tous les cas, à une relation de la forme

$$(4)\quad q_0(z)e^{Q_0(z)}+q_1(z)e^{Q_1(z)}+q_2(z)e^{Q_2(z)}+\ldots+q_n(z)e^{Q_n(z)}=q(z)\qquad (n\leqq\nu),$$

les $q_i(z)$ et $Q_i(z)$ étant des polynomes, dans laquelle $q(z)$ n'est pas identiquement nul. Une telle relation est impossible; son impossibilité est un cas particulier de la *proposition fondamentale de M. Borel* et se démontre par une voie élémentaire, sans qu'on ait à faire usage de la théorie générale des fonctions croissantes.

L'impossibilité en question est évidente dans le cas de $n=0$; pour la démontrer en général, il nous suffit donc de montrer que l'identité (4) entraîne une identité analogue ayant un terme de moins et dont les coefficients (ainsi que le second membre) ne peuvent être nuls que si ceux de l'identité (4) le sont. Pour montrer cela, il suffit de diviser les deux membres par $q(z)$ et prendre la dérivée du premier membre ainsi obtenu. On aura

$$(5)\quad \left[\left(\frac{q_0}{q}\right)'+\frac{q_0}{q}Q'_0\right]e^{Q_0-Q_n}+\left[\left(\frac{q_1}{q}\right)'+\frac{q_1}{q}Q'_1\right]e^{Q_1-Q_n}+\ldots+\left[\left(\frac{q_n}{q}\right)'+\frac{q_n}{q}Q'_n\right]=0.$$

Or, l'identité

$$\left(\frac{q_0}{q}\right)'+\frac{q_0}{q}Q'_0=0$$

entraîne

$$\frac{q_0}{q}=Ce^{-Q_0}\qquad (C=\text{const.}),$$

ce qui est évidemment impossible si q_0 et q ne sont pas identiquement nuls.

---

transformation $w=\dfrac{\omega}{E(z)}$, $E(z)$ désignant un polynome. Mais cette dernière transformation n'est pas tout à fait nécessaire; on pourrait bien s'en dispenser et alors les $P_i(z)$ des formules (2) désigneraient des fonctions rationnelles au lieu de polynomes.

Ainsi, l'identité (4) entraîne

$$q_0 = q_1 = \ldots = q_n = q = 0,$$

ce qui n'est pas, et, par conséquent, notre théorème est bien démontré.

4. Des raisonnements analogues nous permettent d'établir l'impossibilité de (4), dans le cas où les $Q_i(z)$ sont des fonctions entières de genre (ou d'ordre) fini. Il suffit d'appliquer la propriété bien connue d'une fonction $Q(z)$ d'ordre fini ρ, d'après laquelle, quel que soit ε donné à l'avance, il existe un nombre R tel que l'inégalité

$$r > R$$

entraîne

$$|Q(z)| < e^{r^{\rho+\varepsilon}},$$

tandis que l'inégalité

$$M(r) > e^{r^{\rho-\varepsilon}}$$

est vérifiée pour une infinité de valeurs de r croissant indéfiniment. Aussi le théorème de M. Hadamard ([1]) exprimé par l'inégalité

$$|Q(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}},$$

vérifiée sur une infinité de cercles de rayons indéfiniment croissants.

En effet, dans l'identité (5), le module des coefficients, à partir d'une certaine valeur de r, sera plus petit que $e^{r^{\rho+\varepsilon}}$, tandis que les exponentielles $e^{Q_i(z)}$ croissent aussi vite que $e^{e^{r^\rho}}$; d'une façon plus précise, on peut trouver une infinité de valeurs de r, remplissant des intervalles d'étendue assez grande, telles que le module maximum de toutes les exponentielles en question soit supérieur à $e^{e^{r^{\rho-\varepsilon}}}$, ε étant une quantité assez petite ([2]).

Si l'on effectue, sur l'identité (5), les mêmes opérations que sur (4), on arrivera à une autre de la même nature, et ainsi de suite. Supposons donc que l'on ait démontré que l'inégalité (5) entraîne la nullité de tous les coefficients; il en résultera encore de la même façon que ceux de l'identité (4) seront aussi nuls.

Cela posé, on voit immédiatement que notre théorème s'étend à une classe de transcendantes algébroïdes d'ordre infini; ce sont celles pour lesquelles les coefficients $A_i(z)$ de l'équation (1) vérifient, à partir d'une certaine valeur de r,

---

([1]) Complété par M. Borel dans son Mémoire déjà cité des *Acta mathematica,* t. XX.

([2]) Nous avons, par conséquent, une identité qui réalise bien les conditions exigées par le théorème fondamental de M. Borel.

l'inégalité (¹)

$$|A_i(z)| < e^{e^{r^{\rho+\varepsilon}}},$$

ε étant assez petit.

5. On peut donner à notre théorème des généralisations analogues à celles que M. Borel a données pour les fonctions entières ou méromorphes, en indiquant ainsi la relation qui existe entre l'ordre de la transcendante algébroïde considérée $u = \varphi(z)$ et l'exposant de convergence de la suite des zéros de l'équation

$$\varphi(z) = a, \tag{6}$$

où a n'est pas une valeur exceptionnelle.

Ainsi, *il n'y a pas plus de* 2ν *valeurs de* u, *pour lesquelles l'ordre réel de* $f(z, u)$ *soit inférieur au plus grand des ordres apparents des* $A_i(z)$ [c'est-à-dire à l'ordre de $u = \varphi(z)$, conformément à notre définition]. Ou encore : *L'exposant de convergence de la suite des zéros de l'équation* (6) *ne saurait être inférieur à l'ordre de la transcendante algébroïde* $u = \varphi(z)$ *pour plus de* 2ν *valeurs de la constante* a.

En effet, si j'appelle (E_1) l'ensemble des valeurs de u pour lesquelles $f(z, u)$ ait un ordre apparent inférieur à celui de $u = \varphi(z)$, je peux démontrer que le nombre des valeurs exceptionnelles, qui n'appartiennent pas à (E_1), est inférieur à $\nu + 1$. Nous serons encore ramenés à un cas particulier de la proposition fondamentale de M. Borel, celui où les $H_i - H_k$ sont des polynomes de degré ρ, tandis que les coefficients $G(z)$ sont des fonctions entières d'ordre inférieur à ρ (j'emploie les notations de M. Borel, *voir* l'Introduction).

Par suite, le théorème précité est établi, en tenant compte du fait que le nombre des (E_1) est au plus égal à ν, l'infini compris.

De même, *la densité des racines de l'équation*

$$\varphi(z) = Q(z), \tag{7}$$

$Q(z)$ *étant une fonction entière d'ordre inférieur à* ρ, *est conforme à l'ordre de* $u = \varphi(z)$; *il peut y avoir des équations exceptionnelles* (7), *mais leur nombre ne dépasse jamais* 2ν.

Je n'insiste pas sur la démonstration, qui se fait toujours par la méthode de l'élimination; on arrivera encore à une identité de la forme (3), dans laquelle les $p_i(z)$ ne sont plus des polynomes, mais des produits canoniques de facteurs

(¹) *Cf.* MAILLET, *Sur les fonctions monodromes ou à* ν *branches* (*Comptes rendus*, 11 mai 1903).

primaires d'ordre inférieur à ρ, et il en est de même des $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu, \alpha$, qui ne sont plus des constantes. On aura

$$\alpha = \begin{vmatrix} 1 & Q_0(z) & \ldots & [Q_0(z)]^\nu \\ 1 & Q_1(z) & \ldots & [Q_1(z)]^\nu \\ . & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 1 & Q_\nu(z) & \ldots & [Q_\nu(z)]^\nu \end{vmatrix},$$

expression qui ne peut être identiquement nulle, lorsque les fonctions entières Q_0, $Q_1, \ldots, Q_\nu$ sont distinctes.

6. M. Borel a établi sa *proposition fondamentale* en s'appuyant sur les propriétés suivantes des fonctions entières :

1° Les plus grandes valeurs et l'inverse des plus petites du module d'une fonction entière $G(z)$, pour $|z| = r$ assez grand, sont du même ordre de grandeur.

2° La dérivée $G'(z)$ d'une fonction entière croît comme la fonction elle-même; d'une façon plus précise, si $\mu(r)$ et $\mu_1(r)$ désignent les ordres de grandeur de $G(z)$ et $G'(z)$, les inégalités

$$[\mu(r)]^{1-\alpha} < \mu_1(r) < [\mu(r)]^{1+\alpha} \tag{8}$$

(α un nombre positif quelconque) sont vérifiées sur une infinité de cercles, dont les rayons remplissent des intervalles d'étendue totale assez grande; tels, par exemple, que ceux d'entre eux qui sont compris dans un intervalle donné, dépassent par leur étendue une fraction déterminée de cet intervalle.

Jusqu'ici nous n'avons utilisé que des cas particuliers de la proposition de M. Borel, où les $G^{(z)}$ et $H_i - H_k$ étaient des polynomes ou des fonctions entières d'ordre fini. Grâce à son théorème général, toutes les propositions que nous avons établies s'étendent au cas le plus général d'une transcendante algébroïde quelconque d'ordre fini ou *infini*.

Il en découle aussi le théorème suivant, qui comprend comme cas particuliers tous les précédents.

THÉORÈME I. — *u_i étant une certaine valeur de u, posons*

$$f(z, u_i) = Q_i(z)\, e^{H(z)}. \tag{9}$$

Si les modules de l'un au moins des coefficients $A_1(z), A_2(z), \ldots, A_\nu(z)$ *sont supérieurs à la fonction croissante $e^{\mu(r)}$, il n'y a pas plus de 2ν valeurs de u, pour lesquelles $Q_i(z)$ croisse moins vite que $e^{[\mu(r)]^{\frac{1}{2}}}$ ou plus généralement $e^{\mu(r)^{1-\alpha}}$, α étant une quantité positive quelconque.*

Ici l'ensemble (E) est formé de toutes les valeurs de u, pour lesquelles $f(z, u)$

n'ait pas la propriété de croître plus vite que $e^{\mu(r)}$, et dont le nombre est au plus égal à ν, l'infini compris.

Je tiens à signaler le cas simple, qui nous intéresse surtout, et qui s'énonce de la façon suivante :

Théorème II. — *Une transcendante algébroïde quelconque à ν branches prend dans le domaine de l'infini (qui est le point essentiel) toutes les valeurs, sauf, peut-être, 2ν au plus. Si le nombre de ces valeurs exceptionnelles est supérieur à 2ν, la fonction n'est pas transcendante, elle est algébrique.*

Faisons quelques remarques au sujet de ce théorème, qui d'ailleurs s'étendraient à ses généralisations.

1° Lorsqu'il n'y a aucune relation linéaire à coefficients constants ou polynomes entre les $A_1(z)$, $A_2(z)$, ..., $A_\nu(z)$, il n'y a aucune valeur finie (E) et par conséquent le nombre des valeurs exceptionnelles finies est inférieur à $\nu+1$.

2° Lorsque le nombre de ces valeurs atteint son maximum, les coefficients A_1, A_2, ..., A_ν de $f(z, u)$ se caractérisent par le fait qu'ils n'admettent aucune valeur exceptionnelle. Si un au moins d'entre eux est de la forme $a+p(z)e^{H(z)}$, où a est une constante et $p(z)$ un polynome, le nombre des valeurs exceptionnelles de $u=\varphi(z)$ est inférieur à ν. Cela tient à ce que, lorsque N [1] atteint son maximum ν, les coefficients sont des sommes d'exponentielles multipliées par des polynomes.

3° Envisageons l'équation

$$u^\nu + x_1 u^{\nu-1} + x_2 u^{\nu-2} + \ldots + x_{\nu-1} u + x_\nu = 0 \tag{10}$$

où u est considéré comme un paramètre. Désignons par C le continuum formé par tous les systèmes de valeurs des x_1, x_2, ..., x_ν qui satisfont à cette équation et appelons *point du continuum* un tel système de valeurs. Ainsi l'équation (10) représente une famille de continuums G.

Donnons-nous maintenant ν fonctions entières quelconques $A_1(z)$, $A_2(z)$, ..., $A_\nu(z)$. Le théorème II peut s'énoncer sous la forme suivante utile dans plusieurs circonstances.

Théorème III. — *Chaque continuum C de la famille considérée (à chaque valeur de u correspond un tel continuum) possède un point, au moins,*

$$x_1 = x_1^0, \qquad x_2 = x_2^0, \qquad \ldots, \qquad x_\nu = x_\nu^0$$

---

(1) Pour abréger, j'appellerai toujours N le nombre des valeurs exceptionnelles de la fonction $u=\varphi(z)$, autres que (E).

tel que les équations

$$A_1(z) = x_1^0, \qquad A_2(z) = x_2^0, \qquad \ldots, \qquad A_\nu(z) = x_\nu^0$$

admettent une, au moins, racine commune, et même ces points doivent être tels que le nombre total des racines communes de ces ν *équations soit infini. Il peut y avoir exception pour* ν, *au plus, continuums* C *de la famille. Il est évident que je ne tiens pas compte ici des valeurs de u, auxquelles ne correspond aucun continuum; ce sont les valeurs* (E).

7. Je me propose maintenant de montrer comment l'application de la *proposition fondamentale* de M. Borel, prise dans toute sa généralité, nous permet de préciser les théorèmes, que nous avons établis dans les numéros précédents, et d'abaisser la limite supérieure de N, que nous avons déterminée jusqu'ici. Je vais considérer une série de cas bien didactiques.

1° Supposons que dans l'équation (1) tous les coefficients $A_i(z)$ soient des polynomes, sauf $A_\rho(z)$; alors N [1] est nécessairement inférieur à 2. Pour voir cela, il suffit d'éliminer $A_\rho(z)$ seulement, entre les équations

$$\begin{aligned} f(z, u_1) &= p_1(z)\, e^{H_1(z)} \\ f(z, u_2) &= p_2(z)\, e^{H_2(z)} \end{aligned} \qquad (\rho \neq \nu);$$

on aura

$$u_2^\rho\, p_1(z)\, e^{H_1(z)} - u_1^\rho\, p_2(z)\, e^{H_2(z)} = q(z)$$

$q(z)$ étant un polynome. Cette identité entraîne $u_1 = u_2 = 0$.

2° Supposons encore que $A_\rho(z)$ soit d'ordre supérieur aux autres $A_i(z)$, mais que tous ces coefficients $A_1(z)$, $A_2(z)$, ..., $A_\nu(z)$ sont des transcendantes distinctes (linéairement). Alors il n'y a pas des valeurs équivalentes, ni des valeurs (E), et la méthode que je viens de citer nous permet d'affirmer que le nombre des valeurs exceptionnelles finies est inférieur à 2.

3° D'une façon générale, si $A_{k_1}(z)$, $A_{k_2}(z)$, ..., $A_{k_\sigma}(z)$ $(\sigma \leqq r)$ sont d'ordre supérieur à tous les autres coefficients, on peut affirmer que N est inférieur au plus grand des nombres $\sigma + 1$ et $K_\sigma - K_1 + 3$. S'il y en a davantage, c'est que toutes les valeurs exceptionnelles autres que (E) sont équivalentes.

La démonstration est facile; il suffit d'éliminer $A_{k_1}(z)$, $A_{k_2}(z)$, ..., $A_{k_\sigma}(z)$ entre

---

(1) Ici je ne considère pas comme distinctes deux valeurs de u, u_1 et u_2 pour lesquelles le rapport $\dfrac{f(z, u_1)}{f(z, u_2)}$ est une constante; j'appelle *équivalentes* deux telles valeurs de u, car, lorsque l'une est exceptionnelle, l'autre l'est aussi.

les $\sigma+1$ équations

$$\begin{aligned} f(z, u_1) &= p_1 \;(z)\, e^{H_1(z)}, \\ f(z, u_2) &= p_2 \;(z)\, e^{H_2(z)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f(z, u_{\sigma+1}) &= p_{\sigma+1}(z)\, e^{H_{\sigma+1}(z)}. \end{aligned}$$

On arrivera à une équation de la forme

$$\lambda_1 p_1(z)\, e^{H_1(z)} + \lambda_2 p_2(z)\, e^{H_2(z)} + \ldots + \lambda_{\sigma+1} p_{\sigma+1}(z)\, e^{H_{\sigma+1}(z)} = G(z),$$

où $G(z)$ est une fonction entière d'ordre inférieur à celui des exponentielles, et λ_1 (par exemple) est égal à l'expression suivante :

$$\begin{vmatrix} u_2^{\nu-k_1} & u_2^{\nu-k_2} & \ldots & u_2^{\nu-k_\sigma} \\ u_3^{\nu-k_1} & u_3^{\nu-k_2} & \ldots & u_3^{\nu-k_\sigma} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{\sigma+1}^{\nu-k_1} & u_{\sigma+1}^{\nu-k_2} & \ldots & u_{\sigma+1}^{\nu-k_\sigma} \end{vmatrix} = u_2^{\nu-k_\sigma} u_3^{\nu-k_\sigma} \ldots u_{\sigma+1}^{\nu-k_\sigma} \begin{vmatrix} u_2^{k_\sigma-k_1} & u_2^{k_\sigma-k_2} & \ldots & 1 \\ u_3^{k_\sigma-k_1} & u_3^{k_\sigma-k_2} & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & . \\ u_{\sigma+1}^{k_\sigma-k_1} & u_{\sigma+1}^{k_\sigma-k_2} & \ldots & u_{\sigma+1} \end{vmatrix}.$$

J'ai supposé

$$k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_\sigma.$$

Si les valeurs $u_1, u_2, \ldots, u_\sigma, u_{\sigma+1}$ ne sont pas toutes équivalentes [1], après toutes les réductions possibles du premier membre, il y aura un terme dont le coefficient est tout à fait étranger à $f(z, u_{\sigma+1})$. Par suite, l'annulation de ce coefficient (d'après le théorème de M. Borel) entraînera au moins une équation algébrique

$$a(u_{\sigma+1}) = 0$$

de degré $K_\sigma - K_1$ [2] au plus et dont les coefficients ne dépendent que de u_1, $u_2, \ldots, u_\sigma$. On en conclut immédiatement la proposition ci-dessus énoncée.

4° De même, dans le cas où la transcendante algébroïde est de genre infini, les mêmes raisonnements nous montrent que les valeurs exceptionnelles dépendent surtout des termes qui sont d'ordre de grandeur notablement supérieur à celui des autres. Ainsi, si les coefficients $A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_\sigma}$ croissent plus vite que $e^{[\mu(r)]^{1+\alpha}}$, tandis que tous les autres croissent moins vite que $e^{\mu(r)}$, le théorème précité subsiste et N est au plus égal au plus grand des nombres σ et $k_\sigma - k_1 + 2$, sauf le cas où toutes les valeurs exceptionnelles sont équivalentes.

---

(1) J'entends par là que parmi ces valeurs il y en a une, u_0 par exemple, qui n'est équivalente à aucune des autres.

(2) Après la suppression de la racine $u_{\sigma+1} = 0$ multiple d'ordre $\nu - K_1$.

On voit que l'abaissement de la limite supérieure de N, donnée par le théorème général, est possible dans le cas très étendu où existe une petite différence entre les ordres de grandeur des coefficients $A_i(z)$.

En terminant ces considérations, faisons remarquer que cette méthode est très utile dans la pratique, et peut nous fournir, dans des exemples particuliers, des résultats plus complets au point de vue du nombre et de la nature des valeurs exceptionnelles.

Exemple. — Soit l'équation

$$u^2 + e^{z^2} u + \sin z = 0.$$

Des valeurs (E) n'existent pas, ainsi que des équivalentes; N est au plus égal à 1 et il n'y a qu'une valeur exceptionnelle possible, c'est zéro; mais on voit immédiatement qu'elle ne l'est pas. Elle sera exceptionnelle, si l'on fait usage du sens large du mot, en remarquant que l'ordre de $\sin z$ est inférieur à l'ordre de e^{z^2}.

8. Dans le n° 2, nous avons appelé ordre de $u = \varphi(z)$ le plus grand des ordres des coefficients $A_i(z)$.

Cette définition est justifiée aussi par le fait que l'une, au moins, des branches d'une transcendante algébroïde d'ordre ρ croît comme une fonction entière du même ordre.

Supposons, en effet, que les branches de $u = \varphi(z)$ croissent comme $e^{r^{\rho'}}$. Si ρ' était plus grand que ρ, le premier membre de l'équation

$$A_\nu(z) = -uA_{\nu-1}(z) - u^2 A_{\nu-2}(z) - \ldots - u^\nu$$

croîtrait moins vite que le second.

Si, au contraire, ρ' était plus petit que ρ pour toutes les branches, il en serait de même de deux membres de l'équation

$$u^\nu = -[u^{\nu-1}A_1(z) + u^{\nu-2}A_2(z) + \ldots + uA_{\nu-1}(z) + A_\nu(z)];$$

donc

$$\rho' = \rho \quad (^1),$$

cette égalité étant vraie pour une, au moins, des branches.

---

(1) D'une façon plus précise, ρ' ne sera pas inférieur à ρ pour toutes les branches de la fonction multiforme; car, s'il en était ainsi, tous les coefficients $A_i(z)$ seraient d'ordre inférieur à ρ, ce qui est contraire à notre hypothèse.

CHAPITRE II.

EXTENSION DU THÉORÈME DE M. PICARD AUX FONCTIONS A ν BRANCHES DANS LE VOISINAGE D'UN POINT SINGULIER ESSENTIEL.

1. Soit $F(z)$ une fonction uniforme dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé $z=\alpha$. D'après le théorème de M. Picard, $F(z)$ prend dans le voisinage de $z=\alpha$ toutes les valeurs, sauf, peut-être, *deux* au plus, d'une façon précise; étant donné un cercle C de centre α, aussi petit que l'on voudra, il existe à son intérieur une infinité de racines de l'équation

$$F(z)=a,$$

quel que soit le nombre a; il peut y avoir exception pour deux, au plus, valeurs de a, que l'on appelle *exceptionnelles*.

Si l'∞ est une telle valeur, c'est-à-dire si $F(z)$ n'a pas des pôles dans le voisinage de $z=\alpha$, le théorème de Laurent nous donne le développement suivant de $F(z)$

$$F(z)=S(z)+\varphi\left(\frac{1}{z-\alpha}\right), \tag{11}$$

$$S(z)=b_0+b_1(z-\alpha)+b_2(z-\alpha)^2+\ldots+b_n(z-\alpha)^n+\ldots,$$

$$\varphi\left(\frac{1}{z-\alpha}\right)=\frac{a_0}{z-\alpha}+\frac{a_1}{(z-\alpha)^2}+\ldots+\frac{a_n}{(z-\alpha)^2}+\ldots.$$

La série $\varphi(\zeta)$ a un rayon de convergence infini et représente une fonction entière, tandis que la série $S(z)$ ne converge en général qu'à l'intérieur d'un certain cercle décrit du point $z=\alpha$ comme centre. C'est M. Hadamard [1] qui a fait, le premier, la remarque capitale que, lorsque z s'approche de α, le module maximum de $F(z)$ croît comme la fonction entière $\varphi(\zeta)$, lorsque le module de ζ croît indéfiniment. On s'en rend compte par l'équation (11) où $S(z)$ tend vers une valeur déterminée b_0, lorsque le module de $z-\alpha$ tend vers zéro.

La transformation $z-\alpha=\frac{1}{Z}$ nous permet de nous borner au cas où le point essentiel en question est à l'infini.

M. Ed. Maillet a développé et complété ce principe dans sa Note intéressante

[1] *Sur les fonctions entières* (*Comptes rendus*, 1896).

déjà citée : *Sur les fonctions monodromes à point singulier essentiel isolé* (*Bull. de la Société mathématique,* 1902, fasc. I). Cette théorie, qui lui a permis de donner une démonstration directe du théorème de M. Picard, nous permettra aussi d'étendre les théorèmes du Chapitre précédent au voisinage d'un point essentiel.

Le lemme suivant sera fondamental pour notre but.

Lemme. — *Toute fonction* $F(z)$ *uniforme dans le domaine de l'infini* (*qui est pour elle un point isolé*) *peut se mettre sous la forme*

$$F(z) = z^{\mu}\, G(z)\, e^{F_1(z)} = Q(z)\, e^{F_1(z)} = \frac{1}{z^K} E(z)\, e^{\psi\left(\frac{1}{z}\right)},$$

où μ est un entier positif ou négatif, $G(z)$ une fonction entière $F_1(z)$ une fonction de même nature que $F(z)$, K un entier positif ou nul, $E(z)$ une fonction entière et $\psi\left(\frac{1}{z}\right)$ régulière dans le domaine de l'∞.

$F(z)$ croît comme la fonction entière $E(z)$.

On dira que $F(z)$ est d'ordre fini ou infini, suivant qu'il en est ainsi de $E(z)$. (*Voir*, pour tout cela, la Note plus haut citée de M. Maillet.)

2. Cela posé, envisageons une identité telle que

$$G_1(z)\, e^{H_1(z)} + G_2(z)\, e^{H_2(z)} + \ldots + G_n(z)\, e^{H_n(z)} = 0, \tag{12}$$

où les $H_i(z)$ désignent des fonctions entières ou bien des fonctions uniformes dans le domaine de l'infini, étant une singularité essentielle isolée (M. Maillet les appelle *quasi entières à l'∞*) et d'ordre de grandeur supérieur à $[\mu(r)]^2$, tandis que les $G_i(z)$ désignent des fonctions aussi quasi entières à l'infini mais croissant moins vite que $e^{\mu(r)}$ (du moins dans une série d'intervalles d'étendue assez grande).

Des raisonnements tout à fait analogues à ceux de M. Borel nous permettent d'établir l'impossibilité d'une telle identité. (*Voir,* à ce sujet, une note en bas des pages 14 et 15 du travail susdit de M. Maillet.)

Dès lors, tous les théorèmes et toutes nos considérations du Chapitre précédent s'étendent immédiatement aux fonctions ayant ν branches dans le voisinage d'un point singulier essentiel, que nous pouvons appeler *transcendantes algébroïdes dans le voisinage d'un point singulier essentiel,* parce que la même méthode de l'élimination nous ramène à prouver l'impossibilité d'une identité, telle que (12).

Nous pouvons toujours envoyer à l'infini le point essentiel $z = \alpha$ par la transformation $z - \alpha = \frac{1}{Z}$.

Les transcendantes définies par l'équation (1), où les $A_i(z)$ désignent des fonctions *quasi entières* ou *quasi méromorphes* [1] (d'après la terminologie de M. Maillet) ne sont qu'un cas particulier de celles que nous venons de traiter et, par conséquent, il est inutile d'en faire une étude spéciale.

Ce sont les fonctions uniformes dans tout le plan qui possèdent un nombre fini de points essentiels. Elles sont de la forme

$$F(z) = \varphi_1\left(\frac{1}{z-\alpha_1}\right) + \varphi_2\left(\frac{1}{z-\alpha_2}\right) + \ldots + \varphi_n\left(\frac{1}{z-\alpha_n}\right),$$

et le lemme cité dans le n° 1 s'exprime par l'identité remarquable

$$\begin{aligned} F(z) &= \varphi_1\left(\frac{1}{z-\alpha_1}\right) + \varphi_2\left(\frac{1}{z-\alpha_2}\right) + \ldots + \varphi_n\left(\frac{1}{z-\alpha_n}\right) \\ &= \psi_1\left(\frac{1}{z-\alpha_1}\right) \psi_2\left(\frac{1}{z-\alpha_2}\right) \ldots \psi_n\left(\frac{1}{z-\alpha_n}\right), \end{aligned}$$

$\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$ et $\psi_1(t)$, ..., $\psi_n(t)$ étant des fonctions entières.

---

(1) *Voir* E. MAILLET, *Mémoire sur les fonctions entières et quasi entières* (*Journal de M. Jordan,* 1902).

DEUXIÈME PARTIE.

CHAPITRE I.

SUR UNE CLASSE DE FONCTIONS A UN NOMBRE INFINI DE BRANCHES.

1. Dans ce Chapitre, nous établirons des théorèmes remarquables concernant une classe très étendue de fonctions d'un nombre infini de branches. Envisageons l'équation

$$(13) \qquad \sigma_1(u)\,A_1(z) + \sigma_2(u)\,A_2(z) + \ldots + \sigma_\nu(u)\,A_\nu(z) = 0 = F(z, u),$$

où les $\sigma_i(u)$ désignent des fonctions entières de u et les $A_i(z)$ désignent des fonctions uniformes dans le voisinage d'un point singulier essentiel $z = \alpha$. Nous pouvons supposer que ces dernières fonctions soient quasi entières dans le domaine de $z = \alpha$, c'est-à-dire qu'elles n'y admettent pas des pôles; cela tient à ce qu'une fonction *quasi méromorphe* dans le voisinage de $z = \alpha$ est le quotient de deux fonctions *quasi entières*.

Pour fixer les idées, plaçons-nous dans le cas où le point α est à l'infini et supposons que les $A_i(z)$ sont des fonctions entières.

Nos raisonnements s'étendront d'eux-mêmes aux autres cas.

D'après le théorème bien connu de Weierstrass (1), l'équation (13) définit u comme fonction de z n'ayant d'autres points singuliers essentiels que le point $z = \infty$ et d'un nombre infini de branches [si une au moins des fonctions entières $A_i(z)$ est transcendante].

Une valeur u_0 de u sera dite *encore exceptionnelle,* si $F(z, u_0)$ n'admet qu'un nombre fini de zéros, et deux valeurs u_1 et u_2 seront dites *équivalentes,* si le rapport $F(z, u_1) : F(z, u_2)$ est une fonction rationnelle de z. Si l'une est exceptionnelle, l'autre l'est aussi. On verra que cette *notion* est utile dans ce qui va suivre.

Supposons d'abord qu'il n'y ait aucune relation linéaire à coefficients polynomes entre $A_1(z), A_2(z), \ldots, A_\nu(z)$. Si $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ sont $\nu + 1$ valeurs non

(1) Voir *Traité d'Analyse* de M. Picard, t. II, p. 244.

équivalentes, l'élimination nous conduira à une relation de la forme

$$(14) \qquad \lambda_0 p_0(z) e^{H_0(z)} + \lambda_1 p_1(z) e^{H_1(z)} + \ldots + \lambda_\nu p_\nu(z) e^{H_\nu(z)} = 0,$$

avec

$$(15) \qquad \lambda_i = \begin{vmatrix} \sigma_1(u_0) & \sigma_2(u_0) & \ldots & \sigma_\nu(u_0) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \sigma_1(u_{i-1}) & \sigma_2(u_{i-1}) & \ldots & \sigma_\nu(u_{i-1}) \\ \sigma_1(u_{i+1}) & \sigma_2(u_{i+1}) & \ldots & \sigma_\nu(u_{i+1}) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \sigma_1(u_\nu) & \sigma_2(u_\nu) & \ldots & \sigma_\nu(u_\nu) \end{vmatrix},$$

les $P_j(z)$ étant des polynomes et les $H_j(z)$ des fonctions entières.

Aucune réduction n'est possible au premier membre de cette relation, à cause de la non-équivalence des $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_\nu$.

Grâce à la proposition fondamentale de M. Borel, on aura

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\nu = 0.$$

Soit maintenant u'_0 une valeur équivalente à u_0, on aura

$$\frac{F(z, u_0)}{F(z, u'_0)} = K,$$

K étant un polynome; ou bien

$$[\sigma_1(u_0) - K\sigma_1(u'_0)]A_1(z) + [\sigma_2(u_0) - K\sigma_2(u'_0)]A_2(z) + \ldots \\ + [\sigma_\nu(u_0) - K\sigma_\nu(u'_0)]A_\nu(z) = 0.$$

Or, nous avons supposé qu'aucune relation de cette forme n'est possible entre les $A_i(z)$; il en résulte donc

$$(16) \qquad K = \frac{\sigma_1(u_0)}{\sigma_1(u'_0)} = \frac{\sigma_2(u_0)}{\sigma_2(u'_0)} = \ldots = \frac{\sigma_\nu(u_0)}{\sigma_\nu(u'_0)};$$

par suite, K est une constante.

Conclusion. — $u_0, u_1, \ldots, u_{\nu-1}$ étant ν valeurs exceptionnelles quelconques, toute autre U doit satisfaire à l'équation

$$(17) \qquad \Delta(U) = \begin{vmatrix} \sigma_1(u_0) & \sigma_2(u_0) & \ldots & \sigma_\nu(u_0) \\ \sigma_1(u_1) & \sigma_2(u_1) & \ldots & \sigma_\nu(u_1) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \sigma_1(u_{\nu-1}) & \sigma_2(u_{\nu-1}) & \ldots & \sigma_\nu(u_{\nu-1}) \\ \sigma_1(U) & \sigma_2(U) & \ldots & \sigma_\nu(U) \end{vmatrix} = 0,$$

il ne doit pas y avoir des équivalentes parmi les valeurs $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{\nu-1}$, si l'on veut que $\Delta(\mathrm{U})$ ne se réduise pas à zéro.

Dans le cas où toutes les valeurs sont équivalentes, u_0 étant l'une d'entre elles, toutes les autres U seront données par une des équations

$$\begin{aligned}
&\sigma_1(u_0)\,\sigma_2(\mathrm{U}) - \sigma_2(u_0)\,\sigma_1(\mathrm{U}) = 0,\\
&\sigma_1(u_0)\,\sigma_3(\mathrm{U}) - \sigma_3(u_0)\,\sigma_1(\mathrm{U}) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sigma_1(u_0)\,\sigma_\nu(\mathrm{U}) - \sigma_\nu(u_0)\,\sigma_1(\mathrm{U}) = 0.
\end{aligned}$$

La conclusion intéressante tirée de ces considérations est le fait que l'ensemble $(\mathcal{E})$ des valeurs exceptionnelles, quand il n'est pas fini, est dénombrable n'ayant qu'un point limite, l'infini, et l'*exposant de convergence* de la suite des modules de ces valeurs est au plus égal au plus grand des ordres apparents des fonctions $\sigma(u)$. Ainsi on a un renseignement bien précieux sur la densité de ces nombres.

2. Passons maintenant au cas général, où les fonctions $\mathrm{A}_i(z)$ sont quelconques (pas toutes des polynomes, bien entendu). Il est alors loisible d'écrire l'équation (13) comme il suit :

$$(18)\qquad \varphi_1(z, u)\,\mathrm{A}_1(z) + \varphi_2(z, u)\,\mathrm{A}_2(z) + \ldots + \varphi_m(z, u)\,\mathrm{A}_m(z) = 0,$$

où les $\varphi_i(z, u)$ sont des fonctions entières (transcendantes, en général, de u), mais des polynomes par rapport à z et les $\mathrm{A}(z)$ sont des fonctions entières linéairement distinctes (j'ai précisé ci-dessus ce que j'entends par là).

Des raisonnements analogues à ceux du numéro précédent nous permettent de constater les faits suivants :

1° Si u_0 et u'_0 désignent deux valeurs équivalentes, on aura identiquement

$$(19)\qquad \frac{\varphi_1(z, u_0)}{\varphi_1(z, u'_0)} = \frac{\varphi_2(z, u_0)}{\varphi_2(z, u'_0)} = \ldots = \frac{\varphi_m(z, u_0)}{\varphi_m(z, u'_0)};$$

2° Si $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ sont $m+1$ valeurs exceptionnelles, parmi lesquelles il n'y ait pas deux équivalentes, on a les $m+1$ identités suivantes

$$\begin{vmatrix}
\varphi_1(z, u_0) & \varphi_2(z, u_0) & \ldots & \varphi_m(z, u_0)\\
\varphi_1(z, u_1) & \varphi_2(z, u_1) & \ldots & \varphi_m(z, u_1)\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\varphi_1(z, u_{i-1}) & \varphi_2(z, u_{i-1}) & \ldots & \varphi_m(z, u_{i-1})\\
\varphi_1(z, u_{i+1}) & \varphi_2(z, u_{i+1}) & \ldots & \varphi_m(z, u_{i+1})\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\varphi_1(z, u_m) & \varphi_2(z, u_m) & \ldots & \varphi_m(z, u_m)
\end{vmatrix} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, m).$$

Par suite, si $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$ désignent m valeurs exceptionnelles fixes, non équivalentes, toutes les autres U doivent être des zéros de la fonction entière par rapport à U, donnée par la formule :

$$(20)\qquad D(z, U) = \begin{vmatrix} \varphi_1(z, u_0) & \varphi_2(z, u_0) & \ldots & \varphi_m(z, u_0) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \varphi_1(z, u_{m-1}) & \varphi_2(z, u_{m-1}) & \ldots & \varphi_m(z, u_{m-1}) \\ \varphi_1(z, U) & \varphi_2(z, U) & \ldots & \varphi_m(z, U) \end{vmatrix},$$

quel que soit z. Si K est le plus grand des degrés des $\varphi_1(z, u), \varphi_2(z, u), \ldots, \varphi_m(z, u)$, par rapport à z, l'identité $D(z, U) = 0$ sera décomposée en $K + 1$ au plus relations entre les $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$ et U, qui seront satisfaites par toutes les valeurs U exceptionnelles équivalentes ou non des $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$.

Si le nombre des valeurs non équivalentes est moindre que m, on se bornera aux équations (19) qui déterminent leurs équivalentes. On arrivera toujours à la même conclusion finale sur la nature de l'ensemble ($\mathcal{E}$).

Théorème. — *La fonction $u = \Phi(z)$, définie par l'équation* (13) *et ayant un nombre infini de branches, prend, dans le domaine de l'infini, toutes les valeurs, sauf, peut-être, un ensemble dénombrable ayant l'infini comme point limite unique et faisant partie de l'ensemble des zéros d'une fonction entière de u bien déterminée, lorsque l'équation* (13) *est donnée.*

Corollaire. — L'infini est bien un point d'*indétermination complète*, d'après une terminologie de M. Painlevé [voir *Sur les singularités des fonctions analytiques et, en particulier, des fonctions définies par les équations différentielles* (*Comptes rendus*, t. CXXXI, 1900)].

Dans le cas où tous les $A_i(z)$ sont des polynomes, il est manifeste que l'infini n'est plus un point essentiel de $u = \Phi(z)$.

3. Il est à peine nécessaire d'ajouter que ces résultats subsistent dans le cas où les $\sigma_i(u)$ représentent des fonctions uniformes quelconques avec un ensemble dénombrable de singularités essentielles. Il n'y a qu'à adjoindre à l'ensemble ($\mathcal{E}$) les affixes des points essentiels qui peuvent bien être des valeurs exceptionnelles. Elles le sont sûrement dans le cas où il n'y a aucune relation de la forme

$$c_1\sigma_1(u) + c_2\sigma_2(u) + \ldots + c_\nu\sigma_\nu(u) = g(u), \qquad g(e_i) = 0 \quad (^1),$$

$c_1, c_2, \ldots, c_\nu$ étant des constantes et $g(u)$ une fonction entière de u.

(1) e_i désignant l'affixe d'un point essentiel des $\sigma(u)$.

Ici l'ensemble $(\mathcal{E}')$ dérivé de $(\mathcal{E})$ peut renfermer tous les points essentiels des fonctions $\sigma(u)$ et pas d'autres.

Nos déductions ne seront pas les mêmes lorsque l'ensemble des points essentiels d'une des $\sigma_i(u)$ est parfait, ponctuel ou linéaire (¹). Dans le cas où une de ces fonctions admet des coupures, l'infini peut être un point d'indétermination incomplète de la fonction $u = \Phi(z)$ définie par l'équation (13), c'est-à-dire l'ensemble des valeurs exceptionnelles sera continu, une aire par exemple.

L'hypothèse sur l'uniformité des fonctions $\sigma(u)$ n'est pas tout à fait indispensable, et l'on pourrait faire une étude analogue même dans les cas où il n'en est pas ainsi. Mais je n'y insisterai pas ici.

4. Je me propose maintenant de faire une remarque fort importante : Dans la plupart des cas, on peut être ramené à la *proposition fondamentale de M. Borel,* sans éliminer toutes les fonctions $A_i(z)$ qui figurent dans le premier membre de l'équation (13); en nous contentant d'une élimination partielle, nous arriverons à préciser et compléter suffisamment les résultats des trois paragraphes précédents, et surtout à établir des classes étendues de fonctions d'un nombre infini de branches qui n'admettent qu'un nombre fini de valeurs exceptionnelles.

Envisageons la fonction $u(z)$, définie par une équation telle que

$$A_0(z) + A_1(z)u + A_2(z)u^2 + \ldots + A_n(z)u^n + \ldots = F(z, u) = 0. \tag{21}$$

Soient $e^{M_n(r)}$ l'ordre de grandeur de la fonction entière $A_n(z)$ et $e^{M(r)}$ le plus grand des ordres de grandeur de toutes les fonctions $A_i(z)\,[i = 0, 1, 2, 3, \ldots, \infty]$. Supposons que $e^{M_n(r)}$ décroît notablement lorsque n croît indéfiniment, de sorte que l'on puisse assigner une valeur ν de n, assez grande (mais fixe), telle que l'inégalité $n > \nu$ entraîne l'inégalité

$$[M_n(r)]^2 < M(r) \tag{21'}$$

ou, d'une façon plus générale,

$$[M_n(r)]^{1+\alpha} < M(r),$$

α étant un nombre positif quelconque, à partir d'une certaine valeur de r ou, du moins, pour une infinité de valeurs de r remplissant des intervalles d'étendue totale assez grande (*voir* toujours le Mémoire de M. Borel, *loc. cit.*).

(¹) En général, lorsque cet ensemble n'est pas dénombrable.

Soient $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_\nu, u_{\nu+1}$, $\nu+2$ valeurs de u non équivalentes, exceptionnelles.

On aura des relations de la forme

$$(22)\qquad \left\{\begin{array}{l} F(z, u_0) \quad = P_0 \quad (z) e^{H_0(z)}, \\ F(z, u_1) \quad = P_1 \quad (z) e^{H_1(z)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F(z, u_\nu) \quad = P_\nu \quad (z) e^{H_\nu(z)}, \\ F(z, u_{\nu+1}) = P_{\nu+1}(z) e^{H_{\nu+1}(z)} \end{array}\right.$$

[les $P_i(z)$ étant des polynomes].

$F(z, u_0)$ peut s'écrire sous la forme suivante

$$F(z, u_0) = A_0(z) + A_1(z) u_0 + A_2(z) u_0^2 + \ldots + A_\nu(z) u_0^\nu + R_\nu(z, u_0)$$

avec

$$R_\nu(z, u_0) = A_{\nu+1}(z) u_0^{\nu+1} + A_{\nu+2}(z) u_0^{\nu+2} + \ldots.$$

La fonction $R_\nu(z, u_0)$ croîtra sûrement moins vite que $e^{[M(r)]^{1-\beta}}$, β étant un nombre positif assez petit, si la décroissance de l'ordre de grandeur $e^{M_n(r)}$ avec $\frac{1}{n}$ est telle que, à partir d'une certaine valeur r_0 de r, indépendante de n, la différence

$$(22')\qquad M_{n+1}(r) - M_n(r)$$

est négative, pour n assez grand, et inférieure à un nombre $-\theta$, aussi petit que l'on voudra, mais fixe.

En effet, cette condition étant réalisée, on aura, à partir d'une certaine valeur $n = m$ de n,

$$e^{M_{n+1}(r) - M_n(r)} < e^{-\theta} < q < \frac{1}{|u_0|} \quad (^1),$$

pourvu que r soit supérieur à r_0.

D'autre part, on peut écrire

$$R_\nu(z, u_0) = [A_{\nu+1}(z) u_0^{\nu+1} + \ldots + A_{m-1}(z) u_0^{m-1}] + [A_m(z) u_0^m + A_{m+1}(z) u_0^{m+1} + \ldots]$$

$$R_\nu(z, u_0) = P_\nu(z, u_0) + R_{m-1}(z, u_0)$$

---

(1) Le nombre q dépend évidemment de u_0 et nous supposons qu'il existe, aussi grand que soit le module de u_0.

avec

$$P_\nu(z, u_0) = A_{\nu+1}(z)\, u_0^{\nu+1} + \ldots + A_{m-1}(z)\, u_0^{m-1},$$

$$R_{m-1}(z, u_0) = A_m(z)\, u_0^m \quad + A_{m+1}(z)\, u_0^{m+1} + \ldots;$$

$P_\nu(z, u_0)$, n'ayant qu'un nombre fini de termes, croît évidemment moins vite que $e^{[M(r)]^{1-\beta_1}}$ (β_1 étant assez petit).

Quant à $R_{m-1}(z, u_0)$, on aura, pour toute valeur de r,

$$|R_{m-1}(z, u_0)| < |u_0|^m e^{M_m(r)} + |u_0|^{m+1} e^{M_{m+1}(r)} + |u_0|^{m+2} e^{M_{m+2}(r)} + \ldots$$

ou bien

$$|R_{m-1}(r, u_0)| < |u_0|^m e^{M_m(r)} [1 + |u_0| e^{M_{m+1}(r) - M_m(r)} + |u_0|^2 e^{M_{m+2}(r) - M_m(r)} + \ldots].$$

Or, on a

$$e^{M_{m+1}(r) - M_m(r)} < q,$$
$$e^{M_{m+2}(r) - M_m(r)} < q^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$e^{M_{m+\mu}(r) - M_m(r)} < q^\mu,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

à partir d'une certaine valeur de r.

Il en résulte

$$|R_{m-1}(z, u_0)| < |u_0|^m e^{M_m(r)} [1 + q|u_0| + q^2 |u_0|^2 + q^3 |u_0|^3 + \ldots] \qquad [q|u_0| < 1]$$

et

$$|R_{m-1}(z, u_0)| < \frac{|u_0|^m}{1 - q|u_0|} e^{M_m(r)} < \frac{|u_0|^m}{1 - q|u_0|} e^{[M(r)]^{1-\beta}} < e^{[M(r)]^{1-\beta_2}},$$

β_3 et β_2 étant des nombres positifs suffisamment petits.

Nous en tirons

$$|R_\nu(z, u_0)| < |P_\nu(z, u_0)| + |R_{m-1}(z, u_0)| < e^{[M(r)]^{1-\beta_1}} + e^{[M(r)]^{1-\beta_2}} < e^{[M(r)]^{1-\beta}},$$

β étant assez petit.

Il en sera de même des $R_\nu(z, u_1), \ldots, R_\nu(z, u_{\nu+1})$ si l'on a aussi

$$q < \frac{1}{|u_1|}, \qquad q < \frac{1}{|u_2|}, \qquad \ldots, \qquad q < \frac{1}{|u_\nu|}, \qquad q < \frac{1}{|u_{\nu+1}|}.$$

Pour qu'il en soit ainsi, il faut que la différence

$$M_{n+1}(r) - M_n(r)$$

tende vers $-\infty$ lorsque r croît indéfiniment (¹) puisque les nombres $u_1, u_2, \ldots,$ $u_{\nu+1}$ peuvent avoir un module arbitrairement grand.

En nous plaçant donc dans l'hypothèse que le rapport $e^{M_{n+1}(r)-M_n(r)}$ des ordres de grandeur des coefficients $A_{n+1}(z)$ et $A_n(z)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$, à partir d'une certaine valeur r_0 de r, nous aurons l'inégalité

$$|R_\nu(z, u_i)| < e^{[M(r)]^{1-\beta}},$$

quel que soit le nombre u_i, β étant assez petit (²).

Il est clair que ce résultat subsisterait, si cette condition n'était satisfaite que pour une infinité de valeurs de r (³) croissant indéfiniment, pourvu que ces valeurs de r soient les mêmes pour toutes les différences $M_{n+1}(r) - M_n(r)$.

Voici un exemple où l'on se trouve dans les conditions ci-dessus indiquées :

Supposons que

$$M_\nu(r) < [M(r)]^{1-\beta})$$

et, pour toute valeur de m,

$$M_{\nu+m}(r) < M_\nu(r) - m \log \mu(r),$$

$\mu(r)$ étant une fonction croissante absolument quelconque.

On en déduit

$$e^{M_{\nu+m}(r)} < e^{M_\nu(r)} e^{-m \log \mu(r)},$$

$$e^{M_{\nu+m}(r)-M_\nu(r)} < [\mu(r)]^{-m}.$$

Dès lors, on a

$$|R_\nu(z, u_0)| < e^{M_\nu(r)} |u_0|^\nu \left[1 + \frac{|u_0|}{\mu(r)} + \frac{|u_0|^2}{[\mu(r)]^2} + \ldots + \frac{|u_0|^m}{[\mu(r)]^m} + \ldots\right],$$

et la série entre parenthèses sera convergente, à partir d'une certaine valeur r_0 de r, telle que

$$\mu(r_0) = \frac{|u_0|}{k},$$

k étant un nombre inférieur à l'unité.

On pourrait aussi présenter d'autres classes de fonctions $F(z, u)$ remplissant les conditions nécessaires pour que la fonction $R_\nu(z, u)$ croisse comme $e^{M_{\nu+1}(r)}$.

Cela posé, j'élimine $A_0(z), A_1(z), \ldots, A_\nu(z)$ entre les $\nu + 2$ équations (22) et je trouve l'identité suivante :

$$(23) \quad \lambda_0 p_0(z) e^{H_0(z)} + \lambda_1 p_1(z) e^{H_1(z)} + \ldots + \lambda_\nu p_\nu(z) e^{H_\nu(z)} + \lambda_{\nu+1} p_{\nu+1}(z) e^{H_{\nu+1}(z)} = G(z),$$

où $G(z)$ est une fonction entière d'ordre de grandeur au plus égal à $e^{M_{\nu+1}(r)}$ et

(¹) Et cela à partir d'une certaine valeur de n, même pour $n = \infty$.

(²) Il est clair que cette valeur r_0 dépendra de u_i.

(³) Remplissant des intervalles d'étendue assez grande.

λ_i a la valeur suivante :

$$\lambda_i = \begin{vmatrix} 1 & u_0 & u_0^2 & \dots & u_0^\nu \\ . & .. & .. & \dots & .. \\ 1 & u_{i-1} & u_{i-1}^2 & \dots & u_{i-1}^\nu \\ 1 & u_{i+1} & u_{i+1}^2 & \dots & u_{i+1}^\nu \\ . & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & u_{\nu+1} & u_{\nu+1}^2 & \dots & u_{\nu+1}^\nu \end{vmatrix}.$$

Si aucune des valeurs $u_0, u_1, \dots, u_{\nu+1}$ ne fait partie de l'ensemble (E), qui comprend ici toutes les valeurs de u, pour lesquelles $F(z, u)$ soit d'un ordre de grandeur inférieur à $e^{M(r)}$, toutes les exponentielles $e^{H_i(z)}$ croissent comme $e^{M(r)}$ et, par conséquent, les conditions exigées par la proposition de M. Borel sont bien réalisées. Les λ_i étant des quantités essentiellement différentes de zéro, on déduit immédiatement l'impossibilité de l'identité (23).

L'hypothèse faite sur l'ordre de grandeur des $A_n(z)$ assure l'impossibilité d'une relation linéaire entre les $A_n(z)$ qui correspondent à $n \leqq \nu$ et les autres (¹), car nous pouvons supposer que $\nu + 1$ est la plus petite valeur de n, qui satisfait à l'inégalité (21′). Ainsi, toutes les réductions possibles étant faites, la somme des $\nu + 1$ premiers termes de l'équation (21) prendra la forme

$$Q_1(u, z)\,B_1(z) + Q_2(u, z)\,B_2(z) + \dots + Q_\mu(u, z)\,B_\mu(z), \qquad \mu \leqq \nu + 1,$$

où $Q_1(u, z)$, $Q_2(u, z)$, $\dots$, $Q_\mu(u, z)$ représentent des polynomes de degré au plus égal à ν par rapport à u. Conformément à la définition que nous avons donnée au nº 1 pour les valeurs équivalentes, si u_0 et u'_0 sont deux telles valeurs, on aura

$$(24) \qquad \frac{Q_1(z, u_0)}{Q_1(z, u'_0)} = \frac{Q_2(z, u_0)}{Q_2(z, u'_0)} = \dots = \frac{Q_\mu(z, u_0)}{Q_\mu(z, u'_0)}.$$

Par suite, le nombre de toutes les équivalentes à u_0 sera au plus égal à ν. Dans le cas où les $A_0(z)$, $A_1(z)$, $\dots$, $A_\nu(z)$ sont des transcendantes linéairement distinctes, toute réduction étant impossible, nous sommes assurés de l'absence de telles valeurs.

D'une façon générale, l'étude des équations (24) nous décidera de leur existence ou non et de leur nombre.

De même, le nombre des valeurs (E) est au plus égal à ν.

Conclusion. — Le nombre total des valeurs exceptionnelles est au plus égal à

(¹) D'une façon plus précise, il n'y a que les relations linéaires entre des $A_n(z)$ correspondant tous à $n \leqq \nu$ qui contribuent à leur réduction.

$N = \nu(2\nu + 1) + 1$, l'infini compris. Celui des valeurs non équivalentes est égal à $N_1 = 2\nu + 2$ avec l'infini.

Dans des exemples particuliers, on peut abaisser notablement cette limite.

Exemple. — Citons, comme exemple, la fonction $u(z)$ définie par l'équation

$$e^z(u+1) + \frac{1}{2}\mathfrak{a}_2(z)u^2 + \frac{1}{3!}\mathfrak{a}_3(z)u^3 + \ldots + \frac{1}{n!}\mathfrak{a}_n(z)u^n + \ldots = 0, \tag{25}$$

$\mathfrak{a}_n(z)$ (¹) désignant une fonction entière d'ordre $\frac{1}{n}$.

Ici nous avons $\nu = 1$. L'ensemble (E) est formé par les nombres $u = -1$ et $u = \infty$. Il n'existe pas des valeurs équivalentes u_0 et u'_0 parce que, s'il en existait ainsi, on devrait avoir, par exemple,

$$\frac{u_0^2}{(u'_0)^2} = \frac{u_0^3}{(u'_0)^3},$$

égalité qui entraîne

$$u_0 = u'_0.$$

Vérifions que les conditions nécessaires pour l'application de notre méthode sont réalisées dans cet exemple.

L'ordre de grandeur $e^{M_n(r)}$ du coefficient $\frac{1}{n!}\mathfrak{a}_n(z)$ est égal à

$$e^{M_n(r)} = \frac{1}{n!}e^{r^{\frac{1}{n}}}$$

et

$$M_n(r) = -\log(n!) + r^{\frac{1}{n}} < n - (n + \tfrac{1}{2})\log n + r^{\frac{1}{n}};$$

si l'on tient compte de la formule bien connue

$$n! > \sqrt{2\pi}\, e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}},$$

on a

$$M_1(r) = r, \qquad M_1(r) - M_n(r) = r - r^{\frac{1}{n}} + (n + \tfrac{1}{2})\log n - n.$$

La fonction $\frac{M_1(r) - M_n(r)}{n}$ est une fonction toujours croissante, aussi grand que soit n.

D'après un théorème bien connu de Paul du Bois-Reymond, étant donné un

(¹) Dans la Note des *Comptes rendus* (8 février 1904), j'ai, par distraction, écrit à la place des fonctions entières $\mathfrak{a}_n(z)$ d'ordre $\frac{1}{n}$ des fonctions non uniformes. Fort heureusement, la chose était évidente.

ensemble dénombrable de fonctions croissantes, il y aura toujours une fonction $\log\mu(r)$ croissant moins vite que toutes les fonctions $\frac{1}{n}[M_1(r)-M_n(r)]$.

On aura donc

$$M_1(r)-M_n(r)>n\log\mu(r),$$

et

$$M_n(r)-M_1(r)<-n\log\mu(r)$$

et

$$e^{M_n(r)-M_1(r)}<[\mu(r)]^{-n}.$$

Le théorème que nous avons appliqué est plutôt un corollaire du théorème de Paul du Bois-Reymond, d'après lequel, étant donné un ensemble dénombrable de fonctions croissantes, nous pouvons toujours fabriquer une autre fonction croissant plus vite que toutes les fonctions données.

Nous avions ici un ensemble dénombrable de fonctions croissantes

$$\sigma_n(r)=\frac{1}{n}[M_1(r)-M_n(r)]$$

et nous voulons démontrer qu'il existe une autre fonction croissant moins vite que toutes les $\sigma_n(r)$.

Il est clair que tout cela pourrait être ramené au théorème de Paul du Bois-Reymond par la considération des fonctions inverses, mais on y arrive directement en remarquant que la fonction $\sigma_n(r)$ tend vers l'infini avec n.

En effet, à chaque valeur de r, faisons correspondre la plus petite des valeurs des $\sigma_n(r)\,[n=1, 2, 3, \ldots, \infty]$. Grâce à la remarque que nous venons de faire, la plus petite des valeurs des $\sigma_n(r)$ tend vers l'infini avec r et nous fabriquerons ainsi une fonction inférieure, à la fois, à toutes les fonctions $\sigma_n(r)$ et pour toute valeur de r.

Le procédé même que nous avons suivi dans cet exemple nous montre que les conditions de notre théorème sont bien réalisées, toutes les fois où la fonction croissante

$$\frac{1}{n}[M_1(r)-M_n(r)] \quad (^1)$$

tend (pour $n=\infty$), ou bien vers l'infini, ou bien vers une fonction croissante bien déterminée.

S'il n'en est pas ainsi, la plus petite des valeurs des $\sigma_n(r)$, qui correspondent à une valeur de r, ne saurait dépasser une certaine limite et, par conséquent, la méthode précédente ne nous fournirait pas une fonction *croissante*.

---

(1) Dans la théorie générale (p. 26), nous avons indiqué une condition plus précise que celle-là.

Par suite, le nombre total des valeurs exceptionnelles est au plus égal à 4. Dans cet exemple, on peut l'abaisser beaucoup. Il n'y a qu'à répéter les raisonnements qui nous ont servi à faire la démonstration du théorème général pour voir que la seule valeur exceptionnelle finie, qui soit possible, est $u = -1$ (¹).

Des exemples analogues sont donnés par l'équation (21), dans laquelle $A_n(z)$ est une fonction entière d'ordre $\frac{\rho}{n}$, où ρ est un nombre positif quelconque.

Il est aisé de multiplier les exemples de cette espèce (²).

5. D'une façon plus générale, on pourrait considérer, à la place de (21), une équation de la forme

$$(26) \qquad q_0(u)A_0(z) + q_1(u)A_1(z) + q_2(u)A_2(z) + \ldots + q_n(u)A_n(z) + \ldots,$$

où $q_n(u)$ est un polynome par rapport à u, dont le degré, dépendant d'une façon quelconque de n, croît indéfiniment avec n.

On posera, bien entendu, sur l'ordre de grandeur de $A_n(z)$, les conditions exprimées par les inégalités (21') et les autres (³).

L'ensemble (ε) ne sera infini que dans le cas où $e^{M_n(r)}$ croît avec n, ou bien il décroît très lentement; enfin, lorsque les $A_n(z)$ croissent toutes à peu près de la même façon.

Si, par exemple, $M_n(r)$ croît comme le quotient $\frac{M(r)}{[\log M(r)]^n}$, l'ensemble ($\varepsilon$) peut bien être infini, parce que l'inégalité

$$\frac{M(r)}{[\log M(r)]^n} < [M(r)]^{1-\alpha}$$

(¹) Il est aisé de voir qu'elle ne l'est pas non plus; en effet, on a

$$F(z, -1) = \frac{1}{2}e^{z^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{3!}e^{z^{\frac{1}{3}}} + \ldots + (-1)^n e^{z^{\frac{1}{n}}} + \ldots,$$

expression qui ne peut pas être de la forme

$$P(z)e^{Q(z)},$$

en vertu du théorème même de M. Borel.

(²) En suivant exactement le même procédé, nous démontrons facilement que la condition ci-dessus indiquée est bien vérifiée, lorsque $A_n(z)$ est de la forme

$$A_n(z) = \theta(n)a_n(z),$$

où la quantité $\sqrt[n]{\theta(n)}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

(³) Dans le cas où les $A_n(z)$ sont d'ordre fini, ces conditions sont susceptibles d'une précision, grâce aux résultats récents de MM. Boutroux, Lindelöf et Wiman. Je m'en occuperai dans d'autres travaux.

est impossible, aussi grand que soit l'entier n, et aussi petit que l'on voudra le nombre positif α.

6. Nous croyons utile de présenter nos considérations dans quelques cas particuliers pour faire apparaître tout l'intérêt théorique et pratique qu'elles offrent, ainsi que la fécondité de la proposition fondamentale de M. Borel.

Soit l'équation

$$(27)\quad q_1(u)\,A_1(z)+q_2(u)\,A_2(z)+\ldots \\ +q_\nu(u)\,A_\nu(z)+\sigma_1(u)\,B_1(z)+\sigma_2(u)\,B_2(z)+\ldots+\sigma_\mu(u)\,B_\mu(z)=0,$$

où les $q_i(u)$ désignent des polynomes de degré au plus égal à m, les $\sigma_i(u)$ des fonctions entières quelconques, ainsi que les $A_i(z)$ et $B_i(z)$. Soit $e^{M(r)}$ le plus grand des ordres de grandeur des $A_i(z)$ et $e^{\mu(r)}$ celui des $B_i(z)$.

Si la condition

$$[\mu(r)]^2 < M(r) \qquad \text{ou} \qquad \mu(r)^{1+\alpha} < M(r)$$

est réalisée dans une série d'intervalles d'étendue totale convenable, nous n'avons pas besoin d'éliminer toutes les transcendantes qui figurent dans (27); il suffira d'éliminer seulement les $A_i(z)$ pour être ramené au théorème de M. Borel. Dès lors, on fera une étude analogue à celle du paragraphe précédent et l'on arrivera aux conclusions :

1° *Le nombre des éléments de l'ensemble* (E) *est au plus égal à* m.

2° *Le nombre des équivalentes à une certaine valeur de* u *est au plus égal à* m.

3° *Le nombre des valeurs exceptionnelles non équivalentes et autres que* (E) *est au plus égal au plus grand des nombres* m *et* ν.

Conclusion. — Toutes les fonctions $u(z)$ définies par une équation de la forme (27), à un nombre infini de branches, n'admettent qu'un nombre fini de valeurs exceptionnelles qui ne dépasse pas le plus grand des nombres $2m^2+1$ et $(m+\nu)m+1$ (1).

7. Je termine ces considérations par les remarques suivantes :

I. Si dans l'équation (27) les $q_i(u)$ sont, ainsi que les $\sigma_i(u)$, des fonctions entières quelconques (transcendantes ou non), l'ensemble ($\mathcal{E}$) est, en général,

(1) Nous pouvons même affirmer que la limite supérieure est le plus grand des nombres m^2+m+1 et $m+m\nu+1$, puisqu'il n'y a pas lieu de considérer des équivalentes aux valeurs exceptionnelles (E).

infini et dénombrable, n'ayant qu'un point limite, l'infini; mais la densité des valeurs exceptionnelles (le nombre de celles qui ont un module inférieur à R) dépend surtout de la nature des $q_i(u)$.

Ainsi, l'exposant de convergence de la suite de leurs modules (quand il est fini) ne dépasserait jamais le plus grand des ordres apparents des $q_i(u)$, quelles que soient les fonctions $\sigma_i(u)$, même d'ordre infini. En effet, on constaterait aisément que l'ensemble (ε) fait partie de l'ensemble des zéros d'une fonction entière, qui ne dépend que des $q_i(u)$.

II. Il y a un cas singulier de l'équation (27) qui échappe au théorème, qui s'y rattache; c'est le cas, où $\nu = 1$ et $q_1(u)$ est une constante; en effet, dans ce cas, l'élimination de $A_1(z)$ conduit à une identité de M. Borel, dans laquelle les coefficients des exponentielles ne dépendent pas de u_1 et u_2 et les relations, qui doivent être satisfaites par u_1 et u_2, seront toutes constituées par les transcendantes $\sigma_i(u)$.

On exclura toujours ce cas.

Une telle équation est la suivante :

$$A(z) + \sigma(u) = 0.$$

Or, la discussion ici est immédiate : si $A(z)$ admet une valeur exceptionnelle α, toutes les racines de l'équation : $\alpha + \sigma(u) = 0$ seront exceptionnelles pour $u(z)$. Si $A(z)$ n'en admet aucune, la seule valeur (ε) pour $u(z)$ est l'infini.

III. Enfin, profitons de l'occasion pour nous rappeler que M. Painlevé a obtenu un résultat analogue pour toutes les intégrales (d'un nombre fini ou infini de branches) d'une équation différentielle du premier ordre,

$$\psi(z, u, u') = 0,$$

algébrique en z, u et u'. Les valeurs exceptionnelles sont en nombre *fini* et mises en évidence par l'équation différentielle (voir *Leçons de Stockholm,* p. 233 *bis,* 234, 235).

IV. Tous les théorèmes de ce Chapitre seront généralisés de la façon suivante :

On appellera *valeurs équivalentes* deux valeurs u_1 et u'_1, lorsque l'ordre de grandeur du rapport $F(z, u_1) : F(z, u'_1)$ jouit des mêmes propriétés par rapport à $e^{M(r)}$ que $e^{\mu(r)}$ (*voir* les inégalités de la page 35; je me rapporte aux notations de cette page).

Convenons de désigner, d'une façon générale, par $e^{\mu(r)}$ un tel ordre de grandeur.

Une valeur $u = u_0$ sera dite *exceptionnelle,* lorsque $F(z, u_0)$ est de la forme

$$F(z, u_0) = G(z)\, e^{H(z)},$$

où $G(z)$ est de l'ordre de grandeur $e^{\mu(r)}$. Lorsqu'une valeur $u = u_0$ est exceptionnelle, toutes ses équivalentes le sont aussi.

A ce point de vue, il est loisible pour notre méthode de mettre l'équation (27) (par exemple) à la forme

$$(28) \qquad \begin{aligned} &\mathrm{a}_1(u, z)\,A_1(z) + \mathrm{a}_2(u, z)\,A_2(z) + \ldots \\ &\quad + \mathrm{a}_k(u, z)\,A_k(z) + \sigma_1(u)\,B_1(z) + \ldots + \sigma_\mu(u)\,B_\mu(z) = 0, \end{aligned}$$

les $\mathrm{a}_i(u, z)$ étant des fonctions de z, dont l'ordre de grandeur est de l'espèce $e^{\mu(r)}$ et des polynomes par rapport à u.

On aura la même limite supérieure du nombre des valeurs exceptionnelles ainsi définies.

En particulier, si les $A_i(z)$ et $B_i(z)$ sont d'ordre fini avec toujours la même distinction entre l'ordre de grandeur des $A_i(z)$ et celui des $B_i(z)$ et si ρ est l'ordre apparent des fonctions $A_i(z)$, l'ordre réel de $F(z, u)$ ne saura être inférieur à ρ pour plus de N valeurs de u, N désignant le plus grand des nombres $2m^2 + 1$ et $(m + \nu)m + 1$.

La fonction $u(z)$, d'un nombre infini de branches, définie par (28) sera aussi dite d'*ordre* ρ et cette dénomination est justifiée par le fait que la densité des zéros des équations

$$u(z) = a \qquad \text{ou} \qquad u(z) = \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant une fonction entière d'ordre inférieur à ρ, dépend, en général, de ce nombre ρ, qui est l'exposant de convergence de leurs modules.

La notion de l'*ordre* est susceptible de s'étendre à des fonctions multiformes assez compliquées.

V. Le théorème du n° 6 prend une forme, qui complète d'une façon remarquable celui des transcendantes algébroïdes (*voir* I^re Partie, Chap. I), si l'on écrit l'équation (27) comme il suit :

$$(29) \quad A_0(z) + A_1(z)u + A_2(z)u^2 + \ldots + A_{\nu-1}(z)u^{\nu-1} + f(z, u) = F(z, u) = 0$$

avec

$$f(z, u) = \sigma_1(u)\,B_1(z) + \sigma_2(u)\,B_2(z) + \ldots + \sigma_m(u)\,B_m(z),$$

les $B_i(z)$ ayant un ordre de grandeur toujours inférieur au plus grand des ordres de grandeur des $A_i(z)$.

m désigne un entier quelconque et les $\sigma_i(u)$ des fonctions uniformes quelconques de u.

Des valeurs (E) et des valeurs de *u exceptionnelles équivalentes* n'existent pas, lorsque les $A_i(z)$ sont des fonctions linéairement indépendantes; j'entends par là qu'il n'y a pas des relations linéaires de la forme

$$a_0(z)A_0(z)+a_1(z)A_1(z)+a_2(z)A_2(z)+\ldots+a_{\nu-1}A_{\nu-1}(z)+a_\nu(z)=0,$$

où les $a_i(z)$ désignent des fonctions entières croissant moins vite que $e^{M(r)}$, dans le sens que nous avons plusieurs fois indiqué.

Si de telles relations existent, nous faisons toutes les réductions possibles, de façon à rendre minimum le nombre des fonctions $A_i(z)$ qui croissent comme $e^{M(r)}$.

Le nombre des valeurs (E) ne dépasse $\nu-1$.

De même, le nombre des valeurs équivalentes à une certaine valeur u_0, ne dépasserait la limite $\nu-1$.

Donnons-nous maintenant $\nu+1$ valeurs exceptionnelles n'appartenant pas à (E). D'après ce que nous venons de dire, elles ne seront pas toutes équivalentes à la même valeur, il y en aura toujours deux qui ne le seront pas et, dès lors, l'élimination des $A_i(z)$ entre les équations

$$\begin{aligned}F(z,u_0)&=Q_0(z)e^{H_0(z)},\\ F(z,u_1)&=Q_1(z)e^{H_1(z)},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ F(z,u_\nu)&=Q_\nu(z)e^{H_\nu(z)}\end{aligned}$$

nous conduira à une identité

$$\begin{aligned}(30)\qquad &\lambda_0 Q_0(z)e^{H_0(z)}+\lambda_1 Q_1(z)e^{H_1}+\ldots+\lambda_\nu Q_\nu(z)e^{H_{\nu+1}(z)}\\ &=\lambda_0 f(z,u_0)+\lambda_1 f(z,u_1)+\ldots+\lambda_\nu f(z,u_\nu),\end{aligned}$$

dans laquelle il y aura toujours un terme, par exemple,

$$\lambda_1 Q_1(z)e^{H_0(z)},$$

qui ne subira aucune réduction avec le terme

$$\lambda_0 Q_0(z)e^{H_0(z)}.$$

Nous en concluons que, après toutes les réductions possibles effectuées dans l'identité (30), il y aura un terme de la forme

$$\Theta(z,u_0,u_1,u_2,\ldots,u_\nu)e^{H_k(z)},$$

où $\Theta(z,u_0,u_1,\ldots,u_\nu)$ est un polynome par rapport à u_0 de degré au plus égal à $\nu-1$ et dont les coefficients ne dépendent pas du terme $Q_0(z)e^{H_0(z)}$, parce que ce terme n'a pas contribué à sa formation. Donc, si $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ restent fixes, ce polynome en u_0, $\Theta(z, u_0, u_1, u_2, \ldots, u_\nu)$, ne change pas.

Donc le nombre maximum des valeurs possibles de u_0, lorsque les $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ sont données, est égal à $\nu - 1$.

Le nombre total des valeurs exceptionnelles finies est au plus égal à $3\nu - 2$.

Cette limite, que nous signalons ici, est inférieure à celle que nous avons trouvée ailleurs (¹). Je pense qu'elle peut être encore abaissée, mais il faut pour cela approfondir davantage les divers cas où les valeurs équivalentes se présentent.

Je n'y insisterai pas ici. Je me contenterai de signaler un cas, très général d'ailleurs, où cet abaissement est immédiat, et la limite, indiquée plus haut, se confond avec celle que nous avons assignée pour les transcendantes algébroïdes (c'est-à-dire à un nombre fini de branches).

Supposons que $F(z, u)$ soit de la forme

$$F(z, u) = A_0(z) + A_1(z)u + \ldots + A_{\nu-1}(z)u^{\nu-1} + u^\nu + z\,\varphi(z, u) = 0, \tag{31}$$

$\varphi(z, u)$ étant une fonction uniforme quelconque de u et entière en z avec un ordre de grandeur (par rapport à z et pour toute valeur de u) inférieur à $e^{[M(r)]^{1-\alpha}}$ (α étant un certain nombre positif).

Notre méthode d'élimination nous conduit alors à l'identité

$$\begin{aligned} &\lambda_0\, Q_0(z)\, e^{H_0(z)} + \lambda_1\, Q_1(z)\, e^{H_1(z)} + \ldots + \lambda_\nu\, Q_\nu(z)\, e^{H_\nu(z)} \\ &\quad = \lambda + [\lambda_0\, \varphi(z, u_0) + \lambda_1\, \varphi(z, u_1) + \ldots + \lambda_\nu\, \varphi(z, u_\nu)]\, z. \end{aligned} \tag{32}$$

Les conditions du théorème de M. Borel étant réalisées, il faut que le second membre soit identiquement nul, puisque, quelles que soient les réductions qui auront lieu dans le premier membre (à cause des valeurs équivalentes), le second restera toujours irréductible.

En effet, les valeurs $u_0, u_1, \ldots, u_\nu$ n'appartenant pas à (E), aucune des fonctions $H_i(z)$ ne sera une constante, ou bien d'ordre inférieur à $M(r)$ (au sens bien entendu).

Or, le second membre devient égal à λ pour $z = 0$; il faut donc que

$$\lambda = \begin{vmatrix} 1 & u_0 & u_0^2 & \ldots & u_0^\nu \\ 1 & u_2 & u_1^2 & \ldots & u_1^\nu \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots & \cdot\cdot \\ u_\nu & u_\nu & u_\nu^2 & \ldots & u_\nu^\nu \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui est visiblement impossible.

(¹) *Voir* le n° 6, où la limite signalée est du second degré par rapport à m, qui est remplacé ici par ν.

Nous arrivons donc à la conclusion que le nombre total des valeurs exceptionnelles finies est au plus égal à $2\nu - 1$ (¹).

Cette méthode est applicable toutes les fois où le dernier terme de l'équation (31) admet un zéro, quel que soit u.

S'il n'en est pas ainsi, la fonction

$$\lambda_0 \varphi(z, u_0) + \lambda_1 \varphi(z, u_1) + \ldots + \lambda_\nu \varphi(z, u_\nu)$$

pourrait bien, pour certaines valeurs de u_0, n'admettre aucun zéro, et alors le second membre de (32) ne prendrait jamais la valeur λ. Dans ce cas, on serait obligé de tenir compte de ces valeurs de u_0.

J'appelle l'attention sur le fait tout à fait remarquable que $\varphi(z, u)$ peut être une fonction uniforme quelconque de u (pourvu qu'elle n'admette pas des infinis); elle peut avoir des singularités essentielles de toute sorte. En effet, la manière dont $\varphi(z, u)$ dépend de u ne joue aucun rôle dans le calcul du nombre des valeurs exceptionnelles.

Le théorème subsisterait même dans le cas où $\varphi(z, u)$ serait une fonction multiforme de u. Cela tient à ce que, étant donnée une valeur u_0 exceptionnelle, parmi les différentes fonctions entières $\varphi(z, u_0)$, il n'y en aurait qu'une à laquelle correspondrait une équation de la forme

$$F(z, u_0) = Q_0(z)\, e^{H_0(z)},$$

$Q_0(z)$ croissant moins vite que $e^{[M(r)]^{1-\alpha}}$ et cela grâce au théorème lui-même de M. Picard généralisé.

En effet, il est impossible qu'il y ait deux fonctions $\sigma_1(z)$ et $\sigma_2(z)$ différentes, croissant moins vite que $e^{[M(r)]^{1-\alpha}}$ et telles que la densité des zéros des fonctions

$$A_0(z) + A_1(z) u_0 + \ldots + A_{\nu-1}(z) u_0^{\nu-1} + u_0^\nu + \sigma_1(z),$$
$$A_0(z) + A_1(z) u_0 + \ldots + A_{\nu-1}(z) u_0^{\nu-1} + u_0^\nu + \sigma_2(z)$$

soit autre que celle qui convient au mode de croissance $e^{M(r)}$.

VI. Les résultats intéressants, exposés dans ce Chapitre, montrent le rôle considérable que le théorème de M. Borel joue tout naturellement dans les questions de ce genre, et la manière dont il intervient toutes les fois qu'il s'agit d'étudier les zéros des fonctions analytiques.

Dans la pratique, dans des problèmes particuliers, l'utilité de ce théorème est sans doute beaucoup plus considérable que j'ai pu l'indiquer dans ce travail.

(¹) C'est juste la limite que nous avons trouvée dans la première Partie pour les fonctions à ν branches.

VII. Soit maintenant $F(z, u)$ une fonction entière des z et u *tout à fait quelconque;* en ordonnant par rapport à u, on a

$$(30) \qquad F(z, u) = A_0(z) + A_1(z)u + A_2(z)u^2 + \ldots + A_n(z)u^n + \ldots.$$

Nous n'avons étudié jusqu'ici que les cas particuliers suivants :

1° *Il est possible de réduire* $F(z, u)$ *en une somme d'un nombre fini de termes de la forme* $\sigma(u)A(z)$, $A(z)$ et $\sigma(u)$ *étant des fonctions entières. L'ensemble* $(\mathcal{E})$, *lorsqu'il est infini, est dénombrable.*

2° *Le module* $e^{M_n(r)}$ *de* $A_n(z)$ *décroît assez vite avec* n, *de manière à réaliser les conditions* $(21')$ *posées dans le n° 4. Dans ce cas, l'ensemble* (ε) *est fini.*

Les mêmes considérations nous conduisent à la conclusion que l'ensemble (ε) est dénombrable dans le cas où $F(z, u)$ peut prendre la forme

$$(31) \qquad F(z, u) = B_1(z)\sigma_1(u) + B_2(z)\sigma_2(u) + \ldots + B_n(z)\sigma_n(u) + \ldots,$$

les $\sigma(u)$ étant des fonctions entières quelconques, pourvu que la même condition sur l'ordre de grandeur de $B_n(r)$ soit réalisée.

En effet, notre méthode d'élimination prouve que, étant donné un certain nombre de valeurs exceptionnelles, toutes les autres seront des zéros d'une fonction entière qui dépend du mode de décroissance de $e^{M_n(r)}$ [ordre de grandeur de $B_n(r)$] et des fonctions $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, ... jusqu'à un certain rang fixe. L'ensemble (ε) sera donc dénombrable.

Il est très naturel de nous demander s'il en est de même dans le cas le plus général où $F(z, u)$ est quelconque. Ce problème fera l'objet du Chapitre suivant.

CHAPITRE II.

UN THÉORÈME GÉNÉRAL ET LA PROPOSITION FONDAMENTALE DE M. BOREL.

1. L'étude des fonctions multiformes $u(z)$ les plus générales qui sont définies par une équation quelconque

$$F(z, u) = 0$$

se rattache étroitement au problème suivant :

Étendre le théorème de M. Borel au cas où ses identités contiennent un nombre infini d'exponentielles, le premier membre étant une série.

Bien que cette extension ne me semble pas douteuse, elle présente des difficultés considérables que je n'ai pas pu surmonter complètement.

Nous nous donnons une identité de la forme (¹)

$$(34) \qquad Q_1(z)\,e^{H_1(z)} + \frac{1}{2}Q_2(z)\,e^{H_2(z)} + \ldots + \frac{1}{n!}Q_n(z)\,e^{H_n(z)} + \ldots = 0$$

et nous supposons que les $|Q_n(z)|$ restent inférieurs à $e^{\mu(r)}$, à partir d'une certaine valeur r_0, *indépendante de* n, et que les $H_n(z)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$ croissent plus vite que $[\mu(r)]^{1+\alpha}$ à partir de la même valeur de r.

Nous nous proposons de démontrer qu'une telle identité entraîne la nullité de tous les $Q_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$.

Nous pouvons souvent supposer que tous les $H_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ ont le même ordre de grandeur. J'entends par là que, si $M_k(r)$ et $M_\lambda(r)$ désignent l'ordre de grandeur des $H_k(r)$ et $H_\lambda(r)$, on a

$$[M_\lambda(r)]^{1-\varepsilon} < M_k(r) < [M_\lambda(r)]^{1+\varepsilon}$$

à partir d'une certaine valeur de r, aussi petit que soit ε.

En effet, s'il n'en est pas ainsi, nous pouvons diviser la série du premier membre de l'identité (34) en un nombre fini ou infini de groupes, tels que les $H_i(z)$, correspondant au même groupe, aient le même ordre de grandeur, au sens que nous venons d'indiquer. Considérons deux cas intéressants.

(α) *Le nombre des groupes est fini.* — Nous pouvons alors nous borner au groupe dont l'ordre de grandeur est maximum et réunir tous les autres à un terme. Les groupes, qui ne contiennent qu'un nombre fini d'exponentielles, donneront évidemment un terme croissant moins vite que $e^{[m(r)]^{1+\varepsilon}}$ (ε étant aussi petit que l'on voudra) (²); il en est de même des groupes qui renferment un nombre infini d'exponentielles et l'on s'en rend compte en faisant des raisonnements analogues à ceux que nous avons faits dans le paragraphe 4 (exemple).

Nous voyons donc que ce cas se laisse ramener immédiatement au cas où tous les $H_i(z)$ ont le même ordre de grandeur.

(β) Chaque groupe ne contient qu'un nombre fini d'exponentielles, leur nombre étant infini. On démontrera alors de proche en proche l'annulation de

(¹) J'ai, pour simplifier, adopté ici un mode spécial de décroissance du terme général avec $\frac{1}{n}$; $Q_n(z)\,e^{H_n(z)}$ ne tend pas vers l'infini avec n.

(²) Je désigne ici par $m(r)$ le plus grand des ordres de grandeur des divers groupes.

tous les $Q_i(z)$ si, à partir d'une certaine valeur de n, l'ordre de grandeur de $H_n(z)$ diminue constamment.

En effet, soit

$$G_0(z) + G_1(z) + G_2(z) + \ldots + G_n(z) + \ldots = 0 \tag{35}$$

l'identité (34) écrite avec le groupement des termes.

Il est clair que l'application successive du théorème de M. Borel décompose cette identité en une infinité d'autres

$$G_0(z) = 0, \quad G_1(z) = 0, \quad \ldots, \quad G_n(z) = 0, \quad \ldots;$$

donc chacune ne contient qu'un nombre fini d'exponentielles. Nous en déduisons immédiatement la nullité de tous les $Q_i(z)$. D'une façon plus précise on démontrera d'abord la nullité des $Q_i(z)$ figurant dans $G_0(z)$ et l'on sera ramené à l'identité

$$G_1(z) + G_2(z) + \ldots + G_n(z) + \ldots = 0.$$

De même on démontrera la nullité des $Q_i(z)$ appartenant à $G_1(z)$ et l'on sera ramené à l'identité

$$G_2(z) + \ldots + G_n(z) + \ldots = 0$$

et ainsi de suite.

Donnons-nous un exemple d'une identité (34) remplissant les conditions posées. Supposons que les $Q_i(z)$ soient des fonctions entières d'ordre inférieur à $\rho < 1$ et que les $H_i(z)$ soient des polynomes quelconques; ou, encore, que les $Q_i(z)$ $(i = 1, 2, \ldots, \infty)$ croissent moins vite que e^{e^p} avec $p < \rho < 1$ et que $H_n(z)$ soit une fonction entière d'ordre égal à $\frac{n+1}{n}$; l'ordre de $H_n(z)$, qui est égal à 2 pour $n = 1$, tend vers l'unité lorsque n croît indéfiniment.

2. J'ai fait une tentative pour démontrer le théorème ci-dessus énoncé dans le cas le plus général en utilisant les méthodes mêmes de M. Borel; j'ai employé un artifice qui me paraît destiné à surmonter les difficultés qui proviennent de ce que le nombre des termes est infini (1).

J'ai écrit l'identité (34) sous la forme

$$Q_1(z)\, e^{H_1(z)} + \frac{1}{2} Q_2(z)\, e^{H_2(z)} + \ldots + \frac{1}{n!} Q_n(z)\, e^{H_n(z)} + R_n(z) = 0$$

et j'ai fait les opérations de M. Borel (divisions et dérivations successives) de la même façon, comme si n était fixe.

---

(1) Dans une Communication à l'Académie (*Comptes rendus*, 1904) j'ai signalé une voie détournée, qui nous conduit à cette extension dans certains cas particuliers.

L'artifice, dont j'ai parlé plus haut, consiste en ce que je fais croître n indéfiniment en même temps que r (en considérant n comme fonction de r) de façon que le module de $R_n(z)$ reste toujours inférieur à $e^{\mu(r)}$, bien que, en vérité, $R_n(z)$ croisse plus vite que $e^{[\mu(r)]^{1+\alpha}}$.

Cet artifice tient à ce que, étant donnée une valeur de r, aussi grande que nous voudrons, il y a toujours une valeur n_r de n, telle que l'on ait

$$|R_n(z)| < e^{\mu(r)}$$

pour $n > n_r$.

Je n'y insisterai pas dans ce travail, puisque la discussion n'est pas complète.

3. Je tiens seulement à aborder un autre problème, qui se rattache à ces considérations.

Nous savons que, étant donné un nombre fini de fonctions entières $A_1(z)$, $A_2(z)$, ..., $A_n(z)$, il existe toujours une infinité de valeurs de r, croissant indéfiniment, pour lesquelles ces fonctions satisfont simultanément au théorème de M. Hadamard sur le module minimum et aux inégalités de M. Borel sur la croissance de la dérivée (¹).

Y en a-t-il de même, lorsque les fonctions données $A_i(z)$ sont en nombre infini (un ensemble dénombrable)?

Il est clair que, pour répondre à cette question, il faut faire une étude des intervalles d'exclusion plus approfondie que l'on n'a fait jusqu'ici.

Si les fonctions $A_i(z)$ sont d'ordre fini, la chose est certaine relativement aux inégalités de M. Borel (croissance de la dérivée). La réponse est affirmative, à cause de l'absence d'intervalle d'exclusion.

Voir, à ce sujet, le beau complément apporté par M. Boutroux (²) aux résultats de M. Borel.

M. Albert Kraft (³) a fait une étude systématique des intervalles d'exclusion dans le cas d'ordre infini en développant les méthodes de M. Borel. Voici un résultat des calculs de M. Kraft.

Étant donnée une fonction entière $A(z)$, telle que

$$e^{r^{[\mu(r)]^{t-\varepsilon}}} < M(r) < e^{r^{\mu(r)}},$$

$M(r)$ étant le module maximum de $A(z)$ et $\mu(r)$ une fonction croissante, que

(¹) *Voir* E. Borel, *Leçons sur les fonctions entières* et *Mémoire sur les zéros des fonctions entières* (*Acta mathematica*, t. XX).

(²) Boutroux, *Thèse de doctorat*, 1903.

(³) Albert Kraft, *Ueber ganze transcendante Functionen von unendlicher Ordnung*, Inaugural-Dissertation (Gottingen, 1903).

M. Kraft a appelé ordre de la fonction $A(z)$, l'étendue totale des intervalles d'exclusion compris entre r_0 et $2r_0$ est inférieure à $\frac{1}{\mu(r_0)}$.

Supposons donc que l'ordre de $A_n(z)$ (d'après la définition de M. Kraft) est égal à $[\mu(r)]^n$, $\mu(r)$ ne dépendant pas de n.

Alors l'étendue totale des intervalles d'exclusion, relatifs à toutes les fonctions $A_n(z)[n=1, 2, \ldots, \infty)$ et compris entre r_0 et $2r_0$, est évidemment égale à

$$\frac{1}{\mu(r_0)}+\frac{1}{[\mu(r_0)]^2}+\ldots+\frac{1}{[\mu(r_0)]^n}+\ldots \tag{35}$$

Elle est donc finie et diminue même lorsque r croît indéfiniment. Nous voyons donc que dans ce cas particulier la réponse à la question ci-dessus posée est affirmative.

Il est clair qu'il en est de même, lorsque le rapport $\mu_{n-1}(r):\mu_n(r)$ reste, à partir d'une certaine valeur de r et n, inférieur à un nombre q, plus petit que l'unité, et, en général, lorsque la série suivante converge, à savoir

$$\frac{1}{\mu_1(r_0)}+\frac{1}{\mu_2(r_0)}+\frac{1}{\mu_3(r_0)}+\ldots+\frac{1}{\mu_n(r_0)}+\ldots,$$

$\mu_n(r)$ désignant l'ordre de $A_n(z)$ (d'après M. Kraft).

Il n'est même pas besoin qu'elle converge, pourvu qu'elle croisse moins vite que r_0 (1).

La conclusion subsiste, si l'on considère toutes les inégalités simultanément de M. Hadamard et de M. Borel pour un nombre quelconque (mais fini) de dérivées.

4. Quant au théorème, que nous nous fûmes proposé de démontrer à la fin du Chapitre précédent, on peut l'établir par des raisonnements bien simples.

Soit $u=\varphi(z)$ une fonction multiforme, définie par une équation

$$F(z, u)=0, \tag{36}$$

$F(z, u)$ désignant une fonction entière des z et u quelconque.

La fonction inverse $z=\psi(u)$, définie par (36), est à un nombre infini de branches, puisque la fonction $F(z, u)$ n'est pas un polynome en z.

Si u_0 est une valeur exceptionnelle, la fonction $z=\psi(u)$ n'a qu'un nombre *fini* de valeurs pour $u=u_0$ (nous prenons ici l'expression valeur exceptionnelle dans le sens restreint du mot). Cela veut dire qu'un nombre infini de détermina-

(1) J'entends par là que la série ne converge que pour une valeur finie de r_0; sa somme $S(r_0)$ peut tendre vers l'infini avec r_0, mais pas plus vite que lui.

tions de la fonction $z = \psi(u)$ coïncident en u_0, donc u_0 est un point *critique transcendant* de $z = \psi(u)$.

Je dis maintenant que ces déterminations (en nombre infini), qui coïncident en u_0, tendent vers l'*infini*, lorsque u tend vers u_0.

La cause en est bien simple, c'est que, si elles tendaient vers une valeur finie z_0, la fonction $F(z, u)$ pourrait être développée, d'après le théorème classique de Weierstrass (1), en un produit de la forme

$$F(z, u) = P(z, u)\, e^{H(z,u)},$$

$P(z, u)$ étant un polynome en z et holomorphe en u dans le voisinage de $u = u_0$ et $H(z, u)$ étant une fonction holomorphe dans le voisinage des valeurs $z = z_0$ et $u = u_0$.

Par conséquent, les branches de la fonction $z = \psi(u)$ qui deviennent égales à z_0 pour $u = u_0$ coïncideraient avec la fonction $z = \mathrm{a}(u)$, définie par l'équation

$$P(z, u) = 0.$$

Donc, le point u_0 serait un point critique algébrique de $z = \psi(u)$.

Nous arrivons donc à la conclusion que l'ensemble (ε) des valeurs exceptionnelles fait partie de l'ensemble des infinis de la fonction analytique $z = \psi(u)$; or, ce dernier ensemble est dénombrable; ceci résulte d'un théorème général de M. Poincaré (*Rendic. del Circ. mat. di Palermo*, 1888).

M. Poincaré a démontré que l'ensemble des déterminations d'une fonction analytique quelconque est dénombrable.

THÉORÈME. — *L'ensemble des valeurs exceptionnelles* (ε) *de* $u = \varphi(z)$ *est toujours dénombrable avec un point limite, l'infini* (2).

Le fait que les valeurs exceptionnelles (E) sont des singularités critiques transcendantes de la fonction inverse $z = \psi(u)$ est très important. Il fait apparaître l'utilité pratique des théorèmes que nous avons établis au premier Chapitre de cette partie du Mémoire, concernant le cas où la fonction $F(z, u)$, qui définit la fonction multiforme, peut être réduite à la forme

$$q_1(z, u)\, A_1(z) + q_2(z, u)\, A_2(z) + \ldots + q_\nu(z, u)\, A_\nu(z) = 0,$$

où les $A_i(z)$ désignent des transcendantes entières d'ordre de grandeur $e^{M_i(r)}$,

(1) *Voir*, par exemple, E. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 245.

(2) Il n'y a pas de points limites à distance finie, puisqu'une valeur finie de u ne saurait être un point limite de points critiques transcendants. On s'en rend compte en se reportant au même théorème de Weierstrass. On le vérifie encore en remarquant qu'une valeur finie de u n'est jamais une singularité essentielle de $z = \Psi(u)$.

$e^{M_2(r)}, \ldots, e^{M_\nu(r)}$ avec la propriété que les fonctions croissantes $M_1(r), M_2(r), \ldots, M_\nu(r)$ ont le même ordre de grandeur (j'adopte ici la définition donnée par M. Borel dans son Mémoire *Sur les zéros des fonctions entières,* page 372).

Les $q_i(z, u)$ sont des transcendantes par rapport à z avec un ordre de grandeur $e^{\mu_i(r)}$, où $\mu_i(r)$ a un ordre de grandeur inférieur à celui de $M_i(r)$.

Nous avons donné dans ce Chapitre des fonctions entières en u, qui doivent s'annuler par les valeurs exceptionnelles [1].

5. Enfin les considérations générales que nous venons d'exposer dans le paragraphe précédent peuvent avoir d'autres conséquences intéressantes.

Posons
$$F(z, u) = F_u(z).$$

A chaque valeur de u correspond un développement tel que
$$F_u(z) = P_u(z)\, e^{H_u(z)},$$

$P_u(z)$ étant un produit canonique de facteurs primaires de Weierstrass et $H_u(z)$ une fonction entière.

Soit u_0 une valeur de u et $P_{u_0}(z)$ le produit canonique correspondant; à une valeur $u_0 + \Delta u_0$ très voisine de u_0 correspondront des zéros de $F_u(z)$ très voisins de ceux de $P_{u_0}(z)$. La fonction $P_u(z)$ est de la forme
$$P_u(z) = \prod_{n=1}^{n=\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{z_n(u)} \right) e^{\frac{z}{z_n(u)} + \frac{z^2}{2 z_n^2(u)} + \ldots + \ldots} \right].$$

Elle est une fonction continue dans tout le plan de u, sauf les zéros des diverses branches $z_n(u)$; c'est une fonction analytique de u, prolongeable dans tout le plan de u, puisque l'ensemble des singularités des diverses branches de $z(u)$ est dénombrable.

D'autre part, c'est une fonction entière de z.

Théorème. — $F(z, u)$ *étant une fonction entière quelconque des z et u, elle peut être mise sous la forme*

$$F(z, u) = P(z, u)\, e^{H(z, u)}, \tag{48}$$

les $H(z, u)$ et $P(z, u)$ étant des fonctions entières en z et analytiques en u et

---

(1) Nous avons ainsi un moyen de rechercher les points critiques transcendants de la fonction $z = \Psi(u)$, sur lesquels il n'y a qu'un nombre fini de branches qui ne se confondent pas.

telles que $P(z, u)$ *soit un produit canonique de facteurs primaires, quelle que soit la valeur de u.*

Soit

$$(49) \qquad P(z, u) = \alpha_0(u) + \alpha_1(u)z + \alpha_2(u)z^2 + \ldots + \alpha_n(u)z^n + \ldots,$$

u_0 sera une valeur exceptionnelle de u, si $P(z, u)$ croît comme

$$e^{\mu(r)} \quad \text{avec} \quad \mu(r) < [M(r)]^{1-\alpha},$$

α étant un certain nombre positif.

Nous avons dit plus haut que toute valeur exceptionnelle u_0 de $u = \varphi(z)$ est un point critique transcendant de la fonction inverse $z = \psi(u)$. La réciproque n'est pas en général vraie : si u_0 est un point critique transcendant de $z = \psi(u)$, un nombre infini de déterminations de $z = \psi(u)$ y coïncident, mais cela peut avoir lieu sans que le nombre des valeurs distinctes de $z = \psi(u)$ en u_0 soit fini.

Nous terminons ce paragraphe par la remarque suivante :

Les zéros de $\psi(u)$ ne peuvent être que des points critiques algébriques de $P(z, u)$ lorsqu'ils ne sont pas des points ordinaires et nous savons, d'après le théorème classique de Weierstrass, que la fonction $F(z, u)$ peut être mise sous la forme

$$F(z, u) = Q(z, u)e^{G(z,u)},$$

$Q(z, u)$ étant un polynome en z et holomorphe dans le voisinage $u = u_1$ [u_1 étant un zéro de $\psi(u)$] et $G(z, u)$ holomorphe dans le voisinage des valeurs $z = 0$ et $u = u_1$.

Donc $P(z, u)$ est uniforme dans le voisinage même des zéros de $\psi(u)$ (1). Il est facile de voir que ces points ne peuvent être que des pôles de $P(z, u)$, qui sera, par conséquent, une fonction méromorphe de u_1. Il en résulte que $e^{H(z,u)}$ doit être de la forme

$$e^{H(z,u)} = \sigma(u)e^{A(z,u)}.$$

On aura donc, en définitive, la formule suivante

$$F(z, u) = \sigma(u)P(z, u)e^{A(z,u)},$$

où $\sigma(u)$ désigne une fonction entière de u et $P(z, u)$ un produit canonique en z, quel que soit u. $A(z, u)$ sera une fonction entière de z et u.

(1) Je fais ici l'hypothèse restrictive que $F(z, u)$ est de *genre zéro* par rapport à z. $P(z, u)$ est uniforme dans le voisinage des zéros de $\psi(u)$, puisqu'il est symétrique par rapport aux diverses branches (en nombre fini), qui peuvent se permuter autour de ces points.

Ce résultat est à rapprocher avec celui que M. Boutroux a annoncé récemment à l'Académie ([1]). Je ne possède pas son extension au cas général, qui me paraît probable.

Voici le parti que nous allons tirer de ce résultat :

Pour simplifier, plaçons-nous dans le cas où $F(z, u)$ est d'ordre fini ρ par rapport à z, quel que soit u. Pour que u_0 soit une valeur exceptionnelle, il faut et il suffit que $P(z, u_0)$ soit d'ordre inférieur à ρ. Je prends ici l'expression *valeur exceptionnelle* dans le sens large du mot.

Rechercher les valeurs exceptionnelles de u revient à chercher les valeurs de u pour lesquelles le coefficient $\alpha_n(u)$ satisfasse l'inégalité

$$|\sqrt[n]{\alpha_n(u)}| < \frac{1}{n^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}}$$

à partir d'une certaine valeur de n, ε étant une quantité positive aussi petite que l'on voudra, mais finie.

Si u_0 est exceptionnel, tandis que la valeur u_1 ne l'est pas, le rapport $\frac{\alpha_n(u_0)}{\alpha_n(u_1)}$ tend vers zéro pour une infinité de valeurs de n croissant indéfiniment.

Il est sans doute aisé d'étudier par cette méthode l'ensemble des valeurs exceptionnelles et de lui étendre le théorème, démontré dans la page 42, où le mot *exceptionnelle* a été pris dans le sens restreint du mot.

Mais je n'y insiste pas ici.

6. On peut donner la forme suivante au théorème de la page 42 : $u(z)$ étant une fonction multiforme définie par l'équation

$$F(z, u) = 0,$$

elle prend dans le domaine de l'infini toutes les valeurs, sauf peut-être un ensemble dénombrable n'ayant qu'un point limite, l'infini.

On lui donnerait probablement des généralisations analogues à celles que nous avons données à la classe spéciale des fonctions multiformes, étudiées dans le Chapitre précédent.

([1]) *Sur une classe de transcendantes multiformes* (*Comptes rendus*, 5 avril 1904).

CHAPITRE III.

QUELQUES APPLICATIONS A LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. LES POINTS D'INDÉTERMINATION INCOMPLÈTE.

1. M. P. Painlevé, dans une Note que nous avons déjà citée, a signalé l'existence des points qu'il a appelés *points d'indétermination incomplète*.

Si une fonction uniforme $F(z)$ présente des points singuliers, isolés, qui ne soient pas des pôles, on sait que ces points sont des points d'indétermination complète de $F(z)$; autrement dit, si $z=\alpha$ est un tel point et que z tende vers α d'une façon quelconque, $F(z)$ s'approche autant que l'on veut de toute quantité donnée d'avance. Ce sont les points essentiels isolés de Weierstrass. On dit que $F(z)$ est indéterminée pour $z=\alpha$ et le champ d'indétermination embrasse tout le plan. On sait même que, étant donné un cercle, aussi petit que l'on voudra, et de centre α, l'équation $F(z)=a$ admet une infinité de racines, quel que soit le nombre a, sauf deux au plus. C'est le théorème de M. Picard.

Mais, si $F(z)$ est une fonction à un nombre infini de branches, elle peut bien admettre des points d'indétermination, dans le voisinage desquels $F(z)$ ne peut s'approcher, autant que l'on voudra, de toute quantité donnée; le champ d'indétermination n'embrasse pas tout le plan de u $[u=F(z)]$.

M. Painlevé a cité l'exemple

$$u=(\log z)^i,$$

où $z=0$ est un tel point, et le champ d'indétermination est compris entre deux circonférences concentriques ayant l'origine comme centre.

L'autre partie du plan u est formée par des points exceptionnels, d'après la terminologie que nous employons dans ce travail.

M. Painlevé a étudié particulièrement les fonctions définies par les équations différentielles algébriques et il a énoncé les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Les fonctions définies par les équations différentielles de premier ordre $f(u, u', z)=0$ algébriques en u, u' et z ne peuvent admettre aucun point d'indétermination incomplète.*

THÉORÈME II. — *Les fonctions définies par les équations différentielles du deuxième ordre peuvent admettre de tels points fixes, mais pas mobiles.*

THÉORÈME III. — *Les fonctions définies par les équations différentielles du* *troisième ordre peuvent admettre des points d'indétermination incomplète, fixes ou mobiles.*

2. Nous avons déjà cité le théorème de M. Painlevé sur les transcendantes définies par les équations différentielles du premier ordre,

$$f(z, u, u') = 0, \tag{50}$$

algébriques en z, u, u'.

Si cette équation ne se ramène pas à une équation de Riccati ou à une équation

$$\frac{d\theta}{\sqrt{(1-\theta^2)(1-k^2\theta^2)}} = h(z)\,dz,$$

les transcendantes définies par (50) ne peuvent admettre qu'un nombre fini de valeurs exceptionnelles. Ce n'est que les points singuliers de l'équation

$$f_1(z', z, u) = f\left(z, u, \frac{1}{\frac{dz}{du}}\right) = 0$$

qui peuvent être exceptionnels.

La méthode de M. Painlevé s'étend au cas où $f(z, u, u')$ est transcendant en z (1) et u. Supposons par exemple que les coefficients soient des transcendantes entières. On en déduira que, si $u = \varphi(z)$ est une intégrale transcendante telle que $z = \varphi_1(u)$ (2) ait un nombre infini de branches, l'équation

$$\varphi(z) = \text{A}$$

admet un nombre infini de racines, sauf peut-être un ensemble dénombrable de valeurs de A.

Le point $z = \infty$, étant une singularité essentielle isolée des coefficients de (50), ne saurait être un point d'indétermination incomplète des intégrales de cette équation.

Soient maintenant deux équations différentes du second ordre

$$\sigma_1(z, u, u', u'') = 0, \qquad \sigma_2(z, u, u', u'') = 0,$$

algébriques en u' et u'' et entières en z et u.

Si ces équations ont une intégrale commune $u = \omega(z)$ à point d'indétermination incomplète, elles ne diffèrent pas, toutes leurs intégrales sont communes.

En effet, l'élimination de u'' entre elles conduit à une équation d'ordre *un* ou *zéro* et l'intégrale $u = \omega(z)$ satisferait, ou bien à une équation du premier ordre,

(1) Voir *Leçons de Stockholm*, p. 234.

(2) C'est-à-dire la fonction inverse.

ou bien à une équation de la forme

$$F(z, u) = 0,$$

où $F(z, u)$ est une fonction entière en z et u, ce qui est impossible. Par conséquent, le résultat de l'élimination sera identiquement nul, quelle que soit $u(z)$.

Cela montre que les fonctions à point d'indétermination incomplète caractérisent, pour ainsi dire, les équations différentielles, du second ordre, qu'elles vérifient.

3. D'une façon plus générale, envisageons une équation d'ordre quelconque

$$f(z, u, u', \ldots, u^{(\nu)}) = 0,$$

algébrique en $u', u'', \ldots, u^{(\nu)}$ et entière en z et u.

Si une intégrale de cette équation $u = \omega(z)$, ayant une indétermination incomplète à l'infini, est commune à une autre équation (E) de même espèce et d'ordre inférieur (ou égal), il y aura une troisième équation du second ordre, au moins, dont toutes les intégrales soient communes aux deux premières. La chose se démontre facilement par des dérivations et éliminations successives; l'équation, qui fournit toutes les intégrales communes, ne peut être ni d'ordre *zéro* ni d'ordre *un*.

4. On doit à M. Poincaré un théorème général de la théorie des fonctions (voir *Bulletin de la Société mathématique,* t. II). Ce théorème consiste en ce que, étant donnée une fonction multiforme quelconque $u = \varphi(z)$, nous pouvons trouver une troisième variable t, telle que u et z puissent s'exprimer uniformément en fonction de t

$$u = H(t), \qquad z = h(t).$$

Toute valeur exceptionnelle u_0 de $H(t)$ le sera aussi pour la fonction multiforme $u = \varphi(z)$; en effet, l'équation

$$u_0 = H(t)$$

n'admettant qu'un nombre fini de racines $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$, à u_0 ne correspondra qu'un nombre fini de valeurs de z. La proposition inverse n'est pas vraie; u_0 peut être une valeur exceptionnelle de $\varphi(z)$ sans l'être pour $H(t)$.

Si donc, la fonction multiforme $u = \varphi(z)$ n'admet qu'un nombre fini de valeurs exceptionnelles, il en sera de même de la fonction uniforme $H(t)$.

Dans les Chapitres précédents de ce travail, nous avons établi que toutes les fonctions $u = \varphi(z)$, qui possèdent un nombre fini de branches, n'admettent qu'un nombre fini de valeurs exceptionnelles; il en est de même d'une classe étendue de fonctions d'un nombre infini de branches.

Grâce à la remarque que nous venons de faire, la fonction uniforme $H(t)$, correspondant à ces fonctions, jouit de la même propriété.

Nous voyons donc comment il est utile de savoir si une certaine fonction multiforme admet un nombre fini ou infini de valeurs exceptionnelles, si l'on veut avoir un renseignement précieux sur sa représentation uniforme.

Si $H(t)$ admet un nombre infini de valeurs exceptionnelles, il en sera de même de $u = \varphi(z)$.

TROISIÈME PARTIE.

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DES FONCTIONS A CROISSANCE RÉGULIÈRE.

1. M. Borel a, le premier, introduit dans la théorie des fonctions entières la notion importante de la croissance régulière. Une fonction entière $H(z)$ est dite à *croissance régulière,* lorsque l'expression

$$\frac{\log\log M(r)}{\log r}$$

a un ordre d'infinitude déterminé.

r_n étant une quantité tendant vers l'infini avec n, l'ordre d'infinitude de r_n est déterminé, s'il existe un nombre λ tel que, quelque petit que soit ε donné d'avance, il existe un nombre m tel que l'inégalité $n > m$ entraîne les inégalités

$$n^{\lambda-\varepsilon} < r_n < n^{\lambda+\varepsilon}.$$

En supposant que l'ordre apparent ρ de $H(z)$ n'est pas entier, M. Borel a démontré les deux théorèmes suivants, qui montrent l'importance de cette croissance régulière (voir *Leçons sur les fonctions entières,* Note II, p. 107).

1° *Si l'ordre d'infinitude de* r_n *est déterminé, la fonction* $H(z)$ *est à croissance régulière;*

2° *Si la fonction* $H(z)$ *est à croissance régulière, l'ordre d'infinitude de* r_n *est déterminé,* r_n *désignant le module du zéro* a_n *de rang* n.

Les fonctions à croissance irrégulière n'ont pas été, jusqu'ici, rencontrées d'une façon naturelle, il est cependant possible de former des fonctions entières, dont la croissance présente des irrégularités considérables. M. Borel a indiqué un moyen de former une fonction entière $\omega(z)$ d'ordre *deux,* dont le module maximum $M(r)$ soit, dans une infinité d'intervalles d'étendue aussi grande que l'on veut, inférieur à $e^{r^{1+\varepsilon}}$, et, dans une infinité d'autres intervalles d'étendue aussi grande que l'on veut, supérieur à $e^{r^{2-\varepsilon}}$.

2. Je me propose, dans ce Chapitre, la tâche de compléter en quelques points les résultats de M. Borel.

Je commence par exposer une série de théorèmes très utiles dans la suite.

THÉORÈME I. — $H_1(z)$ *et* $H_2(z)$ *étant deux fonctions entières à croissance* *régulière et d'ordre* ρ *non entier, leur produit* $\pi(z) = H_1(z)H_2(z)$ *sera aussi à croissance régulière.*

Premier cas. — Supposons que $H_1(z)$ et $H_2(z)$ n'aient pas de zéros communs.

Soit a_{n_1} un zéro de $H_1(z)$ et r_{n_1} son module; on aura

$$n_1^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon} < r_{n_1} < n_1^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}, \tag{1}$$

à partir d'une certaine valeur de n_1.

Si n_2 désigne le nombre des zéros de $H_2(z)$, qui ont un module inférieur à r_{n_1}, le rang du zéro a_{n_1} dans la suite des zéros du produit $\pi(z)$, rangés par module croissant, sera égal à $n_1 + n_2$.

Ceci posé il est impossible que l'on ait

$$r_{n_1} > (n_1 + n_2)^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon},$$

pour une infinité de valeurs de n_1 croissant indéfiniment (ε étant assez petit).

En effet, s'il en était ainsi on aurait

$$n_1^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon} > r_{n_1} > (n_1 + n_2)^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}, \tag{2}$$

pour une infinité de valeurs de n_1 croissant indéfiniment.

Or, il est clair que ces inégalités sont impossibles. Il en résulte que l'on aura

$$(n_1 + n_2)^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon} < r_{n_1} < (n_1 + n_2)^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}$$

à partir d'une certaine valeur de $n_1 + n_2$.

On démontre la même chose pour les zéros de $H_2(z)$, c'est-à-dire qu'ils possèdent un ordre d'infinitude déterminé par rapport à leur indice, lorsqu'ils sont considérés comme zéros du produit $\pi(z)$ et sont rangés avec ceux de $H_1(z)$ par module croissant.

Par conséquent, l'ordre d'infinitude du module r_n des zéros a_n de la fonction entière $\pi(z)$ est déterminé. Il en résulte, d'après le premier théorème de M. Borel, que cette fonction $\pi(z)$ croît régulièrement. C. Q. F. D.

Second cas. — Dans le second cas, où il y a des zéros communs des $H_1(z)$ et $H_2(z)$, la démonstration est absolument la même; dans ce cas n_2 désignera le nombre des zéros de $H_2(z)$ de module inférieur à r_{n_1} et distincts de ceux de $H_1(z)$. Dans le cas où tous leurs zéros sont communs, la démonstration de notre théorème est immédiate, en vertu du premier théorème de M. Borel. Il en est de même du cas où les zéros de $H_2(z)$ ont respectivement le même module que ceux de $H_1(z)$.

Théorème II. — $H_1(z)$ *et* $H_2(z)$ *étant deux fonctions entières d'ordre* *entier* ρ, *si le module de leurs zéros a un ordre d'infinitude déterminé, il en est de même de leur produit* $\pi(z) = \mathrm{H}_1(z)\mathrm{H}_2(z)$, *qui croîtra régulièrement.*

La démonstration est identique à celle du théorème précédent.

Il est évident que ces deux théorèmes s'étendent au cas d'un nombre quelconque de fonctions entières.

Théorème III. — *Si le produit* $\pi(z)$ *d'un certain nombre de fonctions entières croît irrégulièrement étant d'ordre* ρ *non entier, il en est de même de tous les facteurs* $\mathrm{H}_i(z)$ *qui ont le même ordre* ρ.

Soient $\mathrm{H}_1(z)$, $\mathrm{H}_2(z)$, ..., $\mathrm{H}_\nu(z)$ les fonctions entières,

$$\pi(z) = \mathrm{H}_1(z)\mathrm{H}_2(z)\ldots\mathrm{H}_\nu(z).$$

Supposons que $\mathrm{H}_1(z)$ ait le même ordre ρ (non entier) que $\pi(z)$.

Soit a_n un zéro de $\mathrm{H}_1(z)$; il aura, dans le produit $\pi(z)$, le rang $n+\theta_n$, θ étant un nombre positif ou nul.

$\pi(z)$ croissant irrégulièrement, on aura

$$r_n > (n+\theta_m)^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon} \tag{3}$$

pour une infinité de valeurs de n croissant indéfiniment, d'après le premier théorème de M. Borel. Par conséquent on aura, à plus forte raison,

$$r_n > n^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon},$$

ce qui montre immédiatement que l'ordre d'infinitude de r_n, relativement à la fonction $\mathrm{H}_1(z)$, n'est pas déterminé. On en conclut, d'après le deuxième théorème de M. Borel, que $\mathrm{H}_1(z)$ croît irrégulièrement.

Il en est de même de tous les facteurs $\mathrm{H}_i(z)$ qui ont le même ordre ρ.

Dans le cas où ρ est un nombre entier, l'hypothèse de la croissance irrégulière du produit $\pi(z)$ ne nous conduit (pour le moment) qu'à la conclusion que l'ordre d'infinitude de r_n, relatif à tous les facteurs $\mathrm{H}_i(z)$ d'ordre ρ, n'est pas déterminé.

Corollaire I. — Le produit de deux fonctions entières d'ordre ρ, dont l'une croît régulièrement et l'autre croît irrégulièrement, est une fonction entière à croissance régulière (ρ est supposé non entier). En effet, si le produit croissait irrégulièrement, il devait en être de même de deux facteurs, suivant le théorème précédent. D'une façon générale, nous avons le théorème suivant :

Théorème IV [1]. — *Si une fonction* $\mathrm{H}_1(z)$, *à croissance régulière et*

[1] Ce théorème, qui est presque identique au corollaire I, résulte aussi du théorème précédent. Mais nous en donnons une seconde démonstration, qui s'appuie sur un procédé remarquable.

d'ordre ρ, non entier, est multipliée par une fonction $H_2(z)$ d'ordre non supérieur à ρ, le produit est toujours une fonction à croissance régulière.

Tout d'abord, les zéros de $H_1(z)$, considérés comme zéros du produit $\pi(z)$, ont un module d'ordre d'infinitude déterminé $\frac{1}{\rho}$, puisque, si r_{n_1} désigne le module d'un zéro a_{n_1} de $H_{n_1}(z)$, l'inégalité

$$r_{n_1} < n_1^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}$$

entraîne nécessairement l'inégalité

$$r_{n_1} < (n_1 + \theta)^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}, \tag{4}$$

θ étant un nombre positif ou nul.

Je dis qu'il en est de même des zéros de $H_2(z)$; en effet, soit r_{n_2} le module d'un zéro b_{n_2} de $H_2(z)$ et a_n le zéro de $H_1(z)$, qui vient immédiatement après b_{n_2}, et a un module r_n supérieur à r_{n_2}.

Si, pour fixer nos idées, nous supposons que $H_1(z)$ et $H_2(z)$ n'ont pas de zéros communs, b_{n_2} aura le rang $n_2 + n - 1$, considéré comme zéro de $\pi(z)$. On a

$$r_{n_2} < r_n < (n_2 + n - 1)^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}, \tag{5}$$

ce qui détermine l'ordre d'infinitude du module des zéros de $H_2(z)$, considérés comme appartenant au produit $\pi(z)$. Dès lors, le premier théorème de M. Borel nous apprend que la fonction $\pi(z)$ est à croissance régulière.

Ce procédé pourrait servir à démontrer d'une façon directe le corollaire précédent.

Le cas où il y a une infinité de zéros communs se ramène au précédent; il suffit pour cela de décomposer $H_2(z)$ comme il suit :

$$H_2(z) = K(z)\, G_2(z),$$

$K(z)$ désignant le produit de facteurs primaires, correspondants aux zéros communs. Nous pouvons alors écrire

$$\pi(z) = H_1(z)\, K(z)\, G(z) = G_1(z)\, G_2(z)$$

avec

$$G_1(z) = H_1(z)\, K(z);$$

il est clair que $G_1(z)$, qui a des zéros multiples, croît régulièrement et que $G_1(z)$ et $G_2(z)$ n'ont aucun zéro commun.

3. Nous allons maintenant établir quelques théorèmes nécessaires pour notre but.

Considérons deux fonctions $H_1(z)$ et $H_2(z)$ d'ordre respectivement égal à ρ_1 et ρ_2.

Théorème V. — *Si* $\rho_1 > \rho_2$ *et* $H_1(z)$ *est à croissance régulière, la somme* $S(z) = H_1(z) + H_2(z)$ *est toujours à croissance régulière.*

La démonstration est bien facile :

Désignons par Z_r l'affixe d'un point de la circonférence de rayon r, où le module de $H_1(z)$ devient maximum.

On a les inégalités

$$|H_1(Z_r)| > e^{r^{\rho_1-\varepsilon}}, \qquad |H_2(Z_r)| < e^{r^{\rho_2+\varepsilon}},$$

$$|S(Z_r)| > |H_1(Z_r)| - |H_2(Z_r)| > e^{r^{\rho_1-\varepsilon}} - e^{r^{\rho_2+\varepsilon}};$$

il vient

$$|S(Z_r)| > e^{r^{\rho_1-\varepsilon}}\left[1 - e^{r^{\rho_2+\varepsilon}-r^{\rho_1-\varepsilon}}\right];$$

ρ_1 étant plus grand que ρ_2, la quantité entre parenthèses tend vers l'unité lorsque r croît indéfiniment, et, à partir d'une certaine valeur de r, cette quantité est supérieure à un certain nombre fixe

$$\alpha < 1;$$

vient

$$|S(Z_r)| > \alpha e^{r^{\rho_1-\varepsilon}} = e^{\log\alpha + r^{\rho_1-\varepsilon}} = e^{r^{\rho_1-\eta}},$$

$$|S(Z_r)| > e^{r^{\rho_1-\eta}},$$

η étant arbitrairement petit avec ε.

$M(r)$ désignant le module maximum de $S(z)$ pour $|z| = r$, on a

$$M(r) \geqq |S(Z_r)|, \qquad M(r) > e^{r^{\rho_1-\eta}}.$$

Donc, la fonction $S(z)$ est à croissance régulière.

3 *bis*. — Supposons maintenant que $\rho_1 = \rho_2$ et qu'une, au moins, des fonctions $H_1(z)$ et $H_2(z)$ est à croissance régulière, par exemple $H_1(z)$.

Nous allons considérer encore les points Z_r, définis plus haut comme maximums du $|H_1(z)|$ sur le cercle de rayon r.

Nous pouvons diviser en trois classes les cercles C_r de rayon r. Les cercles de la première classe satisfont à l'inégalité

$$|H_2(Z_r)| < |H_1(Z_r)|,$$

ceux de la deuxième à l'inégalité

$$H_2(Z_r)| > H_1(Z_r),$$

et ceux de la troisième à l'égalité

$$|H_2(Z_r)| = |H_1(Z_r)|.$$

Un cercle C_r peut appartenir à plusieurs classes.

D'une façon plus commode, envisageons une infinité de valeurs de r de module croissant indéfiniment

$$r_0, \quad r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_m, \quad \ldots.$$

Quatre cas peuvent se présenter :

Premier cas. — Le module du rapport $\dfrac{H_2(Z_{r_m})}{H_1(Z_{r_m})}$ reste, à partir d'une valeur de m, inférieur à un nombre q, plus petit que l'unité.

On a

$$|S(Z_r)| > |H_1(Z_r)| - |H_2(Z_r)| = |H_1(Z_r)| \left[1 - \left|\frac{H_2(Z_r)}{H_1(Z_r)}\right|\right].$$

Or

$$1 - \left|\frac{H_2(Z_{r_m})}{H_1(Z_{r_m})}\right| > 1 - q$$

à partir d'une certaine valeur de m.

Il vient

$$|S(Z_{r_m})| > |H_1(Z_{r_m})|(1-q) > e^{r_m^{\rho_1-\eta}}$$

en vertu de l'inégalité

$$|H_1(Z_{r_m})| > e^{r_m^{\rho_1-\varepsilon}},$$

conséquence de la croissance régulière de la fonction $H_1(z)$.

η est arbitrairement petit avec ε.

Si nous désignons par $M(r_m)$ le module maximum de $S(z)$ sur la suite des cercles $C_{r_0}, C_{r_1}, \ldots, C_{r_m}, \ldots$, on a évidemment

$$M(r_m) \geqq |S(Z_{r_m})| > e^{r_m^{\rho_1-\eta}}$$

à partir d'une certaine valeur de m.

Deuxième cas. — Le module du rapport $\dfrac{H_2(Z_{r_m})}{H_1(Z_{r_m})}$ reste, à partir d'une valeur de m, supérieur à un nombre q, plus grand que l'unité.

Dans ce cas, on écrira

$$|S(Z_r)| > |H_2(Z_{r_m})| \left[1 - \left|\frac{H_1(Z_{r_m})}{H_2(Z_{r_m})}\right|\right],$$

$$|S(Z_r)| > |H_2(Z_{r_m})| \left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

Or

$$|H_2(Z_{r_m})| > q\,|H_1(Z_{r_m})| > e^{r_m^{\rho_1-\varepsilon}},$$

il en résulte

$$|S(Z_{r_m})| > e^{r_m^{\rho_1-\varepsilon}}\left(1-\frac{1}{q}\right) > e^{r_m^{\rho_1-\eta}}.$$

Troisième cas. — Le module du rapport $\dfrac{H_2(Z_{r_m})}{H_1(Z_{r_m})}$ tend vers l'unité, lorsque m croît indéfiniment.

Dans ce cas, on a

$$|H_2(Z_{r_m})| = (1+\alpha)\,|H_1(Z_{r_m})|,$$

α tendant vers zéro avec $\dfrac{1}{m}$.

Dès lors, l'inégalité

$$|H_1(Z_{r_m})| > e^{r_m^{\rho_1-\varepsilon}}$$

entraînera nécessairement les inégalités

$$|H_2(Z_{r_m})| > e^{r_m^{\rho_1-\varepsilon_1}}$$

et

$$(6) \qquad |H_1(Z_{r_m})\,H_2(Z_{r_m})| > e^{r_m^{\rho_1-\eta}}.$$

Or, on a identiquement

$$(7) \qquad \Pi(z) = H_1(z)\,H_2(z) = \frac{[H_1(z)+H_2(z)]^2}{4} - \frac{[H_1(z)-H_2(z)]^2}{4}.$$

Pour que le module du $\Pi(z)$ soit supérieur à $e^{r_m^{\rho_1-\eta}}$, il faut qu'il en soit ainsi d'un au moins des termes du second membre, et par conséquent d'une des fonctions

$$H_1(z)+H_2(z), \quad H_1(z)-H_2(z).$$

En effet, si pour une infinité de valeurs de m ces deux termes du second membre de l'identité (7) étaient inférieurs en module de $e^{r_m^{\rho_1-\varepsilon_2}}$ (ε_2 étant un nombre positif), le premier membre serait inférieur à $e^{r_m^{\rho_1-\eta_1}}$ pour cette même infinité de valeurs de m, η_1 étant un certain nombre positif, ce qui est en contradiction avec l'inégalité (6).

Ainsi, en posant

$$\Delta(z) = H_1(z) - H_2(z),$$

nous arrivons à la conclusion que l'une au moins des inégalités

$$(8) \qquad S(Z_{r_m}) > e^{r_m^{\rho_1-\eta}},$$

$$(9) \qquad \Delta(Z_{r_m}) > e^{r_m^{\rho_1-\eta}}$$

doit être satisfaite à partir d'une certaine valeur de m, η étant arbitrairement petit.

Quatrième cas. — Le module du rapport $H_2(Z_{r_m}) : H_1(Z_{r_m})$ oscille autour de l'unité, devenant tantôt plus grand et tantôt plus petit que l'unité, sans tendre vers aucune limite déterminée.

Ce cas se laisse ramener au précédent, puisque la quantité $1-\left|\frac{H_2(Z_{r_m})}{H_1(Z_{r_m})}\right|$ grandit visiblement lorsque le module $\left|\frac{H_2(Z_{r_m})}{H_1(Z_{r_m})}\right|$ s'éloigne de l'unité, de sorte que l'une des inégalités (8) et (9) sera satisfaite sur la suite des cercles C_{r_m}, s'il en est ainsi sur une autre suite de cercles $C_{r_{\mu_m}}$, faisant partie de la première et qui remplit la condition suivante : le module du rapport $H_2(Z_{r_{\mu_m}}) : H_1(Z_{r_{\mu_m}})$ tend vers l'unité lorsque m grandit indéfiniment.

Dans les deux premiers cas, les inégalités (8) et (9) sont satisfaites toutes les deux. Il est clair que nous ne pouvons pas tirer de la discussion précédente qu'une, au moins, des fonctions $S(Z)$ et $\Delta(Z)$ est à croissance régulière; on comprend bien qu'il peut y avoir une infinité de cercles sur lesquels il n'y ait que l'inégalité (8) qui soit satisfaite, et une autre infinité de cercles sur lesquels il arrive le contraire, de sorte que l'on ne peut pas affirmer qu'une des inégalités (8) et (9) est satisfaite à partir d'une certaine valeur de r.

Si $\rho_2 < \rho_1$ les deux derniers cas ne se présentent pas, à cause des inégalités

$$|H_2(z)| < e^{r^{\rho_2+\varepsilon}} < e^{r^{\rho_1-\varepsilon}} < |H_1(Z_r)| \qquad \text{pour} \qquad |z| = r,$$

qui sont satisfaites à partir d'une certaine valeur de r [1]. Il en résulte que les deux fonctions $S(z)$ et $\Delta(z)$ sont toutes les deux à croissance régulière (c'est le théorème V).

De même, si l'une des fonctions $S(z)$ et $\Delta(z)$ est d'ordre inférieur à $\rho_1 = \rho_2$, l'autre est sûrement à croissance régulière. Il en est de même si le produit $H_1(z) H_2(z)$ est d'ordre inférieur à $\rho_1 = \rho_2$; on peut alors affirmer que les deux fonctions $S(z)$ et $\Delta(z)$ sont toutes les deux à croissance régulière. En effet, si le produit est d'ordre $\rho < \rho_1$, on a

$$|H_1(z) H_2(z)| < e^{r^{\rho+\varepsilon}} < e^{r^{\rho_1-\varepsilon}} \qquad \text{pour} \qquad |z| = r$$

---

(1) D'une façon plus précise, le rapport $|H_1(Z_r)| : |H_2(Z_r)|$ tendra vers l'infini avec r.

à partir d'une valeur de r, et, par conséquent, les deux derniers cas ne sont pas réalisables. On s'en rend aussi compte à l'aide de l'identité (7).

Exemple :

$$H_1(z) = e^{P(z)}, \qquad H_2(z) = e^{-P(z)} Q(z),$$

$P(z)$ étant un polynome de degré ρ_1 et $Q(z)$ une fonction entière quelconque d'ordre ρ inférieur à ρ_1. Le produit $H_1(z) H_2(z) = Q(z)$ ayant un ordre inférieur à celui de $H_1(z)$ et $H_2(z)$, nous sommes sûrs que ces deux fonctions $S(z) = e^{P(z)} + Q(z) e^{-P(z)}$ et $\Delta(z) = e^{P(z)} - Q(z) e^{-P(z)}$ sont à croissance régulière.

4. Dans le paragraphe précédent nous avons étudié la croissance de la somme de deux fonctions entières au point de vue de sa régularité. Nous nous sommes borné à supposer que l'une d'entre elles est à croissance régulière.

Il est naturel de se proposer le problème suivant :

La somme de deux fonctions $H_1(z)$ et $H_2(z)$ du même ordre ρ et à croissance régulière est-elle une fonction croissante régulière?

Nous en donnerons une réponse plus loin.

Dans le n° 2 nous avons étudié le produit de deux fonctions entières d'ordre non entier au point de vue de la croissance régulière ou irrégulière.

D'après le théorème I, le produit de deux fonctions entières d'ordre non entier et à croissance régulière est lui-même une fonction à croissance régulière.

En est-il de même du cas où l'ordre de ces deux fonctions est un nombre entier ρ? C'est le problème que je me pose ici.

Voici d'abord des cas particuliers où l'on peut sans peine y répondre.

(α'). $H(z)$ étant une fonction d'ordre ρ et à croissance régulière, son produit par une exponentielle $e^{P(z)}$, $P(z)$ désignant un polynome de degré k inférieur à ρ, est une fonction qui est aussi à croissance régulière.

En effet, soit toujours Z_r l'affixe d'un maximum du $|H(z)|$ sur la circonférence de rayon r; $H(z)$ étant à croissance régulière, on aura

$$|H(Z_r)| > e^{r^{\rho-\varepsilon}},$$

$$|e^{P(Z_r)}| > e^{-r^{k+\varepsilon}}$$

à partir d'une certaine valeur de r.

Il vient

$$|H(Z_r)|\,|e^{P(Z_r)}| > e^{r^{\rho-\varepsilon}-r^{k+\varepsilon}},$$

$$r^{\rho-\varepsilon} - r^{k+\varepsilon} = r^{\rho-\varepsilon}(1 - r^{k-\rho+2\varepsilon}),$$

$k-\rho$ étant négatif, la quantité $r^{k-\rho+2\varepsilon}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$ et l'on aura

$$|\Pi(Z_r)| = |H(Z_r)\,e^{P(Z_r)}| > e^{r^{\rho-\eta}},$$

η étant arbitrairement petit.

Si $M(r)$ désigne le module maximum de $\Pi(z)$, on aura

$$M(r) \geqq |\Pi(Z_r)| > e^{r^{\rho-\eta}}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

(β!). Considérons maintenant une fonction $H(z)$ de genre zéro, et soit

$$H(z) = \prod\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$$

son développement en produit infini.

Soient

$$z = re^{\theta i}, \qquad a_n = r_n e^{\gamma_n i};$$

le module du facteur $1 - \frac{z}{a_n}$ sera égal à

$$m_n = \sqrt{\left[1 - \frac{r}{r_n}\cos(\theta - \gamma_n)\right]^2 + \frac{r^2}{r_n^2}\sin^2(\theta - \gamma_n)},$$

$$m_n = \sqrt{1 - 2\frac{r}{r_n}\cos(\theta - \gamma_n) + \frac{r^2}{r_n^2}}.$$

Il est clair que, sur chaque cercle de rayon r, les points, où le module du facteur $1 - \frac{z}{a_n}$ devient maximum, correspondent aux arguments

$$\theta = \gamma_n + (2k+1)\pi.$$

Supposons que l'on ait toujours

$$\gamma_\lambda - \gamma_\mu = (2k+1)\pi,$$

quels que soient les indices λ et μ.

Dans cette hypothèse, le module des divers facteurs $1 - \frac{z}{a_n}$ devient maximum aux mêmes points; lorsqu'un facteur devient maximum (en module), il en est de même de tous les facteurs.

Donc les maximums de la fonction $H(z)$ se trouvent sûrement sur les droites

$$\theta = \gamma_0 + (2\sigma + 1)\pi,$$

σ étant un entier quelconque.

Soit maintenant une autre fonction $H_1(z)$ de genre zéro aussi et à croissance régulière, ainsi que $H(z)$. Leur ordre peut être un nombre entier, égal à un [1]. Leur produit est visiblement à croissance régulière; cela tient à ce que ces deux fonctions deviennent simultanément maximums (en module) sur chaque cercle de rayon r.

En effet, si Z_r désigne l'affixe d'un maximum de $|H_1(z)|$, ce sera un maximum de tous ses facteurs primaires, pourvu que r soit assez grand, et il en sera de même des facteurs primaires de $H_2(z)$.

On aura, par conséquent, à partir d'une certaine valeur de r,

$$|H_1(Z_r)| > e^{r^{\rho-\varepsilon}}, \qquad |H_2(Z_r)| > e^{r^{\rho-\varepsilon_1}}, \qquad |\Pi(Z_r)| > e^{r^{\rho-\varepsilon}+r^{\rho-\varepsilon_1}} > e^{r^{\rho-\eta}},$$

η étant arbitrairement petit avec ε et ε_1.

Nous en déduisons que $\Pi(z)$ est à croissance régulière.

La conclusion subsisterait si $H_1(z)$ et $H_2(z)$ contenaient des facteurs exponentiels libres e^{az+b} remplissant quelques conditions aisées à comprendre.

Avant d'aborder notre problème dans le cas le plus général, je vais établir quelques théorèmes préliminaires.

Théorème VI. — $\omega(z)$ *étant une fonction d'ordre* ρ *à croissance irrégulière et* $H(z)$ *une fonction quelconque d'ordre* $\rho_1 < \rho$, *la somme* $S(z) = \omega(z) + H(z)$ *et le produit* $\Pi(z) = \omega(z)H(z)$ *sont aussi à croissance irrégulière.*

La première partie du théorème se ramène immédiatement au théorème V, parce que, si $S(z)$ croissait régulièrement, la somme $S(z) - H(z) = \omega(z)$ croîtrait irrégulièrement, ce qui est en contradiction avec le théorème V.

Quant à la seconde partie, nous ferons les raisonnements suivants : il y aura un nombre ε tel que l'on ait

$$|\omega(z)| < e^{r^{\rho-\varepsilon}}, \qquad |H(z)| < e^{r^{\rho_1+\varepsilon}},$$

la première pour une infinité de valeurs de r de modules croissant indéfiniment, et la seconde à partir d'une certaine valeur de r.

Nous en tirons

$$|\Pi(z)| < e^{r^{\rho-\varepsilon}+r^{\rho_1+\varepsilon}} < e^{r^{\rho-\eta}} \qquad \text{pour} \qquad |z| = r,$$

parce que le rapport $r^{\rho_1+\varepsilon} : r^{\rho-\varepsilon}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

---

(1) Nous supposons, bien entendu, que les zéros de $H_1(z)$ jouissent de la même propriété que ceux de $H(z)$; alors le produit $H(z)H_1(z)$ sera à croissance régulière, même lorsqu'il n'en est pas ainsi de $H_1(z)$

Il en résulte que le module maximum de $\Pi(z)$ reste inférieur à $e^{r^{\rho-\eta}}$ pour une infinité de valeurs de r, et, par conséquent, $\Pi(z)$ est à croissance irrégulière.

Ce théorème subsiste-t-il dans le cas où $H(z)$ est du même ordre que $\omega(z)$?

5. Les résultats intéressants établis par M. E. Maillet dans son Mémoire : *Sur les fonctions entières et quasi-entières à croissance régulière, etc.* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 2^e^ série, t. IV) nous permettent d'établir qu'il en est ainsi dans des cas très étendus.

M. Maillet a cherché à voir dans quelle limite la loi de répartition des coefficients a_m qui satisfont à l'inégalité

$$\sqrt[m]{a_m} > \frac{1}{m^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}}$$

influe sur la régularité de la croissance d'une fonction donnée $\varphi(z)$

$$\varphi(z) = \sum a_m z^m.$$

Il est arrivé aux théorèmes suivants :

Supposons que cette fonction $\varphi(z)$ soit d'ordre ρ. On sait qu'il y a, pour m très grand, une infinité de coefficients a_m tels que

$$\text{(T)} \qquad \sqrt[m]{a_m} > \frac{1}{m^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}},$$

ε étant un nombre fini, aussi petit que l'on voudra.

Critères de M. Maillet. — α'. Si θ est un nombre positif, qui croît moins vite avec m que $m(\log m)^{1-\alpha} - m$ (α positif aussi petit qu'on veut), et si, sur θ coefficients consécutifs à partir de a_m, il y en a toujours un qui satisfait à l'inégalité (T); à partir d'une certaine valeur de m, la fonction $\varphi(z)$ est à croissance régulière.

β'. Si θ croît plus vite que $m^{1+\beta} - m$ (β un nombre positif arbitrairement petit) pour une infinité de valeurs de m satisfaisant à (T) dès que m dépasse une certaine limite, la fonction $\varphi(z)$ est à croissance irrégulière.

Nous allons faire une application du premier critère.

Soient

$$G(z) = \sum a_m Z^m, \qquad H(z) = \sum \alpha_m Z^m$$

deux fonctions à croissance régulière du même ordre ρ.

D'après la définition du nombre θ_m, sur θ_m coefficients consécutifs à partir de

a_m, il y en aura toujours un $a_\mu (\mu - m < \theta_m)$ qui satisfait à l'inégalité

$$\sqrt[\mu]{a_\mu} > \frac{1}{\mu^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}}.$$

Supposons que les fonctions $G(z)$ et $H(z)$ jouissent de la propriété que θ_m croît moins vite que $m(\log m)^{1-\alpha} - m$; il est facile à constater que la fonction $S(z) = G(z) + H(z)$ jouit, en général, de la même propriété. En effet, pour chacune de ces fonctions $G(z)$ et $H(z)$, sur θ_m coefficients consécutifs il y en a un a_n et α_ν qui satisfait à l'égalité (T).

Le coefficient général de $S(z)$ est égal à $a_m + \alpha_m = b_m$ et l'on aura

$$b_n = a_n + \alpha_n = \frac{1}{n^{\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)n}} + \alpha_n \text{ [1]},$$

$$b_\nu = a_\nu + \alpha_\nu = a_\nu + \frac{1}{\nu^{\nu\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)}};$$

b_n et b_ν, s'ils ne sont pas nuls, sont de la forme

$$\sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{n^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon_1}}, \qquad \sqrt[\nu]{b_\nu} = \frac{1}{\nu^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon_2}},$$

ε_1 et ε_2 étant arbitrairement petits avec ε; nous supposons ici que $|\alpha_n|$ et $|a_n|$ ne sont pas des infiniment petits équivalents, c'est-à-dire que le rapport $\frac{|\alpha_n|}{|a_n|}$ ne tend pas vers l'unité.

Dans ces cas, d'après le premier critère de M. Maillet, la somme $S(z)$ est à croissance régulière.

Dès lors, la somme d'une fonction $\omega(z)$ à croissance irrégulière et d'ordre ρ et $H(z)$ à croissance régulière et de la classe ci-dessus signalée peut ne pas être à croissance régulière, si $H(z)$ et $\omega(z)$ sont du même ordre.

Les deux critères de M. Maillet nous permettent de constater un fait très important.

La somme de deux fonctions à croissance régulière et du même ordre ρ n'est pas toujours une fonction à croissance régulière, même lorsqu'elle a le même ordre ρ.

---

(1) Ces formules sont écrites dans l'hypothèse que les coefficients a_n et α_n sont tous réels et positifs; dans le cas contraire, on devrait employer les modules.

Nous allons, en effet, former deux fonctions à croissance régulière, dont la somme soit à croissance irrégulière.

Considérons une fonction entière d'ordre ρ

$$\varphi(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_m z^m + \ldots,$$

telle que le nombre θ_m de M. Maillet croisse moins vite que $m(\log m)^{1-\alpha} - m$ (α positif assez petit, si l'on veut) à partir d'une certaine valeur de m.

Posons

$$l_m = m(\log m)^{1-\alpha} - m,$$
$$L_m = m^{1+\alpha} - m.$$

Envisageons une infinité de valeurs de m

$$m_1, \quad m_2, \quad \ldots, \quad m_n, \quad \ldots,$$

telle que

$$m_n - m_{n-1} > L_{m_{n-1}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Divisons l'intervalle $m_{n-1}, \ldots, m_n$ en deux parties, dont la première ait une étendue égale à $L_{m_{n-1}}$ et changeons tous les coefficients α_m, qui appartiennent à cette première partie de l'intervalle correspondant, en $-\alpha_m$; en laissant tous les autres coefficients de $\varphi(z)$ invariables, nous obtenons une nouvelle fonction $\varphi_1(z)$ qui est évidemment à croissance régulière, d'après le premier critère de M. Maillet, puisque ses coefficients ont le même module avec ceux de $\varphi(z)$.

La somme $\Phi(z) = \varphi(z) + \varphi_1(z)$ est à croissance irrégulière en vertu du deuxième critère de M. Maillet; il y aura, en effet, une infinité de valeurs de m, $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$, pour lesquelles θ_m croisse plus vite que $m^{1+\beta} - m$ (β étant un nombre positif fini).

La fonction $\varphi_1(z)$ ne saurait être d'ordre inférieur à ρ, puisque, autrement, la somme $\varphi(z) + \varphi_1(z)$ serait à croissance régulière (*voir* le théorème V).

La fonction $\Phi(z)$ sera sûrement d'ordre égal à ρ, si la deuxième partie de l'intervalle $m_{n-1} \overset{\mu_{n-1}}{\text{———}\!\!\mid\!\!\text{—}} m_n$ a une étendue supérieure à $L_{\mu_{n-1}}$ ou bien $l_{\mu_{n-1}}$, $\mu_{\nu-1}$ étant son commencement (1). Nous avons donc formé deux fonctions d'ordre ρ et à croissance régulière, dont la somme, étant du même ordre ρ, soit à croissance irrégulière.

Il en résulte que le théorème VI n'est pas vrai dans le cas où les deux fonctions $\omega(z)$ et $H(z)$ sont du même ordre ρ; la somme $S(z)$ peut bien croître régulièrement.

6. Dans le n° 4 nous avons exposé deux cas, dans lesquels le produit de deux

(1) C'est une conséquence immédiate du second critère de M. Maillet.

fonctions $H_1(z)$ et $H_2(z)$ à croissance régulière et d'ordre entier est aussi à croissance régulière. Dans ces deux cas, il en est de même de leur somme.

Le premier cas correspond au théorème V.

Quant au second cas, on s'en rend aisément compte, en remarquant que les points de module maximum des $H_1(z)$ et $H_2(z)$ pour $(z) = r$ se trouvent sur les droites

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} \theta = \gamma^{(1)} + (2k+1)\pi & \text{pour} \quad H_1(z), \\ \theta = \gamma^{(2)} + (2k+1)\pi & \text{pour} \quad H_2(z), \end{cases}$$

$\gamma^{(1)}$ et $\gamma^{(2)}$ étant les arguments d'un zéro des $H_1(z)$ et $H_2(z)$.

Si donc $\gamma^{(1)} = \gamma^{(2)} + 2\lambda\pi$ (λ étant un entier quelconque) les droites de module maximum des $H_1(z)$ et $H_2(z)$ sont communes, de sorte que les quatre cas examinés dans le n° 3 se présentent d'une façon très favorable. En effet, les arguments des $H_1(z)$ et $H_2(z)$ sur les droites (D) sont les mêmes, à un multiple de 2π près. Donc on a

$$|S(Z_r)| = |H_1(Z_r)| + |H_2(Z_r)| > 2e^{r^{\rho-\varepsilon}} > e^{r^{\rho-\eta}},$$

et la somme $S(z)$ est visiblement à croissance régulière.

Voici un autre cas exprimé par le théorème suivant :

Théorème VII. — *Le produit d'une fonction* $H(z)$ *à croissance régulière et d'ordre* ρ *entier par une fonction* $H_1(z)$ *quelconque, d'ordre* ρ_1 *inférieur à* ρ, *est toujours à croissance régulière.*

Pour la démonstration de ce théorème, je désignerai toujours par Z_r l'affixe d'un maximum du $|H(z)|$ sur le cercle de rayon r et j'aurai

$$(10) \qquad |H(Z_r)| > e^{r^{\rho-\varepsilon}}$$

à partir d'une certaine valeur de r.

Il n'y a que deux cas possibles :

Ou bien le $|H_1(Z_r)|$ est supérieur à $e^{-r^{\rho_1+\varepsilon_1}}$ (ε_1 aussi petit que l'on voudra), ou bien l'on a

$$(11) \qquad |H(Z_r)| < e^{-r^{\rho_1+\varepsilon_1}},$$

ε_1 étant assez petit.

Dans le premier cas la démonstration s'achève immédiatement.

On aura, en effet,

$$|\Pi(Z_r)| = |H(Z_r)|\,|H_1(Z_r)| > e^{r^{\rho-\varepsilon} - r^{\rho_1+\varepsilon}} > e^{r^{\rho-\eta}},$$

η étant aussi petit que l'on voudra, puisque $\rho > \rho_1$. Dans le second cas, il y aura une infinité de valeurs de r, qui satisfont à l'inégalité (11). Alors nous remplaçons Z_r par un autre point du cercle C_r satisfaisant à l'inégalité (10), s'il y en a.

Je dis qu'il est impossible que tous les points (Z_r) vérifiant l'inégalité (10) satisfassent en même temps à l'inégalité (11).

Pour s'en rendre compte, rappelons-nous l'importante modification apportée par M. Maillet au théorème de M. Hadamard sur le module minimum d'une fonction entière.

Dans son Mémoire déjà cité ([1]), M. Maillet a établi le théorème suivant :

Étant donnée une fonction entière d'ordre fini ρ et un nombre arbitraire ε; si l'on décrit autour de chaque zéro (a_n) un cercle de rayon η, tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$, en tout point extérieur à ces cercles, on a, pour $|z|$ assez grand, l'inégalité

$$|G(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}.$$

Cette propriété du rayon des cercles exclus, de tendre vers zéro avec $\frac{1}{n}$, est précieuse pour nous ([2]).

Elle nous permettra, en effet, de montrer qu'il y aura, à partir d'une certaine valeur de r, des points z_r, satisfaisant à l'inégalité (10) et pour les quels on ait

$$|H_1(z_r)| > e^{-r^{\rho_1+\varepsilon}}. \tag{12}$$

S'il n'en était pas ainsi, la longueur des arcs du cercle C_r, dont les points satisfont à l'inégalité

$$|H(z)| > e^{r^{\rho-\varepsilon}} \tag{13}$$

tendrait vers zéro avec $\frac{1}{r}$, comme le diamètre des cercles exclus de M. Maillet.

Or, il est aisé de démontrer que ceci est impossible.

([1]) *Sur les fonctions entières et quasi-entières* (*Journal de Mathématiques*, 1900).

([2]) Le rayon η, qui a été fixé par M. Maillet, doit varier avec n et tendre vers zéro avec $\frac{1}{n}$, si l'on veut que son théorème soit vraiment utile. C'est M. Wiman qui a fait, le premier, cette remarque. [Voir *Arkiv för matematik, astronomi och fysik utgifvet af. k. svenska Vetenscapsakademien* (Band I). *Sur le cas d'exception de M. Picard dans la théorie des fonctions entières.*]

Soient, en effet, z_r et $z_r + \Delta z_r$ deux points tels que

$$|H(z_r)| = e^{r^{\rho-\varepsilon}}, \qquad |H(z_r + \Delta z_r)| = e^{r^{\rho-\vartheta}}, \qquad \vartheta < \varepsilon;$$

il vient

$$|H(z_r + \Delta z_r) - H(z_r)| > e^{r^{\rho-\vartheta}} - e^{r^{\rho-\varepsilon}} > e^{r^{\rho-\vartheta}}(1-\alpha), \tag{14}$$

α étant un nombre positif, aussi petit que l'on voudra.

D'autre part, l'on a

$$H(z_r + \Delta z_r) - H(z_r) = \int_{z_r}^{z_r+\Delta z_r} H'(z)\,dz < e^{r^{\rho-\vartheta}} r^k s_r \text{ (1)}, \tag{15}$$

où K est un nombre entier fini et s_r représente la longueur de l'arc, qui a pour extrémités z_r et $z_r + \Delta z_r$.

Nous utilisons ici les résultats récents de M. Boutroux (2) sur la croissance de la dérivée logarithmique d'une fonction entière. M. Boutroux a démontré que, si l'on exclut du champ de la variable z certaines aires fermées entourant les pôles, la dérivée logarithmique d'une fonction entière d'ordre fini reste comparable, partout ailleurs, à une puissance finie de z.

On sait que ce théorème sert de complément précieux aux résultats bien connus de M. Borel sur la croissance de la dérivée d'une fonction donnée, et dont nous nous sommes servi dans les paragraphes précédents.

Les points z_r que nous avons en vue ici se trouvent dans les régions du module maximum de $H(z)$ et, par suite, se trouvent en dehors des aires exclues par M. Boutroux. Son théorème est donc applicable pour ces points. Nous en déduisons

$$|H'(z)| < |H(z)|\, r^k < e^{r^{\rho-\vartheta}} r^k,$$

car l'on a

$$|H(z)| < e^{r^{\rho-\vartheta}},$$

entre les deux limites de l'intégration z_r et $z_r + \Delta z_r$.

On a donc l'inégalité (15).

Reportons-nous maintenant au Mémoire plus haut cité de M. Maillet et voyons quel est l'ordre infinitésimal du rayon η_n des cercles exclus autour des zéros.

Le nombre η_n ne doit satisfaire qu'à la condition

$$2^\sigma\left(\log\frac{r}{\eta_n} + \log 2 + \frac{\sigma}{1-\sigma}\right) < r^\varepsilon.$$

---

(1) D'une façon précise, c'est le module de la différence $H(z_r + \Delta z_r) - H(z_r)$ qui est inférieur à $e^{r^{\rho-\vartheta}} r^k s_r$.

(2) *Voir* P. Boutroux, *Sur quelques propriétés des fonctions entières*. Thèse de doctorat, 1903. Ce Mémoire va paraître dans les *Acta mathematica*.

Cette inégalité sera bien satisfaite, en prenant

$$\eta_n = e^{-r^{\varepsilon_1}} \qquad (\varepsilon_1 < \varepsilon) \quad (^1).$$

Si maintenant s_r était comparable à $e^{-r^{\varepsilon_1}}$, on aurait

$$|\mathbf{H}(z_r + \Delta z_r) - \mathbf{H}(z_r)| < e^{r^{\rho-\vartheta}} r^k e^{-r^{\varepsilon_2}}$$

(ε_2 un nombre fini) ou encore

$$(16) \qquad |\mathbf{H}(z_r + \Delta z_r) - \mathbf{H}(z_r)| < \omega e^{r^{\rho-\vartheta}},$$

puisque la quantité $r^k e^{-r^{\varepsilon_2}}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

ω désigne un nombre fini, mais arbitrairement petit, ou, mieux encore, une quantité tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

On voit maintenant que l'inégalité (16) est en contradiction avec l'inégalité (14).

Donc, il y aura toujours, à partir d'une certaine valeur de r, des points z_r satisfaisant en même temps aux inégalités (12) et (13). Il en résulte

$$|\mathbf{H}(z_r)\mathbf{H}_1(z_r)| > e^{r^{\rho-\varepsilon} - r^{\rho_1+\varepsilon}} = e^{r^{\rho-\varepsilon}[1 - r^{(\rho_1-\rho)+2\varepsilon}]} > e^{r^{\rho-\varepsilon_1}},$$

ε_1 étant arbitrairement petit.

D'autre part, le module maximum $\mathbf{M}(r)$ du produit est supérieur ou égal à

$$|\mathbf{H}(z_r)\mathbf{H}_1(z_r)|.$$

On a donc

$$\mathbf{M}(r) > e^{r^{\rho-\varepsilon_1}}.$$

Le produit $\mathbf{H}(z)\mathbf{H}_1(z)$ est donc à croissance régulière.

Faisons remarquer maintenant que, pour éviter la contradiction signalée dans la démonstration précédente, il faut qu'on ait

$$(17) \qquad r^k s_r > 1 - \alpha,$$

aussi petit que soit α. Ou bien

$$s_r > (1-\alpha) r^{-k}.$$

Si donc s_r tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$, son ordre infinitésimal n'est pas supérieur à

---

(1) Cette valeur du rayon r_n précise, d'une façon remarquable et utile, le théorème plus haut cité de M. Maillet, ainsi que le théorème analogue de M. Wiman (*voir* son travail cité) et il paraît qu'il y a là la précision la plus extrême du théorème de M. Hadamard. J'ai déjà publié ce résultat dans une Note du *Bulletin de la Société mathématique,* 1904 : *Sur les fonctions entières de genre fini.*

celui de r^{-k}. Le nombre k se rattache à l'ordre ρ, supposé entier, de la fonction $H(z)$.

Je pense que cette limite de s_r est très petite et que s_r tend vers l'infini avec r; il est très intéressant de faire des recherches à ce sujet; j'espère y revenir dans un autre travail (¹).

7. Il y a lieu maintenant de démontrer que le produit de deux fonctions $H_1(z)$ et $H_2(z)$ à croissance régulière et du même ordre ρ est aussi à croissance régulière lorsque son ordre n'est pas inférieur à ρ.

Ce théorème n'est pas douteux; cependant sa démonstration semble présenter des difficultés sérieuses. Il faut, pour cela, approfondir le mode dont le module d'une fonction entière varie avec l'argument sur un cercle de rayon r très grand.

Voici la voie la plus naturelle que l'on pourrait suivre et les difficultés qui s'y présentent.

Considérons le cercle C_r de rayon r et soit (A_1) l'ensemble linéaire de ses points qui satisfont à l'inégalité

$$|H_1(z)| > e^{r^{\rho-\varepsilon}}$$

(ε étant un nombre fini aussi petit que l'on voudra).

Désignons par $e^{-\alpha(r)r^{\rho-\varepsilon}}$ le plus grand des modules de $H_2(z)$ pour les points de l'ensemble (A_1).

Nous allons distinguer quatre cas :

Premier cas. — $\alpha(r)$ est négatif à partir d'une certaine valeur de r. Dans ce cas, il y aura un point z_r qui satisfera aux inégalités

$$|H_1(z_r)| > e^{r^{\rho-\varepsilon}},$$
$$|H_2(z_r)| > e^{-\alpha(r)r^{\rho-\varepsilon}}$$

et, par conséquent, à

$$|H_1(z_r)H_2(z_r)| > e^{[1-\alpha(r)]r^{\rho-\varepsilon}} > e^{r^{\rho-\varepsilon_1}},$$

ε_1 étant arbitrairement petit. Le produit sera donc à croissance régulière.

Deuxième cas. — $\alpha(r)$ est positif pour une infinité (I) de valeurs de r, mais $\alpha(r)$ reste inférieur à un nombre q inférieur à l'unité à partir d'une certaine valeur (I).

(¹) Ce résultat se rattache à un théorème de M. Phragmén, établi à l'occasion de quelques fonctions entières de genre infini signalées par M. Mittag-Leffler. *Voir* un travail récent de M. J. Malmguist [*Étude d'une fonction entière* (*Acta mathematica*, 1905)].

On aura alors, pour un point z_r,

$$|H_1(z_r)\,H_2(z_r)| > e^{r^{\rho-\varepsilon}[1-\alpha(r)]} > e^{(1-q)r^{\rho-\varepsilon}} > e^{r^{\rho-\varepsilon_1}},$$

ε_1 étant arbitrairement petit.

Notre théorème est encore vrai pour cette infinité (I) de valeurs de r.

Troisième cas. — $\alpha(r)$ étant positif pour une infinité (I) de valeurs de r reste supérieur à un nombre q, plus grand que l'unité, pour r très grand.

Dans ce cas, il faut permuter le rôle des $H_1(z)$ et $H_2(z)$. Je m'explique : on considérera l'ensemble linéaire (A_2) dont les points satisfont à l'inégalité

$$|H_2(z)| > e^{r^{\rho-\varepsilon}\alpha(r)} > e^{q r^{\rho-\varepsilon}}.$$

Ici, il faut comparer l'ensemble (A_2) avec l'ensemble (a_1) des points qui satisfont à l'inégalité

$$|H_1(z)| > e^{-r^{\rho-\varepsilon}}.$$

Si ces ensembles ont des points communs à partir d'une certaine valeur (I), on aura pour ces points z_r

$$|H_2(z_r)|\,|H_1(z_r)| > e^{(q-1)r^{\rho-\varepsilon}}$$

et la démonstration s'achèverait tout de suite.

Il est clair que les arcs dont les points satisfont à l'inégalité

$$H(z) > e^{q r^{\rho-\varepsilon}}$$

ont une longueur inférieure à celle des arcs dont les points satisfont à l'inégalité

$$|H(z)| > e^{r^{\rho-\varepsilon}}.$$

La question, dont la solution s'impose ici, est la suivante :

Comparer l'ensemble (A) *correspondant à l'inégalité*

$$|H(z)| > e^{q r^{\rho-\varepsilon}}$$

avec l'ensemble (a) *correspondant à l'inégalité*

$$|H(z)| < e^{-q r^{\rho-\varepsilon}}$$

(*q un nombre quelconque*), $H(z)$ *étant une fonction entière quelconque.*

Si $H(z)$ est une exponentielle

$$H(z) = e^{P(z)}$$

avec

$$P(z) = q z^k + q_1 z^{k-1} + \ldots = q r^k e^{\theta k i} + q_1 r^{k-1} e^{\theta(k-1)i} + \ldots \qquad (z = re^{\theta i})$$

et

$$|e^{P(z)}| = e^{qr^k \cos(k\theta) + q_1 r^{k-1} \cos[(k-1)\theta] + \ldots}.$$

Nous supposons, pour fixer les idées, que q, q_1, ..., sont des nombres réels

$$|e^{P(z)}| = e^{qr^k \cos(k\theta)[1+\omega(r)]},$$

$\omega(r)$ tendant vers zéro, avec $\frac{1}{r}$.

L'ensemble (A) comprend des arcs dont les points satisfont à l'inégalité

$$\cos(k\theta) > \frac{r^{-\varepsilon}}{1-\beta}$$

et l'ensemble (a) correspond à l'inégalité

$$\cos(k\theta) < \frac{-r^{-\varepsilon}}{1+\beta}$$

$\left(\beta\right.$ un nombre positif tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$, β étant arbitrairement $\left.\text{petit}\right)$, il est visible que ces deux ensembles sont comparables.

Expliquons-nous : l'arc de (A), qui commence par le point ($\theta = 0$), a une longueur angulaire égale à la plus petite valeur θ_0, qui satisfait à

$$\cos(k\theta_0) = \frac{r^{-\varepsilon}}{1-\beta_1},$$

aussi petit que soit β pour r très grand.

De même, l'arc de (a), qui commence par le point $\left(\theta = \frac{\pi}{k}\right)$, a une étendue angulaire égale à $\theta_1 - \frac{\pi}{k}$, θ_1 étant la valeur de θ supérieure à $\frac{\pi}{k}$ et satisfaisant à l'égalité

$$\cos(k\theta_1) = \frac{-r^{-\varepsilon}}{1+\beta_2}.$$

On voit immédiatement que ce rapport $\frac{\cos(k\theta_0)}{\cos(k\theta_1)}$ tend vers l'unité négative, lorsque r croît indéfiniment et la différence

$$k(\theta_1 - \theta_0) - \pi$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$, ce qui montre que la différence angulaire des arcs considérés tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

Ces indications donnent une idée du problème général que j'ai signalé, et dont je ne m'occupe pas dans ce travail.

Quatrième cas. — $\varkappa(r)$ tend vers l'unité, lorsque r croît indéfiniment. Ceci peut avoir lieu pour une infinité de valeurs de r, croissant indéfiniment. On peut toujours permuter le rôle des $H_1(z)$ et $H_2(z)$, parce que ces fonctions, toutes les deux, croissent régulièrement.

Ce cas est celui qui présente les difficultés les plus considérables, que je ne puis surmonter pour le moment.

8. Si le produit de deux fonctions à croissance régulière et d'ordre entier est toujours à croissance régulière (1), ce fait entraînerait deux conséquences importantes.

(α'). Le deuxième théorème de M. Borel s'étendrait complètement aux produits canoniques de facteurs primaires d'ordre *entier*. Il n'y aurait qu'à utiliser l'artifice fécond, par lequel on rattache les fonctions de genre fini aux fonctions de genre zéro, et, en particulier, les fonctions d'ordre entier à celles dont l'ordre est inférieur à *un* (2).

(β'). $F(z)$ étant une fonction quelconque d'ordre entier (ρ) et à croissance régulière, considérons la fonction

$$G(z) = \varphi(z)\,F(z) + \sigma(z)$$

où $\varphi(z)$ et $\sigma(z)$ sont d'ordre inférieur à ρ.

La fonction $G(z)$ qui est, elle aussi, à croissance régulière, d'après les théorèmes V et VII, ne saurait faire défaut au deuxième théorème de M. Borel que si l'on se trouve en présence du cas unique d'exception de M. Picard.

On en déduirait des conséquences analogues pour les fonctions multiformes, qui ont été l'objet du présent travail.

---

(1) Lorsqu'il est du même ordre, bien entendu.

(2) Je ne considère pas ici la définition d'ordre plus précise due à M. Lindelöf, qui comporterait des développements intéressants relatifs à cette théorie. Je les réserve pour un autre travail.