

H. BOUASSE

BERTHIER

## Déformations d'un cylindre de section rectangulaire

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2<sup>e</sup> série*, tome 8 (1906), p. 241-259

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1906\\_2\\_8\\_\\_241\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1906_2_8__241_0)

© Université Paul Sabatier, 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

**DÉFORMATIONS**  
D'UN  
**CYLINDRE DE SECTION RECTANGULAIRE**  
PAR ENROULEMENT ET DÉROULEMENT,  
**DANS UNE HYPOTHÈSE SIMPLE,**

PAR MM. H. BOUASSE ET BERTHIER.

---

1. *Hypothèses.* — Nous nous proposons de calculer quelles seraient les déformations d'un cylindre de section rectangulaire plus ou moins tendu, régulièrement enroulé sur un autre cylindre, suivant une hélice de pas aussi court que possible, de manière qu'un des côtés du rectangle s'applique sur le cylindre. Pour rendre le calcul possible, nous ferons des hypothèses sûrement inexactes. Nous supposerons : 1° qu'une section droite conserve une forme invariable et reste une section droite; elle ne fait donc que tourner autour d'une droite N qui est la *ligne neutre* ou la *ligne des fibres neutres*, le mot *fibre* étant pris dans le sens purement géométrique de cylindre élémentaire; 2° qu'il existe une véritable limite d'élasticité, au-dessous de laquelle les allongements et raccourcissements par unité de longueur sont proportionnels aux forces par unité de section, au-dessus de laquelle la force par unité de section reste invariable, quels que soient l'allongement ou le raccourcissement permanents.

Si éloignées de la vérité que soient ces hypothèses, les calculs sont utiles comme servant de terme de comparaison avec les résultats *qualitatifs* de l'expérience. C'est pour la même raison que la courbe de torsion dite *de James Thomson* rend des services. D'ailleurs, la complication du calcul, pour ces hypothèses simplistes, prouvera combien peu les phénomènes de flexion sont aptes à fournir des renseignements *quantitatifs* dans l'étude des déformations permanentes.

2. *Point d'application de la tension.* — Considérons le cylindre fléchi; les



rons  $\overline{OO'} = \delta$ . Nous aurons d'une manière générale,  $x = \chi y + a$ , où  $a$  est une constante convenablement déterminée; les  $y$  sont comptés positivement du côté des fibres allongées.

Ceci posé, exprimons le couple en prenant le moment des forces subsistantes par rapport au point O. L'hypothèse que la tension est uniformément répartie fournit la condition suivante, où  $y_1$  est l' $y$  du centre de gravité de la section :

$$(2) \quad C = \iint \left( \varphi - \frac{P}{S} \right) y \, dS = \iint \varphi y \, dS - \frac{P}{S} \iint y \, dS = \iint \varphi y \, dS - P y_1.$$

3. *Application au cas d'une déformation parfaitement élastique :*

$$\varphi = E(\chi y + a), \quad C = E\chi \iint y^2 \, dS + Ea \iint y \, dS - P y_1.$$

Soit I le moment d'inertie de la surface par rapport à une droite normale au plan de flexion et passant par le centre de gravité; des théorèmes connus permettent d'écrire

$$C = E\chi I + E\chi y_1^2 S + Ea y_1 S - P y_1, \quad P = E\chi y_1 S + Ea S.$$

On tire de là  $C = E\chi I$ , expression bien connue et indépendante de la valeur P de la tension. L'allongement  $x$  en un point quelconque et l' $y = y_0$  de la fibre neutre sont donnés par les formules

$$x = \frac{1}{E} \left[ \frac{C}{I} (y - y_1) + \frac{P}{S} \right], \quad y_0 = y_1 - \frac{P}{C} \frac{I}{S}.$$

Dans les pages suivantes nous aurons à faire une série de calculs analogues aux précédents, mais que compliquera la discontinuité de la fonction  $\varphi$  résultant d'une limite d'élasticité. D'autres hypothèses supprimeraient cette discontinuité, mais présenteraient des inconvénients encore plus grands.

#### ENROULEMENT.

4. *Cas d'une limite d'élasticité.* — Pour plus de commodité, nous représentons la position que prendrait l'extrémité des fibres après leur déformation permanente, si elles étaient soustraites de nouveau à toute tension. Par hypothèse elles se raccourciraient proportionnellement à la tension actuelle. Soit  $A = \overline{B'S'}$  (*fig. 1*) le plus grand allongement qu'elles puissent supporter sans déformation permanente. Les allongements et raccourcissements sont déterminés par les deux droites  $OO'$  et  $SS'$ , qui représentent les traces des sections droites avant et après

la déformation. La fibre, qui a été allongée de  $\overline{os} > A$ , n'est allongée d'une manière temporaire que de  $\overline{bs}$ ; soustraite à toute tension, son extrémité reviendrait en  $b$ . La *ligne d'équilibre* ainsi définie des extrémités des fibres, d'abord déformées puis *isolément* abandonnées à elles-mêmes, serait  $B'A'O$ .

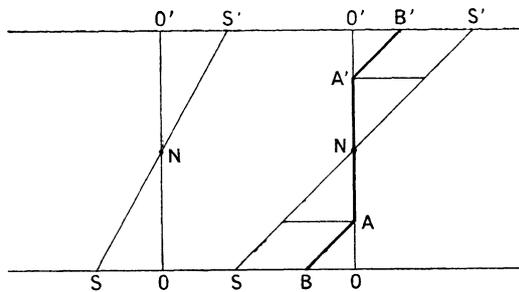
Tant que l'allongement relatif est inférieur à  $A$ , la force  $\varphi$  par unité d'aire est donnée par la formule  $\varphi = E(\gamma y + a)$ . Quand l'allongement relatif est supérieur à  $A$ , on a  $\varphi = \varphi_1 = EA$ , quelle que soit sa grandeur.

Nous désignerons par  $Y_1$  et  $Y_2$  les  $y$  des points pour lesquels la déformation commence à être élastique dans l'enroulement et cesse de l'être.

Nous calculerons le couple  $C$  nécessaire pour maintenir la courbure  $\chi$  et la charge  $P$ . La largeur de la barre étant prise égale à l'unité,  $P$  a les dimensions d'une force divisée par une longueur,  $C$  les dimensions d'une force. Enfin la matière est censée se conduire symétriquement pour les allongements et les raccourcissements; il n'existe qu'une seule limite  $\varphi_1$ .

§. *Distribution des efforts dans la section droite pendant la flexion sous tension nulle (fig. 2).* — La distance  $y_0 = \overline{ON}$  de l'origine  $O$  à la fibre neutre est égale à la moitié de l'épaisseur du cylindre fléchi. On a  $P = 0$ ,  $y_0 = \delta : 2$ . Tant que  $SO$  ou  $S'O'$  sont  $< A$ , la déformation est parfaitement élastique, la *ligne d'équilibre* est  $OO'$ . Au facteur  $E$  près, les forces  $\varphi$  sont égales aux distances  $x$  comprises entre les droites  $OO'$  et  $SS'$ : ce sont des dilatations au-dessus de  $N$ , des compressions au-dessous.

Fig. 2.



Pour calculer le moment du couple, on peut prendre le moment des forces par rapport à un point quelconque; le résultat est toujours le même. Choisissons, par exemple, le point  $N$ ; appelons  $z$  les distances à ce point. Posons  $P_0 = \delta \varphi_1$ ,  $\chi_1 = 2 \varphi_1 : E \delta$ . Il vient

$$(I) \quad C = 2 \int_0^{\frac{\delta}{2}} E \chi z^2 dz = \frac{E \delta^3 \chi}{12}, \quad C = \frac{P_0 \delta}{6} \frac{\chi}{\chi_1}.$$

La formule (I) est applicable, tant que l'allongement  $\overline{OS}$  est inférieur à A. Quand  $\overline{OS}$  devient égal à A, on a

$$\chi \frac{\delta}{2} = A, \quad \chi = \frac{2A}{\delta} = \frac{2AE}{E\delta} = \frac{2\varphi_1}{E\delta} = \chi_1, \quad C_1 = \frac{P_0\delta}{6}.$$

Si  $\overline{OS}$  dépasse A, la *ligne d'équilibre* devient B'A'NAB, les forces  $\varphi$  sont représentées par les distances des deux lignes B'A'AB et S'S parallèlement à l'axe des  $x$ . Le couple a pour expressions :

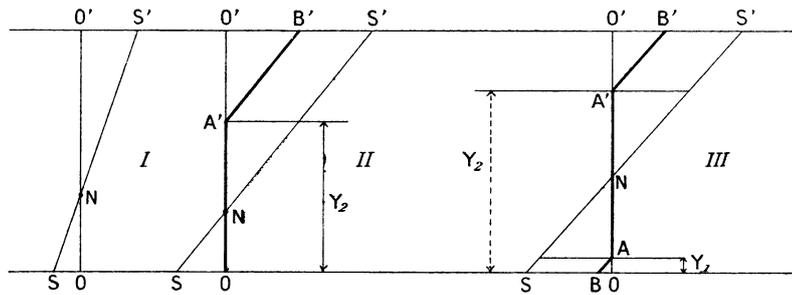
$$(II) \quad C = \int \varphi y dS = \int \varphi y dy, \quad C = \frac{P_0\delta}{4} \left[ 1 - \frac{\chi_1^2}{3\chi^2} \right].$$

Pour  $\chi = \chi_1$ , on trouve  $C = C_1$ ; pour  $\chi = \infty$ , on a  $C = C_\infty = 3C_1 : 2$ .

L'ensemble de ces résultats est représenté dans la courbe supérieure de la figure 5.

6. *L'effort P n'est pas nul, mais il n'y a pas déformation permanente (fig. 3, I).* — Écrivons que P est égal au produit de E par la somme des

Fig. 3.



aires  $NO'S' - NOS$ . On trouve aisément :

$$P = E\chi\delta \left[ \frac{\delta}{2} - y_0 \right], \quad y_0 = \frac{\delta}{2} \left[ 1 - \frac{\chi_1}{\chi} \frac{P}{P_0} \right].$$

Le couple a la même expression I que lorsque  $P = 0$ .

7. *L'effort P n'est pas nul; il n'y a déformation permanente que d'un seul côté (fig. 3, II).* — Suivant nos notations, la ligne d'équilibre est B'A'O;  $Y_2 = OA'$ ; la constante  $a$  de la formule générale  $x = \chi y + a$  est définie par les relations équivalentes

$$A = \chi Y_2 + a, \quad \varphi_1 - EA = E\chi Y_2.$$

La charge  $P$  est égale, au facteur  $E$  près, à la différence des aires  $NS'B'A' - NSO$  :

$$P = \int_0^{Y_2} E(\chi y + a) dy + \varphi_1(\delta - Y_2) = P_0 - (\varphi_1 - E a) Y_2 + \frac{E \chi Y_2^2}{2},$$

$$P = P_0 - \frac{E \chi Y_2^2}{2}, \quad Y_2 = \sqrt{\frac{2}{E \chi} (P_0 - P)} = \delta \sqrt{\frac{\chi_1}{\chi} \frac{P_0 - P}{P_0}},$$

$$y_0 = -\frac{A}{\chi} + \delta \sqrt{\frac{\chi_1}{\chi} \frac{P_0 - P}{P_0}} = -\frac{\delta}{2} \frac{\chi_1}{\chi} + \delta \sqrt{\frac{\chi_1}{\chi} \frac{P_0 - P}{P_0}}.$$

Le couple est donné par la formule générale (2) du n° 2; l'origine des coordonnées est en  $O$  et l'intégrale est prise entre zéro et  $\delta$  :

$$C = \int_0^{\delta} \left( \varphi_1 - \frac{P}{\delta} \right) y dy = \int_0^{\delta} \varphi_1 y dy - \frac{P \delta}{2}.$$

L'intégrale  $\int_0^{\delta} \varphi_1 y dy$  est le moment de l'aire ( $NS'B'A' - NOS$ ) par rapport au point  $O$  :

$$(III) \quad C = \frac{P_0 \delta}{2} \frac{P_0 - P}{P_0} \left[ 1 - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\chi_1}{\chi} \frac{P_0 - P}{P_0}} \right].$$

Cette formule cesse de convenir quand  $Y_2 = \delta$ ; on retrouve alors la formule (I). De même pour  $Y_2 = \delta$ , les formules donnant  $y_0$  de ce numéro et du numéro précédent donnent la même expression

$$y_0 = \frac{\delta}{2} \left[ 2 - \frac{\chi_1}{\chi} \right].$$

8. L'effort  $P$  n'est pas nul; il y a déformation permanente des deux côtés (fig. 3, III). — La ligne d'équilibre est représentée en  $B'A'AB$ . Les conditions définissant  $Y_1$  et  $Y_2$  sont

$$A = \chi Y_2 + a, \quad -A = \chi Y_1 + a; \quad \chi(Y_1 + Y_2) = -2a.$$

On trouve aisément

$$a = -\frac{\chi}{2\varphi_1} (P_0 - P) = -\frac{P_0 - P}{P_0} \chi \frac{\delta}{2}, \quad P = P_0 - \varphi_1(Y_1 + Y_2),$$

$$y_0 = \frac{P_0 - P}{P_0} \frac{\delta}{2}, \quad Y_2 = \left( \frac{P_0 - P}{P_0} + \frac{\chi_1}{\chi} \right) \frac{\delta}{2}, \quad Y_1 = \left( \frac{P_0 - P}{P_0} - \frac{\chi_1}{\chi} \right) \frac{\delta}{2},$$

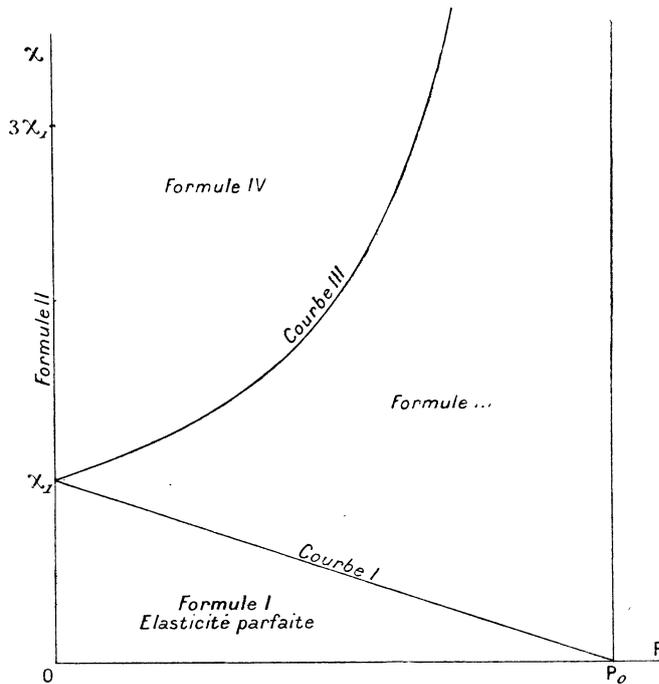
$$(IV) \quad C = \frac{P_0 \delta}{4} \left[ \frac{P_0^2 - P^2}{P_0^2} - \frac{\chi_1^2}{3\chi^2} \right],$$

La formule (IV) admet (II) comme cas particulier, quand on fait  $P = 0$ . Elle redonne (III) quand on fait  $Y_1 = 0$ . On trouve alors

$$C = \frac{P_0 \delta}{2} \frac{\gamma_1}{\gamma} \left[ 1 - \frac{2}{3} \frac{\gamma_1}{\gamma} \right].$$

9. Régions d'application des formules donnant les couples (fig. 4). —

Fig. 4.



Maintenons une charge constante  $P$  et faisons croître  $\gamma$  de 0 à  $\infty$  : calculons le couple  $C$ . Pour  $P = 0$ , il faut appliquer d'abord la formule (I), puis la formule (II). Pour  $P > 0$ , il faut toujours commencer par appliquer la formule (I). Pour une courbure assez grande, la déformation permanente commence à se faire d'un côté : la limite des régions où les formules (I) et (III) sont applicables est la droite

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{P_0 - P}{P_0} \quad (\text{courbe I, fig. 4}).$$

La courbure croissant toujours, la déformation permanente finit par se faire des deux côtés : la limite des régions où les formules (III) et (IV) sont appli-

cables est l'hyperbole

$$\frac{P_0 - P}{P_0} = \frac{\chi_1}{\chi} \quad (\text{courbe III, fig. 4}),$$

asymptote à la verticale  $P = P_0$ . L'hypothèse  $P > P_0$  est absurde puisque  $P_0 = \delta\varphi_1$  est la charge que l'on ne peut dépasser d'après notre hypothèse sur l'écroutissage.

*Couples limites.* — Si, pour une courbure donnée, on augmente la charge de zéro à  $P_0$ , le couple tend toujours vers zéro. Si, pour une charge invariable, on fait croître la courbure, c'est la formule (IV) qui finit toujours par être applicable; elle donne

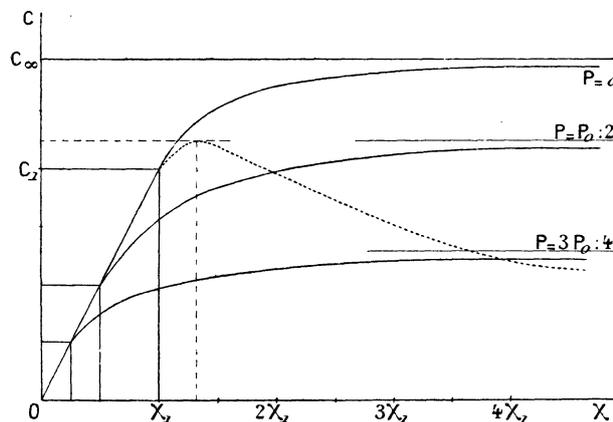
$$(V) \quad C'_\infty = \frac{P_0 \delta}{4} \frac{P_0^2 - P^2}{P_0^2} = C_\infty \frac{P_0^2 - P^2}{P_0^2}.$$

Pour de petites valeurs de  $P$ , le couple limite  $C'_\infty$  se confond sensiblement avec  $C_\infty$ . On obtient donc un couple à peu près indépendant du rayon du cylindre d'enroulement (pourvu que celui-ci soit petit) et à peu près indépendant de la charge (petite) sous laquelle se fait l'enroulement. Si au contraire  $P$  est assez voisin de  $P_0$ , la décroissance de  $C'_\infty$  en fonction de  $P$  est rapide.

La formule (III) donne un couple limite qui se confond avec  $C'_\infty$  pour des valeurs de  $P$  suffisamment voisines de  $P_0$ . C'est évident *a priori*, la formule (III) s'étendant à de très grandes valeurs de  $\chi$  pour  $P$  voisin de  $P_0$  (fig. 4).

La figure 5 donne les couples en fonction des courbures pour un certain

Fig. 5.



nombre de valeurs particulières de la charge  $P$ . La formule (V) fournit la position

des asymptotes horizontales de ces courbes. La courbe en pointillé indique la limite d'application des formules (III) et (IV).

10. *Exemple d'application qualitative des formules précédentes.* — Montrons par un exemple comment les formules précédentes permettent de se rendre compte des phénomènes obtenus avec un fil de section circulaire et qui ne possède assurément pas une limite définie d'élasticité. Bien entendu il ne s'agit que d'une comparaison qualitative.

Pour mesurer le couple  $C$  produit par un fil qu'on vient d'enrouler sur un cylindre de rayon  $R$ , il faut déterminer le nombre  $n'$  de tours dont se détord spontanément le ressort spiral obtenu, quand on l'abandonne à lui-même. Soient  $L$  la longueur du fil enroulé,  $n$  le nombre de tours qu'il fait sur le cylindre,  $R'$  son nouveau rayon de courbure. On a

$$2\pi nR = 2\pi(n - n')R' = L, \quad C = EI\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) = EI\frac{2\pi n'}{L}.$$

Pour une longueur donnée  $L$  de fil, le couple  $C$  est très approximativement mesuré par le nombre de tours de détorsion du spiral obtenu. Or l'expérience montre que, pour des courbures suffisantes et des charges faibles, le nombre  $n'$  est constant, indépendant de la courbure et de la charge. C'est précisément ce que nous apprend la formule (V). On se trouve très près de l'asymptote  $C = C_\infty$  de la courbe  $P = 0$  (*fig. 5*); d'ailleurs les courbes qui correspondent à des charges faibles ont des asymptotes très voisines de  $C = C_\infty$ .

Si le cylindre d'enroulement est de petit diamètre et si l'on augmente la charge d'enroulement, conformément à la formule (V), on trouve des nombres  $n'$  qui décroissent d'abord lentement puis très rapidement.

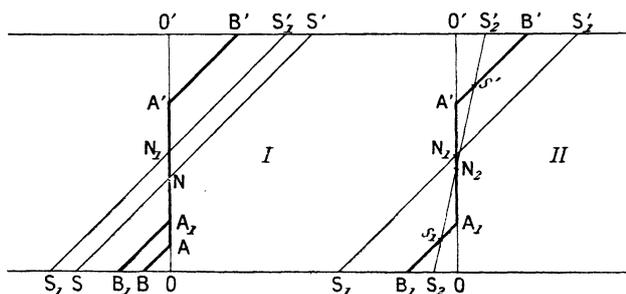
Il faut toutefois remarquer que le raisonnement précédent, très suffisant pour les conclusions que nous en tirons, n'est pas rigoureusement exact. En effet les couples que l'on mesure par la méthode précédente ne sont pas les couples sous tension. On suppose que la charge est d'abord réduite à zéro, puis qu'on laisse alors seulement le spiral se dérouler. Or, dans la réduction de la charge, le couple varie d'une manière générale.

Nous allons indiquer comment se feraient les calculs (*fig. 6, 1*).

Admettons qu'après l'enroulement sous la charge  $P$ , la section droite étant venue en  $S'S$ , le couple  $C$  soit nécessaire pour maintenir le spiral à la fois tendu et tordu. La *ligne d'équilibre* des fibres est  $B'A'AB$ . Nous voulons maintenir le rayon de courbure actuel (ce qui correspond dans la figure à maintenir l'inclinaison de la section droite), mais réduire la charge à zéro. La section droite doit venir en  $S'_1S_1$  parallèle à  $S'S$ . La *ligne d'équilibre* devient  $A'B'A_1B_1$ ; elle ne

change pas du côté où les fibres allongées sont raccourcies; elle est modifiée au contraire du côté où les fibres raccourcies le sont encore davantage.

Fig. 6.



Les conditions qui déterminent la nouvelle section  $S'_1 S_1$  sont

$$\overline{S_1 B_1} = A, \quad P = 0, \quad \text{aire } A' N_1 S'_1 B' = \text{aire } A_1 N_1 S_1 B_1.$$

Le couple est donné par la différence des moments par rapport à un point quelconque des mêmes aires. Le développement des calculs nous entraînerait trop loin. Généralement le couple décroît pendant la réduction de la charge à zéro. On remarque que la suppression de la charge entraîne du côté des fibres raccourcies une déformation permanente.

La charge réduite à zéro, nous laissons le spiral se dérouler librement. Il faut chercher la nouvelle section  $S_2 S'_2$  telle que, la force restant toujours nulle, le couple diminue jusqu'à 0. Elle est définie par les deux conditions (fig. 6, II) : 1° que la somme des aires  $\text{aire } B' s' S'_2 - \text{aire } A' s' N_2 + \text{aire } N_2 A_1 s_1 - \text{aire } B_1 S_2 s_1$  soit nulle; 2° que la somme des moments des mêmes aires le soit aussi.

#### DÉROULEMENT.

11. *Position du problème.* — L'état du fil enroulé est fixé par les valeurs  $Y_1$  et  $Y_2$  des ordonnées des points où cesse la déformation permanente et où elle recommence. Ces quantités sont données par les formules précédentes quand on se donne  $P$  et  $\gamma$ , ainsi que les constantes caractéristiques du fil  $P_0$ ,  $\gamma_1$  et  $\delta$ .

On ramène le fil à la forme rectiligne; toutes ses fibres ont alors subi le même allongement permanent  $a'$ . On demande la charge  $P'$  et le couple  $C'$  nécessaires pour le maintenir en cet état. La difficulté du problème réside dans le grand nombre de cas particuliers; le calcul de  $C'$  est inextricable, nous nous limiterons au calcul de  $a'$  ou de  $P'$ .

Soit  $SS'$  (*fig. 10, X* par exemple) la section droite après l'enroulement et soit  $\Sigma\Sigma'$  la section droite après déroulement : la distance des plans  $OO'$  et  $\Sigma\Sigma'$  est  $a'$ . Nous déterminons comme précédemment la *ligne d'équilibre*  $B'A'AB$  après enroulement. Nous n'avons plus dès lors à tenir compte de  $SS'$ . Le problème se ramène au suivant : les fibres ont leurs extrémités sur la ligne  $B'A'AB$ , nous voulons les ramener sur la ligne  $\Sigma\Sigma'$ ; quelle force par unité d'aire faut-il exercer et quelle est la somme  $P'$  de ces forces?

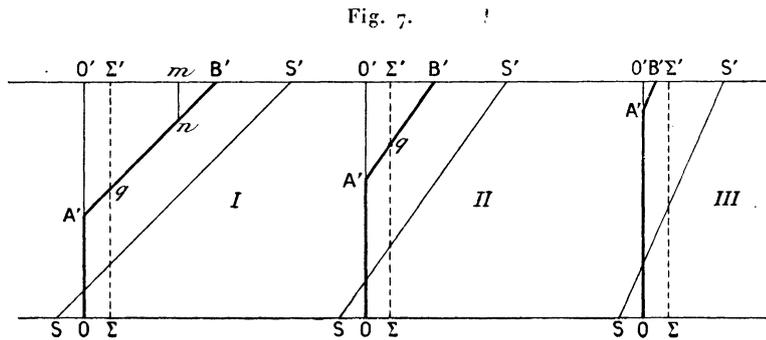
Les différents cas se distinguent par le fait que, *dans cette seconde opération, il y aura ou il n'y aura pas déformation permanente, d'un côté ou des deux côtés.* Or l'existence de cette déformation dépend de l'allongement à imposer pour passer de la *ligne d'équilibre*  $B'A'AB$  à la ligne sous tension  $\Sigma\Sigma'$ . Nous aurons donc à faire intervenir les inégalités suivantes

$$a' \geq A, \quad (\overline{B'\Sigma'})b \geq A, \quad (\overline{B\Sigma})c \geq A.$$

12. Considérons d'abord le cas où  $a' < A$ ,  $c < A$ ; faisons varier les valeurs de  $b$ . Nous distinguerons ainsi trois cas :

- I.  $b > A$ .      II.  $b < A$ .      III.  $b < 0$ .

I.  $b(=\overline{\Sigma'B'}) > A$  (*fig. 7, I*).



La nouvelle ligne d'équilibre des fibres est  $mnA'O$ . On a

$$P' : E = \text{aire } O \Sigma q A' - \text{aire } q n m \Sigma' = A \delta - Y_2(A + a') - \frac{(A + a')^2}{2\chi}.$$

Résolvons par rapport à  $a'$  en utilisant pour le calcul de  $Y_2$  la formule du n° 7; il vient

$$(VI) \quad a' = \chi \delta \left[ -\sqrt{\frac{\chi_1}{\chi} \frac{P_0 - P}{P_0}} - \frac{\chi_1}{2\chi} + \sqrt{\frac{\chi_1}{\chi} \frac{2P_0 + P' - P}{P_0}} \right].$$

II.  $b < A$  (fig. 7, II) :

$$P' : E = \text{aire } O \Sigma q A' - \text{aire } q B' \Sigma' = a' \delta - \frac{\chi}{2} (\delta - Y_2)^2,$$

$$(VII) \quad a' = \frac{\delta}{2} \left[ \chi + \chi_1 \frac{P_0 + P' - P}{P_0} - 2\chi \sqrt{\frac{\chi_1}{\chi} \frac{P_0 - P}{P_0}} \right].$$

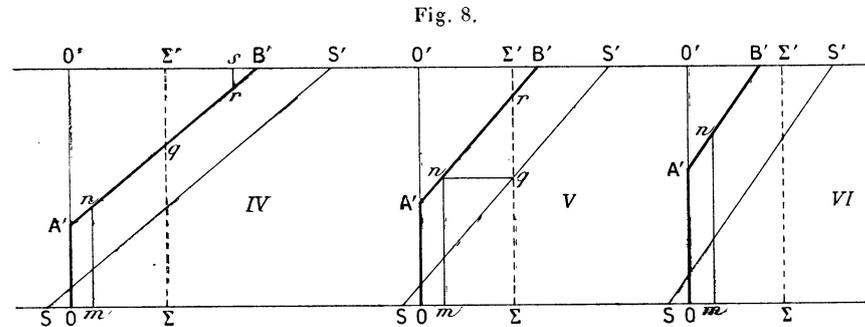
III.  $b < o$  (fig. 7, III) :

$$P' : E = \text{aire } O \Sigma \Sigma' A' - \text{aire } O' B' A' = a' \delta - \frac{\chi}{2} (\delta - Y_2)^2.$$

C'est la même expression que plus haut, à la différence près que le terme soustractif est plus petit. On arrive ainsi jusqu'à  $Y_2 = \delta$  et par conséquent  $P' : E = a' \delta$ , ce qui est vrai tant que la première et la seconde déformations sont parfaitement élastiques.

13. Considérons le cas où  $a' > A$ ; nous aurons les cas

IV.  $b > A$ .      V.  $b < A$ .      VI.  $b < o$ .



IV.  $b > A$  (fig. 8, IV); on a aussi  $C (= \overline{O\Sigma}) > A$  :

$$P' : E = - \text{aire } qrs \Sigma' + \text{aire } \Sigma qnm = A(\overline{mn} - \overline{sr}),$$

$$\overline{mn} = Y_2 + \frac{a' - A}{\chi}, \quad \overline{sr} = \delta - Y_2 - \frac{a' + A}{\chi}.$$

$$(VIII) \quad a' = \delta \chi \left[ \frac{P' + P_0}{2P_0} - \sqrt{\frac{\chi_1}{\chi} \frac{P_0 - P}{P_0}} \right].$$

V.  $b < A$  (fig. 8, V); on a aussi  $c > A$  :

$$P' : E = \text{aire } \Sigma rnm - \text{aire } rB' \Sigma',$$

$$a' = \chi (\delta - Y_2) + \frac{\delta \chi_1}{2} \pm \delta \sqrt{\frac{\chi \chi_1}{\chi} \frac{P_0 - P'}{P_0}}.$$

Pour trancher la question du double signe, on remarquera que

$$\chi(\delta - Y_2) + \frac{\delta\chi_1}{2} = \overline{O'S'}$$

(IX) 
$$a' = \chi\delta + \frac{\delta\chi_1}{2} - \delta\sqrt{\chi\chi_1 \frac{P_0 - P}{P_0}} - \delta\sqrt{\chi\chi_1 \frac{P_0 + P'}{P_0}}$$

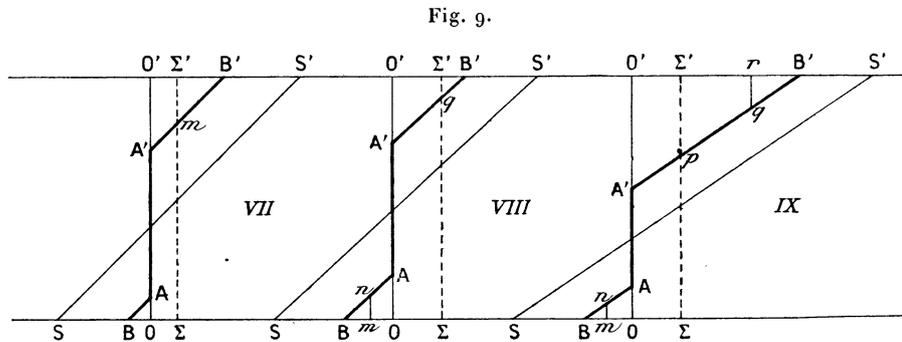
VI.  $b < a$  (*fig. 8, VI*); on a aussi  $c > A$  :

$$P' : E = \text{aire } \Sigma\Sigma'B'nm.$$

Même expression que dans le cas précédent.

14. Supposons maintenant la déformation permanente des deux côtés dans la première opération et  $a' < A$ . Nous trouverons trois cas :

VII.  $b < A, c < A$  (*fig. 9, VII*). Dans la seconde opération il n'y a que des



déformations parfaitement élastiques

$$P' : E = \text{aire } \Sigma m A' AB - \text{aire } m B' \Sigma',$$

(X) 
$$a' = \frac{\delta}{2} \left[ \frac{P' - P}{P_0} \chi_1 + \frac{P}{P_0} \chi \right].$$

VIII.  $b < A, c > A$  (*fig. 9, VIII*) :

$$P' : E = \text{aire } \Sigma q A' A n m O \Sigma - \text{aire } q B' \Sigma',$$

(XI) 
$$a' = \chi_1 \delta + \chi \delta \frac{P_0 + P}{2P_0} - \delta \sqrt{\chi\chi_1 \frac{2P_0 + P - P'}{P_0}}$$

IX.  $b > A$ ,  $c > A$  (*fig. 9, IX*):

$$P' : E = \text{aire } pA'AmO\Sigma - \text{aire } pqr\Sigma',$$

$$(XII) \quad a' = \chi \delta \frac{P + P'}{4P_0}.$$

15. Supposons enfin la déformation permanente des deux côtés dans la première opération et  $a' > A$ . Il n'y a que deux cas, car on a nécessairement  $c > A$ .

X.  $b < A$ . On a les figures 10, X et 10, X' suivant les positions des points B' et  $\Sigma'$ ; la formule est la même

$$P' : E = \text{aire } m\Sigma pn - \text{aire } pB'\Sigma',$$

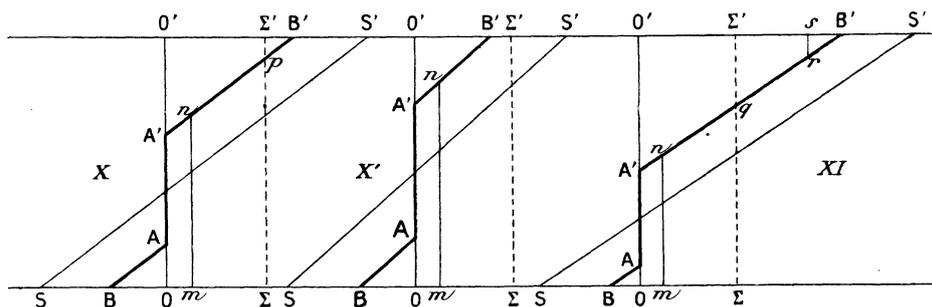
$$(XIII) \quad a' = \frac{\delta}{2} \frac{P_0 + P}{P_0} \chi \pm \delta \sqrt{\chi \chi_1 \frac{P_0 - P'}{P_0}}.$$

Pour ce qui est du double signe, on remarquera que

$$\chi(\delta - Y_2) + \frac{\delta \chi_1}{2} = \overline{O'S'}.$$

On prendra le signe + ou le signe - suivant que  $\Sigma'$  est à droite ou à gauche

Fig. 10.



de  $S'$ . Il faut donc toujours prendre le signe -; car,  $P'$  étant nécessairement inférieur à  $P_0$ , la parenthèse ne peut jamais s'annuler.

XI.  $b > A$  (*fig. 10, XI*):

$$P' : E = \text{aire } \Sigma qnm - \text{aire } qrs\Sigma' = A(\overline{mn} - \overline{sr}),$$

$$(XIV) \quad a' = \frac{\delta}{2} \left[ \frac{P' + P}{P_0} \chi - \chi_1 \right].$$

16. *Remarque sur ces résultats.* — Les formules sont compliquées, et le

nombre de cas à distinguer est grand. Il semblerait d'abord plus rationnel d'imaginer une loi d'érouissage continue, puisque ces inconvénients sont dus à l'existence d'un point anguleux sur la courbe de traction arbitrairement choisie. Mais la simplification est illusoire. En premier lieu, il est impossible de supposer une loi telle que  $\varphi = Mx - Nx^2 - Px^3$ ; d'abord, parce que le terme en  $x^2$  introduit une inégalité entre l'allongement et le raccourcissement, ensuite parce que la courbe  $\varphi = Mx - Px^3$  possède, non pas une asymptote, mais un maximum. On a cherché (en particulier, DURAND-CLAYE, *Annales des Mines*) à traiter la flexion permanente avec de telles formules, mais on a dû toujours se limiter à de petites déformations permanentes, ce qui n'a plus de rapport avec le problème expérimental sur lequel nous cherchons à jeter quelque lumière.

Pour obtenir une loi de déformation continue avec une tension limite, on est nécessairement conduit à utiliser une courbe exponentielle : les calculs deviennent inextricables.

Nous allons utiliser les formules précédentes à la discussion du cas particulier où les charges pendant l'enroulement et le déroulement sont les mêmes,  $P = P'$ . Nous avons comme variables d'abord cette charge  $P$ , puis la courbure du cylindre sur lequel se fait l'opération.

ENROULEMENT ET DÉROULEMENT SOUS LA MÊME CHARGE.

17. Voici le résumé de la discussion et les formules applicables.

Le plan des  $P, \chi$  est partagé en un certain nombre de régions par les courbes (fig. 11)

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \frac{P}{P_0} = 1 - \frac{\chi}{\chi_0}, \\ \text{(II)} \quad & \frac{P}{P_0} = 1 - \frac{\chi}{4\chi_1}, \\ \text{(III)} \quad & \frac{P}{P_0} = 1 - \frac{\chi}{\chi_1}, \\ \text{(IV)} \quad & \frac{P}{P_0} = \frac{\chi_1}{\chi}. \end{aligned}$$

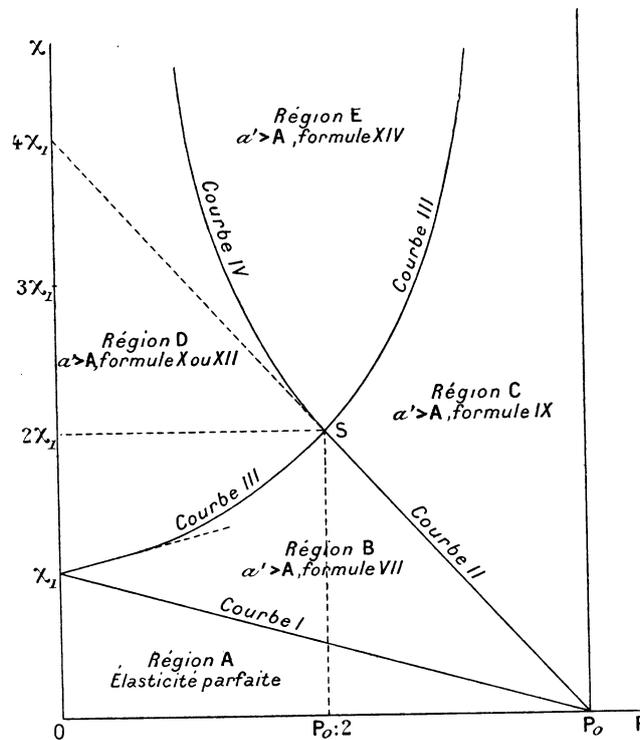
Au-dessous de la droite I (région A), le déroulement et l'enroulement ne produisent que des déformations parfaitement élastiques. L'allongement permanent est nul,  $a' = 0$ .

Dans la région B, la formule VII est seule applicable; elle devient, en posant  $P = P'$ ,

$$\text{(VII')} \quad a' = A + \frac{\partial \chi}{2} - \partial \sqrt{\chi \chi_1 \frac{P_0 - P}{P_0}}.$$

Dans toute la région B, la condition  $a' < A$  est satisfaite. Sur la droite I,  $a' = 0$ ; sur la droite II,  $a' = A$ ; enfin, sur la courbe III, on trouve  $a' = \delta\gamma : 2 - A$ ; l'allongement passe bien de 0 à A, quand  $\gamma$  varie de  $\gamma_1$  à  $2\gamma_1$ .

Fig. 11.



Dans la région C, la formule IX est seule applicable; elle prend la forme

$$(IX') \quad a' = A + \delta\gamma - 2\delta \sqrt{\gamma\gamma_1 \frac{P_0 - P}{P_0}}.$$

Sur la droite II, on retrouve naturellement  $a' = A$ ; dans toute la région C,  $a' > A$ . Sur la courbe III,  $a' = \delta\gamma - 3A$ : l'allongement, égal à A pour  $\gamma = 2\gamma_1$  (point S), est plus grand que A pour toutes les valeurs acceptables de  $\gamma$  qui sont supérieures à  $2\gamma_1$ . Enfin, pour  $P = P_0$ ,  $a' = A + \delta\gamma$ : c'est évidemment là un cas limite, sans réalisation possible.

Dans la région D, la formule X ou XII est seule acceptable :

$$(X', XII') \quad a' = \frac{\delta}{2} \frac{P}{P_0} \gamma.$$

Pour  $P = 0$ , elle donne  $a' = 0$ , quel que soit  $\gamma$ . Sur la courbe III, on retrouve

naturellement  $a' = \delta\gamma : 2 - A$ . Enfin, sur la courbe IV, il vient  $a' = A$  : dans la région D, l'allongement est inférieur à A,  $a' < A$ .

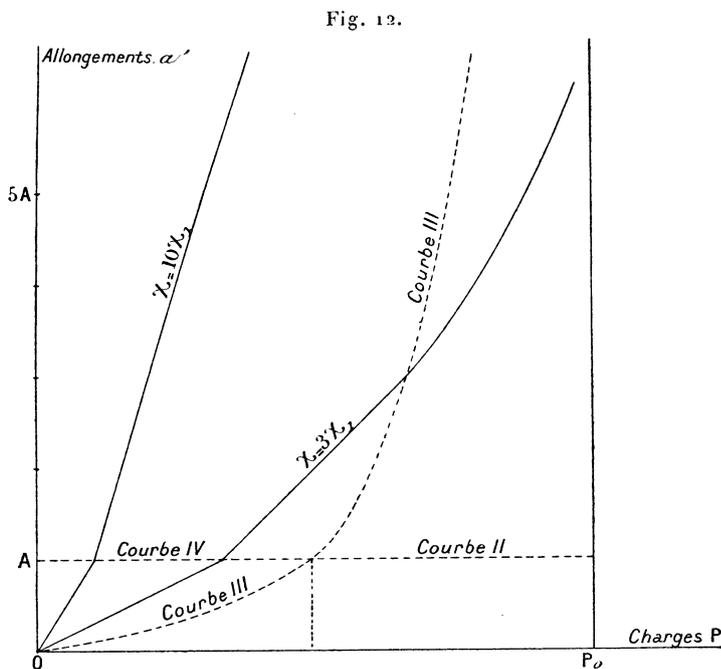
Enfin, dans la région E, c'est la formule XIV qui est applicable :

$$(XIV') \quad a' = \delta \frac{P}{P_0} \gamma - A.$$

Sur la courbe IV,  $a' = A$ ; dans la région E,  $a' > A$ . Sur la courbe III, on retrouve la condition  $a' = \delta\gamma - 3A$ .

On démontrerait que les formules VI, VIII, XI et XIII impliquent contradiction; il est impossible de poser  $P = P'$ , tout en maintenant les conditions ( $b > A, c > A$ ) qui les légitiment. Par exemple la formule VI implique pendant l'enroulement un allongement considérable; il doit se produire un allongement notable aussi pendant le déroulement, puisque nous posons  $P' = P$  : or, cette hypothèse est inconciliable avec la condition  $b > A$ . Nous laissons le soin de pousser à fond la discussion.

18. Courbes donnant les allongements  $a'$  en fonction de P, en prenant la courbure  $\gamma$  comme cote. — Le plan des  $a', P$  (fig. 12) est divisé en un certain



nombre de régions par les courbes qui correspondent aux courbes de la figure 11. Les courbes II et IV sont simplement la droite  $a' = A$ ; la première partie de la

courbe III et la seconde partie de cette courbe sont les hyperboles

$$a' = A \frac{P}{P_0 - P} \left( 0 < P < \frac{P_0}{2} \right), \quad a' = A \frac{3P - P_0}{P_0 - P} \left( P > \frac{P_0}{2} \right).$$

D'ailleurs, on parcourt une horizontale de la figure. Soit, par exemple, à construire la courbe  $\chi = 3\chi_1$ , on applique d'abord la formule X' qui correspond à la région D jusqu'à  $a' = A$ , puis la formule XIV' jusqu'à la rencontre avec la seconde hyperbole, enfin la formule IX jusqu'à  $P = P_0$ .

Comme c'est toujours la formule IX qui est applicable en dernier lieu, les courbes aboutissent pour  $P = P_0$  en des points donnés par l'équation  $a' = A + \delta\chi$ . Tant que  $\chi > \chi_1$ , les courbes partent de l'origine pour  $P = 0$ ; pour  $\chi < \chi_1$ , l'allongement est nul tant qu'on est dans la région A; la courbe cherchée se compose donc d'abord d'un morceau de l'axe des abscisses.

Quand la courbure est grande, c'est la formule XIV' qui intervient dans la majeure partie du plan; l'allongement est une fonction linéaire de la charge.

Il ne faut pas oublier, dans la comparaison *qualitative* des résultats obtenus avec l'expérience, que A est une quantité petite par rapport aux allongements qu'il est facile d'obtenir, représentés par  $a'$ . D'autre part,  $a'$  ne représente pas exactement l'allongement permanent; c'est l'allongement subi par le fil dont la longueur est mesurée à charge nulle, qui est enroulé et déroulé sous charge P, et dont la nouvelle longueur est mesurée sous charge P. L'allongement permanent a donc pour expression  $a' - PA : P_0$ ; mais le second terme est généralement très petit par rapport au premier.

Ceci posé, il est facile de voir que, pour  $P = P_0$ , l'enroulement se fait sur la fibre intérieure, le déroulement sur la fibre extérieure. On se reportera, pour les notations, au n° 12 de notre Mémoire : *Sur l'enroulement des fils*. On a

$$L_2 - L_1 = 2\pi n(\varepsilon_2 - \varepsilon_1), \quad L = 2\pi nR, \quad a' = \frac{L_2 - L_1}{L} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{R} = \chi\delta + A.$$

Or, A est petit devant  $\chi\delta$ ; nous avons donc  $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \delta$ : la distance des fibres neutres d'enroulement et de déroulement est égale à l'épaisseur du cylindre rectangulaire fléchi. Si, par exemple, on a  $\delta = 1^{\text{mm}}$ ,  $R = 5^{\text{mm}}$ , l'allongement limite pour un enroulement et un déroulement serait de 20 pour 100.

19. *Autres questions à traiter.* — Nous sommes loin d'avoir épuisé le sujet; outre les problèmes indiqués au n° 10, on pourrait expliquer pourquoi le déroulement sous charge faible, suivi d'une recharge  $P'$ , produit des effets tout différents que le déroulement sous charge  $P'$ . On pourrait aussi discuter plus en

détail les cas que nous avons étudiés; prouver, par exemple, que, pour des courbures assez grandes et des charges assez fortes, on obtient le même allongement en intervertissant la charge d'enroulement et la charge de déroulement; calculer les couples après le déroulement, etc.

Nous en avons assez dit pour montrer la marche à suivre et faire comprendre l'intérêt de calculs qui semblent d'abord n'avoir aucune application.

