DAVID HILBERT

Théorie des corps de nombres algébriques : préface

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 3 (1911), p. I-VIII
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1911_3_3__R1_0>

PRÉFACE

L'ouvrage de M. Hilbert sur la *Théorie des Nombres algébriques* est un de ces Rapports que publie la Société des Mathématiciens allemands et qui fixent l'état de la Science à une époque et dans un domaine. M. Hilbert, sans négliger le point de vue historique, y reprend toute la théorie d'une manière didactique, suivie, complète et personnelle. Il fond, dans un exposé nouveau, tous les résultats acquis; il énonce et enchaîne les propositions avec le plus grand soin, fait ressortir les théorèmes essentiels; enfin, dans les démonstrations, toujours nettes et précises, s'il laisse parfois de côté les points secondaires et faciles, c'est pour mieux mettre en relief le nœud même du raisonnement.

Bien des géomètres, en rédigeant un Mémoire, ont rêvé certainement d'un mode d'exposition où les lignes essentielles seraient marquées en vigueur, et les détails seulement esquissés : l'habitude, la crainte de l'obscurité les ont généralement ramenés dans la route traditionnelle. M. Hilbert a su en sortir. Aussi nul livre n'est-il, pour les mathématiciens, d'une lecture plus attachante : il conduit, sans effort sensible, des parties les plus élémentaires jusqu'aux sommets de cette belle Science des Nombres, déjà si féconde en résultats et si riche encore en promesses. Qui l'a lu, compris et médité possède les méthodes et sait leurs conséquences.

Nous souhaitons que la traduction de MM. Lévy et Got répande en France le goût de théories et de recherches trop délaissées par notre jeune école de mathématiciens.

G. HUMBERT.

AVERTISSEMENT

Mon maître et ami M. Hadamard désirait que l'œuvre de M. Hilbert relative aux nombres algébriques fût connue en France aussi de ceux qui ne possèdent pas assez la langue allemande pour la lire dans le texte original. J'ai été très heureux lorsqu'il m'a prié d'en entreprendre la traduction.

Pendant que je faisais ce travail, j'appris qu'un de mes collègues, M. Got, séduit par la beauté des travaux de M. Hilbert, avait déjà traduit son ouvrage. Je me suis empressé de lui demander sa collaboration et je lui suis très reconnaissant de me l'avoir accordée.

L'ouvrage de M. Hilbert s'adresse à des lecteurs auxquels les éléments de la Théorie des nombres soient déjà familiers; il est par suite souvent, surtout dans la première partie, d'une extrême concision et il demande, la plupart du temps, à être lu la plume à la main. Nous n'avions pas qualité pour suppléer par des notes personnelles (1) aux démonstrations manquantes ou très abrégées et nous n'avons pas cru pouvoir mieux faire, pour combler les lacunes les plus importantes, que d'avoir recours aux leçons professées par M. Humbert au Collège de France; nous lui sommes particulièrement reconnaissants de nous avoir autorisé à extraire de ses cahiers plusieurs Notes relatives à des théorèmes fondamentaux de la Théorie générale et des Corps quadratiques.

Nous tenons également à remercier le Comité de direction des *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse;* c'est, en effet, en grande partie grâce au concours matériel de cet important Recueil que la publication de notre travail a été assurée.

A. Lévy.

1. M. Got a toutefois pensé être utile, au moins à quelques lecteurs, en reproduisant au bas des pages quelques-uns des calculs tout à fait élémentaires effectués par lui, au cours de sa lecture, pour rétablir parfois des intermédiaires manquants.

PRÉFACE DE L'AUTEUR

La théorie des nombres est une des branches les plus anciennes des sciences mathématiques, et l'esprit humain remarqua de bonne heure quelques propriétés profondes des nombres naturels. Toutefois, ce n'est qu'aux temps modernes qu'elle doit son existence comme science indépendante et systématique.

On vante toujours de cette théorie des nombres la simplicité de ses fondements, la précision de ses notions et la pureté de ses vérités. D'autres branches des connaissances mathématiques ont dû subir des développements plus ou moins longs avant d'atteindre les exigences de la certitude dans les concepts et de la rigueur dans les raisonnements.

Nous ne sommes donc pas surpris de l'enthousiasme qui à toute époque anima ses adeptes. Legendre dit en dépeignant l'amour d'Euler pour la théorie des nombres : « Presque tous les mathématiciens qui s'occupent de la théorie des nombres le font avec passion. » Nous nous rappelons aussi combien notre maître Gauss tenait en honneur la science arithmétique. Dès que, pour la première fois, il eut trouvé à souhait une démonstration d'une remarquable vérité arithmétique, « le charme de ces recherches l'avait tellement ensorcelé que, désormais, il ne put plus les laisser ». Il prisait Fermat, Euler, Lagrange et Legendre « comme des hommes d'une gloire incomparable, car ils ont ouvert les portes du sanctuaire de cette science divine et ont montré ce qu'il contient de richesses ».

C'est une particularité de la théorie des nombres que la difficulté de la démonstration de certaines vérités simples découvertes facilement par voie d'induction. « Et précisément ce qui donne à l'Arithmétique supérieure », dit Gauss, « ce charme magique qui en a fait la science préférée des géomètres, c'est de ne pas douter de ses richesses inépuisables qui surpassent celles de toutes les autres parties des mathématiques ».

On connaît la préférence de Lejeune-Dirichlet pour l'Arithmétique, l'activité de Kummer fut consacrée surtout à la Théorie des nombres, et Kronecker exprima les sentiments de son cours de mathématicien en ces termes : « Dieu fit le nombre entier, le reste est œuvre de l'homme. »

Si l'on tient compte de la rareté de ses pétitions de principe, la théorie des nombres est certainement la branche de la connaissance mathématique dont les vérités sont les plus faciles à saisir.

Mais pour comprendre et se rendre maître des concepts arithmétiques, l'esprit doit posséder une grande faculté d'abstraction, — c'est là un reproche que l'on fait quelquefois à l'Arithmétique. — Je suis d'avis que les autres branches des mathématiques exigent une faculté d'abstraction au moins égale, en admettant que dans ces domaines aussi on apporte la même rigueur et la même perfection dans l'examen des notions fondamentales.

En ce qui concerne le rôle de la théorie des nombres dans l'ensemble des sciences mathématiques, Gauss, dans sa Préface des *Disquisitiones arithmeticæ*, considère encore la théorie des nombres comme une théorie des nombres naturels en excluant expressément les nombres imaginaires.

D'après cela, il ne considère pas que la théorie de la division du cercle (Kreisteilung) appartient à la théorie des nombres; mais il ajoute « que ces principes peuvent être tirés tout entiers et uniquement de l'Arithmétique supérieure ». A côté de Gauss, Jacobi et Lejeune-Dirichlet expriment maintes fois et avec force leur surprise à propos des rapports étroits entre les questions concernant les nombres et certains problèmes algébriques, en particulier les problèmes de la division du cercle. La raison intime de ces rapports est parfaitement découverte aujourd'hui. La théorie des nombres algébriques et la théorie des équations de Galois ont leurs racines communes dans la Théorie des corps algébriques, et cette théorie du corps de nombres est devenue la partie la plus importante de la théorie moderne des nombres.

Le mérite d'avoir apporté le premier germe de la théorie du corps de nombres appartient encore à Gauss. Gauss reconnut que la source naturelle pour arriver aux lois des restes biquadratiques était « l'extension du champ de l'arithmétique », comme il dit, cette extension s'obtenant par l'introduction des nombres entiers imaginaires de la forme $a+bi$; il posa et résolut le problème d'étendre à ces nombres imaginaires toutes les lois de la divisibilité et des propriétés des congruences des nombres ordinaires. Plus tard, Dedekind et Kronecker, en développant et généralisant cette pensée et en se basant sur les idées de Kummer ayant une portée plus grande, arrivèrent à établir notre théorie actuelle du corps de nombres algébriques.

La théorie des nombres n'est pas en rapport seulement avec l'algèbre, mais elle est aussi étroitement liée à la théorie des fonctions. Nous rappellerons les analogies nombreuses et merveilleuses entre certains faits de la théorie des nombres algébriques et la théorie des fonctions algébriques d'une variable; de plus, les recherches profondes de Riemann, qui déduit la réponse à la question de la densité des nombres premiers de la connaissance des zéros d'une certaine fonction analytique. La transcendance des nombres e et π est aussi une propriété arithmétique d'une fonction analytique, la fonction exponentielle.

Enfin, la méthode si importante et à si grande portée imaginée par Lejeune-Dirichlet, pour déterminer le nombre des classes d'un corps de nombres, repose sur des bases analytiques.

Les fonctions périodiques et certaines fonctions à transformations linéaires touchent plus profondément par leur nature intime au nombre : ainsi la fonction exponentielle $e^{2i\pi z}$ peut être considérée, comme l'invariant de l'ensemble des nombres entiers rationnels, comme solution fondamentale de l'équation fonctionnelle $f(z+1)=f(z)$.

De plus, Jacobi avait déjà ressenti le rapport étroit entre la théorie des fonctions elliptiques et la théorie des irrationnalités quadratiques; il va même jusqu'à supposer que l'idée de Gauss, citée plus haut, d'introduire les nombres entiers imaginaires de la forme $a+bi$ ne lui est pas venue rien que par des considérations arithmétiques, mais aussi par des recherches simultanées sur les fonctions de la lemniscate et de leur multiplication complexe. Les fonctions elliptiques, pour certaines valeurs de leurs périodes, et la fonction modulaire elliptique sont toujours l'invariant d'un nombre entier d'un certain corps quadratique imaginaire. Ces fonctions, désignées sous le nom d'invariant, permettent de résoudre certains problèmes difficiles et profondément cachés de la théorie des corps algébriques correspondants, et, réciproquement, la théorie des fonctions elliptiques doit à ces conceptions arithmétiques et à leur application un nouvel essor.

Nous voyons comment l'arithmétique, « reine » de la science mathématique, conquiert de vastes domaines de l'algèbre et de la théorie des fonctions, et comment elle leur enlève le rôle de guide. Que cela ne se soit pas produit plus tôt et dans une mesure plus vaste, cela tient, il me semble, à ce que la théorie des nombres n'a atteint sa maturité qu'à une époque récente. Même Gauss se plaint des efforts démesurés que lui a coûté la détermination du signe d'un radical dans la théorie des nombres; « bien d'autres choses ne l'ont pas retenu autant de jours que cette question l'a retenu d'années »; puis tout à coup, « comme tombe la foudre, l'énigme est résolue ». La construction de la théorie du corps quadratique a apporté de nos jours un développement sûr et continu, au lieu des progrès par bonds qui caractérisaient la science dans son jeune âge.

Il faut ajouter enfin, si je ne me trompe, que, d'une façon générale, le développement des mathématiques pures dans les temps modernes s'opère principalement sous le signe du nombre : les définitions dues à Dedekind et à Weierstrass des notions fondamentales de l'arithmétique, et les ensembles numériques de Cantor ont établi ce principe, qu'un fait de la théorie des fonctions ne doit être considéré comme démontré que si, en dernière instance, il se ramène à des rapports entre des nombres entiers rationnels.

La géométrie s'est arithmétisée par les recherches modernes concernant la géométrie non-euclidienne; ces recherches tentent d'établir la géométrie avec une logique sévère et s'occupent d'introduire le nombre en géométrie sans prêter à la moindre objection.

Le but de ce rapport est d'exposer un développement logique des faits de la théorie des nombres et leurs démonstrations d'après différents points de vue, et de coopérer ainsi à faire avancer l'heure à laquelle les conquêtes de nos grands classiques de la théorie des nombres seront devenues la propriété commune de tous les mathématiciens.

J'ai évité complètement les citations historiques et les attributions de priorité. Disposant d'un espace assez restreint, je me suis efforcé de rechercher partout les sources les plus riches, et toutes les fois que j'ai dû choisir, j'ai donné la préférence aux moyens qui me semblaient les plus profonds et ayant la plus grande portée. On ne juge pas en soi-même quelle est, parmi plusieurs démonstrations, la plus simple et la plus naturelle; il faut d'abord savoir si les principes invoqués sont susceptibles d'une généralisation et s'ils peuvent nous conduire à d'autres recherches.

La première partie de ce rapport traite de la théorie générale du corps algébrique ; cette théorie nous apparaît comme un édifice considérable assis sur trois piliers principaux : le théorème de la décomposition unique des nombres en idéaux premiers, le théorème relatif à l'existence des unités et enfin la détermination transcendante du nombre des classes. La deuxième partie renferme la théorie des corps de Galois, qui à son tour contient la théorie générale. La troisième partie est consacrée à l'exemple classique du corps quadratique. La quatrième partie traite le corps du cercle. La cinquième partie développe la théorie du corps que Kummer a pris comme base dans ses recherches sur les réciprocités d'ordre supérieur. C'est pourquoi je l'ai appelé corps de Kummer. La théorie de ce corps de Kummer est le sommet le plus élevé qu'ait atteint la science arithmétique actuelle. De ce sommet, on aperçoit bien tout le domaine acquis par la science, car presque toute idée ou toute notion de la théorie des corps, au moins prise dans un sens particulier, trouve son application dans la démonstration des lois supérieures de réciprocité. J'ai essayé d'éviter le grand appareil de calculs de Kummer, pour réaliser aussi ici l'idée fondamentale de Riemann qu'il faut triompher des démonstrations non par le calcul, mais par la pensée.

Les théories de la troisième, de la quatrième et de la cinquième partie sont toutes des théories de corps abéliens particuliers ou de corps abéliens relatifs. Un autre exemple d'une pareille théorie serait la multiplication complexe des fonctions elliptiques, en les considérant comme une théorie des corps qui sont des corps abéliens relatifs par rapport à un corps imaginaire quadratique donné. J'ai dû renoncer à faire entrer ces recherches sur la multiplication complexe dans ce rapport, car les faits de cette théorie n'ont pas encore été l'objet de travaux assez simples et assez complets pour permettre une exposition satisfaisante.

La théorie des corps de nombres est un monument d'une admirable beauté et d'une incomparable harmonie ; la plus belle partie de ce monument me semble être la théorie des corps abéliens et des corps abéliens relatifs. Kummer et Kronecker nous l'ont révélée, l'un par ses travaux sur les lois supérieures de réciprocité, l'autre par ses recherches sur la multiplication complexe des fonctions elliptiques.

Les vues profondes que nous donne l'œuvre de ces mathématiciens dans cette théorie, nous montrent aussi que dans ce domaine de la science une foule de trésors les plus précieux demeurent encore cachés; attraits d'une belle récompense qui doivent tenter le chercheur qui connaît la valeur de pareils trésors et qui pratique avec amour l'art de les découvrir.

Les cinq parties de ce rapport sont subdivisées en chapitres et en paragraphes; dans ces paragraphes, les énoncés des théorèmes précèdent les lemmes et sont suivis des démonstrations. Je considère le lecteur comme un voyageur : les lemmes sont des haltes, les théorèmes sont les stations plus importantes désignées à l'avance, de façon à ne pas fatiguer la faculté d'assimilation. J'ai signalé par une impression spéciale les théorèmes qui sont en eux-mêmes un but principal à cause de leur importance même, et aussi ceux qui peuvent être pris pour point de départ d'incursions dans un pays nouveau et non encore découvert.

Ce sont les théorèmes 7 (§ 5), 31 (§ 10), 40 (§ 16), 44 (§ 18), 45 (§ 18), 47 (§ 19), 56 (§ 26), 82 (§ 49), 94 (§ 58), 100 (§ 67), 101 (§ 69), 131 (§ 100), 143 (§ 119), 144 (§ 120), 150 (§ 130), 158 (§ 147), 159 (§ 148), 161 (§ 154), 164 (§ 163), 166 (§ 164), 167 (§ 165).

Le livre est précédé d'une table des matières et d'une indication des auteurs cités. Tout à la fin, j'ai placé une table des concepts de l'ouvrage.

Mon ami Hermann Minkowski a corrigé avec soin les épreuves et a lu la plus grande partie du manuscrit. J'ai fait sur sa prière bien des améliorations formelles et matérielles; je lui exprime ici toute ma reconnaissance pour l'aide qu'il m'a prêtée.

Je remercie aussi ma femme qui a écrit tout le manuscrit et a fait les tables.

J'exprime également ma reconnaissance au Comité de rédaction de la *Deutsche Mathematiker Vereinigung*, en particulier à M. Gutzmer, qui a lu les épreuves, et à la maison d'édition Georges Reimer, qui m'a prêté la plus grande complaisance pour la composition et l'impression.

D. HILBERT.