ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

RENÉ GARNIER

Solutions élémentaire du problème de l'inversion des fonctions elliptiques

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 10 (1918), p. 207-220
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1918_3_10__207_0>

SOLUTION ÉLÉMENTAIRE

DU

PROBLÈME DE L'INVERSION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

PAR M. RENÉ GARNIER.

[1] Le problème de l'inversion de la théorie des fonctions elliptiques peut s'énoncer de la façon suivante : *étant donnés deux nombres* g_2, g_3, *finis, et satisfaisant à la condition* $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$, *en déduire deux autres quantités* $2\omega_1$, $2\omega_2$, *telles que la fonction* $\mathbf{p}(u \mid 2\omega_1, 2\omega_2)$, *construite avec* $2\omega_1$ *et* $2\omega_2$ *comme périodes, admette* g_2 *et* g_3 *comme invariants.*

Pour résoudre ce problème, la voie qui semble la plus naturelle utilise l'équation différentielle vérifiée par la fonction $\mathbf{p}u$. Mais l'étude locale de cette équation, dont on s'est longtemps contenté, ne saurait constituer une solution rigoureuse. La possibilité de singularités non-algébriques pour les intégrales offre des difficultés sérieuses, dont on ne peut triompher que par l'application du premier théorème de M. Painlevé sur les équations du premier ordre, ou bien encore, indirectement, par l'entremise du théorème d'Abel, ou de la fonction rationnelle $R(z)$ introduite par M. Goursat.

Peut-on réussir plus aisément en abordant le problème de front? La forme des séries qui définissent g_2 et g_3 en fonction de $2\omega_1$ et $2\omega_2$ montre immédiatement que l'expression $\mathcal{J}(\tau) \equiv g_2^3 : (g_2^3 - 27g_3^2)$ ne dépend que du rapport $\tau \equiv \omega_2 : \omega_1$, et tout revient à résoudre l'équation $\mathcal{J}(\tau) = g_2^3 : (g_2^3 - 27g_3^2)$. Or, il est impossible de répondre à une telle question sans parler au moins du domaine fondamental du groupe modulaire et sans en donner les propriétés essentielles. Qu'on puisse le faire directement en partant des séries $g_2(2\omega_1, 2\omega_2)$ et $g_3(2\omega_1, 2\omega_2)$, c'est ce que montre la belle méthode synthétique de M. Hurwitz. Sinon il faut procéder à une étude préliminaire du groupe modulaire, à moins qu'on ne préfère introduire les fonctions $\mathfrak{S}$, suivant les idées de Riemann.

Ainsi donc, jusqu'à présent, la solution du problème de l'inversion exigeait de longs détours et réclamait le secours des branches les plus diverses de l'Analyse; à notre connaissance du moins, il n'existait aucune démonstration directe, de caractère purement élémentaire. Et pourtant, il semble naturel qu'une telle preuve ne devrait utiliser que les principes mêmes qu'on applique par ailleurs dans la théorie des fonctions elliptiques : à savoir la théorie des séries et des intégrales de fonctions de variable complexe. Or, tel est précisément le but de la démonstration que nous proposons dans cette Note, et dont un résumé a paru aux *Comptes Rendus* (t. 167, (1918), p. 748) (¹).

[**2**] La méthode repose essentiellement sur l'application d'un artifice dû à M. E. Goursat, et auquel j'ai fait allusion plus haut. Soient $2\omega_1$ et $2\omega_2$ les périodes de l'intégrale

$$J(z) \equiv \int_a^z \frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}};$$

si l'on a établi au préalable que $\omega_2 : \omega_1$ a sa partie réelle différente de zéro (²) le symbole $R(z) \equiv \mathbf{p}[J(z) \,|\, 2\omega_1, 2\omega_2]$ aura un sens; il représentera d'ailleurs une fonction uniforme dont les seules singularités possibles sont des pôles; $R(z)$ *est donc une fonction rationnelle*, et, *s'il était démontré que l'ordre de cette fonction est égal à* 1, *le problème de l'inversion serait résolu* (³). C'est ce point que nous allons établir, en nous plaçant d'abord dans le cas où *deux des points singuliers*, soient c et d, *sont très voisins*. D'ailleurs, pour simplifier l'écriture, nous prendrons la différentielle elliptique sous la forme

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-\lambda^2)}},$$

où λ désigne une quantité de module arbitrairement petit (inférieur à 1), et, pour ne pas interrompre la démonstration, nous présenterons d'abord la remarque suivante.

[**3**] Lemme I. — Soient λ une quantité quelconque de module inférieur à 1, et $\sqrt{1-\lambda^2}$ la détermination du radical qui se réduit à 1 pour $\lambda = 0$; *on peut joindre*

(¹) Dans la démonstration, il a paru commode, pour simplifier l'écriture, d'employer le symbole $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$; mais, en fait, de la théorie de cette fonction il n'est nécessaire de connaître que sa double représentation par une série ou une intégrale définie.

(²) En fait, si l'on utilise la transformation de Landen, comme il est dit plus loin, *la démonstration peut être rendue complètement indépendante de ce théorème fondamental, qui au contraire constitue une conséquence naturelle de notre méthode d'exposition* (n° **10**).

(³) E. Goursat, *Cours d'Analyse mathématique*, 3ᵉ éd., t. II, p. 213.

les points $u=0$ et $u=1$ du plan complexe (u) par un chemin $\mathcal{C}$, intérieur au cercle $|u|=1$ et sur lequel l'expression

$$v(u) \equiv \frac{\left(1+\sqrt{1-\lambda^2}\right)^2 u(1-u)}{1-\lambda^2 u}$$

reste positive et au plus égale à 1.

En effet, l'équation $\dfrac{dv}{du}=0$ possède les deux racines

$$u' = \frac{1-\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda^2}, \qquad u'' = \frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda^2}$$

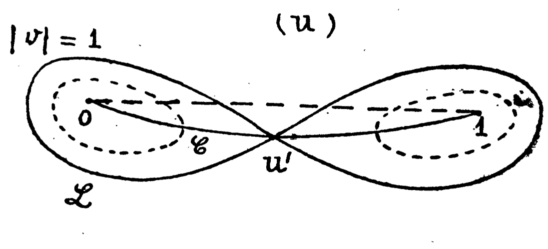
qui, en raison de la condition imposée à λ, satisfont aux inégalités

$$|u'| < 1, \qquad |u''| > 1,$$

et l'on a de plus :

$$v(u') = 1, \qquad v(u'') = \left(\frac{u''}{u'}\right)^2,$$

d'où $|v(u'')| > 1$. Cela étant, pour C suffisamment petit, les courbes $|v| = \mathrm{C}$ sont formées de deux branches entourant, chacune, un des points $u=0$ et $u=1$; C croissant, ces courbes s'élargissent en restant d'abord intérieures à une courbe $\mathcal{L}$, formée d'une seule branche et pourvue d'un point double, avec laquelle elles coïncident d'ailleurs pour une certaine valeur C_1 de C. Or, d'après ce qui précède, ce point double (qui, *a priori*, ne peut être que u' ou u'') se confond nécessairement avec u', et l'on a donc $\mathrm{C}_1 = 1$.



Ceci posé, soit $\mathcal{C}$ un chemin qui joint les points $u=0$ et $u=1$, en passant par $u=u'$, et en restant intérieur à $\mathcal{L}$. En tout point de $\mathcal{C}$ on aura $|u| \leqslant 1$, $|v| \leqslant 1$, la dernière égalité n'étant d'ailleurs réalisée qu'en u'.

En particulier, on peut prendre pour $\mathcal{C}$ l'arc $\mathcal{C}_0$ de la ligne d'égal argument de $v(u)$ passant par $u=0$, $u=u'$, $u=1$; $v(u)$ restera toujours positif le long de cet arc.

[4] Ceci fait, introduisons les périodes

$$2\omega_1 \equiv 2\int_{\lambda}^{-\lambda} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-\lambda^2)}}, \qquad 2\omega_2 \equiv 2\int_{\lambda}^{1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-\lambda^2)}}.$$

de notre différentielle elliptique, et établissons la proposition suivante sur laquelle repose toute notre démonstration.

Lemme II. — *Il existe un nombre positif* μ' *tel que pour* $|\lambda|$ *inférieur à* μ' *et arbitrairement petit, la fonction rationnelle :*

$$R(z) = \mathrm{p}\left[\int_{1}^{z} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-\lambda^2)}} \,\middle|\, 2\omega_1,\ 2\omega_2\right]$$

ne possède aucun pôle à l'intérieur d'un cercle Γ, *de* C *entre* o, *et de rayon arbitrairement petit, fixé à l'avance* (inférieur à 1).

Considérons l'aire $\mathcal{A}$ du plan (z) intérieure à l'ellipse E, de foyers $z = \pm\lambda$, et passant par le point $z = 1$, et faisons la transformation

$$z = \frac{Z^2 + \lambda^2}{2Z}.$$

Dans le plan (Z), l'aire $\mathcal{A}$ sera représentée doublement sur la couronne $\mathfrak{D}$ comprise entre les cercles $|Z| = \left|1 \pm \sqrt{1-\lambda^2}\right|$. Ceci rappelé, nous allons développer l'expression $(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$ suivant les puissances positives et négatives de Z à l'intérieur de $\mathfrak{D}$ (1).

Pour abréger l'écriture, nous poserons provisoirement

$$P_0 \equiv 1, \qquad P_n \equiv \frac{Z^{2n} + \lambda^{2n}}{2^n Z^n} \qquad (n > 0);$$

nous aurons immédiatement :

$$z^{2n} = \left(\frac{Z^2 + \lambda^2}{2Z}\right)^{2n} = \sum_{j=0}^{n} \frac{(2n)!}{j!(2n-j)!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2j} P_{2n-2j},$$

(1) Ce développement rentre d'ailleurs dans la catégorie des développements en séries de polynomes donnés par M. E. Picard [*Traité d'Analyse*, 2e éd., t. II, p. 317]. Voir aussi les *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe*, de M. Paul Montel, p. 80.

puis, pour $|z| < 1$:

$$(1)\qquad \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} z^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{(2n)!}{2^n n!}\right]^2 \sum_{j=0}^{n} \frac{\lambda^{2j}}{2^{2j} j!(2n-j)!} P_{2n-2j}.$$

Posons

$$n = j + p, \qquad (p \geqslant 0)$$

et admettons qu'il soit permis d'intervertir les signes Σ; la formule (1) deviendra :

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{P_{2p}}{2^{2p}} \sum_{j=0}^{+\infty} \left[\frac{(2j+2p)!}{(j+p)!}\right]^2 \frac{\lambda^{2j}}{2^{4j} j!(j+2p)!},$$

c'est-à-dire encore

$$(2)\qquad \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1.3\ldots(2p-1)}{2.4\ldots 2p} F\left(p+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}, 2p+1; \lambda^2\right) P_{2p}.$$

Mais il reste à établir la légitimité de la transformation précédente; effectivement, nous allons montrer que *la formule* (2) *est bien valable lorsque* Z *appartient* (*au sens strict*) *à la couronne* $\mathfrak{D}$.

[**5**] A cet effet, considérons la série de puissances en ζ

$$\psi(\zeta) \equiv \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1.3\ldots(2p-1)}{2.4\ldots 2p} F\left(p+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}, 2p+1; \lambda^2\right) \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2p},$$

qu'on peut écrire encore :

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^1 \left[\frac{\zeta^2 u(1-u)}{1-\lambda^2 u}\right]^p \frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-\lambda^2 u)}};$$

l'intégrale étant prise le long du chemin $\mathcal{C}$ défini au n° **3**, et ζ étant intérieur à $\mathfrak{D}$, la quantité entre crochets restera en module inférieure à 1, d'après le lemme I; la série $\psi(\zeta)$ est donc régulièrement convergente à l'intérieur de tout cercle de rayon inférieur à $|1+\sqrt{1-\lambda^2}|$. Un raisonnement analogue s'applique à la série qu'on déduit de $\psi(\zeta)$ en y remplaçant ζ par $\frac{\lambda^2}{\zeta}$, de sorte qu'en définitive la série de Laurent qui figure au second membre de (2), *représente une fonction* F(Z), *holomorphe à l'intérieur de* $\mathfrak{D}$. Montrons que cette fonction est identique à $(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Or, les coefficients de la série (2) [envisagée comme une série double par rapport aux puissances de z et λ] sont des nombres positifs; d'autre part, le raisonnement même qui précède montre que cette série est convergente quand on y remplace λ par $|\lambda| \equiv \mu$ et Z par $|Z|$, pourvu que Z appartienne à la couronne

$$(\mathfrak{D}') \qquad |Z| < 1+\sqrt{1-\mu^2}, \qquad \left|\frac{\lambda^2}{Z}\right| < 1+\sqrt{1-\mu^2},$$

intérieure à $\mathfrak{D}$(1). L'interversion des signes Σ étant légitime dans $\mathfrak{D}'$, la fonction holomorphe F(Z) coïncide avec $\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ à l'intérieur de $\mathfrak{D}'$, et par suite, à l'intérieur de $\mathfrak{D}$.

[**6**] La validité de la formule (2) étant ainsi établie, revenons à notre intégrale elliptique et posons :

$$J_1(z) \equiv \int_\lambda^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-\lambda^2)}}.$$

A l'intérieur de $\mathfrak{D}$, l'expression $\sqrt{z^2-\lambda^2} = \dfrac{Z^2-\lambda^2}{2Z}$ est uniforme; elle prend d'ailleurs aux deux points Z et $\dfrac{\lambda^2}{Z}$ qui correspondent à z en vertu de (S) les deux déterminations opposées qui répondent au même point z; mais, pour notre problème actuel, il n'y a pas lieu de préciser la détermination du radical, ni le choix du point Z; nous écrirons ainsi :

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2-\lambda^2}} = \frac{dZ}{Z},$$

d'où, en revenant à (2) :

$$J_1(z) = \int_\lambda^Z \left[F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda^2\right) + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1.3\ldots(2p-1)}{2.4\ldots 2p} F\left(p+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}, 2p+1; \lambda^2\right) \frac{Z^{4p}+\lambda^{4p}}{(2Z)^{2p}} \right] \frac{dZ}{Z},$$

c'est-à-dire :

$$(3) \quad J_1(z) = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda^2\right) \operatorname{Log} \frac{Z}{\lambda} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2p} \cdot \frac{1.3\ldots(2p-1)}{2.4\ldots 2p} F\left(p+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}, 2p+1; \lambda^2\right) \frac{Z^{4p}-\lambda^{4p}}{(2Z)^{2p}},$$

(1) $\mathfrak{D}'$ ne peut coïncider avec $\mathfrak{D}$ que si λ est réel.

formule où la détermination du Log dépend du chemin d'intégration, qui n'a pas besoin, non plus, d'être précisé.

D'ailleurs, il résulte du n° **5**, que la légitimité de l'intégration qui a fourni (3) n'est assurée que pour les points Z appartenant à $\mathfrak{D}$ (*frontières exclues*). En particulier, nous pourrons prendre $Z = -\lambda$, ce qui nous donnera la formule

$$2\omega_1 = 2\pi i F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda^2\right), \tag{4}$$

mais nous ne sommes pas sûrs encore de pouvoir prendre $Z = 1 + \sqrt{1-\lambda^2}$ (c'est-à-dire $z = 1$) afin d'obtenir $2\omega_2$ de la même façon [1]. C'est pourtant ce qui a lieu, et nous allons démontrer la formule

$$\begin{aligned}(5)\quad \omega_2 &= F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda^2\right) \operatorname{Log} \frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda} \\ &+ \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2p} \cdot \frac{1.3\ldots(2p-1)}{2.4\ldots 2p} F\left(p+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}, 2p+1; \lambda^2\right)\left[\left(\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{2}\right)^{2p} - \left(\frac{1-\sqrt{1-\lambda^2}}{2}\right)^{2p}\right]\end{aligned}$$

obtenue en remplaçant dans (3) Z par $1 + \sqrt{1-\lambda^2}$ [2].

---

[1] En procédant comme plus loin [cf. la note de la page 214], on pourrait exprimer l'un des deux termes dont la somme constitue l'élément de la série (3) sous la forme $a_p b_p Z^{2p}$ (et de même pour le second). On aurait ici, C désignant un facteur indépendant de p :

$$C a_p = \frac{1}{p}\left(1+\sqrt{1-\lambda^2}\right)^{-2p}, \qquad b_p = \int_0^1 v^p \frac{dv}{\sqrt{v(1-v)(1-\lambda_1^2 v)}}$$

(où λ_1 a la même valeur que plus loin). Dès lors, l'application d'un théorème classique de M. Hadamard (théorème qu'on traduirait dans le plan des z) montrerait que $J_1(z)$ est holomorphe dans le plan (z) entaillé par deux coupures (appartenant à la même droite), soit $(-\infty, -\lambda)$, $(+\lambda, +\infty)$: résultat d'ailleurs bien évident *a priori*.

[2] En exprimant les symboles F à l'aide d'intégrales définies, et en s'appuyant sur les propriétés de la transformation de Landen, il serait aisé de vérifier que la formule (5) est équivalente à la suivante (où les notations sont classiques) :

$$K' = -\frac{2K}{\pi} \log k - \frac{4}{\pi} \int_0^K \log \operatorname{sn} u\, du.$$

Cette dernière est une conséquence directe du développement en série de log sn$u$ des *Fundamenta*. (C. G. J. Jacobi's gesamm. Werke, Bd. I, p. 155.)

[7] Tout d'abord, il suffit d'appliquer le théorème d'Abel à la série de puissances

$$\varphi(\zeta) \equiv \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2p} \frac{1.3\ldots(2p-1)}{2.4\ldots 2p} F\left(p+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}, 2p+1; \lambda^2\right)\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2p},$$

pour reconnaître aussitôt que, si cette série converge pour $\zeta = 1 + \sqrt{1-\lambda^2}$, le second membre de (5) représentera bien $\omega_2 = J_1(1)$.

Or, en procédant comme au n° **5**, on peut écrire le terme général de $\varphi\left(1+\sqrt{1-\lambda^2}\right)$, sous la forme :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{v^p}{p} \frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-\lambda^2 u)}},$$

l'intégrale étant toujours prise le long de $\mathcal{C}$. Considérons alors l'expression

$$A \equiv \sum_{p=1}^{q} \int_{u_1}^{u'} \frac{v^p}{p} \frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-\lambda^2 u)}} = \int_{1-\varepsilon}^{1}\left(\frac{v}{1}+\ldots+\frac{v^q}{q}\right)\left[\frac{\sqrt{1-v}\,\dfrac{du}{dv}}{\sqrt{u(1-u)(1-\lambda^2 u)}}\right]\frac{dv}{\sqrt{1-v}}$$

où u_1 est un point de l'un des arcs $\widehat{ou'}$, $\widehat{u'1}$, arbitrairement voisin de u' (en sorte que ε est un nombre positif arbitrairement petit). L'expression entre crochets, égale à $\frac{1}{2}(1-\lambda^2)^{-\frac{1}{4}}$ pour $u=u'$, reste donc sur l'arc $\widehat{u'u_1}$ inférieure en module à un nombre positif fixe L et l'on peut écrire (¹) :

$$|A| < L\int_{1-\varepsilon}^{1}\left(\frac{v}{1}+\ldots+\frac{v^q}{q}\right)\frac{dv}{\sqrt{1-v}} < L\int_{1-\varepsilon}^{1}\log\frac{1}{1-v}\frac{dv}{\sqrt{1-v}}.$$

Or, le dernier membre peut être rendu arbitrairement petit; les intégrales

$$\int_{u_0}^{u'} \sum_{p=1}^{q} \frac{v^p}{p} \frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-\lambda^2 u)}}$$

(¹) On pouvait éviter l'introduction du nombre L en observant qu'on a :

$$A = \frac{1}{1+\sqrt{1-\lambda^2}}\int_{1-\varepsilon}^{1}\left(\frac{v}{1}+\ldots+\frac{v^q}{q}\right)\frac{dv}{\sqrt{v(1-v)(1-\lambda_1^2 v)}},$$

avec $\lambda_1 \equiv \frac{1-\sqrt{1-\lambda^2}}{1+\sqrt{1-\lambda^2}}$. On remarquera d'ailleurs que le résultat de calcul qui fournit cette formule, joint aux considérations du n° **3**, suffit à établir les propriétés caractéristiques de la transformation de Landen (pour λ complexe). Par ce procédé, l'emploi qui est fait plus loin de cette transformation (n° **10**) se trouve naturellement justifié.

(où $u_0 = 0$ ou 1) sont donc uniformément convergentes, si grand que soit l'entier q. Dès lors on peut affirmer que la série $\varphi(1+\sqrt{1-\lambda^2})$ a pour somme l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \log\frac{1}{1-v}\,\frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-\lambda^2 u)}},$$

dont la valeur est une fonction bornée (et continue) de λ à l'intérieur d'un cercle de rayon inférieur à 1. La convergence de notre série se trouve ainsi démontrée.

C. Q. F. D.

[8] Ce point établi, la démonstration de notre lemme ne présente aucune difficulté. Tout d'abord, on déduit de (3), (4) et (5) les formules[1] :

$$(6)\qquad \frac{\pi i J_1(z)}{\omega_1} = \operatorname{Log}\frac{Z}{\lambda} + \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{2p}\,\frac{1.3\ldots(2p-1)}{2.4\ldots 2p}\,\frac{F\left(p+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}, 2p+1; \lambda^2\right)}{F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\lambda^2\right)}\,\frac{Z^{4p}-\lambda^{4p}}{(2Z)^{2p}},$$

$$(7)\qquad \frac{\pi i\omega_2}{\omega_1} = \operatorname{Log}\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}$$

$$+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{2p}\,\frac{1.3\ldots(2p-1)}{2.4\ldots 2p}\,\frac{F\left(p+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}, 2p+1; \lambda^2\right)}{F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\lambda^2\right)}\left[\left(\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{2}\right)^{2p} - \left(\frac{1-\sqrt{1-\lambda^2}}{2}\right)^{2p}\right].$$

Or, lorsque λ tend vers 0, la série qui figure au second membre de (7) tend vers une limite finie, soit $\frac{M}{4}$[2]; on peut donc trouver un nombre fixe μ_1 tel que pour $|\lambda| < \mu_1$ le module de cette série soit inférieur à $\frac{M}{2}$, et l'on aura alors pour $|\lambda| < \mu_1$:

$$(8)\qquad \mathcal{R}\left(\frac{\pi i\omega_2}{\omega_1}\right) > \log\left|\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\right| - \frac{M}{2} > \log\frac{1}{\mu} - \frac{M}{2}.$$

---

[1] On observera que si l'on veut revenir aux notations classiques, et faire jouer à λ le rôle de k (moyennant le changement de z en λz), ω_1 devra être remplacé par $2iK$ et ω_2, par K'. Actuellement ce serait donc $-\frac{2\pi i\omega_2}{\omega_1}$ qui jouerait le rôle de $\pi i\tau = -\pi\frac{K'}{K}$.

[2] On trouverait d'ailleurs aisément $\frac{M}{4} = \log 2$.

Soit alors H un nombre positif arbitrairement grand, fixé une fois pour toutes. On pourra déterminer un nombre σ satisfaisant à l'inégalité

$$\sigma < e^{-\mathrm{H}-\mathrm{M}}$$

et tel, en outre(¹), que pour $|\lambda| < \mu_1$ et $|\zeta| < \sigma$, on ait :

$$\left| \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2p} \frac{1 . 3 \ldots 2p-1}{2 . 4 \ldots 2p} \frac{\mathrm{F}\left(p+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}, 2p+1; \lambda^2\right)}{\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda^2\right)} \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2p} \right| < \frac{\mathrm{M}}{4}$$

Cela fait, assujettissons λ à vérifier la condition

$$|\lambda| < \frac{\sigma}{\sqrt{2}},$$

(qui entraîne $|\lambda| < \mu_1$ pour H assez grand) et, dans le plan (Z) décrivons les cercles γ_1 et γ_2, de centre o, de rayons σ et $\frac{\mu^2}{\sigma} < \frac{\sigma}{2}$; γ_2 sera donc intérieur à γ_1, et, Z variant à l'intérieur de la couronne précédente, le module de la série qui figure au second membre de (6) sera inférieur à $\frac{\mathrm{M}}{2}$; de plus, $\log \left|\frac{\mathrm{Z}}{\lambda}\right|$ sera, en valeur absolue, inférieur à $\log \frac{\sigma}{|\lambda|}$. Enfin, z variera à l'intérieur d'une ellipse de foyers $z = \pm\lambda$, de demi-petit axe égal à $\frac{1}{2}\left(\sigma - \frac{\mu^2}{\sigma}\right) > \frac{\sigma}{4}$; quelque petit que soit μ, cette ellipse contiendra toujours à son intérieur un cercle Γ de centre o de rayon au moins égal à $\frac{\sigma}{4}$ (ne dépendant que de H, et qu'on pourra d'ailleurs fixer une fois pour toutes — inférieur à 1 — au lieu de H).

Ceci posé, faisons varier z à l'intérieur de Γ; d'après ce qui précède, on aura, quelque petit que soit $|\lambda|$, $\left(< \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\mathrm{H}-\mathrm{M}}\right)$:

$$\left| \mathcal{R}\left[\frac{\pi i \mathrm{J}_1(z)}{\omega_1}\right] \right| < \log \frac{\sigma}{\mu} + \frac{\mathrm{M}}{2},$$

d'où, par comparaison avec (8) :

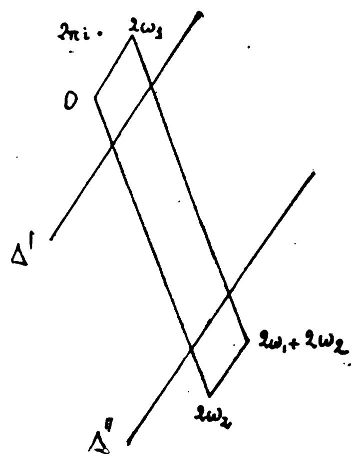
$$\mathcal{R}\left(\frac{\pi i \omega_2}{\omega_1}\right) - \left| \mathcal{R}\left[\frac{\pi i \mathrm{J}_1(z)}{\omega_1}\right] \right| > \log \frac{1}{\sigma} - \mathrm{M} > \mathrm{H}, \tag{9}$$

(¹) Pour H assez grand, cette seconde condition résulte évidemment de la première.

ce qui montre d'abord que, *pour* $|\lambda| < \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-H-M}$, *on a sûrement*

$$\mathcal{R}\left(\frac{\pi i \omega_2}{\omega_1}\right) > H,$$

où H *est arbitrairement grand.* Ce n'est pas tout. Traçons maintenant le réseau des parallélogrammes des périodes; le côté $(0, 2\omega_2)$ et ses équipollents seront très grands pour $|\lambda|$ très petit. Figurons encore les droites Δ' et Δ'', parallèles au côté $(0, 2\omega_1)$,



situées à l'intérieur du parallélogramme primitif et à des distances $H\frac{|\omega_1|}{\pi}$ des côtés $(0, 2\omega_1)$ et $(2\omega_2,\ 2\omega_1 + 2\omega_2)$. Cela étant, la condition (9) signifie évidemment que, *z variant à l'intérieur de* Γ, *le point* $J_1(z) - \omega_2$ *ne peut sortir de la bande indéfinie limitée par* Δ' *et* Δ'' (ou de sa symétrique par rapport à o). Si l'on pose alors

$$J(z) \equiv \int_1^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-\lambda^2)}} = J_1(z) - \omega_2,$$

$J(z)$ ne pourra coïncider avec aucun des sommets du réseau et, par suite, pour $|\lambda| < \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-H-M} (= \mu')$, $R(z) = \mathbf{p}[J(z) \mid 2\omega_1,\ 2\omega_2]$ ne pourra présenter aucun pôle à l'intérieur de Γ. C. Q. F. D.

[9] Ce lemme une fois démontré, il sera aisé d'établir que $R(z)$ est toujours d'ordre 1. Démontrons-le d'abord pour $|\lambda| < \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-H-M}$.

Or l'intégrale $J(z)$, étendue de $z = 1$ à un point quelconque du plan (z) extérieur à Γ reste bornée[1]; c'est une fonction continue de λ, qui, pour λ infiniment petit, tend vers la valeur

$$\bar{J}(z) \equiv \operatorname{Log} \frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z};$$

cette valeur limite ne peut être un multiple de $2\pi i$ que pour $z=1$, qui est évidemment un pôle d'ordre 1 de $R(z)$. D'ailleurs, de $z=1$ comme centre, on peut décrire un cercle Γ', de rayon assez petit pour qu'à l'intérieur de Γ' on ait $|J(z)| < \pi$, et cela, si petit que soit $|\lambda|$: de sorte que pour $|\lambda|$ assez petit : 1° Γ' ne contiendra qu'un seul pôle de $R(z)$; 2° dans la région extérieure à Γ et Γ', les expressions $|J(z) - 2m\pi i|$ (où m est un entier quelconque) resteront bornées inférieurement. Or, on a vu plus haut que, pour $|\lambda|$ infiniment petit, $\mathcal{R}\left(\frac{\pi i \omega_2}{\omega_1}\right)$ reste supérieure à un nombre positif fixe; la série double qui définit $p(u|2\omega_2, 2\omega_2)$ est alors absolument et uniformément convergente. Mais $2\omega_1$ tend vers $2\pi i$, tandis que $|2\omega_2|$ croît indéfiniment; $p(u|2\omega_1, 2\omega_2)$ tendra donc vers la somme de la série

$$\frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u-2m\pi i)^2} - \frac{1}{(2m\pi i)^2}\right]. \tag{10}$$

Or, si l'on remplace u par $J(z)$, tous les dénominateurs seront bornés inférieurement dans la région extérieure à Γ et Γ', et cela, quelque petit que soit $|\lambda|$. A l'intérieur de cette région, $R(z)$ restera donc bornée; et, en définitive, pour tout point du plan (z) la fonction rationnelle $R(z)$ restera holomorphe si $|\lambda|$ est assez petit, exception faite pourtant de $z=1$ qui est un pôle du premier ordre. Dans cette hypothèse, $R(z)$ est donc bien d'ordre 1. C. Q. F. D.

[**10**] Il ne nous reste plus qu'à nous débarrasser de notre restriction sur $|\lambda|$. Or, *la transformation de Landen, appliquée à* $\mathbf{p}u$ *et à* $J(z)$ *montre aussitôt que* $R(z)$ *est toujours d'ordre* 1, *quel que soit* λ, *et le problème de l'inversion se trouve ainsi résolu*[3]. Mais nous pouvons arriver à ce résultat sans invoquer la transformation de Landen (dont on a établi d'ailleurs les propriétés essentielles au n° **3**). Tout d'abord,

---

[1] Nous n'avons pas à nous préoccuper des chemins tournant une infinité de fois autour des points critiques.

[2] La détermination du logarithme n'a pas besoin d'être précisée.

[3] Cette remarque, rapprochée de (8), montre que le rapport $\omega_2 : \omega_1$ ne peut être réel pour aucune valeur de $\lambda^2 (\neq 0, 1, \infty)$. Ainsi présentée, *la méthode fournit donc, comme application particulière, l'un des théorèmes fondamentaux de la théorie des fonctions elliptiques.*

moyennant une transformation homographique, le résultat du numéro précédent s'applique à toute intégrale elliptique de première espèce

$$J(z) \equiv \int_a^z \frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}}$$

dont deux des points critiques, c et d par exemple, sont suffisamment rapprochés. Supposons alors que a, b, c, d aient reçu des valeurs quelconques (mais distinctes), et joignons c et d par un arc de courbe $\mathfrak{L}$, passant à une distance finie de a et b et dont les coordonnées seront des fonctions continues d'un paramètre t, qui variera, par exemple, de 0 à 1 quand on ira de c en d. Cela étant, faisons varier d sur $\mathfrak{L}$ pour l'amener à la position finale qui lui a été assignée; $R(z)$ deviendra une fonction $R(z;t)$ rationnelle en z, et dont les coefficients dépendront de t. Pour t suffisamment petit, soit $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$, cette fonction rationnelle sera du premier ordre; il nous faut établir qu'elle l'est constamment pour $0 \leqslant t \leqslant 1$.

A cet effet, j'observe d'abord que pour $\varepsilon \leqslant t \leqslant 1$, le module d'une période quelconque 2ω de $J(z)$ est une fonction continue de t, dont la borne inférieure ne peut être nulle [1]. Il existe donc un nombre positif A tel que l'on ait, quel que soit t, $|2\omega| > A$; or, on peut décrire de a comme centre un cercle γ, extérieur à $\mathfrak{L}$, et de rayon suffisamment petit pour qu'à l'intérieur de γ on ait $|J(z)| < A$, et cela quel que soit t. Par suite, quel que soit d sur $\mathfrak{L}$, *la fonction rationnelle* $R(z)$ *ne peut présenter qu'un seul pôle*, $z = a$, *à l'intérieur de* γ.

Cette remarque faite, supposons que le théorème soit inexact : il existera donc un ensemble $\mathcal{E}$ de valeurs de t pour lesquelles $R(z)$ sera d'ordre supérieur à 1; soit t' sa borne inférieure. Je dis d'abord que, *s'il en est ainsi,* $R(z)$ *sera d'ordre supérieur à* 1 *pour* $t = t'$.

En effet, dans le cas opposé, pour tout point z du domaine fermé D obtenu en retranchant du plan z les points intérieurs à γ, $R(z;t)$ sera une fonction de t, bornée et continue pour $t \leqslant t'$, donc aussi dans un certain intervalle $t' - \varepsilon(z)$, $t' + \varepsilon(z)$. Le domaine D étant *fermé*, la continuité y est uniforme et les $\varepsilon(z)$ restent supérieurs à un nombre positif fixe ε_1. Par suite, pour $t' \leqslant t \leqslant t' + \varepsilon_1$ la fonction $R(z;t)$ sera encore bornée en tout point z de D et t' ne saurait être la borne inférieure de $\mathcal{E}$.

Supposons donc que pour $t = t'$, $R(z)$ présente un pôle $z = z_1$, situé à l'intérieur de D. De z_1 comme centre on pourra décrire une circonférence C (appartenant à D), telle que sur C, et à l'intérieur de C, il n'y ait aucun autre pôle, ni aucun zéro de $R(z;t)$; d'ailleurs, la continuité par rapport à t (pour $t < t'$) permet de trouver un

[1] On s'appuie ici sur le fait que le rapport de deux périodes ne peut être réel (donc nul) pour aucune valeur du module (non singulière). A cet égard, la démonstration est la contre-partie de celle qui fait état de la transformation de Landen (voir la note précédente).

nombre ε_2 tel que sur C, et à l'intérieur de C, la fonction rationnelle $R(z\,;t)$ ne présente aucun zéro pour $t' - \varepsilon_2 \leqslant t \leqslant t'$. Dans cet intervalle, l'intégrale

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{R_z'(z\,;\,t)}{R(z\,;\,t)} dz$$

est une fonction de t, bien déterminée et continue. Mais pour $t < t'$, on a $\Phi(t) =$ et pour $t = t'$, $\Phi(t) = -1$; notre seconde hypothèse est donc encore inadmissible.

En définitive, quel que soit d, la fonction rationnelle $R(z)$ ne peut présenter qu'un seul pôle, $z = a$ dans tout le plan (z). Elle est donc bien du premier ordre, comme nous voulions le démontrer.