ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

R. GOSSE

Sur les équations $r + f(x, y, z, p, q, t) = 0$

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 14 (1922), p. 137-152
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1922_3_14__137_0>

SUR LES ÉQUATIONS $r+f(x,y,z,p,q,t)=0$,

PAR M. R. GOSSE.

[**1**] Nous nous proposons de déterminer toutes les équations de cette forme qui admettent deux invariants du second ordre pour un de leurs deux systèmes de caractéristiques([1]).

Nous poserons

$$m_1 = -m_2 = \sqrt{-\frac{\partial f}{\partial t}} = m$$

et nous supposerons d'abord $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, c'est-à-dire $\frac{\partial m}{\partial t}$, différent de zéro.

[**2**] Le système S

$$\text{(S)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = m_1 \frac{\partial u}{\partial s} \qquad \left(\frac{du}{dx}\right) + m_2\left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{\partial u}{\partial s}\left(\frac{df}{dy}\right)$$

doit admettre deux solutions.

Posons $m = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ et $s + \varphi = \sigma$. Si on prend comme variables indépendantes x, y, z, p, q, σ, t, on voit que le système S s'écrit :

$$\mathrm{T}(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{X}(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z} - f\frac{\partial u}{\partial p} + (\sigma - \varphi)\frac{\partial u}{\partial q} - m\left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z} + (\sigma-\varphi)\frac{\partial u}{\partial p} + t\frac{\partial u}{\partial q}\right) \\
+ \frac{\partial u}{\partial \sigma}\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + p\frac{\partial \varphi}{\partial z} - f\frac{\partial \varphi}{\partial p} + (\sigma-\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial q} - m\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + q\frac{\partial \varphi}{\partial z} + (\sigma-\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial p} + t\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)\right. \\
\left. - \left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + (\sigma-\varphi)\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial q}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

([1]) Voir Note des *C. R. de l'Académie des Sciences*, t. CLXXIII, p. 903.

En appelant A le coefficient de $\frac{\partial u}{\partial \sigma}$, on a aussi

$$Y(u) \equiv \frac{2m^2}{m'}\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{2m}{m'}\frac{\partial u}{\partial q} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z} + (\sigma - \rho)\frac{\partial u}{\partial p} + t\frac{\partial u}{\partial q}\right) + \frac{A'}{m'}\frac{\partial u}{\partial \sigma} = 0$$

et

$$Q(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial p}\left(m + \left(\frac{2m^2}{m'}\right)'\right) - \frac{\partial u}{\partial q}\left(1 + 2\left(\frac{m}{m'}\right)'\right) + \frac{\partial u}{\partial \sigma}\left(\frac{A'}{m'}\right)' = 0$$

en désignant par des accents les dérivations par rapport à t.

Si $1 + 2\left(\frac{m}{m'}\right)'$ n'est pas nul, le coefficient de $\frac{\partial u}{\partial z}$ dans la combinaison

$$Z(u) \equiv Q(Y(u)) - Y(Q(u)) \quad \text{est} \quad 1 + 2\left(\frac{m}{m'}\right)'.$$

Le système à 7 variables

$$T = 0, \qquad X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Q = 0, \qquad Z = 0$$

devant admettre deux solutions, la combinaison

$$T(Q(u)) - Q(T(u)) = 0$$

doit être une conséquence des équations précédentes. On en conclut que

$$\frac{\partial u}{\partial p}\left\{\frac{m + \left(\frac{2m^2}{m'}\right)'}{1 + 2\left(\frac{m}{m'}\right)'}\right\}' + \frac{\partial u}{\partial \sigma}\left\{\frac{\left(\frac{A'}{m'}\right)'}{1 + 2\left(\frac{m}{m'}\right)'}\right\}' \equiv 0.$$

Les hypothèses $\frac{\partial u}{\partial p} = 0$ ou $\frac{\partial u}{\partial \sigma} = 0$ sont manifestement inadmissibles. Il faut donc en particulier que le coefficient de $\frac{\partial u}{\partial p}$ soit nul, c'est-à-dire que

$$m + \left(\frac{2m^2}{m'}\right)' = -\left(1 + 2\left(\frac{m}{m'}\right)'\right) h(x, y, z, p, q).$$

En posant $m = h\,tg^2\theta$, cette équation devient ($h \neq 0$)

$$\frac{dt}{d\theta}\,d\,tg\,\theta + d\left(tg\,\theta\,\frac{dt}{d\theta}\right) = 0$$

d'où

$$t=\gamma(\theta+\operatorname{cotg}\theta)+\gamma_1$$

et

(I) $$f\equiv\gamma h^2(tg\theta-\theta)+\alpha,$$

$\alpha,\beta,\gamma,\gamma_1$ étant des fonctions de x,y,z,p,q.

[3] Si $1+2\left(\frac{m}{m'}\right)'$ est nul, un calcul simple donne

(II) $$f=\frac{h^2}{3(t+\alpha)^3}+\gamma.$$

Si

$$m+\left(\frac{2m^2}{m'}\right)'=0,$$

on a

$$f=\frac{3\alpha^2}{(t+\beta)^{\frac{1}{3}}}+\gamma$$

et l'équation correspondante se ramène, en permutant les rôles de x et y, à celle où f a la forme II.

Nous n'avons donc à nous occuper que des formes I et II.

[4] **Étude de la forme I.** — On peut supposer $\gamma h\neq 0$.

On a

$$dt=\frac{-\gamma d\theta}{tg^2\theta}.$$

En prenant comme variables x,y,z,p,q,s,θ, le système S s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}+\gamma h\frac{\partial u}{\partial s}=0,\qquad\left(\frac{du}{dx}\right)+m_2\left(\frac{du}{dy}\right)=\frac{\partial u}{\partial s}\left(\frac{df}{dy}\right).$$

Si on pose $\sigma = s + \theta\gamma h$, on voit que u est une fonction v de x, y, z, p, q, σ et le système S s'écrit, avec les variables $x, y, z, p, q, \sigma, \theta$,

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0,$$

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) - htg^2\theta\left(\frac{dv}{dy}\right) = \frac{\partial v}{\partial \sigma}\Bigg\{\theta\left(\frac{d(\gamma h)}{dx}\right) + \gamma h\left(\frac{d\theta}{dx}\right)$$

$$- htg^2\theta\left\{\theta\left(\frac{d\gamma h}{dy}\right) + \gamma h\left(\frac{d\theta}{dy}\right)\right\} + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)$$

$$+ (tg\theta - \theta)\left(\frac{d\gamma h^2}{dy}\right) + \gamma h^2 tg^2\theta\left(\frac{d\theta}{dy}\right)\Bigg\}.$$

On a par suite l'identité en θ :

$$\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z} - [\alpha + \gamma h^2(tg\theta - \theta)]\frac{\partial v}{\partial p} + (\sigma + \theta\gamma h)\frac{\partial v}{\partial q}$$

$$- htg^2\theta\left\{\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z} + (\sigma + \theta\gamma h)\frac{\partial v}{\partial p} + [\gamma_1 + \gamma(\theta + \operatorname{cotg}\theta)]\frac{\partial v}{\partial q}\right\}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial \sigma}\Bigg\{\theta\left\{\frac{\partial \gamma h}{\partial x} + p\frac{\partial \gamma h}{\partial z} - \frac{\partial \gamma h}{\partial p}[\alpha + \gamma h^2(tg\theta - \theta)] + \frac{\partial \gamma h}{\partial q}(\sigma + \theta\gamma h)\right\}$$

$$+ htg^2\theta(\theta + \operatorname{cotg}\theta)\left\{\frac{\partial \gamma}{\partial x} + p\frac{\partial \gamma}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial p}[\alpha + \gamma h^2(tg\theta - \theta)] + \frac{\partial \gamma}{\partial q}(\sigma + \theta\gamma h)\right\}$$

$$+ htg^2\theta\left\{\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + p\frac{\partial \gamma_1}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial p}[\alpha + \gamma h^2(tg\theta - \theta)] + \frac{\partial \gamma_1}{\partial q}(\sigma + \theta\gamma h)\right\}$$

$$- \theta htg^2\theta\left\{\frac{\partial \gamma h}{\partial y} + q\frac{\partial \gamma h}{\partial z} + (\sigma + \theta\gamma h)\frac{\partial \gamma h}{\partial p} + \frac{\partial \gamma h}{\partial q}[\gamma_1 + \gamma(\theta + \operatorname{cotg}\theta)]\right\}$$

$$+ \frac{\partial \alpha}{\partial y} + q\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial \alpha}{\partial p}(\sigma + \theta\gamma h) + \frac{\partial \alpha}{\partial q}[\gamma_1 + \gamma(\theta + \operatorname{cotg}\theta)]$$

$$+ (tg\theta - \theta)\left\{\frac{\partial \gamma h^2}{\partial y} + q\frac{\partial \gamma h^2}{\partial z} + \frac{\partial \gamma h^2}{\partial p}(\sigma + \theta\gamma h) + \frac{\partial \gamma h^2}{\partial q}[\gamma_1 + \gamma(\theta + \operatorname{cotg}\theta)]\right\}\Bigg\}.$$

En annulant les coefficients de $tg^3\theta$, $\frac{1}{tg\theta}$, $\theta tg\theta$, $\theta^2 tg^2\theta$, on obtient d'abord

$$\frac{\partial \gamma}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial \gamma_1}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial \gamma h^2}{\partial q} = 0, \quad h\frac{\partial h}{\partial p} - \frac{\partial h}{\partial q} = 0, \quad h\frac{\partial h}{\partial p} + \frac{\partial h}{\partial q} = 0.$$

Donc h et γ sont des fonctions de x, y, z; outre ces variables, α contient p et γ_1 contient q. L'identité précédente donne de plus :

$$A \equiv \frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z} - \alpha\frac{\partial v}{\partial p} + \sigma\frac{\partial v}{\partial q} - \frac{\partial v}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + q\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \sigma\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right) = 0,$$

$$B \equiv \frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z} + \sigma\frac{\partial v}{\partial p} + \gamma_1\frac{\partial v}{\partial q} + \frac{\partial v}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + p\frac{\partial \gamma_1}{\partial z} + \sigma\frac{\partial \gamma_1}{\partial q}\right) = 0,$$

$$C \equiv \gamma h\frac{\partial v}{\partial p} + \gamma\frac{\partial v}{\partial q} + \frac{\partial v}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} + p\frac{\partial \gamma}{\partial z} + \gamma h\frac{\partial \gamma_1}{\partial q} - \frac{\partial \gamma h}{\partial y} - q\frac{\partial \gamma h}{\partial z}\right) = 0,$$

$$C' \equiv \gamma h^2\frac{\partial v}{\partial p} + \gamma h\frac{\partial v}{\partial q} - \frac{\partial v}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \gamma h}{\partial x} + p\frac{\partial \gamma h}{\partial z} + \gamma h\frac{\partial \alpha}{\partial p} - \frac{\partial \gamma h^2}{\partial y} - q\frac{\partial \gamma h^2}{\partial z}\right),$$

$$C'' \equiv \gamma h^2\frac{\partial v}{\partial p} + \gamma h\frac{\partial v}{\partial q} - \frac{\partial v}{\partial \sigma}\left\{h\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} + p\frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) + \frac{\partial \gamma h^2}{\partial y} + q\frac{\partial \gamma h^2}{\partial z}\right\} = 0.$$

On en tire

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial q} = q\frac{\partial L\gamma^2 h^3}{\partial z} + \frac{\partial L\gamma^2 h^3}{\partial y}$$

$$\gamma_1 = q^2\frac{\partial L\gamma h^{\frac{3}{2}}}{\partial z} + 2q\frac{\partial L\gamma h^{\frac{3}{2}}}{\partial y} + g(x, y, z).$$

En faisant le changement d'inconnue défini par les conditions

$$z_1 = F(x, y, z) \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{\gamma h^{\frac{3}{2}}}$$

il est facile de voir qu'on obtient une équation de même forme que celle que l'on étudie

$$r_1 + h^{\frac{1}{2}}(tg\theta - \theta) + \alpha_1 = 0$$

avec

$$t_1 + h^{-\frac{3}{2}}(\theta + \operatorname{cotg}\theta) + \gamma_1(x, y, z_1)$$

où γ_1 ne contient plus q et où $\gamma h^{\frac{3}{2}} = 1$. On peut donc garder les conditions A, B, C, C', C'' en y joignant

$$\gamma h^{\frac{3}{2}} = 1, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial \gamma_1}{\partial p} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial q} = 0.$$

La comparaison de C' et de C'' donne alors

$$\alpha = p^2 \frac{\partial \mathrm{L}h}{\partial z} + 2p \frac{\partial \mathrm{L}h}{\partial x} + a(x, y, z)$$

et la combinaison $A(B) - B(A) = 0$ se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + p \frac{\partial \gamma_1}{\partial z}\right) + p \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + p \frac{\partial \gamma_1}{\partial z}\right) - \alpha \frac{\partial \gamma_1}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + q \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \sigma \frac{\partial \alpha}{\partial p}\right)$$
$$+ q \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + q \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \sigma \frac{\partial \alpha}{\partial p}\right) + \sigma \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + q \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \sigma \frac{\partial \alpha}{\partial p}\right)$$
$$+ \gamma_1 \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial \alpha}{\partial p}\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + p \frac{\partial \gamma_1}{\partial z}\right) = 0.$$

C'est là une identité en σ et q, qui donne les conditions

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial p \partial z} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial p \partial y} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + p \frac{\partial \gamma_1}{\partial z}\right) + p \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + p \frac{\partial \gamma_1}{\partial z}\right) - \alpha \frac{\partial \gamma_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \gamma_1 \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial \alpha}{\partial p}\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + p \frac{\partial \gamma_1}{\partial z}\right) = 0.$$

On en conclut qu'on peut poser

$$h = \mathrm{X}^2 \mathrm{Y}^2 \qquad \alpha = 4p \frac{\mathrm{X}'}{\mathrm{X}} + z\mathrm{X}_1 + g(x, y)$$

et en changeant z en $\mathrm{X}^2 z$, l'équation proposée peut s'écrire

$$r + \mathrm{Y}(tg\,\theta - \theta) + z\mathrm{X} + g(x, y) = 0,$$

avec

$$t = \frac{1}{\mathrm{Y}^3}(\operatorname{cotg} \theta + \theta) + \gamma_1(x, y, z).$$

Il reste alors, pour la condition $A(B) - B(A) = 0$,

$$\frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial x^2} + 2p \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial x \partial z} + p^2 \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial z^2} - (z\mathrm{X} + g) \frac{\partial \gamma_1}{\partial z} + \gamma_1 \mathrm{X} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0.$$

On en tire :

$$\gamma_1 = \mathrm{Y}_1 z + \varphi(x, y)$$

avec

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+X\varphi=Y_1 g-\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}. \tag{1}$$

Changeons dans l'équation proposée z en $z+\lambda(x, y)$. Elle s'écrit :

$$r+Y(tg\,\theta-\theta)+zX+\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}+X\lambda+g=0$$

avec

$$t=\frac{1}{Y^3}(\cotg\theta+\theta)+zY_1+\varphi+\lambda Y_1-\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}.$$

Les deux équations

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}+X\lambda+g=0, \qquad \frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}=\varphi+\lambda Y_1,$$

sont compatibles en vertu de la relation (1); on peut donc, en choisissant pour λ une solution commune à ces deux équations, ramener l'équation proposée à la forme

$$r+Y(tg\,\theta-\theta)+zX=0$$

avec

$$t=\frac{1}{Y^3}(\cotg\theta-\theta)+zY_1.$$

On est alors conduit à écrire que le système à six variables

$$A\equiv\frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z}-Xz\frac{\partial v}{\partial p}+\sigma\frac{\partial v}{\partial q}-\frac{\partial v}{\partial\sigma}qX=0,$$

$$B\equiv\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}+\sigma\frac{\partial v}{\partial p}+Y_1 z\frac{\partial v}{\partial q}+\frac{\partial v}{\partial\sigma}pY_1=0,$$

$$C\equiv Y^2\frac{\partial v}{\partial p}+\frac{\partial v}{\partial q}+\frac{\partial v}{\partial\sigma}YY'=0$$

a deux solutions. On a

$$A(B)-B(A)\equiv 0,$$

$$D\equiv C(A)-A(C)\equiv Y^2\frac{\partial v}{\partial z}+YY'\frac{\partial v}{\partial q}-X\frac{\partial v}{\partial\sigma}=0,$$

$$E\equiv B(C)-C(B)=YY'\frac{\partial v}{\partial p}+\frac{\partial v}{\partial\sigma}[(YY')'-Y_1Y^2]-\frac{\partial v}{\partial z}=0,$$

$$F\equiv B(D)-D(B)=\frac{\partial v}{\partial z}YY'+\frac{\partial v}{\partial q}(YY')'+X\frac{\partial v}{\partial p}=0,$$

1° Si Y' est nul, l'équation F donne $X = 0$ et la comparaison de E et D donne

$$Y_1 = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Le système

$$\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z} + \sigma\frac{\partial v}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z} + \sigma\frac{\partial v}{\partial p} = 0, \quad Y^2\frac{\partial v}{\partial p} + \frac{\partial v}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

où Y est une constante qu'on peut prendre égale à un, est complet. Il admet les deux solutions σ et $q - p - \sigma(x - y)$. L'équation

$$r + tg\theta - \theta = 0,$$

où

$$t = \operatorname{cotg}\theta + \theta$$

admet donc comme invariants $s - \theta$ et $(s - \theta)(x - y) + p - q$.

Cette équation est, aux notations près, celle qui a été signalée par M. de Boer. Elle admet aussi deux invariants du second ordre pour le second système de caractéristiques. Elle est de la première classe.

2° $Y' \neq 0$. En tirant $\frac{\partial v}{\partial z}$ de E et portant dans D et F, on doit obtenir deux équations identiques à C. On a alors, en particulier,

$$X = Y^3(Y'' - Y_1 Y) = \text{constante}.$$

On peut prendre la constante égale à 1 et il vient

$$Y^3(Y'' - Y_1 Y) = 1.$$

On a aussi

$$\frac{1 + Y^2 Y'^2}{Y^2} = (YY')' - Y_1 Y^2 = (YY')'$$

d'où

$$Y_1 = 0, \qquad Y^3 Y'' = 1.$$

On peut prendre $Y = \sqrt{1 + y^2}$ et on obtient sans peine la forme

$$r + z + (1 + y^2)^{\frac{1}{2}}(tg\theta - \theta) = 0$$

où

$$t = (1 + y^2)^{-\frac{3}{2}}(\operatorname{cotg}\theta + \theta).$$

Le système complet

$$\begin{aligned}
A &\equiv \frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z}-z\frac{\partial v}{\partial p}+\sigma\frac{\partial v}{\partial q}-q\frac{\partial v}{\partial \sigma}=0,\\
B &\equiv \frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}+\sigma\frac{\partial v}{\partial p}=0,\\
C &\equiv (1+y^2)\frac{\partial v}{\partial p}+\frac{\partial v}{\partial q}+y\frac{\partial v}{\partial \sigma}=0,\\
D &\equiv -\frac{\partial v}{\partial z}+y\frac{\partial v}{\partial p}+\frac{\partial v}{\partial \sigma}=0
\end{aligned}$$

admet deux solutions. B et D montrent que v est une fonction de $\sigma+z-qy$, $p-\sigma y, q, x$. C montre que v ne contient que x, $\alpha=\sigma+z-qy$, $\beta=p-\sigma y-q$.

L'équation A s'écrit alors

$$\frac{\partial v}{\partial x}+\beta\frac{\partial v}{\partial \alpha}-\alpha\frac{\partial v}{\partial \beta}=0.$$

Et on en conclut que les deux invariants sont

$$\alpha^2+\beta^2 \qquad \text{et} \qquad x+\operatorname{Arctg}\frac{\beta}{\alpha}.$$

[**5**] Il est facile de voir que le second système de caractéristiques admet aussi deux invariants de forme analogue et d'en conclure que l'équation est de la première classe. Mais on peut obtenir, pour les équations que nous venons de mettre en évidence, une forme canonique plus simple.

En changeant z en Yz et y en $\eta(y)$, on a, si on prend

$$\eta'(y)=\frac{1}{Y^2},$$

la forme :

$$r+z+tg\theta-\theta=0, \qquad \text{avec} \qquad t+z=\operatorname{cotg}\theta+\theta.$$

En prenent comme variables $x-y$ et $x+y$, on arrive facilement à la forme symétrique

$$r+t+z=\theta+\operatorname{cotg}2\theta$$

où θ est une fonction de s définie par la relation

$$2s+\frac{1}{\sin 2\theta}=0.$$

On peut vérifier sans peine que cette dernière équation est de la première classe.

Les racines de l'équation caractéristique sont en effet

$$m_1 = \cos 2\theta, \qquad m_2 = \frac{1}{\cos 2\theta}.$$

Les caractéristiques du second ordre, relatives à la racine m_1, ont pour équations

$$dy = m_1 dx, \qquad dz = pdx + qdy, \qquad dp = (r + sm_1)dx,$$
$$dq = (s + m_1 t)dx, \qquad \frac{dr}{dx} + \frac{ds}{dy} + p = 0.$$

En remplaçant m_1 par $\cos 2\theta$, on a successivement

$$dr + \frac{ds}{\cos 2\theta} + pdx = 0,$$
$$\left(dr + \frac{ds}{\cos 2\theta}\right)(r + s\cos 2\theta) + pdp = 0$$

et en remarquant que

$$\frac{ds}{\cos 2\theta} = d(s\cos 2\theta) = \frac{d\theta}{\sin 2\theta},$$

on a

$$\left(r - \frac{1}{2}\operatorname{cotg} 2\theta\right)^2 + p^2 = \mathrm{A}^2.$$

De plus

$$dx = \frac{dp}{r + sm_1} = -\frac{dr + d(sm_1)}{p} = d\,\mathrm{Arctg}\,\frac{p}{r + sm_1}$$

donc

$$x + \alpha = \mathrm{Arctg}\,\frac{p}{r + sm_1}.$$

On en conclut que l'équation admet comme invariants, pour le premier système, les nombres A et α définis par les relations

$$p = \mathrm{A}\sin(x + \alpha), \qquad r - \frac{1}{2}\operatorname{cotg} 2\theta = \mathrm{A}\cos(x + \alpha)$$

et, pour le second système, les nombres B et β définis par les relations

$$q = \mathrm{B}\sin(y + \beta), \qquad t - \frac{1}{2}\operatorname{cotg} 2\theta = \mathrm{B}\cos(y + \beta).$$

[6] **Étude de la forme II.** — Nous poserons

$$t+\alpha=0.$$

L'équation vient

$$r+\frac{h^2}{3\theta^3}+\gamma=0, \qquad h \neq 0$$

et on a

$$m=\frac{h}{\theta^2}.$$

Le système S montre que u est une fonction de x, y, z, p, q et de $\sigma=s-\frac{h}{\theta}$, qui vérifie la relation :

$$\left(\frac{du}{dx}\right)-\frac{h}{\theta^2}\left(\frac{du}{dy}\right)=\frac{\partial u}{\partial \sigma}\left\{\left(\frac{d}{dx}\frac{h}{\theta}\right)-\frac{h}{\theta^2}\left(\frac{d}{dy}\frac{h}{\theta}\right)+\left(\frac{d\gamma}{dy}\right)+\left(\frac{d}{dy}\frac{h^2}{3\theta^3}\right)\right\}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}-\left(\gamma+\frac{h^2}{3\theta^3}\right)\frac{\partial u}{\partial p}+\left(\sigma+\frac{h}{\theta}\right)\frac{\partial u}{\partial q}\\
&-\frac{h}{\theta^2}\left\{\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}+\left(\sigma+\frac{h}{\theta}\right)\frac{\partial u}{\partial p}+(\theta-\alpha)\frac{\partial u}{\partial q}\right\}\\
&=\frac{\partial u}{\partial \sigma}\left\{\frac{1}{\theta}\left\{\frac{\partial h}{\partial x}+p\frac{\partial h}{\partial z}-\left(\gamma+\frac{h^2}{3\theta^3}\right)\frac{\partial h}{\partial p}+\left(\sigma+\frac{h}{\theta}\right)\frac{\partial h}{\partial q}\right\}\right.\\
&-\frac{h}{\theta^2}\left\{\frac{\partial \alpha}{\partial x}+p\frac{\partial \alpha}{\partial z}-\left(\gamma+\frac{h^2}{3\theta^3}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial p}+\left(\sigma+\frac{h}{\theta}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial q}\right\}\\
&-\frac{h}{3\theta^3}\left\{\frac{\partial h}{\partial y}+q\frac{\partial h}{\partial z}+\left(\sigma+\frac{h}{\theta}\right)\frac{\partial h}{\partial p}+(\theta-\alpha)\frac{\partial h}{\partial q}\right\}\\
&\left.+\frac{\partial \gamma}{\partial y}+q\frac{\partial \gamma}{\partial z}+\left(\sigma+\frac{h}{\theta}\right)\frac{\partial \gamma}{\partial p}+(\theta-\alpha)\frac{\partial \gamma}{\partial q}\right\}.
\end{aligned}$$

C'est là une identité en θ. Elle donne immédiatement

$$\frac{\partial \gamma}{\partial q}=\frac{\partial \alpha}{\partial p}=\frac{\partial h}{\partial p}=0,$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}+p\frac{\partial h}{\partial z}+\sigma\frac{\partial h}{\partial q}+h\frac{\partial \gamma}{\partial p}=0.$$

On en tire $\frac{\partial h}{\partial q}=0$; h ne contient donc que x, y, z et la relation

$$\frac{\partial \gamma}{\partial p}=-p\frac{\partial Lh}{\partial z}-\frac{\partial Lh}{\partial x}$$

montre que

$$\gamma = p^2 \frac{\partial L h^{-\frac{1}{2}}}{\partial z} + 2p \frac{\partial L h^{-\frac{1}{2}}}{\partial x} + c(x, y, z).$$

En posant $z_1 = F(x, y, z)$ avec $\frac{\partial F}{\partial z} = h^{-\frac{1}{2}}$ et en changeant θ en $\theta \frac{\partial F}{\partial z}$, un calcul facile montre que l'équation proposée peut s'écrire

$$r + \frac{1}{3\theta^2} + \gamma(x, y, z) = 0, \qquad \text{avec} \qquad \theta = t + \alpha(x, y, z, q).$$

L'identité en θ donne alors le système

$$A \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial z} - \gamma \frac{\partial u}{\partial p} + \sigma \frac{\partial u}{\partial q} - \frac{\partial u}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} + q \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) = 0,$$

$$B \equiv \frac{\partial u}{\partial y} + q \frac{\partial u}{\partial z} + \sigma \frac{\partial u}{\partial p} - \alpha \frac{\partial u}{\partial q} - \frac{\partial u}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + p \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \sigma \frac{\partial \alpha}{\partial q} \right) = 0,$$

$$C \equiv \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{3}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial q} \frac{\partial u}{\partial \sigma}$$

qui doit admettre deux solutions.

La combinaison $A(B) - B(A) = 0$ donne

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + p \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \sigma \frac{\partial \alpha}{\partial q} \right) + p \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + p \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \sigma \frac{\partial \alpha}{\partial q} \right)$$

$$- \gamma \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \sigma \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + p \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \sigma \frac{\partial \alpha}{\partial q} \right) - \frac{\partial \alpha}{\partial q} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} + q \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} + q \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) + q \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} + q \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) - \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial z}.$$

C'est là une identité en σ et p. On en tire sans difficulté

$$\frac{\partial \alpha}{\partial q} = Y_1, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial z} = Y_2, \qquad \alpha = q Y_1 + z Y_2 + \varphi(x, y).$$

Un premier changement d'inconnue $z = z_1 + \lambda(x, y)$ permet d'annuler φ : il suffitt de prendre pour λ une solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + Y_1 \frac{\partial \lambda}{\partial y} + Y_2 \lambda + \varphi(x, y) = 0.$$

Posons alors

$$z_1 = Y^3 z, \qquad \theta_1 = \frac{\theta}{Y}, \qquad y_1 = \eta(y), \qquad x_1 = x.$$

En choisissant Y et η_1 de façon que

$$4Y' = Y_1 Y, \qquad \eta_1' = Y^2,$$

un calcul facile montre que l'équation proposée peut s'écrire :

$$r_1 + \frac{1}{3\theta_1^3} + \gamma(x_1, y_1, z_1) = 0, \qquad \text{avec} \qquad \theta_1 = t_1 + \eta_1(y_1)\, z_1$$

ou, en changeant les notations,

$$r + \frac{1}{3\theta^3} + \gamma(x, y, z) = 0, \qquad \text{avec} \qquad \theta = t + zY.$$

La condition $A(B) - B(A) = 0$ se réduit alors à

$$q^2 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} + 2q \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y\, \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} = zY \frac{\partial \gamma}{\partial z} - \gamma Y.$$

On en déduit que

$$\gamma = Xz + \mu(x, y)$$

avec la condition

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} + \mu Y = 0.$$

Cette condition exprime que les deux équations en λ

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + X\lambda + \mu = 0, \qquad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + \lambda Y = 0$$

ont une solution commune; soit $h(x, y)$, cette solution. Si on change z en $z_1 + h(x, y)$, on obtient une nouvelle équation de la même forme que la proposée et où l'on a

$$\alpha = zY, \qquad \gamma = zX.$$

Il vient alors :

$$A \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial z} + \sigma \frac{\partial u}{\partial q} - qX \frac{\partial u}{\partial \sigma} = 0,$$

$$B \equiv \frac{\partial u}{\partial y} + q \frac{\partial u}{\partial z} + \sigma \frac{\partial u}{\partial p} - pY \frac{\partial u}{\partial \sigma} = 0,$$

$$C \equiv \frac{\partial u}{\partial p} = 0.$$

On doit donc avoir

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \qquad Y = 0$$

et le système

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma \frac{\partial u}{\partial q} - qX \frac{\partial u}{\partial \sigma} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial p} = 0$$

est complet. Il admet deux solutions u_1 et u_2 définies par les relations

$$q = u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2, \qquad s - \frac{1}{t} = u_1 \xi'_1 + u_2 \xi'_2,$$

ξ_1 et ξ_2 étant deux fonctions distinctes de x seul, dont ξ'_1 et ξ'_2 sont respectivement les dérivées, et qui vérifient toutes deux l'équation différentielle

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + \xi X = 0.$$

Nous sommes donc amenés à conclure que l'équation

$$r + Xz + \frac{1}{3t^3} = 0$$

admet deux invariants du second ordre pour le système de caractéristiques correspondant à la racine $m_1 = \frac{1}{t^2}$.

En changeant h en $-h$ dans les calculs précédents, on voit sans peine qu'il en est de même pour l'autre système.

[**7**] Les seules équations de la forme $r + f(x, y, z, p, q, t) = 0$, qui admettent deux invariants du second ordre pour un système de caractéristiques, se ramènent donc par des transformations ponctuelles à l'une des formes

(I) $$r + z + tg\theta - \theta = 0, \qquad \text{où} \qquad t + z = \theta + \cot g\, \theta.$$

(II) $$r + Xz + \frac{1}{3t^3} = 0.$$

L'étude précédente montre que s'il existe, pour les équations qui nous occupent, deux invariants du second ordre pour un des systèmes de caractéristiques, il en existe aussi deux pour l'autre système; de telles équations sont de la première classe. C'est là un fait analogue à celui que j'ai signalé, dans le premier Chapitre de ma thèse, pour les équations $s = f(x, y, z, p, q)$.

[**8**] On peut d'ailleurs ramener l'équation II à cette forme.

En effet, si on pose $Z = q$, on obtient l'équation de Monge-Ampère

$$r + z\xi(x) - \frac{t}{q^4} = 0.$$

Elle admet deux invariants du premier ordre

$$\text{(1)} \qquad X \equiv \varphi\left(p + \frac{1}{q}\right) - z\varphi'$$

$$\text{(2)} \qquad Y \equiv \psi\left(p - \frac{1}{q}\right) - z\psi'$$

φ et ψ étant deux fonctions distinctes de x seul, solutions de l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y\xi(x) = 0.$$

Si l'on fait alors la transformation de contact définie par l'équation directrice

$$\text{(3)} \qquad Z = X^2 \int \frac{dx}{\varphi^2} - Y^2 \int \frac{dx}{\psi^2} - 2z\left(\frac{X}{\varphi} - \frac{Y}{\psi}\right) - z^2\left(\frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{\psi'}{\psi}\right) + 4y$$

on obtient, outre les relations (1) et (2), les formules

$$\frac{P}{2} = X \int \frac{dx}{\varphi^2} - \frac{z}{\varphi}, \qquad \frac{Q}{2} = -Y \int \frac{dx}{\psi^2} + \frac{z}{\psi},$$

d'où

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\varphi}\left[\frac{\partial x}{\partial Y}\left(p + \frac{1}{q}\right) - \frac{\partial z}{\partial Y}\right] = \frac{1}{\varphi}\left(\frac{1}{q}\frac{\partial x}{\partial Y} - q\frac{\partial y}{\partial Y}\right)$$

et enfin

$$\frac{1}{2}S = -\frac{\psi}{\varphi}\,\frac{r + z\xi(x) - \dfrac{t}{q^4}}{q\left(\psi\left(r + z\xi + \dfrac{s}{q^2}\right) - \psi'\right)\left(\psi\left(s + \dfrac{t}{q^2}\right) - q\psi\right)}.$$

L'équation proposée se ramène donc à $S = 0$ et on déduit immédiatement de ce résultat un groupe de formules qui représentent la solution générale de l'équation II.

[9] Le calcul fait pour l'équation particulière de Monge-Ampère que nous venons d'intégrer met sur la voie d'un résultat général, dont la démonstration se déduit très simplement du rapprochement d'un théorème de Lie et d'un théorème de M. Goursat.

En effet, M. Goursat(1) a démontré que si une équation de Monge-Ampère admet deux invariants du second ordre de même système, elle en admet nécessairement un du premier ordre. On sait(2) de plus qu'une équation de Monge-Ampère qui admet un invariant du premier ordre pour chaque système de caractéristiques se ramène par une transformation de contact à la forme $s = f(x, y, z, p, q)$. Il en résulte que toute équation de Monge-Ampère qui admet deux invariants du second ordre pour chaque système de caractéristiques se ramène par une transformation de contact à la forme $s = f(x, y, z, p, q)$ et on peut même assurer que l'équation ainsi transformée admet, pour chaque système de caractéristiques, un invariant d'ordre au plus égal à deux, différent de x ou y.

Or, M. Goursat(3) a classé et intégré toutes les équations de la forme $s = f(x, y, z, p, q)$ qui jouissent de cette propriété. On peut donc affirmer que toute équation de Monge-Ampère, qui admet pour chaque système deux invariants du second ordre au plus, se ramène par une transformation de contact à des types de M. Goursat.

Nous avons laissé de côté au début de cette étude le cas où la fonction $f(x, y, z, p, q, t)$ serait du premier degré en t. S'il en est ainsi, l'équation proposée est une équation de Monge-Ampère. Le résultat obtenu au paragraphe précédent nous permet d'affirmer en particulier que, si une pareille équation admet deux invariants du second ordre au plus pour chaque système de caractéristiques, elle se déduit par une transformation de contact des équations de M. Goursat.

[10] Les résultats que j'ai obtenus dans ma Thèse permettent d'ailleurs d'énoncer une proposition plus générale. J'ai en effet démontré que toutes les équations $s = f(x, y, z, p, q)$ qui s'intègrent par la méthode de Darboux se réduisent aux types mis en évidence par M. Goursat. Par suite, *toute équation de Monge-Ampère qui admet un invariant du premier ordre pour chaque système de caractéristiques s'intègre par la méthode de Darboux dans le cas — et dans le seul cas — où elle dérive par une transformation de contact d'un des types signalés par M. Goursat.*

(1) Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. III, p. 153.

(2) Goursat, *Ibid.*, t. II, p. 82.

(3) Goursat, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. I, 1899.