RENÉ LAGRANGE

Sur le calcul différentiel absolu

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 14 (1922), p. 1-69
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1922_3_14__1_0>

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

SUR LE CALCUL DIFFÉRENTIEL ABSOLU

PAR M. RENÉ LAGRANGE,

Agrégé préparateur à l'École Normale Supérieure.

INTRODUCTION

Le calcul différentiel absolu, introduit par Christoffel(1) et Riemann, et dont Ricci et Levi-Civitá (2) ont fait un instrument remarquable, fut destiné tout d'abord à déterminer les propriétés, indépendantes du choix des variables, d'un espace dont le ds^2 est une forme quadratique donnée des différentielles des coordonnées.

Soit $ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} dx_i dx_k$ une telle forme quadratique, à n dimensions. Un changement de variables transforme les g_{ik} et leurs dérivées; il change également les dérivées, des différents ordres, d'une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ considérée comme invariante. C'est la recherche, entre les g_{ik}, leurs dérivées, et les dérivées de fonctions analogues à f, des relations, indépendantes des variables, et même de toute déformation de l'espace qui conserve le ds^2, qui est à l'origine du calcul différentiel absolu.

Si, dans une pareille déformation, une fonction f est invariante, il en est de même de sa différentielle, de sorte que ses dérivées premières subissent une transformation linéaire et homogène. Il n'en est plus de même, en général, des dérivées secondes; mais on peut retrouver une transformation linéaire, en modifiant la défi-

(1) Voir Christoffel, *Journal de Crelle*, tome 70.
(2) Voir *Math. Annalen*, tome 54.

nition de ces dernières. Pour cela, on ajoute à la dérivée seconde ordinaire une forme linéaire des dérivées premières, dont les coefficients sont formés à partir des g_{ik} et de leurs dérivées; le choix de cette forme linéaire est tel que la dérivée, ainsi définie, est encore indépendante de l'ordre des dérivations. Par cette opération, on doit modifier également les dérivées des ordres successifs, et, dès les dérivées troisièmes, on rencontre l'influence de l'ordre des dérivations, de sorte que la difficulté initiale du changement de variables est transformée, mais non supprimée. Cette incompatibilité de l'espace général avec l'espace euclidien $ds^2 = dx_1^2 + \ldots + dx_n^2$ se traduit par les symboles de Riemann.

Le présent travail a pour but de montrer que l'on peut se placer à un point de vue un peu différent, et d'établir, de cette façon, une méthode de calcul tout à fait analogue au calcul de Ricci et Levi-Civitá. Il est partagé en cinq chapitres dont voici le résumé succinct :

Dans le premier chapitre, j'introduis le calcul différentiel absolu en prenant, comme variables indépendantes dans l'espace considéré, d'ordre n, n intégrales curvilignes, et non plus, comme dans le calcul ordinaire, n fonctions de point. Dans ce dernier calcul, les propriétés analytiques résultent de l'invariance, dans tout changement de variables, de la différentielle d'un invariant, et de l'uniformité des variables indépendantes x_i; ici, cette dernière propriété ne subsiste plus, de sorte que les dérivées, d'ordres supérieurs au premier, dépendent de l'ordre des dérivations, et c'est ce qui introduit des symboles tout à fait analogues à ceux da Christoffel. On est amené à changer la définition de la différentiation, de manière à conserver certaines propriétés formelles du calcul ordinaire; dans la « différentiation absolue », une fonction ne joue plus un rôle isolé, mais fait partie d'un système de fonctions qui interviennent dans cette opération; la non-commutativité de cette différentiation fait apparaître les analogues des symboles de Riemann.

J'établis les règles de différentiation des sommes, produits et « compositions » des systèmes, et recherche enfin ce que deviennent les résultats généraux, lorsque les formes $d\omega_i$ ne sont plus uniformes.

Dans le chapitre II, je rattache la covariance, telle qu'on la définit ordinairement, au groupe des transformations orthogonales; les propriétés de la covariance, et sa conservation par la différentiation absolue, s'en déduisent immédiatement. La détermination des invariants revient alors à résoudre les transformations infinitésimales du groupe orthogonal.

Ces considérations générales sont utilisées dans le chapitre III, pour exposer le problème analytique de l'application, et le problème de la représentation conforme sur l'espace euclidien, même lorsque le rapport des deux ds est l'exponentielle d'une intégrale curviligne.

Le chapitre IV a pour but d'exposer succinctement quelques résultats connus de la théorie du vecteur, qui seront utilisés dans la suite.

Enfin, dans le dernier chapitre, je me propose d'établir les propriétés métriques d'une V_p, plongée dans un espace E_n, qui apparaîtraient à un observateur incapable de s'orienter sur la variété et dans l'espace normal; ce problème permet de généraliser un peu certaines définitions du calcul différentiel absolu, et met en évidence trois séries de rotation, auxquelles correspondent trois séries de courbures. La recherche des invariants nécessite la détermination des relations entre les courbures de la V_p et celles de l'espace E_n; j'étudie plus particulièrement les courbures les plus simples, ce qui conduit à quelques propriétés des V_{n-1}, et à la définition de quelques variétés particulières.

CHAPITRE PREMIER

Principes du Calcul différentiel absolu.

[**1**] Le calcul différentiel absolu est une généralisation du calcul différentiel ordinaire, qui paraîtra plus naturelle à l'aide des quelques remarques suivantes.

Étant données n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et une fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$, les dérivées partielles premières de f sont les coefficients des différentielles $dx_1, \ldots, dx_n$, dans l'expression de sa différentielle : $df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$.

Les dérivées partielles secondes sont les coefficients des mêmes différentielles dx_i dans les expressions des différentielles des dérivées premières; et ainsi de suite pour les dérivées d'ordres successifs. La propriété fondamentale de ces dérivées est d'être indépendantes de l'ordre des dérivations. Cette propriété, qui nous paraît intuitive, découle du fait que les x_i sont des fonctions de point; elle ne subsiste plus si le rôle des dx_i est rempli par n formes de Pfaff, linéairement indépendantes, mais non forcément différentielles totales exactes.

Conservons l'écriture du calcul différentiel ordinaire, et désignons ces formes de Pfaff par

$$d\omega_i = a_{i1} dx_1 + \ldots + a_{in} dx_n. \tag{1}$$

Ceci revient à prendre comme variables indépendantes les intégrales curvilignes $\omega_i = \int_{x_1^0 \ldots x_n^0}^{x_1 \ldots x_n} d\omega_i$, prises le long du chemin décrit par l'observateur; mais le seul rôle utile est celui des $d\omega_i$, et il n'est pas nécessaire de considérer ces intégrales dans l'exposé du calcul.

Les a_{ik} seront considérées, en général, comme des fonctions de point; mais nous verrons que certains résultats subsistent si les a_{ik} contiennent eux-mêmes des intégrales curvilignes, Leur déterminant (a) est, par hypothèse, différent de o; les équations peuvent donc être résolues par rapport aux dx_k,

$$dx_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} d\omega_i; \tag{1'}$$

les α_{ik} satisfont évidemment aux relations suivantes :

$$\sum_i a_{ik}\alpha_{ih} = \varepsilon_{kh}, \qquad \sum_k a_{ik}\alpha_{hk} = \varepsilon_{ih}, \qquad (\varepsilon_{ii} = 1, \quad \varepsilon_{ik} = 0, \quad \text{si} \quad i \neq k),$$

et leur déterminant (α) est égal à $\frac{1}{(a)}$.

[**2**] Étant donnée une forme de Pfaff $d\omega_i$, on appelle covariant bilinéaire de cette forme de Pfaff l'opération $\delta d\omega_i - d\delta\omega_i$, que j'écrirai encore $(\delta, d)\omega_i$. C'est une forme bilinéaire des dx_k, δx_h :

$$(2) \qquad (\delta, d)\omega_i = \sum_{k,j}\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\right) dx_k \delta x_j.$$

On sait que, pour que ω_i soit une fonction de point, il faut et il suffit que son covariant bilinéaire soit nul. Les $d\omega_r (r = 1, 2, \ldots, n)$ devant remplacer les dx_k dans le calcul différentiel absolu, il est naturel d'exprimer $(\delta, d)\omega_i$ à l'aide de nos formes de Pfaff, bases de ce calcul. En posant

$$(3) \qquad \sigma_{rsi} = \sum_{ik}\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\right)\alpha_{rk}\alpha_{sj},$$

nous avons

$$(4) \qquad (\delta, d)\omega_i = \sum_{rs} \sigma_{rsi} d\omega_r \delta\omega_s.$$

Il résulte de (3) que $\sigma_{rsi} + \sigma_{sri} = 0$, et, en étendant la somme (4) aux seules combinaisons des indices, ce que j'exprimerai en entourant ceux-ci d'une parenthèse, il vient

$$(4') \qquad (\delta, d)\omega_i = \sum_{(r,s)} \sigma_{rsi}(d\omega_r \delta\omega_s - d\omega_s \delta\omega_r).$$

[**3**] Étant donnée une fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ des variables $x_1, \ldots, x_n$, nous appellerons dérivée partielle première de f par rapport à ω_i le facteur de $d\omega_i$ dans l'expression de df.

En exprimant les dx_k en fonction des $d\omega_i$, nous avons

$$df = \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k = \sum d\omega_i \left(\alpha_{i1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_{i2}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \alpha_{in}\frac{\partial f}{\partial x_n}\right);$$

C'est l'opérateur linéaire entre parenthèses qui est la dérivée en question, et nous poserons

$$\frac{\partial f}{\partial \omega_i} = \alpha_{i1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_{i2}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \alpha_{in}\frac{\partial f}{\partial x_n}. \tag{5}$$

Inversement, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_i a_{ik}\frac{\partial f}{\partial \omega_i}. \tag{5'}$$

Plus généralement, si $d\Omega$ est une forme linéaire des $d\omega_i$, non forcément différentielle totale exacte, nous appellerons dérivée partielle première de Ω par rapport à ω_i le coefficient de $d\omega_i$ dans $d\Omega$. On peut encore l'écrire $\frac{\partial \Omega}{\partial \omega_i}$.

La définition des dérivées premières peut se répéter, et conduit aux dérivées des différents ordres, $\frac{\partial^m f}{\partial \omega_{r_1}\partial \omega_{r_2}\partial \omega_{r_m}}$, les dérivations étant effectuées dans l'ordre ω_{r_1}, $\omega_{r_2}, \ldots, \omega_{r_m}$.

Il est évident que les dérivées d'une somme ou d'un produit de fonctions s'obtiennent par les mêmes règles qu'en calcul différentiel ordinaire; de même les dérivées d'une fonction composée. Mais la propriété des dérivées d'être indépendantes de l'ordre des dérivations n'apparaît pas avec les dérivées secondes. Remarquons, par exemple, que les $\frac{\partial f}{\partial \omega_i}$ forment un système complet d'opérateurs linéaires, arbitraires au même titre que les $d\omega_i$; $\frac{\partial^2 f}{\partial \omega_i \partial \omega_k} - \frac{\partial^2 f}{\partial \omega_k \partial \omega_i}$ n'est autre chose que la parenthèse de deux de ces opérateurs, qui n'est pas nulle en général. On obtient, par un calcul connu,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \omega_r}, \frac{\partial}{\partial \omega_s}\right) f = \frac{\partial^2 f}{\partial \omega_s \partial \omega_r} - \frac{\partial^2 f}{\partial \omega_r \partial \omega_s} = \sum_i \sigma_{rsi}\frac{\partial f}{\partial \omega_i}; \tag{6}$$

Cette formule s'obtient aussi en écrivant que df est une différentielle exacte. Plus généralement, pour une forme de Pfaff quelconque $d\Omega = \sum_i \lambda_i d\omega_i$, on a

$$(\delta, d)\Omega = \sum_{(r.s)}\left(\frac{\partial \lambda_r}{\partial \omega_s} - \frac{\partial \lambda_s}{\partial \omega_r} + \sum_i \sigma_{rsi}\lambda_i\right)(d\omega_r \delta\omega_s - d\omega_s \delta\omega_r), \tag{7}$$

et l'on retrouve bien la formule (6) lorsque $(\delta, d)\Omega = 0$.

Remarquons que l'on peut encore écrire

$$\sigma_{rsi} = \sum_k \left(\alpha_{rk}\frac{\partial a_{ik}}{\partial \omega_s} - \alpha_{sk}\frac{\partial a_{ik}}{\partial \omega_r}\right) = \sum_k a_{ik}\left(\frac{\partial \alpha_{sk}}{\partial \omega_r} - \frac{\partial \alpha_{rk}}{\partial \omega_s}\right). \tag{3'}$$

[**4**] Il résulte du paragraphe précédent que nous devrons modifier la définition de la dérivée seconde si nous voulons qu'elle soit indépendante de l'ordre des dérivations. Nous verrons plus tard que, consécutivement à cette définition, les formes de Pfaff prises pour base de notre calcul joueront le rôle de différentielles exactes.

Pour cela, considérons de nouveaux symboles τ_{ikh}, que nous définirons au fur et à mesure des besoins. Étant données n fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$, considérées simultanément, appelons « dérivée partielle absolue de f_i par rapport à ω_r », l'opération

$$\overline{\frac{\partial f_i}{\partial \omega_r}} = \frac{\partial f_i}{\partial \omega_r} - \sum_{\alpha=1}^{n} \tau_{i\alpha r} f_\alpha, \tag{8}$$

le trait qui surligne le premier membre indiquant que cette opération est distincte de la dérivation ordinaire qui s'effectue dans le second membre. Cette définition, qui s'applique à n fonctions quelconques, s'éclairera par la suite, à l'aide de quelques exemples.

[**5**] Considérons alors une fonction f, et l'ensemble de ses n dérivées premières $f_i = \dfrac{\partial f}{\partial \omega_i}$. Les dérivées partielles absolues de ces dérivées premières seront, par définition, les dérivées secondes absolues de f [1]. Nous pouvons donc écrire

$$f_{ik} = \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial \omega_i \partial \omega_k}} = \overline{\frac{\partial f_i}{\partial \omega_k}} = \frac{\partial^2 f}{\partial \omega_i \partial \omega_k} - \sum_{\alpha} \tau_{i\alpha k} \frac{\partial f}{\partial \omega_\alpha}; \tag{9}$$

dans ces conditions,

$$f_{ik} - f_{ki} = \sum_{\alpha} (-\tau_{i\alpha k} + \tau_{k\alpha i} + \sigma_{ki\alpha}) \frac{\partial f}{\partial \omega_\alpha},$$

de sorte que ces dérivées secondes absolues seront indépendantes de l'ordre des inddices, si les τ_{ikh} sont assujettis à vérifier les relations

$$\tau_{ikh} - \tau_{hki} = \sigma_{hik}; \tag{10}$$

il est clair que ceci ne définit pas complètement les symboles τ_{ikh}.

Ce que nous venons de dire s'applique aussi bien à une forme de Pfaff

$$d\Omega = \sum_{i} \lambda_i \, d\omega_i;$$

[1] C'est la définition du calcul tensoriel de Ricci et Levi-Civitá.

en posant $\overline{\frac{\partial \lambda_i}{\partial \omega_k}} = \lambda_{ik}$, la formule (9) est encore valable, et (7) s'écrit

$$(7') \qquad (\delta, d)\Omega = \sum_{(r,s)} (\lambda_{rs} - \lambda_{sr})(d\omega_r \delta\omega_s - d\omega_s \delta\omega_r);$$

on retrouve la forme du covariant bilinéaire en calcul ordinaire; il en résulte que, pour que $d\Omega$ soit une différentielle exacte, il faut et il suffit que ses dérivées secondes absolues soient indépendantes de l'ordre des dérivations; on obtient ainsi une expression simple du théorème de Frobenius. On peut dire, autrement, que les conditions d'intégrabilité d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, à une fonction inconnue f,

$$\frac{\partial f}{\partial \omega_i} = \lambda_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

sont

$$\overline{\frac{\partial \lambda_i}{\partial \omega_k}} = \overline{\frac{\partial \lambda_k}{\partial \omega_i}}.$$

[**6**] Par analogie avec le calcul différentiel ordinaire, la dérivation absolue nous conduit à considérer la « différentiation absolue ». Étant donné un système de n expressions différentiables $X_1, X_2, \ldots, X_n$, (fonctions, formes de Pfaff, etc...), nous appellerons « différentielles absolue » de X_i, l'opération

$$(11) \qquad \overline{dX_i} = \sum_h \overline{\frac{\partial X_i}{\partial \omega_h}}\, d\omega_h = dX_i - \sum_{kh} \tau_{ikh} X_k d\omega_h.$$

Dès que l'on passe aux dérivées troisièmes d'une fonction, on est amené à considérer, d'une manière plus générale, des systèmes de quantités différentiables $X_{r_1 r_2 \ldots r_m}$, affectées de m indices, $r_1 r_2 \ldots r_m$ étant les arrangements complets de $1, 2, \ldots, n$, m à m. Définissons simultanément la différentiation et la dérivation absolues, dans un tel système; ce sont les opérations

$$(12) \qquad \overline{dX_{r_1 \ldots r_m}} = dX_{r_1 \ldots r_m} - \sum_{\alpha kh} \tau_{r_\alpha kh} X_{r_1 \ldots r_{\alpha-1} k r_{\alpha+1} \ldots r_m} d\omega_h,$$

et

$$(13) \qquad \overline{\frac{\partial X_{r_1 \ldots r_m}}{\partial \omega_h}} = X_{r \ldots r_m h} = \frac{\partial X_{r_1 \ldots r_m}}{\partial \omega_h} - \sum_{\alpha k} \tau_{r_\alpha kh} X_{r_1 \ldots r_{\alpha-1} k r_{\alpha+1} \ldots r_m},$$

le trait qui sépare r_m de h indiquant que les indices qui le précèdent n'expriment pas forcément des dérivations absolues. On a d'ailleurs

$$\overline{dX}_{r_1\ldots r_m} = \sum_h X_{r_1\ldots r_m/h}\, d\omega_h. \tag{14}$$

[7] Avant d'aborder les propriétés de ces opérations, définissons quelques opérations algébriques sur les systèmes d'ordre m (ou à m indices), ce qui va nous conduire à définir complètement les symboles τ_{ikh}.

Étant donnés plusieurs systèmes d'ordre m, $X_{r_1\ldots r_m}$, $Y_{r_1\ldots r_m}\ldots Z_{r_1\ldots r_m}$, leur somme est, par définition, le système de même ordre

$$U_{r_1\ldots r_m} = X_{r_1\ldots r_m} + Y_{r_1\ldots r_m} + \ldots\ldots + Z_{r_1\ldots r_m}.$$

Appelons produit de deux systèmes, d'ordres m et p, $X_{r_1\ldots r_m}$ et $Y_{s_1\ldots s_p}$, le système, d'ordre $m+p$,

$$Z_{r_1\ldots r_m s_1\ldots s_p} = X_{r_1\ldots r_m} Y_{s_1\ldots s_p}.$$

Avec deux pareils systèmes on peut effectuer une autre opération que nous appellerons « composition » (¹). Le système composé de $X_{r_1\ldots r_m s_1\ldots s_p}$ et $Y_{s_1\ldots s_p}$, d'ordres $m+p$ et p, est le système, d'ordre m,

$$Z_{r_1\ldots r_m} = \sum_{s_1\ldots s_p} X_{r_1\ldots r_m s_1\ldots p} Y_{s_1\ldots s_p}.$$

Cette opération s'étend tout naturellement à plus de deux systèmes, ou à des systèmes $X_{r_1\ldots r_m s_1\ldots s_p}$ et $Y_{t_1\ldots t_q s_1\ldots s_p}$.

Il est facile de voir que la différentiation et la dérivation absolue d'une somme obéissent aux lois du calcul ordinaire, indépendamment de la nature des τ_{ikh}. Quant à la composition, sa dérivation, par exemple, donne

$$\begin{aligned} Z_{r_1\ldots r_m/i} = & \sum_{s_1\ldots s_p} (X_{r_1\ldots r_m s_1\ldots s_p} Y_{s_1\ldots s_p/i} + X_{r_1\ldots r_m s_1\ldots s_p/i} Y_{s_1\ldots s_p}) \\ & + \sum_{\alpha k s_1\ldots s_p} \tau_{s_\alpha k i}(X_{r_1\ldots r_m s_1\ldots s_p} Y_{s_1\ldots s_{\alpha-1} k s_{\alpha+1}\ldots s_p} + X_{r_1\ldots r_m s_1\ldots s_{\alpha-1} k s_{\alpha+1}\ldots s_p} Y_{s_1\ldots s_p}). \end{aligned}$$

Pour retrouver la simplicité formelle du calcul différentiel ordinaire, on est

(¹) C'est le terme employé par Ricci et Levi-Civitá (cf. ouvrage cité).

conduit à annuler la dernière somme; le coefficient de la parenthèse étant $\tau_{s_\alpha ki}+\tau_{ks_\alpha i}$, ce résultat sera obtenu si l'on assujettit τ_{ikh} à la nouvelle relation

$$\tau_{ikh}+\tau_{kih}=0. \tag{15}$$

Les propriétés obtenues peuvent être résumées dans le tableau suivant :

$$\bar{d}(X_{r_1\ldots r_m}+Y_{r_1\ldots r_m}+\ldots)=\bar{d}X_{r_1\ldots r_m}+\bar{d}Y_{r_1\ldots r_m}+\ldots \tag{16}$$

$$\begin{aligned}&\bar{d}(X_{r_1\ldots r_m}Y_{s_1\ldots s_p}Z_{t_1\ldots t_q})\\&\quad=\bar{d}X_{r_1\ldots r_m}.Y_{s_1\ldots s_p}Z_{t_1\ldots t_q}+X_{r_1\ldots r_m}\bar{d}Y_{s_1\ldots s_p}.Z_{t_1\ldots t_q}+X_{r_1\ldots r_m}Y_{s_1\ldots s_p}\bar{d}Z_{t_1\ldots t_q}\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}&\bar{d}\Big(\sum_{s_1\ldots s_p}X_{r_1\ldots r_m s_1\ldots s_p}Y_{t_1\ldots t_q s_1\ldots s_p}\Big)\\&\quad=\sum_{s_1\ldots s_p}\big(\bar{d}X_{r_1\ldots r_m s_1\ldots s_p}.Y_{t_1\ldots t_q s_1\ldots s_p}+X_{r_1\ldots r_m s_1\ldots s_p}.\bar{d}Y_{t_1\ldots t_q s_1\ldots s_p}\big);\end{aligned} \tag{18}$$

la formule (18) se généralise d'ailleurs immédiatement pour la composition de plus de deux fonctions. On a des relations analogues pour les dérivées absolues.

[8] En résumé, ce qui précède nous a conduits à définir les symboles τ_{ikh}, introduits dans le calcul différentiel absolu, par les deux relations

$$\begin{cases}(10) & \tau_{ikh}-\tau_{hki}=\sigma_{hik}\\(15) & \tau_{ikh}+\tau_{kih}=0.\end{cases}$$

En particulier $\tau_{iik}=0$, $\tau_{iki}=-\tau_{kii}=-\sigma_{iki}$; enfin, l'expression générale de τ_{ikh}, en fonction des symboles σ_{ikh}, est

$$\tau_{ikh}=\frac{1}{2}(\sigma_{khi}+\sigma_{hik}-\sigma_{ikh}). \tag{19}$$

Cette expression rappelle celle des premiers symboles de Christoffel, mais il est bon de remarquer que, en fait, les τ_{ikh} jouent le rôle des seconds symboles de Christoffel.

Remarquons également que la différentiation absolue, appliquée aux formes de Pfaff de base $d\omega_i$, donne

$$\bar{\delta}d\omega_i-\bar{d}\delta\omega_i=\sum_{kh}(\sigma_{khi}-\tau_{ikh}+\tau_{ihk})d\omega_k\delta\omega_h=0;$$

de sorte que, dans le calcul absolu, les $d\omega_i$ auront les propriétés formelles des différentielles exactes dx_i du calcul ordinaire.

Les propriétés des coefficients τ_{ikh} trouvent encore une application immédiate dans l'opération corrélative du covariant bilinéaire; à savoir, la parenthèse de deux opérateurs linéaires

$$A(f) = A_1 \frac{\partial f}{\partial \omega_1} + \dots + A_n \frac{\partial f}{\partial \omega_n}$$

$$B(f) = B_2 \frac{\partial f}{\partial \omega_1} + \dots + B_n \frac{\partial f}{\partial \omega_n},$$

les A_i, B_i étant des fonctions de $x_1, x_2, \dots, x_n$. La parenthèse

$$(A, B)f = A((B)f) - B((A)f)$$

s'exprime comme en calcul ordinaire, si l'on considère les opérateurs linéaires au sens absolu; autrement dit, étant donné un système de n fonctions $f_1, f_2, \dots, f_n$, écrivons

$$\overline{A(f_i)} = A_1 \overline{\frac{\partial f_i}{\partial \omega_1}} + \dots + A_n \overline{\frac{\partial f_i}{\partial \omega_n}}.$$

On obtient, par un calcul très simple, compte tenu de (10) et (15),

$$(A, B)f = \sum_i \left[\overline{A(B_i)} - \overline{B(A_i)}\right] \frac{\partial f}{\partial \omega_i} - \sum_{ik} A_i B_k (f_{ik} - f_{ki}),$$

la deuxième somme disparaissant si f est une fonction de point.

[9] Nous allons voir, maintenant, un nouvel exemple de l'analogie formelle de ces deux calculs différentiels. Auparavant, établissons une formule et rappelons quelques symboles d'écriture.

En nous reportant aux formules (19) et (3'), nous avons

$$\tau_{ikk} = \sigma_{kik} = \sum_s a_{ks} \left(\frac{\partial \alpha_{is}}{\partial \omega_k} - \frac{\partial \alpha_{ks}}{\partial \omega_i}\right),$$

d'où l'on déduit

$$\sum_k \tau_{ikk} = \frac{1}{(a)} \frac{\partial (a)}{\partial \omega_i} + \sum_s \frac{\partial \alpha_{is}}{\partial x_s}. \tag{20}$$

Étant données, d'autre part, $(n-1)$ fonctions $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$, de $(n-1)$

variables indépendantes $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, rappelons l'écriture symbolique employée dans la théorie des intégrales multiples

$$df_1\,df_2\ldots df_{n-1} = \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})}{D(y_1, \ldots, y_{n-1})}\,dy_1\ldots dy_{n-1}.$$

Si $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ sont fonctions composées de n fonctions $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des $y_1, \ldots, y_{n-1}$, nous pouvons écrire

$$df_1\,df_2\ldots df_{n-1} = \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})}{\partial(x_2, \ldots, x_n)}\,dx_2\ldots dx_n + \ldots + \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})}{\partial(x_1, \ldots, x_{n-1})}\,dx_1\ldots dx_{n-1},$$

ou encore, d'une manière symbolique,

$$df_1\,df_2\ldots df_{n-1} = \left\|\begin{array}{c} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}dx_2\ldots\ldots\dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}dx_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1}dx_1\ \dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2}dx_2\ldots\ldots\dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n}dx_n \end{array}\right\|,$$

le tableau représentant, par hypothèse, la somme des n déterminants obtenus, en supprimant successivement chaque colonne, et en donnant aux produits des différentielles dx_i leur signification symbolique.

Ceci s'applique sans changement à n formes de Pfaff; en particulier,

$$d\omega_1\,d\omega_2\ldots d\omega_n = (a)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n,$$

et, pour $(n-1)$ fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$,

$$df_1\,df_2\ldots df_{n-1} = \sum_i \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots f_{n-1})}{\partial(\omega_1, \ldots \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \ldots \omega_n)}\,d\omega_1\ldots d\omega_{i-1}\,d\omega_{i+1}\ldots d\omega_n.$$

Ces définitions établies, considérons une V_{n-1} entourant complètement une région de l'espace à n dimensions; la formule de Green s'écrit, en calcul différentiel ordinaire,

$$\int\!\!\int\cdots\int\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial P_n}{\partial x_n}\right)dx_1\,dx_2\ldots dx_n$$
$$= \int\!\!\int\cdots\int\sum_i (-1)^{i-1}P_i\,dx_1\ldots dx_{i-1}\,dx_{i+1}\ldots dx_n,$$

$P_1, P_2, \ldots, P_n$ étant des fonctions bornées et dérivables du point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

A l'aide des dérivées absolues prises dans l'ensemble P_1, P_2, ..., P_n, elle s'écrit.

$$\int\int\cdots\int\left(\frac{\overline{\partial P_1}}{\partial\omega_1}+\ldots+\frac{\overline{\partial P_n}}{\partial\omega_n}\right)d\omega_1 d\omega_2\ldots d\omega_n = \int\int\cdots\int\sum_i(-1)^{i-1}P_i d\omega_1\ldots d\omega_{i-1}d\omega_{i+1}\ldots d\omega_n. \tag{21}$$

Il suffit de le vérifier par l'intermédiaire de la formule de Green ordinaire, en se rappelant l'identité (20).

En particulier, si les P_i sont les dérivées $f_i=\frac{\partial f}{\partial\omega_i}$ d'une fonction f, nous avons

$$\int\int\cdots\int(f_{11}+f_{22}+\ldots+f_{nn})d\omega_1 d\omega_2\ldots d\omega_n = \int\int\cdots\int\sum_i(-1)^{i-1}f_i d\omega_1\ldots d\omega_{i-1}d\omega_{i+1}\ldots d\omega_n. \tag{22}$$

Nous verrons, dans le chapitre II, que cette identité permet de rattacher entre eux les deux premiers paramètres de Beltrami.

Si les P_i sont les expressions composées

$$P_i=\sum_{r_1\ldots r_m}X_{r_1\ldots r_m i}Y_{r_1\ldots r_m},\qquad\text{(21) devient}$$

$$\int\int\cdots\int\sum_{r_1\ldots r_m i}X_{r_1\ldots r_m i\, i}Y_{r_1\ldots r_m}d\omega_1\ldots d\omega_n + \int\int\cdots\int\sum_{r_1\ldots r_m i}X_{r_1\ldots r_m i}Y_{r_1\ldots r_m/i}d\omega_1\ldots d\omega_n$$
$$=\int\int\cdots\int\sum_i(-1)^{i-1}\left(\sum_{r_1\ldots r_m}X_{r_1\ldots r_m i}Y_{r_1\ldots r_m}\right)d\omega_1\ldots d\omega_{i-1}d\omega_{i+1}\ldots d\omega_n.$$

Cette formule permet de donner à l'identité de Green les mêmes formes particulières que dans le calcul ordinaire.

[10] La différentiation absolue dépend en général de l'ordre dans lequel s'effectuent les différentiations. L'étude de l'influence de cet ordre confirme la similitude du mode d'exposition adopté ici et du calcul de Ricci et Levi Cività.

Étant donné un système d'ordre m, nous nous proposons de donner l'expression de $\overline{\delta d}X_{r_1\ldots r_m}-\overline{d\delta}X_{r_1\ldots r_m}$, que nous écrirons aussi $(\overline{\delta, d})X_{r_1\ldots r_m}$. Remarquons que ceci résoudra, simultanément, le même problème pour les dérivées, par suite de l'identité

$$\overline{\delta d} X_{r_1 \ldots r_m} = \sum_{st} X_{r_1 \ldots r_m/st} \, d\omega_s \delta\omega_t + \sum_s X_{r_1 \ldots r_m/s} \overline{\delta d}\omega_s,$$

d'où résulte, d'après $\overline{\delta d}\omega_i - \overline{d\delta}\omega_i = 0$,

$$(23) \qquad (\overline{\delta, d}) X_{r_1 \ldots r_m} = \sum_{st} (X_{r_1 \ldots r_m/st} - X_{r_1 \ldots r_m/ts}) \, d\omega_s \delta\omega_t.$$

Un calcul simple, compte tenu des formules (16) et (18), nous conduit à l'expression cherchée

$$(24) \qquad (\overline{\delta, d}) X_{r_1 \ldots r_m} = (\delta, d) X_{r_1 \ldots r_m} - \sum_{ikhl} \tau_{hl}^{r_i k} X_{r_1 \ldots r_{i-1} k r_{i+1} \ldots r_m} \, d\omega_h \delta\omega_l,$$

où l'on a posé

$$(25) \qquad \tau_{hl}^{ik} = \tau_{i;kh/l} - \tau_{i,kl/h},$$

la virgule exprimant que la dérivation covariante n'est pas effectuée par rapport aux indices qui la précèdent.

L'expression corrélative pour les dérivées absolues est alors

$$(24') \qquad X_{r_1 \ldots r_m/hl} - X_{r_1 \ldots r_m/hl} = \frac{(\delta, d) X_{r_1 \ldots r_m}}{d\omega_h \delta\omega_l} - \sum_{ik} \tau_{hl}^{r_i k} X_{r_1 \ldots r_{i-1} k r_{i+1} \ldots r_m},$$

le premier terme du second membre ayant la signification d'une dérivée seconde.

Si $X_{r_1 \ldots r_m}$ sont des quantités uniformes (fonctions de point, formes de Pfaff, etc...), $(\overline{\delta, d}) X_{r_1 \ldots r_m}$ et $X_{r_1 \ldots r_m/hl} - X_{r_1 \ldots r_m/lh}$ sont des formes linéaires des quantités $X_{r_1 \ldots r_m}$ elles-mêmes.

L'analogie des symboles τ_{hl}^{ik} et des symboles de Riemann est totale, comme nous le verrons encore plus loin, et c'est pourquoi nous leur donnerons le même nom.

[11] La différentiation absolue peut se répéter indéfiniment sur un système à m indices [1], toutes les différentielles qui résultent d'une même succession de différentiations formant un système d'ordre m. Il est clair que toute permutation dans

[1] Les conclusions de ce paragraphe supposent que les $X_{r_1 \ldots r_m}$ sont uniformes.

les différentiations est le résultat de permutations effectuées sur deux différentiations successives; cette dernière opération peut toujours se ramener à la permutation de deux différentiations terminales, suivie d'un certain nombre de différentiations. On voit, en résumé, que toute permutation d'indices, dans une différentielle absolue d'un certain ordre p, se déduit de la formule (24), et s'exprime à l'aide des différentielles dont l'ordre est moindre que $p-1$. Le nombre des différentielles indépendantes, d'un ordre donné, est égal au nombre des expressions initiales indépendantes.

Les mêmes remarques s'appliquent aux dérivées absolues; les dérivées $p^{\text{ièmes}}$ doivent être dérivées comme un système à $p+m$ indices, et l'on voit que la différence de deux dérivées absolues, d'ordre p, qui ne se distinguent que par l'arrangement des dérivations, est une forme linéaire des dérivées d'ordre inférieur ou égal à $(p-2)$.

Il est clair que si les dérivées (ou différentielles) d'ordre p d'un système $X_{r_1 \ldots r_m}$ sont indépendantes de l'arrangement des dérivations, les dérivées d'ordres supérieurs sont indépendantes de l'arrangement des p premières dérivations. On voit aussi que, pour que les dérivées et différentielles de tout système soient indépendantes de l'ordre des opérations, il faut et il suffit que tous les symboles de Riemann soient nuls. S'ils le sont identiquement, le système de Pfaff de base sera dit « euclidien »; les symboles τ_{ikh} ne sont pas forcément nuls; s'ils le sont, nous retrouvons le calcul ordinaire; les $d\omega_i$ sont des différentielles exactes, et constituent ce que nous appellerons un système « cartésien ».

[**12**] Une application immédiate des derniers paragraphes est l'expression, en calcul absolu, des conditions d'intégrabilité d'équations différentielles. Voici un premier problème, très important pour la suite :

Problème. — Soient deux systèmes de Pfaff, $d\omega_i$ et $d\omega_i'$, le premier en $x_1 \ldots x_n$, $dx_1 \ldots dx_n$, le deuxième en $x'_1 \ldots x'_n$, $dx'_1 \ldots dx'_n$. Étant donné, d'autre part, un système de fonctions $\theta^i{}_k(x_1 \ldots x_n)$, exprimer les conditions d'intégrabilité du système d'équations

$$\text{(A)} \qquad d\omega_i' - \sum_k \theta^i{}_k d\omega_k = 0.$$

La méthode du calcul différentiel ordinaire consiste à annuler les covariants bilinéaires des n équations de Pfaff, et à joindre à (A) les équations obtenues. Ces opérations, invariantes pour tout changement de variables, conviennent ici sans modification. On a, en effet (¹),

$$(\delta, d)\omega_i' = \sum_{kh} \theta^i{}_{k/h}(d\omega_k \delta\omega_h - d\omega_h \delta\omega_k,$$

(¹) $\theta^i{}_{k/h}$ sont des dérivées absolues prises par rapport aux formes de Pfaff $d\omega_i$.

d'où l'on déduit

$$\text{(B)} \qquad \theta^i{}_{k/h} - \theta^i{}_{h/k} = \sum_{rs} \sigma'_{rsi}(x'_1 \ldots x'_n)\theta^r{}_k \theta^s{}_h.$$

Le système (B) est fini par rapport aux x_i et x_i', et doit être compatible avec (A); au besoin, on différentiera (B) à nouveau, en tenant compte de (A), jusqu'à ce qu'on arrive à une incompatibilité ou à un système mixte complètement intégrable.

Un autre problème très utile est la recherche des conditions d'intégrabilité d'un système d'équations aux dérivées partielles, résolubles par rapport à toutes les dérivées absolues d'ordre maximum des fonctions inconnues. Il est clair qu'il suffit de suivre la méthode du calcul ordinaire, en remplaçant, par l'identité (24'), l'identification des dérivées qui ne diffèrent que par l'arrangement des dérivations.

[**13**] Les symboles de Riemann ne sont pas tous distincts. Il résulte, tout d'abord, de leur expression, qu'ils changent seulement de signe quand les deux indices supérieurs, ou inférieurs, sont permutés entre eux.

Il existe une troisième sorte de relations, résultant de l'identité, à zéro du covariant trilinéaire

$$\begin{aligned}(\overline{\Delta, \delta})\, d\omega_i + (\overline{\delta, d})\, \Delta\omega_i + (\overline{d, \Delta})\, \delta\omega_i \\ = (\overline{\Delta\delta}\, d\omega_i - \overline{\Delta d}\, \delta\omega_i) + (\overline{\delta d}\, \Delta\omega_i - \overline{\delta\Delta}\, d\omega_i) + (\overline{d\Delta}\, \delta\omega_i - \overline{d\delta}\, \Delta\omega_i) \equiv 0.\end{aligned}$$

Exprimons chacun des trois termes du premier membre à l'aide des symboles de Riemann; il vient

$$\sum_{khl} \left(\tau^{ik}_{hl} + \tau^{ih}_{lk} + \tau^{il}_{kh}\right) d\omega_k\, \delta\omega_h\, \Delta\omega_l = 0.$$

En résumé, nous avons les trois espèces de relations que l'on rencontre dans le calcul tensoriel habituel :

$$\text{(26)} \qquad \tau^{ik}_{hl} + \tau^{ik}_{lh} = 0 \qquad \left(\tau^{ik}_{hh} = 0\right)$$

$$\text{(27)} \qquad \tau^{ik}_{hl} + \tau^{ki}_{hl} = 0 \qquad \left(\tau^{ii}_{hl} = 0\right)$$

$$\text{(28)} \qquad \tau^{ik}_{hl} + \tau^{ih}_{lk} + \tau^{il}_{kh} = 0.$$

Enfin, de la relation (28), on tire encore, par un calcul simple,

$$\text{(29)} \qquad \tau^{ik}_{hl} = \tau^{hl}_{ik}.$$

Il est bon de remarquer que les relations (26) et (27) tiennent à la structure même des τ_{hl}^{ik}, alors que (28) résulte de leur signification analytique; ceci nous apparaîtra encore plus clairement un peu plus loin. Il y aurait intérêt à démontrer directement que les relations obtenues sont uniques, mais cette démonstration paraît difficile. Ceci résulte d'ailleurs de la suite du calcul; on en conclue, comme en calcul tensoriel habituel, que le nombre des symboles de Riemann linéairement distincts est, d'une manière générale, $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$.

Leurs dérivées absolues vont nous fournir des symboles à 5 indices, $\tau_{hl}^{ik}/_p$, le trait indiquant que la dérivation absolue est effectuée dans le système du 4^e ordre. Des relations connues entre les τ_{hl}^{ik}, résultent des relations immédiates entre les nouveaux symboles; il en existe une autre, identique à celle aperçue pour la première fois par Ricci. Nous la déduirons de l'identité employée au début de ce paragraphe, appliquée à des fonctions uniformes

$$\overline{\Delta(\delta, d)}X_i - \overline{(\delta, d)\Delta}X_i + \overline{\delta(d, \Delta)}X_i - \overline{(d, \Delta)\delta}X_i + \overline{d(\Delta, \delta)}X_i - \overline{(\Delta, \delta)d}X_i = 0,$$

on a, en effet,

$$\overline{\Delta(\delta, d)}X_i = -\sum_{hklp} \tau_{hl}^{ik}/_p X_k d\omega_h \delta\omega_l \Delta\omega_p$$
$$-\sum_{khl} \tau_{hl}^{ik}\left[\overline{\Delta}X_k d\omega_h \delta\omega_l + X_k \overline{\Delta} d\omega_h \delta\omega_l + X_k d\omega_h \overline{\Delta}\delta\omega_l\right]$$

et

$$\overline{(\delta, d)\Delta}X_i = -\sum_{khl} \tau_{hl}^{ik}\overline{\Delta}X_k d\omega_h \delta\omega_l,$$

d'où résulte la relation simple

$$\tau_{hl}^{ik}/_p + \tau_{lp}^{ik}/_h + \tau_{ph}^{ik}/_l = 0. \tag{30}$$

[**14**] Les relations, qui existent entre les symboles de Riemann, se déduisent encore des conditions pour que des fonctions c_{ik} soient les coefficients du covariant bilinéaire

$$(\delta, d)\Omega = \sum_{(ik)} c_{ik}(d\omega_i \delta\omega_k - d\omega_k \delta\omega_i)$$

d'une forme de Pfaff $d\Omega$.

Soit $d\Omega = \sum_i X_i d\omega_i$ une forme de Pfaff dont nous supposons l'existence. Nous avons

$$c_{ik} = X_{i/k} - X_{k/i}, \tag{31}$$

d'où l'on déduit, par un calcul simple,

$$(32)\qquad \begin{cases} c_{ik} + c_{ki} = 0 \\ c_{ik/h} + c_{kh/i} + c_{hi/k} = 0. \end{cases}$$

Ces formules, équivalentes aux formules similaires du calcul ordinaire, fournissent les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une forme de Pfaff admettant un covariant bilinéaire donné.

Ces relations, appliquées aux formes $d\omega_r$ elles-mêmes, en posant $\sigma_{ikr} = c^r_{ik}$, s'écrivent justement

$$\begin{cases} \sigma_{ikr} + \sigma_{kir} = 0 \\ \tau^{ri}_{kh} + \tau^{rk}_{hi} + \tau^{rh}_{ik} = 0. \end{cases}$$

[**15**] *Remarque.* — Dans tout ce qui précède, les $d\omega_i$ étaient uniformes, puisque les a_{ik} étaient des fonctions de point; il est clair que la propriété essentielle des a_{ik} était d'être dérivables, de sorte que, au point de vue formel, ces coefficients peuvent être, par exemple, des fonctions rationnelles d'un certain nombre d'intégrales curvilignes prises le long du chemin parcouru sur la variété, sans que nos calculs cessent d'avoir un sens. Nous n'avons tenu compte de l'uniformité des $d\omega_i$ que lorsque nous avons établi les propriétés des symboles de Riemann et de leurs dérivées absolues.

Le même calcul que plus haut, repris sans cette restriction, conduit à l'identité

$$(33)\qquad \tau^{ik}_{hl} + \tau^{ih}_{lk} + \tau^{il}_{kh} = \frac{(\Delta, \delta)d\omega_i + (\delta, d)\Delta\omega_i + (d, \Delta)\delta\omega_i}{d\omega_k \delta\omega_h \Delta\omega_l},$$

le second membre ayant la signification d'une dérivée partielle.

De même, pour les symboles à 5 indices, si les X_i sont uniformes, les $\overline{d}X_i$ ne le sont plus, de sorte que nous avons

$$(\delta, d)\overline{\Delta}X_i = -\sum_{kr} X_k \tau_{ikr} (\delta, d)\Delta\omega_r - \sum_{kp} X_k (\delta, d)\tau_{ikp} \Delta\omega_p,$$

et par suite,

$$(34)\qquad \tau^{ik}_{hl}\big/_p + \tau^{ik}_{lp}\big/_h + \tau^{ik}_{ph}\big/_l = \sum_r \tau_{ikr}\left(\tau^{rh}_{lp} + \tau^{rl}_{ph} + \tau^{rp}_{hl}\right) + \frac{(\delta, d)\tau_{ikp}}{d\omega_h d\omega_l}$$
$$+ \frac{(\delta, d)\tau_{ikh}}{d\omega_l \delta\omega_p} + \frac{(\delta, d)\tau_{ikl}}{d\omega_p \delta\omega_h}.$$

CHAPITRE II

Covariants et invariants.

[**1**] Une remarque fondamentale est à faire sur les développements du chapitre précédent. Le point de départ est un système de n formes de Pfaff, et nous ne nous sommes servis que d'opérations indépendantes des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; de sorte que tout changement effectué sur ces variables laisse invariants les symboles employés et les résultats obtenus. C'est à ce point de vue que ce calcul est « absolu ».

On conçoit qu'il n'en soit pas de même pour les changements de variables tels qu'on les effectue dans le calcul différentiel ordinaire, puisqu'on remplace les dx_i par les dx'_i et non par $\frac{\partial x_i}{\partial x'_1} dx'_1 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial x'_n} dx'_n$. Si, en calcul différentiel absolu, on change les $d\omega_i$, les résultats sont également modifiés, et l'on est conduit à étudier le groupe des transformations linéaires effectuées sur les formes $d\omega_i$, ainsi que son prolongement.

Cette étude est très compliquée, car on est obligé de considérer simultanément les coefficients de la transformation et ceux de la transformation inverse; elle devient cependant extrêmement simple si on se borne au groupe des transformations orthogonales

$$(1) \qquad d\omega_i' = \sum_k \theta^i_k d\omega_k, \qquad \left(\sum_k \theta^i_k \theta^j_k = \varepsilon_{ij}\right),$$

car les coefficients des transformations inverses sont les θ^i_k eux-mêmes

$$(1') \qquad d\omega_k = \sum_i \theta^i_k d\omega_i'.$$

D'autre part, la considération de ce groupe suffit dans un grand nombre de questions, et c'est à lui que nous allons nous borner.

Ce groupe laisse invariante la forme différentielle quadratique

$$ds^2 = d\omega_1^2 + d\omega_2^2 + \ldots + d\omega_n^2;$$

cette forme peut être considérée comme le carré de l'arc infinitésimal d'une variété V_n à n dimensions, de variables paramétriques $x_1, \ldots, x_n$. Inversement, tout ds^2

d'une V_n peut être mis sous cette forme d'une infinité de façons (¹), les $d\omega_i$ étant tous réels si ce ds^2 est défini positif.

Il suffit de choisir l'une de ces décompositions, et de prendre les $d\omega_i$ correspondants comme formes de Pfaff de base, pour obtenir, sur cette V_n, des résultats indépendants des paramètres choisis. Ce calcul différentiel absolu est, pour cette V_n, ce qu'est le calcul ordinaire pour un espace euclidien.

Mais ces résultats ne sont pas absolus pour le ds^2 de la V_n, puisque celui-ci est décomposable d'une infinité de façons; les propriétés absolues sont celles qui sont invariantes pour le groupe orthogonal. On obtient ainsi toutes les propriétés communes à toutes les V_n qui ont le même ds^2, ce que l'on exprime en les appelant « applicables ».

[2] Avant d'aborder cette étude, précisons quelques termes que nous emploierons dans la suite.

Un « invariant » sera toute expression dont la valeur numérique n'est pas changée par une transformation quelconque du groupe (1); il sera dit « absolu » s'il ne contient que les coefficients du ds^2 et leurs dérivées. Nous appellerons « invariant fonctionnel » un invariant qui contient des fonctions, considérées comme invariantes, et leurs dérivées; et « invariant différentiel » un invariant qui contient des différentielles.

On est amené, d'autre part, à considérer des expressions non invariantes, qui subissent cependant des transformations de groupes simples. Soit $X_{r_1\ldots r_m}$ un système d'expressions à m indices; les θ^i_k étant les coefficients d'une transformation orthogonale, nous appellerons « transformation orthogonale m^{uple} » la transformation

$$X'_{s_1\ldots s_m} = \sum_{r_1\ldots r_m} \theta^{s_1}_{r_1} \ldots \theta^{s_m}_{r_m} X_{r_1\ldots r_m}. \tag{2}$$

Il est facile de voir que, au groupe orthogonal, est associé ainsi un groupe, le « groupe orthogonal m^{uple} », dont le produit de deux transformations est défini par

$$\theta''^{\,t}_{r} = \sum_s \theta'^{\,t}_{s}\,\theta^{s}_{r}.$$

Lorsqu'on effectue, sur les $d\omega_i$, la transformation (1), si des quantités $X_{r_1\ldots r_m}$,

(¹) Il est bon de remarquer que M. Émile Cotton utilisa le premier des formes de Pfaff dans l'étude de l'application des V_3 (Cf. thèse), bien qu'à un point de vue autre que celui utilisé ici.

définies par une certaine suite d'opérations, subissent la transformation m^{uple} correspondante, nous dirons que ces quantités sont des « covariants m^{uples} ». Les $d\omega_i$ sont, en particulier, des covariants simples ([1]).

Il est facile de voir que la somme de covariants m^{uples} est un covariant m^{uple} ; le produit de plusieurs systèmes m^{uple}, p^{uple}, q^{uple}, ... est un système $(m+p+q+\ldots)^{\text{uple}}$. Enfin, la composition de deux systèmes $(m+p)^{\text{uple}}$ et $(m+q)^{\text{uple}}$ fournit un système $(p+q)^{\text{uple}}$; c'est ce que l'on appelle le principe de la « saturation des indices », lequel s'applique également à la composition de plus de deux systèmes. Les démonstrations de ces propriétés résultent des relations entre les coefficients du groupe orthogonal ; on peut d'ailleurs énoncer ces propriétés comme appartenant aux groupes orthogonaux.

Le théorème sur la composition admet une réciproque immédiate : si le système

$$Z_{s_1 \ldots s_p t_1 \ldots t_q} = \sum_{r_1 \ldots r_m} X_{r_1 \ldots r_m s_1 \ldots s_p} Y_{r_1 \ldots r_m t_1 \ldots t_q}$$

est covariant $(p+q)^{\text{uple}}$, quel que soit le système de covariants $(m+q)^{\text{uples}}\, Y_{r_1 \ldots r_m t_1 \ldots t_q}$, les $X_{r_1 \ldots r_m s_1 \ldots s_p}$ sont covariants $(m+p)^{\text{uples}}$.

Par exemple, si $X_{r_1 \ldots r_p \ldots r_m}$ est covariant m^{uple}, $\sum_{r_1 \ldots r_p} X_{r_1 \ldots r_p \ldots r_m} d_1\omega_{r_1} d_2\omega_{r_2} \ldots d_p\omega_{r_p}$ est covariant $(m-p)^{\text{uple}}$, et réciproquement ; en particulier,

$$\sum_{r_1 \ldots r_m} X_{r_1 \ldots r_m} d_1\omega_{r_1} d_2\omega_{r_2} \ldots d_m\omega_{r_m}$$

est un invariant différentiel.

[3] Ceci posé, effectuons sur les $d\omega_i$ supposés uniformes une transformation orthogonale (1), les $\theta^i{}_k$ étant des fonctions dérivables du point $(x_1, x_2, \ldots x_n)$; pour étudier le prolongement différentiel du groupe orthogonal, il faut, avant tout, déterminer la transformation des symboles de Christoffel τ_{ikh}. L'identification des deux expressions du covariant bilinéaire

$$(\delta, d)\,\omega'_i = \sum_{rs} \sigma'_{rsi}\, d\omega'_r\, \delta\omega'_s = \sum_{kh} (\theta^i{}_{k/h} - \theta^i{}_{h/k})\, d\omega_k\, \delta\omega_h$$

([1]) Suivant le langage habituel, j'appellerai « vecteur » un système covariant simple ; j'emploierai aussi, parfois, la dénomination de « tenseur » pour désigner un système covariant d'ordre quelconque.

donne

$$\sigma'_{rsi} = \sum_{kh} \theta^r{}_k \theta^s{}_h (\theta^i{}_{k/h} - \theta^i{}_{h/k}), \tag{3}$$

et, par suite, d'après $\sum_k (\theta^r{}_{k/h}\, \theta^s{}_k + \theta^r{}_k\, \theta^s{}_{k/h}) = 0$,

$$\tau'_{irs} = \sum_{kh} \theta^r{}_k \theta^s{}_h \theta^i{}_{k/h}. \tag{4}$$

Une conséquence immédiate de ces identités est la propriété fondamentale de la différentiation absolue, de conserver la covariance. Nous avons les deux théorèmes suivants, corrélatifs l'un de l'autre :

Étant donné un système de covariants m^{uples},

1° Ses différentielles absolues d'un même ordre sont des covariants m^{uples} (l'arrangement des différentiations étant également le même);

2° Ses dérivées absolues d'un même ordre p sont des covariants $(m+p)^{\text{uples}}$.

La deuxième partie est corrélative de la première, d'après l'identité

$$\bar{d}X_{r_1\ldots r_m} = \sum_s X_{r_1\ldots r_m/s}\, d\omega_s,$$

et d'après ce que nous avons dit de la composition des covariants (propriété réciproque). Quant à la première partie, en désignant par $\bar{d}'$ la différentiation absolue dans le système des $d\omega'_i$, elle se déduit immédiatement de

$$\bar{d}'X'_{s_1\ldots s_m} = dX'_{s_1\ldots s_m} - \sum_{ikh} \tau'_{s_i kh} X'_{s_1\ldots s_{i-1} k s_{i+1}\ldots s_m}\, d\omega'_h;$$

en effet, la différentiation de (2) nous donne

$$dX'_{s_1\ldots s_m} = \sum_{r_1\ldots r_m il} \theta^{s_1}_{r_1} \ldots \theta^{s_i}_{r_i/l} \ldots \theta^{s_m}_{r_m} X_{r_1\ldots r_m}\, d\omega_l + \sum_{r_1\ldots r_m} \theta^{s_1}_{r_1} \ldots \theta^{s_m}_{r_m} \bar{d}X_{r_1\ldots r_m};$$

il suffit de porter cette expression dans l'équation précédente, en tenant compte de (1) et de (4) pour avoir l'identité cherchée

$$\bar{d}'X'_{s_1\ldots s_m} = \sum_{r_1,\ldots r_m} \theta^{s_1}_{r_1} \ldots \theta^{s_m}_{r_m} \bar{d}X_{r_1\ldots r_m}.$$

Tout ceci s'étend de soi-même, par récurrence, aux différentielles et aux dérivées d'ordres supérieurs au premier [1].

Applications. — 1° Étant donnée une fonction f, considérée comme invariante, toutes ses dérivées absolues d'un même ordre m sont des covariants m^{uples}. Donc les invariants fonctionnels formés avec ces dérivées sont les invariants du groupe orthogonal m^{uple}; mais il ne faut pas oublier que les $f_{r_1\ldots r_m}$, liés aux arrangements complets des indices, ne sont pas indépendants entre eux; c'est là que réside la grosse difficulté de la question.

2° Si X_i est un système de covariants simples uniformes, il en est de même de

$$(\overline{\delta, d})X_i = -\sum_{hkl} \tau^{ik}_{hl} X_k d\omega_h \delta\omega_l,$$

donc : Les symboles de Riemann sont des covariants quadruples.

Il existe donc une infinité de systèmes de covariants absolus, quadruples, quintuples, ... ; à savoir, les symboles de Riemann et leurs dérivées absolues.

Ces invariants sont encore déterminés par les groupes orthogonaux m^{uples}, mais ils se distinguent des invariants fonctionnels par le fait que l'influence de la permutation des indices est complètement différente.

On peut encore dire qu'il existe une suite d'invariants différentiels absolus, qui sont des formes de degrés 4, 5, ... des différentielles,

$$G_4 = \sum_{ikhl} \tau^{ik}_{hl} d_1\omega_i d_2\omega_k d_3\omega_h d_4\omega_l$$

$$G_5 = \sum_{ikhlm} \tau^{ik}_{hl}\Big/_m d_1\omega_i d_2\omega_k d_3\omega_h d_4\omega_l d_5\omega_m$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

---

[1] Il n'est pas inutile de remarquer que ce qui intervient dans la propriété fondamentale de la différentiation absolue, relativement à la covariance, résulte seulement des identités (16) et (18) du chapitre I, et de l'identité (4) du présent chapitre. Il en résulte que la relation (10, ch. I) n'est pas indispensable. On voit en effet immédiatement que rien n'est changé, à ce point de vue, si l'on remplace les τ_{ikh} par les symboles plus généraux $T_{ikh} = \tau_{ikh} + u_{ikh}$, les u_{ikh} étant des covariants triples quelconques, symétriques gauches par rapport à leurs deux premiers indices. Mais il est clair que l'identité importante $\bar{\delta} d\omega_i - \bar{d}\delta\omega_i = 0$ n'est plus conservée, de sorte que l'expression des nouveaux symboles T^{ik}_{hl} définis par la formule (24, ch. I) est beaucoup plus compliquée, et que les relations (28, ch. I) disparaissent. D'ailleurs nous verrons qu'il n'existe pas de covariants triples absolus, ne contenant pas de dérivées, au moins troisièmes, des a_{ik}; il suffirait donc d'astreindre les T_{ikh} à n'être formés que des a_{ik} et de leurs dérivées premières et secondes pour être obligé de choisir les τ_{ikh} auxquels nous sommes arrivés dans le chapitre I.

[**4**] Nous venons de voir que les invariants, aussi bien fonctionnels qu'absolus, sont les invariants de l'ensemble des groupes orthogonaux m^{uples}. On peut en former à l'aide de calculs élémentaires.

On sait, par exemple, que les dérivées absolues du premier ordre $f_1, f_2, \ldots f_n$, d'une fonction f, sont des covariants simples, et que le groupe orthogonal simple admet un seul invariant; il existe donc un seul invariant fonctionnel du premier ordre,

$$\Delta_1 f = f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2.$$

C'est le premier paramètre différentiel de Beltrami, obtenu sous la forme du paramètre de Lamé. Deux fonctions f et φ donnent l'invariant mixte

$$\Delta(f, \varphi) = f_1 \varphi_1 + \ldots + f_n \varphi_n.$$

Si nous passons aux dérivées secondes absolues f_{ik}, il leur correspond l'invariant différentiel $\sum\limits_{ik} f_{ik}\, d\omega_i\, \delta\omega_k$; en le combinant avec l'autre invariant différentiel $\sum\limits_{i} d\omega_i\, \delta\omega_i$, nous voyons que le discriminant de la forme quadratique

$$\sum_{ik} f_{ik}\, d\omega_i \delta\omega_k + \rho \sum_i d\omega_i d\omega_i,$$

égalé à zéro, est une équation en ρ, invariante,

$$\begin{vmatrix} f_{11} + \rho & f_{12} & \ldots\ldots & f_{1n} \\ f_{12} & f_{22} + \rho & \ldots\ldots & f_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ f_{1n} & f_{2n} & \ldots\ldots & f_{nn} + \rho \end{vmatrix} = 0;$$

son premier terme étant ρ^n, ses n coefficients sont des invariants; ils sont distincts, car si les $f_{ik} (i \neq k)$ sont nuls, les racines de cette équation en ρ sont $(-f_{ii})$, $(i = 1, 2, \ldots n)$. En particulier, le coefficient de ρ^{n-1} est le deuxième paramètre différentiel de Beltrami $\Delta_2 f = f_{11} + f_{22} + \ldots + f_{nn}$.

On peut également obtenir n invariants fonctionnels du deuxième ordre, distincts, par saturation des indices. La méthode consiste à former des combinaisons $\sum\limits_{\binom{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\beta_1 \ldots \beta_p}} f_{\alpha_1\beta_1} f_{\alpha_2\beta_2} f_{\alpha_p\beta_p}$ telles que chaque indice soit répété deux fois; ces combinaisons doivent être, d'autre part, irréductibles, c'est-à-dire non décomposables en un produit de plusieurs combinaisons, si on veut ne former que des invariants distincts.

Il est clair que l'on en a un de chaque degré

$$\begin{cases} \Delta_2 f = \sum\limits_i f_{ii} \\ \sum\limits_{ik} (f_{ik})^2 \\ \sum\limits_{ikh} f_{ik} f_{ih} f_{kh} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{ikh\dots jlm} f_{ik} f_{ih} \dots f_{jl} f_{jm} f_{lm} \quad \text{(de degré } n\text{)}, \end{cases}$$

et que ces n invariants sont tous distincts entre eux, puisqu'ils se réduisent aux sommes de puissances des racines de l'équation en ρ si les f_{ii}, seuls, ne sont pas nuls.

Remarquons qu'aucune des deux méthodes précédentes ne démontre qu'il n'y a que n invariants fonctionnels du deuxième ordre; il faut un raisonnement supplémentaire pour le voir; la forme géométrique de ce raisonnement est connue; nous y reviendrons un peu plus loin en étudiant les groupes orthogonaux.

La propriété de saturation des indices permet de former des invariants fonctionnels mixtes du deuxième ordre

$$\sum_{ik} f_{ik} \varphi_{ik}, \quad \sum_{ikh} f_{ik} f_{ih} \varphi_{kh}, \text{ etc...};$$

malheureusement elle se complique très vite, surtout pour les invariants d'ordres supérieurs; il devient très difficile de les distinguer entre eux, et on ne les obtient pas tous de cette façon.

Par la même méthode, on peut passer des covariants m^{uples} à des covariants moindres, dont les invariants sont plus simples à former. Ainsi, au système quadruple de Riemann, on peut rattacher le système double $\tau_{ik} = \sum\limits_{\alpha} \tau^{\alpha i}_{\alpha k}$, auquel correspondent n invariants absolus; ceux-ci ont la même forme que les invariants fonctionnels du deuxième ordre, puisque les τ_{ik} constituent, comme les f_{ik}, un tenseur symétrique double; on peut également considérer le tenseur symétrique

$$\chi_{ik} = \sum_{(\alpha\beta)\gamma} \tau^{\alpha\beta}_{\gamma i} \tau^{\alpha\beta}_{\gamma k}.$$

On ne voit pas si tous les invariants formés par une telle méthode sont distincts; cependant nous pourrons l'appliquer dans quelques cas particuliers.

[**5**] Ce qui précède nous montre que nous devons apprendre à déterminer le nombre d'invariants distincts, d'une nature donnée. Pour cela, nous formerons des équations aux dérivées partielles qui admettent tous ces invariants comme intégrales; ce sont les transformations infinitésimales du groupe correspondant de transformations orthogonales.

Considérons le groupe orthogonal m^{uple}

$$X'_{s_1\ldots s_m} = \sum_{r_1\ldots r_m} \theta_{r_1}^{s_1}\,\theta_{r_2}^{s_2}\ldots\theta_{r_m}^{s_m} X_{r_1\ldots r_m}. \tag{2}$$

Nous obtenons ses transformations infinitésimales en supposant

$$\delta X_{r_1\ldots r_m} = X'_{r_1\ldots r_m} - X_{r_1\ldots r_m}$$

infiniment petit, et en ne prenant que sa partie principale; il faut que les θ^i_k soient des infiniment petits si $i \neq k$, ainsi que les $(\theta^i_i - 1)$; d'autre part l'orthogonalité des θ^i_k exige que l'on ait $\theta^i_k = -\theta^k_i$, $(i \neq k)$, et que ces $\frac{n(n-1)}{2}$ paramètres essentiels infiniment petits soient considérés comme étant du même ordre, les $(\theta^i_i - 1)$ étant d'ordre supérieur.

La transformation infinitésimale de (2) s'écrit donc

$$\delta X_{r_1\ldots r_m} = \sum_{is(s\neq r_i)} \theta_s^{r_i} X_{r_1\ldots r_{i-1}sr_{i+1}\ldots r_m}. \tag{6}$$

Les invariants doivent annuler l'opérateur linéaire

$$\sum_{r_1\ldots r_m is}^{s\neq r_i} \theta_s^{r_i} X_{r_1\ldots r_{i-1}sr_{i+1}\ldots r_m} \frac{\partial U}{\partial X_{r_1\ldots r_m}};$$

et les équations cherchées sont les coefficients, dans cet opérateur, des $\frac{n(n-1)}{2}$ paramètres arbitraires θ^i_k. On obtient ainsi le système fondamental

$$(F^{(m)})\qquad F_{st}^{(m)}U = \sum_{r_1\ldots r_m i}\left(X_{r_1\ldots r_{i-1}sr_{i+1}\ldots r_m}\frac{\partial U}{\partial X_{r_1\ldots r_{i-1}tr_{i+1}\ldots r_m}} - X_{r_1\ldots r_{i-1}tr_{i+1}\ldots r_m}\frac{\partial U}{\partial X_{r_1\ldots r_{i-1}sr_{i+1}\ldots r_m}}\right) = 0,$$

évidemment complet, puisque ce sont les transformations infinitésimales d'un groupe. D'ailleurs on peut vérifier facilement que les parenthèses $\left(F_{st}^{(m)},\ F_{uv}^{(m)}\right)U$ sont nulles si les quatre nombres s, t, u, v sont inégaux; et que $\left(F_{st}^{(m)},\ F_{tv}^{(m)}\right)U = F_{sv}^{(m)}U$, de sorte que les équations $(F^{(m)})$ peuvent être réduites à $n - 1$ équations analytiquement distinctes.

Ce système ne peut être employé tel quel, dans chaque cas particulier. Le plus souvent, les $X_{r_1 \dots r_m}$ ne sont pas distincts; il convient, tout d'abord, de ne conserver que les dérivées prises par rapport aux covariants choisis comme variables indépendantes, et d'exprimer tous les coefficients à l'aide de ces covariants; désignons par $\Phi_{st}^{(m)}U$ les expressions $F_{st}^{(m)}U$ ainsi réduites. D'autre part, les $\Phi_{st}^{(m)}U = 0$ ne sont pas toujours linéairement distinctes; c'est le système des seules équations linéairement distinctes qui nous donnera tous les invariants; le nombre de ceux-ci est donc égal à l'excès du nombre des variables essentielles $X_{r_1 \dots r_m}$ sur le nombre d'équations du système définitif.

Naturellement, les équations qui donnent les invariants que l'on peut former avec plusieurs systèmes covariants, considérés simultanément, s'obtiendront en ajoutant membre à membre les équations

$$\Phi_{st}U = \Phi_{st}^{(m)}U + \Phi_{st}^{(p)}U + \Phi_{st}^{(q)}U + \dots = 0,$$

avant toute réduction séparée des différents systèmes $\Phi^{(m)}$, $\Phi^{(p)}$, $\Phi^{(q)}$, ...; cette réduction ne doit se faire que dans le système résultant Φ. Il est évident, par construction, que ce système donne les invariants de chacun des systèmes composants, et les invariants mixtes cherchés.

[6] Reprenons, avec ces considérations, l'étude des invariants fonctionnels. Le système du vecteur se réduit à $n - 1$ équations

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial f_1}}{f_1} = \dots = \frac{\frac{\partial U}{\partial f_n}}{f_n} = \frac{2dU}{d(f_1^2 + \dots f_n^2)},$$

ce qui donne bien l'invariant unique $\Delta_1 f$.

Le système du tenseur symétrique $f_{ik} = f_{ki}$ est

$$\Phi_{rs}^{(2)}U = \sum_{i \neq r,s} \left(f_{ir}\frac{\partial U}{\partial f_{is}} - f_{is}\frac{\partial U}{\partial f_{ir}}\right) + (f_{rr} - f_{ss})\frac{\partial U}{\partial f_{rs}} + 2f_{rs}\left(\frac{\partial U}{\partial f_{ss}} - \frac{\partial U}{\partial f_{rr}}\right) = 0;$$

Ces équations sont linéairement indépendantes, puisqu'elles le sont si les f_{rr}

seuls ne sont pas nuls, et le nombre des invariants est égal à n. Les deux méthodes employées plus haut nous les donnaient bien tous.

On peut se proposer également la recherche des invariants relatifs à plusieurs vecteurs. Il est très facile de voir, par récurrence, sur le système des équations $\Phi^1_{rs}U = 0$, qu'il n'y a pas d'autres formes d'invariants que les deux premiers paramètres de Beltrami, $\Delta_1 f$, $\Delta(f, \varphi)$; par contre, le nombre des invariants distincts ne se voit pas facilement, tout au moins pour plus de deux vecteurs; d'ailleurs la solution de ce problème est bien connue; contentons-nous de rappeler que pour p vecteurs, le nombre des invariants distincts est

$$\frac{p(p+1)}{2} \quad \text{si} \quad p \leqslant n, \quad \text{et} \quad \frac{n(2p-n+1)}{2} \quad \text{si} \quad p \geqslant n.$$

Remarquons que si p systèmes $X_{r_1\ldots r_m}$, $Y_{r_1\ldots r_m}$, ... $Z_{r_1\ldots r_m}$ sont covariants m^{uples}, le système $\lambda_1 X_{r_1\ldots r_m} + \lambda_2 Y_{r_1\ldots r_m} + \ldots + \lambda_p Z_{r_1\ldots r_m}$ l'est aussi, quels que soient les paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, et réciproquement. L'existence des invariants d'un système covariant m^{uple} étant équivalente à cette covariance, les invariants de ces p systèmes sont les coefficients des λ dans les invariants du système $\lambda_1 X_{r_1\ldots r_m} + \ldots + \lambda_p Z_{r_1\ldots r_m}$, et on les a bien tous ainsi; mais on ne les a pas nécessairement sans répétition.

Cette remarque donne, pour p fonctions, l'invariant fonctionnel du premier ordre $\sum_i(\lambda f_i + \mu\varphi_i + \ldots + \nu\psi_i)^2$, ce qui confirme qu'il n'y a que deux espèces d'invariants, pour les vecteurs.

Les dérivées secondes des p fonctions $f, \varphi, \ldots \psi$ donnent, également, les mêmes invariants que le tenseur $\lambda f_{ik} + \mu\varphi_{ik} + \ldots + \nu\psi_{ik}$; on est conduit à écrire l'équation en ρ.

$$\begin{vmatrix} \lambda f_{11} + \mu\varphi_{11} + \ldots + \nu\psi_{11} + \rho & \lambda f_{12} + \mu\varphi_{12} + \ldots + \nu\psi_{12} & \ldots\ldots & \lambda f_{1n} + \mu\varphi_{1n} + \ldots + \nu\psi_{2n} \\ \lambda f_{12} + \mu\varphi_{12} + \ldots + \nu\psi_{12} & \lambda f_{22} + \mu\varphi_{22} + \ldots + \nu\psi_{22} + \rho & \ldots\ldots & \lambda f_{2n} + \mu\varphi_{2n} + \ldots + \nu\psi_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda f_{1n} + \mu\varphi_{1n} + \ldots + \nu\psi_{1n} & \lambda f_{2n} + \mu\varphi_{2n} + \ldots + \nu\psi_{2n} & \ldots\ldots & \lambda f_{nn} + \mu\varphi_{nn} + \ldots + \nu\psi_{nn} + \rho \end{vmatrix} = 0.$$

C'est une forme de degré n en $\rho, \lambda, \mu, \ldots \nu$; elle a $C^p_{n+p} - 1$ coefficients invariants, parmi lesquels les invariants distincts cherchés. D'autre part, les équations $\Phi^{(2)}_{rs}U = 0$ relatives à p fonctions sont, comme pour une seule, linéairement distinctes; le nombre des invariants est donc $p\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}$. Pour deux fonctions, ces invariants sont les $\frac{n(n+3)}{2}$ coefficients en ρ, λ, μ.

Appliquons ceci au cas particulier des dérivées des deux premiers ordres d'une fonction f; les transformations infinitésimales sont encore au nombre de $\frac{n(n-1)}{2}$

linéairement indépendantes; il y a donc en tout $2n$ invariants, dont $n-1$ mixtes. Remarquons alors que $\sum\limits_i f_i d\omega_i =$ invariant, et $(\sum\limits_i f_i d\omega_i)^2 =$ invariant sont équivalents; on peut donc remplacer le vecteur des f_i par le tènseur double symétrique $f_i f_k$. Les invariants cherchés sont donnés par l'équation

$$\begin{vmatrix} \lambda f_{11} + \mu f_1^2 + \rho & \lambda f_{12} + \mu f_1 f_2 & \dots & \lambda f_{1n} + \mu f_1 f_n \\ \lambda f_{12} + \mu f_1 f_2 & \lambda f_{22} + \mu f_2^2 + \rho & \dots & \lambda f_{2n} + \mu f_2 f_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda f_{1n} + \mu f_1 f_n & \lambda f_{2n} + \mu f_2 f_n & \dots & \lambda f_{nn} + \mu f_n^2 + \rho \end{vmatrix} = 0.$$

Ici, la forme obtenue en λ, μ, ρ est particulière; elle ne contient aucun terme en μ^2, μ^3, ... μ^n, puisque deux colonnes en μ sont proportionnelles; elle s'écrit donc

$$\rho^n + \Theta_1 \rho^{n-1} + \dots + \Theta_{n-1}\rho + \Theta_n + \mu\chi(\rho) = 0,$$

$\chi(\rho)$ étant un polynôme en ρ de degré $n-1$ au plus, dont tous les coefficients contiennent des dérivées premières; les Θ ne contiennent que des dérivées secondes, et donnent les n invariants de ces dérivées. Le coefficient de ρ^{n-1} dans $\chi(\rho)$ n'est autre que $\Delta_1 f$; il reste donc $n-1$ coefficients de $\chi(\rho)$, formés avec les dérivées des deux ordres; ce sont les invariants mixtes cherchés.

On peut aussi former tous ces invariants par saturation d'indices; on a, en particulier, les $n-1$ invariants mixtes

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{ik} f_{ik} f_i f_k \\ \sum\limits_{ikh} f_{ik} f_{ih} f_k f_h \\ \dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{ik\dots hlm} f_{ik} f_{iq} \dots f_{jl} f_{hm} f_l f_m; \end{array} \right.$$

on voit qu'ils sont distincts en annulant tous les f_{ik} $(i \neq k)$.

[7] **Problème.** — Proposons-nous de déterminer les Invariants des dérivées des trois premiers ordres d'une fonction, sur une V_2 [1].

---

[1] La recherche des paramètres différentiels, sur une V_2, peut s'effectuer également en mettant le ds^2 de cette variété sous la forme d'un produit de 2 formes de Pfaff: $ds^2 = d\omega_1 d\omega_2$; la transformation linéaire arbitraire $d\omega'_1 = \rho d\omega_1$, $d\omega'_2 = \frac{1}{\rho} d\omega_2$ remplace alors la transformation orthogonale. En particulier, le premier paramètre prend la forme $\frac{\partial f}{\partial \omega_1} \times \frac{\partial f}{\partial \omega_2}$.

On prévoit que, à partir des dérivées troisièmes, les symboles de Riemann vont apparaître. Ici, il n'y en a qu'un, $\tau_{12}^{12} = \tau$; il est invariant et joue le rôle d'une constante. Il y a quatre dérivées troisièmes distinctes $f_{111}, f_{222}, f_{121}, f_{212}$, et l'on a

$$\begin{cases} f_{112} = f_{121} - \tau f_2 \\ f_{221} = f_{212} - \tau f_1 ; \end{cases}$$

l'équation correspondant à ces quatre dérivées est

$$\Phi_{12}^{(3)} \mathrm{U} = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial f_{111}}(3f_{121} - \tau f_2) + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial f_{222}}(3f_{212} - \tau f_1) - (2f_{212} - f_{111} - \tau f_1)\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial f_{121}} + (2f_{121} - f_{222} - \tau) f_2 \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial f_{212}} = 0 ;$$

les invariants cherchés, supposés pouvoir contenir la constante τ, sont les huit intégrales de l'équation

$$\Phi_{12}\mathrm{U} = \Phi_{12}^{(1)}\mathrm{U} + \Phi_{12}^{(2)}\mathrm{U} + \Phi_{12}^{(3)}\mathrm{U} = 0.$$

Grâce au changement de variables

$$\begin{cases} f_1 + if_2 = u \\ f_1 - if_2 = u_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{f_{11} - f_{22}}{2} + if_{12} = v \\ \dfrac{f_{11} - f_{22}}{2} - if_{12} = v_0 \\ f_{11} + f_{22} = \Delta_2 f \end{cases} \quad \begin{cases} f_{212} + if_{121} = t \\ f_{212} - if_{121} = t_0 \end{cases} \quad \begin{cases} f_{111} + if_{222} = w - t \\ f_{111} - if_{222} = w_0 - t_0 , \end{cases}$$

notre équation s'écrit

$$\Phi_{12}\mathrm{U} = \left(u\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u} - u_0\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u_0}\right) + 2\left(v\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial v} - v_0\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial v_0}\right) + \left(w\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial w} - w_0\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial w_0}\right) + (w - 3t + \tau u)\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t} - (w_0 - 3t_0 + \tau u_0)\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t_0} = 0.$$

Nous connaissons déjà les invariants $\Delta_2 f$, uu_0, vv_0, $u^2 v_0$; des intégrales évidentes sont ww_0, uw_0; un calcul simple donne enfin les deux derniers invariants $(w - 4t + \tau u)u^3$ et $(w_0 - 4t_0 + \tau u_0)u_0^3$, qui disparaissent d'ailleurs si l'on recherche les seuls invariants qui ne contiennent pas τ.

[8] Occupons-nous maintenant des invariants absolus relatifs aux symboles de Riemann; on les appelle « invariants principaux ». Les transformations infinitésimales générales, réduites à la forme $\Phi_{rs}^{(4)}U = 0$, sont relativement compliquées à écrire, mais il nous suffira de les avoir sous la forme

$$\begin{aligned} F_{rs}^{(4)}U = & \sum_{i(kh)} \left(\tau^{ri}_{kh} U^{si}_{kh} - \tau^{si}_{kh} U^{ri}_{kh}\right) + \sum_{(ik)} \left(\tau^{ri}_{sk} + \tau^{rk}_{si}\right)\left(U^{si}_{sk} - U^{ri}_{rk}\right) \\ & + \sum_{(ik)} \left(\tau^{ri}_{rk} - \tau^{si}_{sk}\right)\left(U^{ri}_{sk} + U^{rk}_{si}\right) + 2\sum_{i} \tau^{ri}_{si}\left(U^{si}_{si} - U^{ri}_{ri}\right) \\ & + \sum_{i} \left(\tau^{rs}_{ri} U^{rs}_{si} - \tau^{rs}_{si} U^{rs}_{ri}\right) = 0, \end{aligned}$$

où les i, k, h sont différents de r et de s, et où U^{ik}_{hl} représente $\dfrac{\partial U}{\partial \tau^{ik}_{hl}}$. Il resterait à tenir compte de la relation (28. Ch. I) qui lie trois symboles entre eux pour écrire les équations $\Phi_{rs}^{(4)}U = 0$.

On voit facilement, par la méthode des coefficients indéterminés, qu'il y a un seul invariant, linéaire par rapport aux symboles de Riemann. Prenons en effet pour U la fonction linéaire, à coefficients constants, $U = \sum\limits_{((ik)(hl))} A^{ik}_{hl} \tau^{ik}_{hl}$, supposée ne contenir que des symboles distincts.

Si r, s, i, k, h sont différents, on a

$$\Phi_{rs}^{(4)}U = A^{si}_{kh}\tau^{ri}_{kh} + \ldots = 0,$$

les termes non écrits étant indépendants de τ^{ri}_{kh}; donc les A^{si}_{kh}, d'indices distincts, sont nuls; de même les A^{rs}_{ri}. Il reste enfin

$$\Phi_{rs}^{(4)}U = \left(A^{si}_{si} - A^{ri}_{ri}\right)\tau^{ri}_{si} + \ldots = 0,$$

donc tous les coefficients A^{ik}_{ik} sont égaux, ce qui donne l'invariant unique $\sum\limits_{(ik)} \tau^{ik}_{ik}$. C'est ce que l'on appelle la « courbure totale » de V_n.

Sans pousser plus loin les généralités, voyons rapidement les cas particuliers les plus simples. Pour une V_2, le symbole unique τ^{12}_{12} est invariant; pour une surface de l'espace ordinaire, c'est la courbure de Gauss elle-même. Les covariants absolus d'ordres 5, 6, ... sont les dérivées de τ^{12}_{12}, donc tous les invariants sont les invariants fonctionnels de la courbure totale, qui apparaît comme l'invariant absolu caractéristique de la V_2.

Pour une V_3, nous avons six symboles de Riemann; or les $\tau_{ik} = \sum\limits_{a} \tau^{ai}_{ak}$ sont en nombre égal, et distincts; les invariants principaux sont les invariants du tenseur symétrique τ_{ik}; il en a trois, la courbure totale $\sum\limits_{i} \tau_{ii}$, $\sum\limits_{ik} (\tau_{ik})^2$, $\sum\limits_{i(kh)} \tau_{ik}\tau_{ih}\tau_{kh}$.

La question se complique déjà pour une V_4; une telle variété admet vingt symboles τ^{ik}_{hl}, en général; on peut vérifier que les six équations $\Phi_{rs}^{(4)} V = 0$ sont linéairement indépendantes, ce qui donne quatorze invariants principaux. Formons-les directement, en remplaçant notre système de covariants quadruples par les deux tenseurs symétriques τ_{ik} et $\chi_{ik} = \sum_{(\alpha\beta)\gamma} \tau^{\alpha\beta}_{\gamma i} \tau^{\alpha\beta}_{\gamma k}$; chaque tenseur a bien dix éléments, et l'on peut montrer, par un calcul d'ailleurs assez pénible, que ces vingt éléments sont distincts. Il en résulte que les quatorze invariants principaux sont les invariants de ces deux tenseurs, que nous savons former. Ce seront, par exemple, les quatorze coefficients de l'équation en λ, μ, ρ

$$\begin{vmatrix} \lambda\tau_{11} + \mu\chi_{11} + \rho & \lambda\tau_{12} + \mu\chi_{12} & \lambda\tau_{13} + \mu\chi_{13} & \lambda\tau_{14} + \mu\chi_{14} \\ \lambda\tau_{12} + \mu\chi_{12} & \lambda\tau_{22} + \mu\chi_{22} + \rho & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda\tau_{14} + \mu\chi_{14} & \cdots & \cdots & \lambda\tau_{44} + \mu\chi_{44} + \rho \end{vmatrix} = 0;$$

nous les avons tous, ainsi, par une méthode pratique. On peut d'ailleurs les obtenir également par saturation des indices.

On se rend compte de la complexité croissante du problème pour $n > 4$; on pourrait, peut-être, conserver le principe que nous venons d'appliquer; il s'agirait de déterminer p tenseurs symétriques, tels que $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ de leurs éléments soient des fonctions distinctes des τ^{ik}_{hl}, ce qui exige évidemment que p soit $\geqslant \frac{n(n-1)}{6}$. Quoiqu'il en soit, pour toute V_n, nous saurons former n invariants principaux grâce au tenseur symétrique τ_{ik}.

Remarquons, d'ailleurs, que tout ce que nous avons affirmé du nombre d'invariants supposait que la V_n était la plus générale possible; pour des V_n particulières, ce nombre peut être supérieur.

[9] Les covariants quadruples τ^{ik}_{hl} fournissent un invariant différentiel important, la « Courbure Riemannienne » d'une variété. De leur covariance quadruple résulte en effet l'invariance de l'expression

$$G_4(d, \delta;\ D, \Delta) = \sum_{((i,k)(h,l))} \tau^{ik}_{hl} (d\omega_i \delta\omega_k - d\omega_k \delta\omega_i)(D\omega_h \Delta\omega_l - D\omega_l \Delta\omega_h);$$

on connaît une autre forme différentielle invariante, du quatrième ordre,

$$(d, \delta;\ D, \Delta) = \sum_{(i,k)} (d\omega_i \delta\omega_k - d\omega_k \delta\omega_i)(D\omega_i \Delta\omega_k - D\omega_k \Delta\omega_i).$$

Leur rapport est un invariant différentiel, d'ordre zéro,

$$R(d, \delta; D, \Delta) = \frac{G_4(d, \delta; D, \Delta)}{(d, \delta, D, \Delta)};$$

c'est la courbure de Riemann, au point considéré, relative aux deux éléments plans (d, δ), (D, Δ); on voit, en effet, facilement qu'elle ne change pas si les deux directions d, δ sont remplacées par deux autres directions de leur 1-plan.

En introduisant les vecteurs $\frac{d\omega_i}{ds} = \xi_i$, $\frac{\delta\omega_i}{\delta s} = \eta_i$, $\frac{D\omega_i}{Ds} = \zeta_i$, $\frac{\Delta\omega_i}{\Delta s} = \chi_i$, les invariants de ces vecteurs sont leurs longueurs $\sum_i \xi_i^2$, $\sum_i \eta_i^2$, $\sum_i \zeta_i^2$, $\sum_i \chi_i^2$, toutes égales à l'unité, par définition, et les expressions de la forme $\Sigma\xi_i\eta_i$; posons $\cos(\xi, \eta) = \Sigma\xi_i\eta_i$; nous pouvons alors écrire

$$R(\xi, \eta; \zeta, \chi) = \frac{G_4(\xi, \eta; \zeta, \chi)}{\cos(\xi, \zeta)\cos(\eta, \chi) - \cos(\xi, \chi)\cos(\eta, \zeta)}.$$

Pour deux directions d, δ, avec $D\omega_i = d\omega_i$, $\Delta\omega_i = \delta\omega_i$, nous avons la courbure Riemannienne relative à un élément plan,

$$R(\xi, \eta; \xi, \eta) = \frac{1}{\sin^2(\xi, \eta)} G_4(\xi, \eta; \xi, \eta);$$

cette expression se réduit au numérateur $G_4(\xi, \eta; \xi, \eta)$ si ces deux directions vérifient la relation $\sum_i \xi_i\eta_i = 0$; ce que l'on exprime en disant qu'elles sont « orthogonales ».

Schur a démontré le théorème suivant :

Si, en chaque point d'une V_n, la courbure Riemannienne est la même pour tous les éléments plans, cette courbure est constante le long de la variété; la V_n est alors dite « à courbure constante ».

Nous suivrons la méthode appliquée par Bianchi [1], mais les notations que nous avons introduites simplifient beaucoup les calculs. On voit immédiatement que, seuls, les symboles $\tau_{ik}^{ik}(i \neq k)$ sont différents de zéro, et sont, de plus, égaux à une même fonction $K(x_1, x_2, \ldots x_n)$. Formons maintenant les symboles à cinq indices :

$$\tau_{ik}^{ik}/_h = \frac{\partial K}{\partial\omega_h}, \qquad \tau_{ih}^{ik}/_k = -K(\tau_{khk} + \tau_{hkk}) = 0;$$

l'identité bien connue $\tau_{ik}^{ik}/_h + \tau_{kh}^{ik}/_i + \tau_{hi}^{ik}/_k = 0$ s'écrit $\frac{\partial K}{\partial\omega_h} = 0$, donc K est une constante.

---

(1) Cf. *Acc. dei Lincei*, tome II (1902).

[**10**] *Remarque.* — Nous avons supposé, dans ce chapitre, que les coefficients θ^i_k du groupe orthogonal étaient des fonctions de point. L'uniformité des $d\omega_i$ et $d\omega'_i$ est intervenue au paragraphe (3) lorsque nous avons conclu à la covariance quadruple des symboles de Riemann. Il n'en est plus de même si les θ^i_k sont, par exemple, des fonctions d'intégrales curvilignes, prises toutes suivant le chemin parcouru sur la variété; en effet, X_i étant un système de covariants simples uniformes, il n'en est plus de même des $X'_i = \sum_k \theta^i_k X_k$.

Cependant, on peut se demander quelles restrictions on doit imposer aux deux systèmes applicables $(d\omega_i)$ et $(d\omega'_i)$ pour que leur application soit réalisable par une transformation orthogonale uniforme. Il est facile de voir qu'il ne suffit pas d'assujettir leurs coefficients a_{ik} et a'_{ik} à être des fonctions rationnelles, ou même, des formes linéaires d'intégrales curvilignes. Par contre, les θ^i_k sont évidemment uniformes, si la non-uniformité des a_{ik} ne provient que d'un facteur non uniforme commun à tous ces coefficients, et s'il en est de même des a'_{ik}. Ce cas se ramène d'ailleurs immédiatement à celui des ds^2 uniformes, car le facteur non uniforme est le même pour les deux ds^2.

Les seules variétés auxquelles nous aurons affaire dans la suite seront uniformes, tout au moins à un facteur près, de sorte que les transformations orthogonales auxquelles nous pourrons les soumettre seront nécessairement uniformes si nous voulons conserver la nature de ces variétés.

CHAPITRE III

Application et Représentation conforme.

[**1**] Les généralités développées dans les deux premiers chapitres vont nous permettre d'étudier deux problèmes très importants : « l'application » et la « représentation conforme ».

Rappelons que deux variétés à n dimensions sont dites « applicables » si on peut établir entre elles une correspondance ponctuelle qui conserve les longueurs. Soient $V_n(d\omega_1, d\omega_2, \ldots, d\omega_n)$ et $V'_n(d\omega'_1, d\omega'_2, \ldots, d\omega'_n)$ deux variétés, que l'on suppose uniformes, en vertu de la remarque faite à la fin du chapitre précédent. Pour qu'elles soient applicables, il faut et il suffit que l'on puisse trouver des fonctions θ^i_k du point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de V_n, telles que le système

$$\left\{\begin{array}{ll} (\mathrm{A}) & d\omega_i' = \sum_\alpha \theta^i_\alpha dx_\alpha \\ (\mathrm{A}_0) & \sum_i \theta^i_\alpha \theta^i_\beta = \varepsilon_{\alpha\beta} \quad [(i, \alpha, \beta = 1, 2, \ldots n), \ (\varepsilon_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{si} \quad a \neq \beta, \ \varepsilon_{\alpha\alpha} = 1)] \end{array}\right.$$

soit intégrable.

Le calcul des conditions d'intégrabilité dues à la différentiation de (A) a été effectué au chapitre II (paragr. 3); on obtient ainsi le système

$$\text{(B)} \qquad \theta^i_{\alpha/\beta} = \sum_{kh} \theta^k_\alpha \theta^h_\beta \tau'_{ikh}.$$

D'autre part, les conditions d'intégrabilité de (A_0) sont des identités; de sorte qu'il suffit de prendre, pour valeurs des θ^i_k, en un point donné, les éléments d'un déterminant orthogonal pour que (A_0) soit vérifié le long de V_n.

La marche générale consiste maintenant à dériver le système (B), et à écrire les relations

$$(1) \qquad \theta^i_{\alpha/\beta\gamma} - \theta^i_{\alpha/\gamma\beta} = - \sum_\delta \tau^{\alpha\delta}_{\beta\gamma} \theta^i_\delta.$$

Il suffit de remarquer que (B) s'écrit encore

$$\tau'_{ikh} = \sum_{\alpha\beta} \theta^k{}_\alpha \theta^h{}_\beta \theta^i{}_{\alpha/\beta},$$

qui a la forme du groupe orthogonal double pour les indices kh, $\alpha\beta$; on en déduit immédiatement, par dérivation absolue,

$$\tau'_{i,kh/l} = \sum_{\alpha\beta\gamma} \theta^k{}_\alpha \theta^h{}_\beta \theta^l{}_\gamma \theta^i{}_{\alpha/\beta\gamma},$$

et, par suite,

$$(G_4) \qquad \tau'_{i,kh/l} - \tau'_{i,kl/h} = \tau'^{ik}_{hl} = \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \theta^i{}_\alpha \theta^k{}_\delta \theta^h{}_\beta \theta^l{}_\gamma \tau^{\alpha\delta}_{\beta\gamma}.$$

Le calcul précédent revient donc à démontrer la covariance quadruple des τ^{ik}_{hl} ; il faut recommencer sur le système fini (G_4), en tenant compte de (A), (A_0), (B), (G_4), ce qui revient encore à montrer que les dérivées absolues sont des covariants quintuples, et ainsi de suite.

« En résumé, le système initial (A), (A_0), se complète successivement du système d'équations aux dérivées partielles (B), et des systèmes finis (G_4), (G_5), (G_6), ... ; et la condition nécessaire et suffisante pour que V_n et V'_n soient applicables est que le système mixte complet obtenu soit intégrable. »

Ce sont les conditions trouvées par Christoffel, et on voit qu'il faut que les deux variétés aient les mêmes invariants absolus, ce que nous savions déjà. Remarquons qu'il est nécessaire que, à partir d'un certain rang, les systèmes (G) soient des conséquences algébriques des précédentes. Une simplification évidente se produit si un invariant différentiel G_m est identiquement nul ; le système de Christoffel est alors limité à

$$(A), (A_0), (B), (G_4), \ldots (G_{m-1}), G'_m = 0.$$

En particulier, si $G_4 \equiv 0$, le système s'écrit (A), (A_0), (B), $G'_4 \equiv 0$; cette dernière condition exprime que le système est intégrable, donc,

« Pour qu'une V_n soit applicable sur l'espace cartésien, il faut et il suffit qu'elle soit euclidienne ».

Christoffel a montré, dans le cas général, comment on peut se limiter dans ce système de conditions [1] ; c'est ainsi que : « si les équations (A_0), (G_4), ..., (G_p) permettent de déterminer des fonctions $\theta^i{}_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $x_i'(x_1, \ldots, x_n)$ (ces dernières complètement), telles que (B) et (G_{p+1}) soient satisfaites, les deux variétés sont applicables. »

---

[1] Cf. ouvrage déjà cité.

Il suffit, pour cela, que les relations (A) soient vérifiées; formons le système de Pfaff $d\Omega'_i = \sum_\alpha \theta^i_\alpha d\omega_\alpha$, et montrons que les $du_i = d\omega'_i - d\Omega'_i$ sont identiquement nulles.

Nous supposerons $p = 4$, ce qui ne change en rien le raisonnement. Il résulte de (B), (G_4) et (G_5), que les $d\Omega'_i$ et les $d\omega'_i$ ont mêmes symboles à 3, 4 et 5 indices. Si T sont ceux des $d\Omega'_i$, les expressions $\frac{\partial \tau'^{ik}_{hl}}{\partial \omega'_\lambda}$ et $\frac{\partial T^{ik}_{hl}}{\partial \Omega'_\lambda}$ sont alors respectivement égales, donc

$$d\tau'^{ik}_{hl} - dT^{ik}_{hl} = \sum_\lambda \frac{\partial \tau'^{ik}_{hl}}{\partial x'_\lambda} du_\lambda = 0.$$

Par hypothèse, les premiers membres τ'^{ik}_{hl} des équations (G_4) ont un déterminant fonctionnel d'ordre n, par rapport aux x'_1, x'_2, ..., x'_n, non nul; il en est forcément de même par rapport aux ω'_1, ω'_2, ..., ω'_n, ce qui exige que les du_λ soient tous nuls.

Remarquons enfin que, d'après le système de Christoffel, les seuls invariants communs à toutes les variétés applicables sur les $d\omega_i$ sont les invariants absolus déduits des invariants différentiels (G_4), (G_5), ...

Remarque. — L'étude de l'application comporte un autre problème, à savoir la recherche des variétés géométriques applicables sur une variété donnée. Les éléments analytiques que nous avons introduits jusqu'ici ne nous permettraient pas de résoudre ce problème, qui n'a un sens que si on se fixe l'espace dans lequel on veut placer ces variétés; les éléments nécessaires à une telle étude seront établis dans le dernier chapitre, à propos d'une question différente. Je rappellerai seulement que le problème énoncé ici a été étudié dans les espaces euclidiens à trois et à quatre dimensions.

On sait que dans l'espace ordinaire, une surface donnée admet toujours une infinité de surfaces applicables, contenant deux fonctions arbitraires d'un argument, dont la recherche dépend d'une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre (1).

Dans un espace à plus de trois dimensions, le problème est en général impossible, et les seules hypersurfaces applicables sur une hypersurface donnée lui sont généralement égales ou symétriques; il en est sûrement ainsi si l'hyperplan tangent à la variété dépend de plus de deux paramètres (2). M. Cartan a déterminé les catégories d'hypersurfaces déformables de l'espace euclidien à quatre dimensions (2), et a établi, pour chacune des cinq catégories trouvées, le degré de généralité de la solution.

---

(1) Voir Darboux, *Théorie des surfaces* (Tome III, ch. v).
(2) Voir *Bull. de la Société math. France* (Tome 44).

[**2**] L'application conserve les longueurs, et aussi les angles, en appelant angle de deux directions $(d\omega_i)$, $(\delta\omega_i)$, l'arc $\cos \dfrac{\sum_i d\omega_i \delta\omega_i}{ds\,\delta s}$.

La réciproque n'est pas exacte; pour la conservation des angles, il faut et il suffit que la correspondance laisse invariante l'équation $ds = 0$. Une telle correspondance est la « représentation conforme » de l'une des variétés sur l'autre.

La représentation conforme se conserve par application, de sorte qu'on peut se ramener au cas où les formes de Pfaff de même rang, des deux variétés, sont proportionnelles.

Nous sommes ainsi conduits à étudier le problème suivant :

Soit un système de Pfaff $d\omega_i$, et la transformation

$$d\Omega_i = \frac{1}{\rho}\, d\omega_i. \tag{2}$$

Prolonger cette transformation en calcul différentiel absolu.

Log ρ sera une fonction dérivable du point $(x_1, \dots x_n)$, ou même, d'une façon plus générale, une intégrale curviligne [1].

Désignons par des lettres entre crochets les symboles de $[V_n](d\Omega_1, d\Omega_2, \dots, d\Omega_n)$. L'identification des covariants bilinéaires des deux membres de (2) donne de suite

$$\left\{\begin{aligned} [\sigma_{khi}] &= \rho\sigma_{khi} \\ [\sigma_{iki}] &= \rho\sigma_{iki} - \frac{\partial\rho}{\partial\omega_k} \end{aligned}\right. \qquad (i, k, h \text{ distincts})$$

et, par suite,

$$\left\{\begin{aligned} [\tau_{ikh}] &= \rho\tau_{ikh} \\ [\tau_{iki}] &= \rho\tau_{iki} + \rho_k \end{aligned}\right. \qquad \left(\rho_k = \frac{\partial\rho}{\partial\omega_k}\right). \tag{3}$$

On peut calculer directement les $[\tau^{ik}_{hl}]$; nous appliquerons une méthode qui les donne tous simultanément; considérons un système de n fonctions de point X_i; nous avons

$$[\bar{d}X_i] = dX_i - \frac{1}{\rho}\sum_{\alpha\beta} [\tau_{i\alpha\beta}] X_\alpha d\omega_\beta,$$

---

[1] Nous nous bornons donc, dans ce problème, à une classe particulière des variétés non uniformes auxquelles nous avait conduits la remarque (10, ch. II). Cependant les formules (5) obtenues plus bas seront encore valables, au point de vue formel, si ρ est une expression dérivable plus générale.

ou encore

$$\rho\,[\bar{d}X_i] = \rho\,\bar{d}X_i - d\omega_i \sum_\alpha \rho_\alpha X_\alpha + \rho_i \sum_\alpha X_\alpha d\omega_\alpha; \tag{4}$$

cette équation, en δ, appliquée à $[\bar{d}X_i]$, donne

$$\rho\,[\overline{\delta d}X_i] = \bar{\delta}\{\rho\,[\bar{d}X_i]\} - \delta\rho\,.\,[\bar{d}X_i] - \delta\omega_i \sum_\alpha \rho_\alpha [\bar{d}X_\alpha] + \rho_i \sum_\alpha [\bar{d}X_\alpha]\,\delta\omega_\alpha;$$

d'après (4), on peut calculer séparément chacune des quatre expressions du deuxième membre; d'où

$$\rho\,[(\overline{\delta, d})X_i] = \rho(\overline{\delta, d})X_i + \sum_{kh} \rho_{ih} X_k (d\omega_k \delta\omega_h - d\omega_h \delta\omega_k) - \sum_{kh} \rho_{kh} X_k (d\omega_i \delta\omega_h - d\omega_h \delta\omega_i)$$
$$+ \sum_{\alpha k} \frac{\rho_\alpha^2}{\rho} X_k (d\omega_i \delta\omega_k - d\omega_k \delta\omega_i),$$

et il suffit d'identifier les deux membres pour obtenir les symboles de Riemann transformés

$$\left\{\begin{aligned} [\tau_{hl}^{ik}] &= \rho^2 \tau_{hl}^{ik} \\ [\tau_{ih}^{ik}] &= \rho^2 \tau_{ih}^{ik} + \rho\,.\,\rho_{kh} \\ [\tau_{ik}^{ik}] &= \rho^2 \tau_{ik}^{ik} + \rho(\rho_{kk} + \rho_{ii}) - \Delta_1 \rho \qquad (i, k, h, l \text{ distincts}). \end{aligned}\right. \tag{5}$$

On vérifie bien, dans ce cas particulier, que si ρ n'est pas uniforme, ρ_{kh} peut être différent de ρ_{hk}, et, de même, $[\tau_{ih}^{ik}]$ de $[\tau_{ik}^{ih}]$.

[**3**] Appliquons ces résultats à la recherche des « conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une variété donnée V_n soit représentable conformément sur l'espace euclidien ». Nous introduirons dans les calculs le tenseur τ_{ik}, ou mieux

$$\left\{\begin{aligned} \xi_{ik} &= \frac{1}{n-2}\tau_{ik} \qquad\qquad (i \neq k) \\ \xi_{ii} &= \frac{1}{n-2}\tau_{ii} - \frac{1}{2(n-1)(n-2)} \sum_\alpha \tau_{\alpha\alpha} \end{aligned}\right. \tag{6}$$

que nous appellerons « tenseur principal » de la V_n.

Soit V la variété donnée, $ds^2 = \sum_i d\omega_i^2$ son élément linéaire, uniforme ou non. Pour qu'elle soit représentable conformément sur l'espace euclidien, il faut et il suffit qu'il existe une intégrale curviligne Log ρ, telle que la variété [V], de $[ds^2] = \frac{1}{\rho^2} ds^2$, soit euclidienne, c'est-à-dire telle que tous les $[\tau_{hl}^{ik}]$ soient identiquement nuls (¹). Les conditions cherchées sont donc les conditions d'intégrabilité du système

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\tau_{hl}^{ik} = 0 \\ &\rho_{ik} = -\rho\tau_{\alpha k}^{\alpha i} \qquad (\alpha \neq i, k) \\ &\rho_{ii} + \rho_{kk} = -\rho\tau_{ik}^{ik} + \frac{\Delta_1 \rho}{\rho}. \end{aligned} \right.$$

ρ sera une fonction de point ou non suivant que $\tau_{\alpha k}^{\alpha i} = \tau_{\alpha i}^{\alpha k}$, ou non. Si n est supérieur à 3, les deux premières lignes de (7) donnent une première série de conditions finies

$$\left\{ \begin{aligned} &\tau_{hl}^{ik} = 0 \\ &\tau_{\alpha k}^{\alpha i}, \text{ indépendant de } \alpha, = \xi_{ik}, \end{aligned} \right.$$

D'autre part, si i, k, h sont distincts,

$$(8) \qquad \rho_{ii} = -\frac{\rho}{2} \left\{ \tau_{ik}^{ik} + \tau_{ih}^{ih} - \tau_{kh}^{kh} \right\} + \frac{\Delta_1 \rho}{2\rho};$$

la quantité entre accolade ne doit dépendre que de i, et il est facile de vérifier que sa valeur est $2\xi_{ii}$.

Ces conditions finies étant supposées vérifiées, il faut encore écrire que le système

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\rho_{ik} = -\rho\xi_{ik} \\ &\rho_{ii} = -\rho\xi_{ii} + \frac{\Delta_1 \rho}{2\rho} \end{aligned} \right. \qquad \text{est intégrable.}$$

Ce système d'équations aux dérivées partielles du deuxième ordre se complète par la méthode générale; et il est remarquable que les conditions obtenues ne contiennent plus l'inconnue.

Supposons d'abord i, k, h inégaux; nous avons

$$\rho_{ikh} = -\rho\xi_{ik/h} - \rho_h \xi_{ik},$$

$$\rho_{ikh} - \rho_{ihk} = -\sum_\alpha \tau_{kh}^{i\alpha} \rho_\alpha = -\rho(\xi_{ik/h} - \xi_{ih/k}) + \rho_k \xi_{ih} - \rho_h \xi_{ik},$$

(¹) Les $d\Omega_i$ étant uniformes, $\frac{d\rho}{\rho} = \sum_i \rho_i \frac{d\omega_i}{\rho} = \sum_i \rho_i d\Omega_i$ montre que les dérivées ρ_i seront des fonctions de point, d'après l'hypothèse faite sur ρ.

d'où

$$\xi_{ik/h} = \xi_{ih/k}.$$

D'autre part, si $i \neq k$,

$$\rho_{iki} = -\rho\xi_{ik/i} - \rho_i\xi_{ik}$$

$$\rho_{iik} = -\rho\xi_{ii/k} - \rho_k\xi_{ii} - \rho_k\frac{\Delta_1\rho}{2\rho^2} + \frac{1}{\rho}\sum_\alpha \rho_\alpha\rho_{\alpha k},$$

d'où

$$\rho_{iik} - \rho_{iki} = -\sum_\alpha \tau_{ik}^{i\alpha}\rho_\alpha = -\rho(\xi_{ii/k} - \xi_{ik/i}) + \rho_i\xi_{ik} - \rho_k\xi_{ii} - \sum_\alpha \rho_\alpha\xi_{\alpha k}.$$

Il suffit de remarquer que $\tau_{ik}^{ik} = \xi_{ii} + \xi_{kk}$ pour obtenir

$$\xi_{ii/k} = \xi_{ik/i}.$$

Nous avons donc le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Pour qu'une V_n soit représentable conformément sur l'espace euclidien, l'expression multiplicatrice étant l'exponentielle d'une intégrale curviligne, il faut et il suffit que :*

1° les τ_{hl}^{ik} soient nuls; les τ_{hk}^{hi} ne dépendent que de i et k, soit $\tau_{hk}^{hi} = \xi_{ik}$; les τ_{ik}^{ik} soient de la forme $\xi_{ii} + \xi_{kk}$ (i, k, h, l différents);

2° les dérivées absolues du tenseur ξ_{ik} soient indépendantes de l'ordre des deux derniers indices.

Pour que ρ soit une fonction de point, il faut de plus, et il suffit, que le tenseur ξ_{ik} soit symétrique.

Remarquons que si $n = 2$, le système (7) se réduit à l'équation unique, toujours intégrable,

$$\rho_{11} + \rho_{22} = \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{\rho} - \rho\tau_{12}^{12};$$

on voit bien, en particulier, que toute surface de l'espace ordinaire est représentable conformément sur le plan, et la résolution du problème est donnée par l'intégration d'une équation linéaire aux dérivées partielles du deuxième ordre.

Pour $n = 3$, nous retrouvons les résultats déjà exposés par M. Émile Cotton[1], et la première série de conditions est vérifiée d'elle-même.

(1) Cf. thèse.

[**4**] On se rend bien compte *a priori* que les conditions trouvées dans le théorème précédent ne peuvent pas être essentielles, car les τ^{ik}_{hl}, et par suite les ξ_{ik}, d'après leur nature même, vérifient des relations différentielles du premier ordre.

Supposons que ρ soit une fonction, et montrons que, en général, la première série de conditions est suffisante. Supposons-la, en effet, réalisée seule

$$(10) \qquad \begin{cases} \tau^{ik}_{hl} = 0 \\ \tau^{hi}_{hk} = \xi_{ik} \\ \tau^{ik}_{ik} = \xi_{ii} + \xi_{kk}, \end{cases}$$

et écrivons la relation (30, ch. I) entre les symboles covariants quintuples. Bien que ξ_{ik} soit symétrique dans ce paragraphe, nous ne tiendrons pas compte de cette symétrie dans les calculs.

Si i, k, h sont distincts, il suffit que n soit supérieur ou égal à 3, pour pouvoir écrire

$$\tau^{ik}_{ik}/_h + \tau^{ik}_{kh}/_i + \tau^{ik}_{hi}/_k = 0.$$

Un calcul simple donne

$$\tau^{ik}_{ik}/_h = \xi_{ii/h} + \xi_{kk/h}$$
$$\tau^{ik}_{kh}/_i = -\xi_{ih/i}$$

et, par suite,

$$(11) \qquad (\xi_{ii/h} - \xi_{ih/i}) + (\xi_{kk/h} - \xi_{kh/k}) = 0.$$

Ceci montre déjà que, pour $n = 3$, les huit conditions que doivent vérifier le tenseur symétrique ξ_{ik} se réduisent à cinq.

On peut introduire le covariant triple

$$\lambda_{ikh} = \xi_{ik/h} - \xi_{ih/k};$$

les conditions (11) s'écrivent alors

$$\lambda_{iih} + \lambda_{kkh} = 0;$$

et sont équivalentes, pour $n > 3$, à

$$\lambda_{iih} = 0.$$

D'autre part, si $n > 3$, on peut écrire

$$\tau^{ik}_{ih}/_l + \tau^{ik}_{hl}/_i + \tau^{ik}_{li}/_h = 0,$$

qui, par un calcul analogue, donne de suite

$$\lambda_{khl} = 0.$$

De sorte que le théorème (I) se simplifie, et peut s'énoncer :

THÉORÈME II. — *Pour qu'une* $V_n (n > 3)$ *de* ds^2 *uniforme, soit représentable conformément sur l'espace euclidien, il faut et il suffit que ses symboles de Riemann vérifient les conditions* (10).

[5] *Application.* — Une variété à courbure constante, d'après $\tau_{hl}^{ik} = \tau_{ih}^{ik} = 0$, $\tau_{ik}^{ik} = C^{te} = K$, est représentable conformément sur l'espace euclidien. Cherchons la fonction multiplicatrice ρ.

Il résulte de la définition même de la courbure Riemannienne que les symboles τ_{hl}^{ik} d'une telle variété sont invariants; nous pouvons prendre, comme formes de Pfaff de cette variété, les formes $d\Omega_i = \dfrac{dx_i}{\rho}$. Dans les formules (5), V_n est ici cartésienne, ce qui définit ρ par le système d'équations

$$(12) \qquad \begin{cases} \rho_{ik} = 0 \\ \rho(\rho_{ii} + \rho_{kk}) - \Delta_1 \rho = K; \end{cases}$$

les dérivées de ρ sont des dérivées ordinaires, et il vient

$$\rho_{ii} = \frac{\Delta_1 \rho + K}{2\rho} = C^{te} = C.$$

On a donc $\rho_i = Cx_i + a_i$, et

$$\rho = \frac{C}{2} \sum_i x_i^2 + \sum_i a_i x_i + b,$$

les a_i et b étant des constantes; la courbure constante de la V_n transformée est alors $K = 2Cb - \sum_i a_i^2$.

Si C n'est pas nul, une translation permet d'annuler tous les a_i et de prendre $\rho = \dfrac{C}{2} \sum_i x_i^2 + b$; alors $K = 2Cb$. Les points à l'infini de la variété à courbure constante [V] sont les transformés de la sphère $\rho = 0$; ils sont donc réels ou non suivant que K est négatif ou positif. K est nul si cette sphère est de rayon nul.

Si C est nul, $\rho = \sum_i a_i x_i + b$, $K = -\sum_i a_i^2$; ce cas se ramène de suite au précédent grâce à une inversion, qui, nous le savons, est une représentation conforme qui laisse euclidienne une variété euclidienne et transforme le plan $\rho=0$ en une sphère (¹).

En résumé, à une inversion, une homothétie, et une translation près, on peut toujours prendre $\rho=\frac{1}{2}\sum_i x_i^2+b$, de sorte que $K=2b$.

K est nul si $\rho=\frac{1}{2}\sum_i x_i^2$; or on sait que l'inversion $X_i=\frac{2x_i}{\sum_\alpha x_\alpha^2}$ donne $[ds]=\frac{ds}{\rho}$, donc la transformation représentée par cette valeur de ρ est une inversion suivie d'une application quelconque.

[**6**] Un calcul direct permet de voir que $\rho=\frac{1}{2}\sum_i x_i^2$ correspond bien au groupe des déplacements, homothéties et inversions de l'espace euclidien. En effet, le système euclidien $d\Omega_i$ se présente sous la forme cartésienne, après une transformation orthogonale dont les coefficients θ^i_k sont définis par le système d'équations

$$\theta^i_{k/h}=0, \tag{13}$$

ces dérivées absolues étant prises dans le système $d\Omega_i$, dont les symboles de Christoffel sont $[\tau_{ikh}]=0$, $[\tau_{iki}]=\rho_k=x_k$; (13) s'écrit donc

$$\left\{\begin{aligned}\rho\frac{\partial\theta^i_k}{\partial x_h}&=-x_k\theta^i_h\\ \rho\frac{\partial\theta^i_k}{\partial x_k}&=-x_k\theta^i_k+\sum_\alpha\theta^i_\alpha x_\alpha.\end{aligned}\right. \tag{13'}$$

Posons $\sum_\alpha\theta^i_\alpha x_\alpha=u_i$; il vient

$$\rho\, d\theta^i_k=-x_k\sum_\alpha\theta^i_\alpha dx_\alpha+u_i dx_k, \tag{14}$$

qui donne, par un calcul facile,

$$\theta^i_k=\frac{u_i x_k}{\rho}+m^i_k,$$

où les m^i_k sont des constantes. On a alors

$$u_i=\sum_\alpha\theta^i_\alpha x_\alpha=-\sum_\alpha m^i_\alpha x_\alpha,$$

et l'orthogonalité des θ^i_k exige la même propriété des m^i_k.

(¹) On peut toujours, grâce à une translation, supposer $b\neq 0$. En particulier, si les a_α sont nuls, $\rho=b$ correspond à une homothétie, qui apparait bien ainsi comme le produit de deux inversions.

Soient X_i les coordonnées cartésiennes de l'espace transformé;

$$dX_i = \sum_k \theta^i{}_k \,.\, d\Omega_k = -d\frac{u_i}{\rho},$$

et, par suite,

$$X_i - X_i^0 = \frac{1}{\rho}\sum_k m^i{}_k x_k;$$

avec une rotation de l'espace dx_i, et une translation de l'espace transformé, on peut prendre $X_i = \dfrac{2x_i}{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$, qui est bien une inversion.

[7] Reprenons maintenant le théorème général pour une V_n dont les $d\omega_i$ ne sont pas uniformes. Pour reconnaître pratiquement si une V_n non uniforme est représentable conformément sur l'espace euclidien, il est clair qu'il suffit de diviser le ds^2 de cette variété par son facteur multiforme, pour retrouver le problème traité au paragraphe 4. Cependant, nous allons étudier directement le cas où $\log \rho$ est une intégrale curviligne multiforme, à cause de la simplicité des conditions auxquelles on est conduit.

Considérons en effet une telle variété V_n : ses symboles de Riemann vérifient les relations (7); nous allons voir que les covariants quintuples vérifient encore les identités de Ricci, relatives à un espace uniforme (¹) (30; ch. I).

En effet, $[\tau^{ik}_{hl}/_p + \tau^{ik}_{lp}/_h + \tau^{ik}_{ph}/_l]$ sont des covariants quintuples, et il suffit de vérifier que ces quantités sont identiquement nulles pour un choix particulier des $d\omega_i$; choisissons celles-ci de façon que les $[\tau_{ikh}]$ soient nuls,

$$(15) \qquad \begin{cases} \tau_{ikh} = 0 \\ \tau_{iki} = -\dfrac{1}{\rho}\rho_k. \end{cases}$$

(¹) On verrait, plus généralement, que ces identités de Ricci sont, tout au moins pour $n > 3$, caractéristiques des V_n, représentables conformément sur un espace uniforme, pour lesquelles $\log \rho$ est une intégrale curviligne. Elles sont également vérifiées sur les V_3 de cette nature.

On peut alors vérifier ces identités, soit par un calcul direct des covariants quintuples $\tau^{ik}_{hl}/_p$, soit en appliquant les formules (34; ch. I); on a, par exemple,

$$\tau^{ik}_{hl}/_i + \tau^{ik}_{li}/_h + \tau^{ik}_{ih}/_l = \frac{\rho_k}{\rho}(\xi_{hl} - \xi_{lh}) + \frac{(\delta, d)\tau_{lki}}{d\omega_h \delta\omega_l}$$

$$= \frac{\rho_k}{\rho}(\xi_{hl} - \xi_{lh}) + \frac{\rho_k}{\rho^2}(\rho_{hl} - \rho_{lh}) = 0,$$

$$\tau^{ik}_{lk}/_h + \tau^{ik}_{kh}/_i + \tau^{ik}_{hi}/_k = \frac{\rho_i}{\rho}(\xi_{ih} - \xi_{hi}) - \frac{\rho_k}{\rho}(\xi_{hk} - \xi_{kh}) + \frac{(\delta, d)\tau_{iki}}{d\omega_k \delta\omega_h} + \frac{(\delta, d)\tau_{ikk}}{d\omega_h \delta\omega_i}$$

$$= \frac{\rho_i}{\rho}(\xi_{ih} - \xi_{hi}) - \frac{\rho_k}{\rho}(\xi_{hk} - \xi_{kh}) + \frac{\rho_k}{\rho^2}(\rho_{kh} - \rho_{hk}) - \frac{\rho_i}{\rho^2}(\rho_{hi} - \rho_{ih}) = 0.$$

La proposition réciproque est immédiate; en effet, si les covariants quintuples vérifient ces relations, le calcul du paragraphe 4 est encore valable, puisque la symétrie du tenseur ξ_{ik} ne joue aucun rôle.

On peut en déduire immédiatement un autre énoncé du théorème I, valable pour une variété uniforme ou non.

THÉORÈME III. — *Pour qu'une* V_n, *uniforme ou non, à plus de trois dimensions, soit représentable conformément sur l'espace euclidien, il faut et il suffit que les symboles de Riemann vérifient les relations* (10), *et que les covariants quintuples absolus vérifient les relations* (30; ch. I).

[8] Le problème de la représentation conforme de deux V_n l'une sur l'autre est encore plus compliqué que celui de l'application, puisque cette dernière intervient nécessairement. On peut cependant obtenir des conditions nécessaires, en déterminant des invariants absolus de la variété, qui sont également invariants dans la transformation conforme.

Pour que V_n et $[V_n]$ soient représentables conformément l'une sur l'autre, il faut pouvoir trouver une fonction ρ telle que l'on ait $d\Omega_i = \frac{d\omega_i}{\rho}$, après une transformation orthogonale convenable sur les $d\omega_i$; autrement dit, le système (3) et (5) doit être intégrable. Nous supposerons V_n et $[V_n]$ de ds^2 uniformes.

Le nombre des invariants principaux est $\frac{n^2(n^2-1)}{12} - \frac{n(n-1)}{2}$, supérieur au nombre des indéterminées de (5) si $n > 3$, de sorte que, dans ce cas, on a déjà des conditions nécessaires avec les symboles de Riemann.

Pour n quelconque, le système (5) peut être remplacé par le système nécessaire mais non équivalent,

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho_{ik} &= \frac{1}{\rho}[\xi_{ik}] - \rho\xi_{ik} \\ \rho_{ii} &= \frac{1}{\rho}[\xi_{ii}] - \rho\xi_{ii} + \frac{\Delta_1\rho}{2\rho}. \end{aligned}\right.$$

Ecrivons les conditions d'intégrabilité de (13), compte tenu de (3) et (5); nous avons

$$\rho_{ikh} - \rho_{ihk} = -\sum_\alpha \tau^{i\alpha}_{kh}\rho_\alpha = \frac{1}{\rho^2}\left\{[\xi_{ik/h}] - [\xi_{ih/k}]\right\} - \rho\left\{\xi_{ik/h} - \xi_{ih/k}\right\} + (\rho_k\xi_{ih} - \rho_h\xi_{ik})$$

$$\rho_{iik} - \rho_{iki} = -\sum_\alpha \tau^{i\alpha}_{ik}\rho_\alpha = \frac{1}{\rho^2}\left\{[\xi_{ii/k}] - [\xi_{ik/i}]\right\} - \rho\left\{\xi_{ii/k} - \xi_{ik/i}\right\} + \rho_i\xi_{ik} - \rho_k\xi_{ii} - \sum_\alpha \rho_\alpha\xi_{\alpha k}.$$

Les $\xi_{ik/h}$ sont des covariants triples; il en est de même des $\lambda_{ikh} = \xi_{ik/h} - \xi_{ih/k}$, de sorte que des conditions nécessaires d'intégrabilité sont

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda_{ikh} - \frac{1}{\rho^3}[\lambda_{ikh}] &= \frac{1}{\rho}\left\{\sum_\alpha \tau^{i\alpha}_{kh}\rho_\alpha + \rho_k\xi_{ih} - \rho_h\xi_{ik}\right\} \\ \lambda_{iik} - \frac{1}{\rho^3}[\lambda_{iki}] &= \frac{1}{\rho}\left\{\sum_\alpha \left(\tau^{i\alpha}_{ik} - \xi_{\alpha k}\right)\rho_\alpha + \rho_i\xi_{ik} - \rho_k\xi_{ii}\right\}. \end{aligned}\right.$$

Si $n > 3$, ces équations contiennent encore ρ et ses dérivées premières; au contraire, si $n = 3$, $\xi_{\alpha k} = \tau^{i\alpha}_{ik} (\alpha \neq k)$, $\tau^{ik}_{ik} = \xi_{ii} + \xi_{kk}$, et les deuxièmes membres de (14) s'évanouissent; ces équations se réduisent donc à $\lambda_{ikh} = \frac{1}{\rho^3}[\lambda_{ikh}]$, ou encore

$$\sum_{ikh} \lambda_{ikh}\, d\omega_i D\omega_k \Delta\omega_h = \sum_{ikh} [\lambda_{ikh}]\, d\Omega_i D\Omega_k \Delta\Omega_h;$$

ceci met en évidence l'invariant différentiel triple particulier aux V_3, introduit par M. Émile Cotton dans sa thèse; sans parler des transformations que l'on peut faire subir à cet invariant[1], nous voyons, par ce calcul effectué dans le cas de n quelconque, qu'il ne peut être question de chercher l'analogue de cet invariant, dans le cas de $n > 3$[2].

---

[1] Thèse de M. Émile Cotton.

[2] Ce résultat confirme la distinction essentielle des V_3 et des variétés d'ordre supérieur relativement à la représentation conforme.

[9] Les généralités de la représentation conforme vont nous permettre d'étudier le problème suivant :

Considérons deux V_n uniformes, représentables conformément l'une sur l'autre, et une fonction f, considérée comme invariante dans cette transformation. Nous avons les formules de transformation

$$[f_i] = \rho f_i$$
$$[f_{ii}] = \rho^2 f_{ii} + 2\rho\rho_i f_i - \rho \sum_\alpha \rho_\alpha f_\alpha,$$

et par suite

$$(15) \qquad [\Delta_2 f] = \rho^2 \Delta_2 f - (n-2)\rho \sum_\alpha \rho_\alpha f_\alpha;$$

donc l'équation $\Delta_2 f = 0$ n'est invariante que si $n = 2$, ou si $\rho = C^{te}$.

Si n est quelconque, on peut chercher s'il existe une fonction λ, indépendante de f, telle que $\varphi = \lambda f$ soit harmonique sur $[V_n]$ en même temps que f l'est sur V_n. On a alors.

$$[\Delta_2 \varphi] = \rho^2 \Delta_2 \varphi - (n-2)\rho \sum_\alpha \rho_\alpha \varphi_\alpha,$$

et $\Delta_2 f = 0$ entraîne $[\Delta_2 \varphi] = 0$ si l'on a l'identité

$$f \left\{ \rho\Delta_2\lambda - (n-2) \sum_\alpha \rho_\alpha \lambda_\alpha \right\} + \sum_\alpha f_\alpha \left\{ 2\rho\lambda_\alpha - (n-2)\lambda\rho_\alpha \right\} = 0;$$

cette identité, nécessaire et suffisante, est équivalente à

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} & 2\rho\lambda_i = (n-2)\lambda\rho_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ & \rho\Delta_2\lambda = (n-2) \sum \rho_i \lambda_i . \end{aligned} \right.$$

Ces n premières équations différentielles donnent, à un facteur constant près,

$$(17) \qquad \lambda = \rho^{\frac{n-2}{2}},$$

ρ étant lui-même déterminé par l'équation du deuxième ordre

$$(18) \qquad \Delta_2 \rho = \frac{n}{2} \frac{\Delta_1 \rho}{\rho}.$$

Il n'y a que les représentations conformes, définies par cette équation, qui permettent de résoudre le problème proposé.

Si $n = 2$, λ est nécessairement constant, et ρ est quelconque; si n est quelconque, mais si V_n est euclidienne, une solution particulière de (18) est l'inversion $\rho = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, avec $\lambda = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{n-2}{2}}$, et l'on retrouve le résultat connu de Sir W. Thomson.

Remarquons que la fonction 1 étant harmonique sur $[V_n]$, $\frac{1}{\lambda} = \rho^{-\frac{n-2}{2}}$ est harmonique sur V_n; c'est ce qu'exprime d'ailleurs l'équation (18). Il en résulte qu'à chaque solution f de $\Delta_2 \rho = 0$, correspond une intégrale $\rho = f^{-\frac{2}{n-2}}$ de (18).

CHAPITRE IV

Sur le déplacement d'un vecteur.

[1] Nous savons que l'on appelle vecteur (ξ) un système covariant simple de n fonctions $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ de $x_1, \ldots, x_n$, ses « composantes » ; si le point $M(x_1, \ldots, x_n)$ décrit une certaine variété de l'espace E_n, on dit que le vecteur (ξ) se déplace dans cet espace.

En chaque point M de E_n, les $d\omega_i$, que nous appellerons le système de coordonnées, représentent n directions orthogonales; et on peut se représenter un espace euclidien, entourant M, rapporté à ces n directions; (ξ) peut être considéré comme un élément géométrique de cet espace, et sa longueur est l'invariant $\xi = \sqrt{\sum_i \xi_i^2}$.

Quand (ξ) subit un déplacement infinitésimal dans une direction $(d\omega_1, d\omega_2, \ldots, d\omega_n)$, la variation première $(d\xi_i)$ dépend des coordonnées choisies, alors que $\overline{d}\xi_i$ est covariant simple: c'est donc la différentielle absolue qui représentera, pour un observateur, la variation du vecteur (ξ).

Par définition, on dit que (ξ) est resté « équipollent » si $\overline{d}\xi_i = 0$; sa longueur est alors conservée; dans ces conditions, tout vecteur $\eta_i = \lambda\xi_i$ a même direction que sa différentielle absolue: on dira qu'il est resté « parallèle ». Ce parallélisme est celui de Levi-Civitá (¹), et conserve évidemment l'angle de deux vecteurs.

Étant donnés deux segments ds, δs, de composantes $d\omega_i$, $\delta\omega_i$, la variation de (ξ) le long du parallélogramme infinitésimal formé par ces deux segments est

$$(\overline{\delta, d})\xi_i = -\sum_{\alpha\beta\gamma} \tau^{i\alpha}_{\beta\gamma}\xi_\alpha\, d\omega_\beta\, \delta\omega_\gamma,$$

si l'on ne considère que des éléments uniformes; et, le long d'un contour fermé quelconque, cette variation est représentée par l'intégrale

$$-\int\!\!\int \sum_{\alpha(\beta,\gamma)} \tau^{i\alpha}_{\beta\gamma}\xi_\alpha (d\omega_\beta\,\delta\omega_\gamma - d\omega_\gamma\,\delta\omega_\beta),$$

prise le long d'une V_2 limitée à ce contour.

(¹) Voir *Rendiconti del circolo di Mathem. di Palermo* (Tome 42).

L'étude du déplacement d'un vecteur le long d'une courbe revient à comparer deux vecteurs d'origines différentes, ce qui s'effectue en déplaçant l'un d'eux vers l'autre, par équipollence; on est amené ainsi à résoudre le problème suivant :

Trouver le vecteur obtenu en déplaçant, par équipollence, du point $M'(t')$ *au point* $M(t)$, *le vecteur* $\xi_i(t)$ (t *étant le paramètre qui fixe le point* M *sur la courbe*) :

Ce vecteur est donné par la série de Taylor généralisée

$$(1)\qquad \eta_i(t, t') = \xi_i(t) + (t' - t)\frac{\overline{d}\xi_i(t)}{dt} + \frac{(t'-t)^2}{1 \cdot 2}\frac{\overline{d}^2\xi_i(t)}{dt^2} + \ldots\ldots,$$

supposée convergente; il n'y a, en effet, qu'à vérifier que

$$\frac{\overline{\partial}\eta_i(t, t')}{\partial t} = 0, \qquad \text{et que} \qquad \eta_i(t', t') = \xi_i(t').$$

[**2**] Ces quelques résultats nous montrent que, dans l'étude du déplacement d'un n-èdre orthogonal, et des courbures d'une courbe, les calculs conserveront la forme adoptée dans l'espace euclidien.

Les « rotations » p_{ab} d'un n-èdre orthogonal $(\xi^a_1, \xi^a_2, \ldots, \xi^a_n)$, $(a = 1, 2, \ldots, n)$, qui se déplace le long d'une courbe de paramètre t, sont définies par les équations

$$(2)\qquad \frac{\overline{d}\xi_i^a}{dt} = \sum_b p_{ab}\,\xi_i^b;$$

ce sont bien des invariants, qui vérifient les relations $p_{ab} = - p_{ba}$; réciproquement, tout système p_{ab}, symétrique gauche par rapport à ses indices, définit le mouvement d'un n-èdre orthogonal.

En prenant $\xi_i^k = 1$ ou 0 suivant que $k = i$ ou $k \neq i$, les τ_{ikh} apparaissent comme les rotations absolues du système $d\omega_i$. De même, les formules du changement orthogonal des formes de Pfaff s'écrivent

$$\sum_s \frac{\overline{\partial}\theta^i_\alpha}{\partial\omega_s}\theta_s^h = \sum_k \tau'_{ikh}\,\theta_\alpha^k;$$

elles sont identiques aux équations (2), si on les considère comme exprimant le déplacement du vecteur $(\theta^i_1, \ldots, \theta^i_n)$ le long du vecteur $(\theta^h_1, \ldots, \theta^h_n)$. Pour cette raison, nous appellerons les τ_{ikh} les « rotations » du système $d\omega_i$.

[3] Ces considérations permettent l'étude d'une courbe Γ, définie par n fonctions $x_i = x_i(s)$; sa tangente a pour composantes $\frac{d\omega_i}{ds}$, et la longueur de ce vecteur est l'unité si s est l'arc de courbe. Dans ces conditions, la vitesse absolue de $\xi_i^1 = \frac{d\omega_i}{ds}$ est $\frac{\overline{d}\xi_i^1}{ds}$, orthogonale à la courbe ; soit ξ_i^2 le vecteur unité qui porte cette vitesse ; on définit ainsi le 1-plan osculateur ; la vitesse absolue $\frac{\overline{d}\xi_i^2}{ds}$ définit, avec ξ_i^1 et ξ_i^2 le 2-plan osculateur, et on choisit, dans ce 2-plan, le vecteur unité ξ_i^3 orthogonal au 1-plan osculateur ; et ainsi de suite comme dans l'espace ordinaire.

Ayant ainsi attaché à la courbe un n — èdre orthogonal bien défini, les rotations de ce n — èdre sont des propriétés intrinsèques de la courbe ; ces rotations, au nombre de $(n - 1)$, s'appellent les « courbures » de la courbe considérée, et on a les équations

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\overline{d}\xi_i^1}{ds} = p_1 \xi_i^2 \\[2mm] \dfrac{\overline{d}\xi_i^2}{ds} = -p_1 \xi_i^1 + p_2 \xi_i^3 \\[2mm] \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\[2mm] \dfrac{\overline{d}\xi_i^n}{ds} = -p_{n-1} \xi_i^{n-1}. \end{cases}$$

La première courbure p_1 mesure le rapport de l'angle absolu de deux tangentes infiniment voisines à l'arc de courbe correspondant ; sur une surface de l'espace ordinaire, on retrouve la courbure géodésique, ce qui était à prévoir d'après son invariance pour toute déformation qui conserve les longueurs.

Une courbe, dont la première courbure est nulle, a toutes ses courbures nulles ; c'est une « géodésique », définie par la propriété que sa tangente reste parallèle à elle-même le long de cette courbe ; il en résulte aussi que tout vecteur déplacé parallèlement à lui-même le long d'une géodésique fait un angle constant avec cette courbe. On sait que la variation première de la longueur d'un arc qui joint deux points fixes est nulle pour la géodésique qui joint ces deux points ; voici comment ceci s'obtient avec nos notations : la longueur d'un arc, qui joint deux points fixes A, B est

$$\mathrm{I} = \int_{\mathrm{AB}} ds = \int_{\mathrm{AB}} \sqrt{\sum_i d\omega_i^2} ;$$

donc

$$\delta \mathrm{I} = \int_{\mathrm{AB}} \frac{\sum_i d\omega_i \overline{\delta}\, d\omega_i}{ds} = \int_{\mathrm{AB}} \sum_i \frac{d\omega_i}{ds} \overline{d}\delta\omega_i,$$
$$= \int_{\mathrm{AB}} d\left(\sum_i \frac{d\omega_i \delta\omega_i}{ds}\right) - \int_{\mathrm{AB}} \sum \delta\omega_i \overline{d}\left(\frac{d\omega_i}{ds}\right) ;$$

A et B étant fixes, la première intégrale du dernier membre est nulle, de sorte que la variation δI n'est nulle, pour toute déformation de l'arc AB, que si, le long de cet arc, $\bar{d}\frac{d\omega_i}{ds} = 0$.

[**4**] Ce que nous avons dit d'un vecteur, le long d'une courbe, s'applique à une famille, à un paramètre, de vecteurs unités, d'origine fixe ; une telle famille s'appellera un « cône » ; quand le vecteur ξ_i décrit un cône,

$$\bar{d}\xi_i = d\xi_i - \sum_{\alpha\beta} \tau_{i\alpha\beta}\,\xi_\alpha\, d\omega_\beta$$

se confond avec $d\xi_i$, puisque les $d\omega_\beta$ sont tous nuls. Cela revient à considérer ce cône dans l'espace euclidien qui entoure M, et l'on obtient ainsi $(n-2)$ courbures pour le caractériser.

On peut, d'autre part, supposer que le cône considéré est fonction du point M ; quand son sommet décrit une courbe Γ, ce cône se déforme, et le calcul différentiel absolu intervient de nouveau. Dans un déplacement dans lequel chaque vecteur issu de M reste équipollent, au sens absolu, les angles sont conservés, et il est évident que les courbures d'un cône le sont aussi.

[**5**] Soit (a) un vecteur unité, fonction de son origine M, et (A) le $(n-1)$ plan orthogonal. La variation $(\bar{d}a_i)$ le long d'une direction (ξ_i) de (A) est située dans ce $(n-1)$ plan; nous appellerons directions conjuguées de (ξ_i), par rapport à (a), les directions (η_i) de (A) qui sont orthogonales à $(\bar{d}a_i)$.

En général, il n'y a pas réciprocité; en désignant par a_{ik} les dérivées absolues de a_i, on a, en effet, les relations

$$\sum_i a_i \xi_i = 0 \tag{4}$$

$$\sum_i a_i \eta_i = 0 \tag{5}$$

$$\sum_{ik} a_{ik} \xi_k \eta_i = 0; \tag{6}$$

pour qu'il y ait réciprocité, il faut et il suffit que, ξ_i étant donné dans (A), (5) et (6) entraînent l'identité

$$\sum_{ik} a_{ki} \xi_i \eta_k = 0. \tag{7}$$

Il doit donc exister deux quantités μ et λ vérifiant

$$\sum_k a_{ki}\xi_k = \mu_k \sum_k a_{ik}\xi_k + \lambda a_i,$$

comme conséquence de (4). On en déduit

$$(1-\mu)\sum_{ik} a_{ik}\xi_i\xi_k = 0.$$

Si donc on suppose que cette dernière somme n'est pas identiquement nulle, sans quoi toutes les directions de (A) seraient leurs propres conjuguées, on a $\mu = 1$; comme, d'autre part, $\lambda = \sum_k \lambda_k \xi_k$, où les λ_k sont indépendants des ξ_i, on doit avoir

$$\sum_k (a_{ik} - a_{ki} + \lambda_k a_i)\xi_k = 0;$$

cette relation doit être une conséquence de (4), ce qui exige que l'on puisse trouver des quantités μ_i telles que l'on ait identiquement

$$a_{ik} - a_{ki} = \mu_i a_k - \lambda_k a_i.$$

Il faut évidemment que $\mu_i = \lambda_i$, de sorte que la forme de Pfaff $d\Omega = \sum_i a_i d\omega_i$ vérifie la relation

$$(\delta, d)\Omega = \sum_{ik}(a_{ik} - a_{ki})\,d\omega_i\,\delta\omega_k = \delta\Omega \sum_i \lambda_i d\omega_i - d\Omega \sum_k \lambda_k \delta\omega_k;$$

donc $d\Omega = 0$ doit être complètement intégrable. Ceci exprime que le vecteur (a) est normal à une V_{n-1}, $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, et l'on sait que $\sum_i \lambda_i d\omega_i$ est alors une différentielle exacte.

[**6**] Dans le cas général, on appellera « direction principale » toute direction (ξ_i), orthogonale à (a), à laquelle sont conjugués tous les η_i de (A) qui lui sont orthogonaux.

Pour une telle direction, (5) et

$$(8) \qquad \sum_i \xi_i \eta_i$$

doivent entraîner l'identité (6); il doit donc exister des quantités λ, μ, telles que l'on ait

$$\sum_k a_{ik}\xi_k + \lambda\xi_i = \mu a_i;$$

μ étant nécessairement nul, les directions principales sont données par

$$\left\{\begin{array}{ll} (4) & \displaystyle\sum_i a_i\xi_i = 0. \\ (9) & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_k + \lambda\xi_i = 0. \end{array}\right.$$

(4) est une conséquence de (9) si λ n'est pas nul; remarquons aussi que, d'après (9), la vitesse absolue de (a) le long d'une direction principale est portée par cette direction. λ est racine de l'équation

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

dont les coefficients sont des invariants du tenseur a_{ik}; on peut la remplacer par l'équation

$$(10) \qquad \lambda \times \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1}+\lambda & a_{n-1,n} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = 0,$$

et l'on voit que $\lambda = 0$ ne permet de vérifier (4) que si elle est racine double de (10); dans ce cas, (a) reste parallèle à lui-même le long de (ξ), et toutes les directions de (A) sont conjuguées de (ξ).

En résumé, les λ qui déterminent les directions principales sont les $(n-1)$ zéros, en général distincts, du déterminant de l'équation (10), de sorte qu'il y a, en général, $(n-1)$ directions principales. Une racine λ, rapport à l'élément d'arc principal correspondant, de l'écart angulaire de (a) le long de cet arc, s'appellera « une courbure principale du vecteur (a) ».

[**7**] Plaçons-nous maintenant dans le cas particulier où (a) est normal à une V_{n-1}, et vérifie, par suite, des identités

$$a_{ik} - a_{ki} = \lambda_i a_k - \lambda_k a_i. \tag{11}$$

On peut choisir les coordonnées de façon que $a_n = 1$, $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0$; alors $a_{ik} = a_{ki} (i, k = 1, 2, \ldots, n-1)$ et $a_{nh} = 0 (h = 1, 2, \ldots, n)$; les directions principales sont déterminées par le système

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n-1} a_{ik}\xi_k + \lambda\xi_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \\ &\quad \xi_n = 0, \end{aligned} \right. \tag{12}$$

dans lequel λ est une des racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} + \lambda & \ldots & a_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n-1} + \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{13}$$

et les a_{ik} sont maintenant symétriques. Les directions cherchées sont les axes d'une forme quadratique à $(n-1)$ variables, et forment, par suite, un $(n-1)$ èdre orthogonal.

Si l'on prend ces directions comme axes de coordonnées dans (A), le système (14) devient

$$\left\{ \begin{aligned} &(a_{ii} + \lambda)\xi_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n-1) \\ &\quad \xi_n = 0, \end{aligned} \right. \tag{12'}$$

et tous les résultats bien connus de l'espace ordinaire se retrouvent ici sans changement. Les $\lambda_i = -a_{ii}$ s'appellent encore, ici, les « courbures principales de la V_{n-1} ».

[**8**] Nous avons rencontré les relations

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{ik} a_{ik}\xi_i\xi_k = 0 \\ &\sum_i a_i\xi_i = 0; \end{aligned} \right. \tag{17}$$

les directions qu'elles définissent sont les « directions asymptotiques » de (a); elles sont leurs propres conjuguées. Si (a) est le vecteur normal d'une V_{n-1}, elles définissent les « lignes asymptotiques » de cette variété; leur 1-plan osculateur est tangent à la variété, sauf si une ligne asymptotique est également une géodésique de l'espace E_n.

CHAPITRE V

Application à l'étude des Variétés plongées dans un espace.

[**1**] Nous allons déterminer dans ce chapitre les relations entre une variété et un espace dans lequel elle est plongée.

Soit E_n un espace défini par les n formes de Pfaff $d\omega_i$; son ds^2 est $\sum\limits_i d\omega_i^2$. Sur une variété V, à p dimensions, de cet espace, les x_i sont fonctions de p variables indépendantes, et les $d\omega_i$ sont des formes linéaires de p formes de Pfaff de ces variables

$$(1) \qquad d\omega_i = \xi_i^1 du_1 + \xi_i^2 du_2 + \ldots + \xi_i^p du_p.$$

On peut prendre pour les $du_a (a = 1, 2, \ldots, p)$, un système de coordonnées orthogonales, c'est-à-dire tel que $ds^2 = \sum\limits_a du_a^2$, sur V. Dans ces conditions les ξ_i^a définissent p vecteurs unités, tangents à V, et orthogonaux deux à deux. Pour étudier V, nous complèterons le n-èdre avec $q = n - p$ vecteurs unités normaux, $a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^q$.

Nous aurons affaire dans la suite à deux sortes d'indices : les uns $(1, 2, \ldots, p)$, que nous appèllerons « tangents », seront désignés par les lettres romaines $a, b, c, \ldots$; les autres $(1, 2, \ldots q)$, dits indices « normaux », seront désignés par les lettres grecques $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.

Ceci posé, les rotations du n-èdre orthogonal, le long de V, sont données par les équations

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\overline{\partial}\xi_i^a}{\partial u_b} &= \sum_c \tau_{acb}\xi_i^c + \sum_\alpha P^\alpha_{ab} a^\alpha_i \\ \frac{\overline{\partial} a_i^\alpha}{\partial u_b} &= -\sum_\alpha P^\alpha_{ab}\xi^a_i + \sum_\beta R_b^{\alpha\beta} a_i^\beta, \end{aligned} \right.$$

avec, suivant les propriétés des rotations, $\tau_{acb} + \tau_{cab} = 0$, $R_b^{\alpha\beta} + R_b^{\beta\alpha} = 0$.

Il est clair que si E_n est donné, ces trois espèces de rotations ne sont pas quelconques, d'après l'identité (1); nous désignerons par T les symboles de E_n, et nous allons voir que les τ_{acb} sont les rotations du ds^2 de V. En effet, $(\overline{\delta, d})\omega_i = 0$ donne, le long de V,

$$(\overline{\delta, d})\omega_i = \sum_a \xi_i^a(\delta, d)u_a + \sum_{bc} \frac{\partial \xi_i^b}{\partial u_c}(du_b \delta u_c - du_c \delta u_b) = 0$$

$$= \sum_{bc} (du_b \delta u_c - du_c \delta u_b) \left\{ \sum_a \xi_i^a (\sigma_{bca} + \tau_{bac} - \tau_{cab}) + \sum_\alpha a_i^\alpha (P^\alpha_{bc} - P^\alpha_{cb}) \right\} = 0;$$

et, par suite,

$$\tau_{acb} - \tau_{abc} = \sigma_{cba},$$
$$P^\alpha_{bc} = P^\alpha_{cb}.$$

La première identité est une conséquence des relations (10) et (15) du chapitre I, et la deuxième exprime la symétrie des P^α_{ab} par rapport à leurs indices inférieurs.

Remarquons que ces équations sont invariantes pour tout changement de variables dans E_n, et dans V, ainsi que pour toute transformation orthogonale des $d\omega_i$. Il en sera de même des équations que nous en déduirons par la suite.

[**2**] Les formules précédentes se rattachent aux changements de coordonnées étudiés dans le chapitre II. Considérons la famille des V_p

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1, \quad \ldots\ldots, \quad f_{n-p}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_{n-p};$$

en chaque point M de E_n, passe une variété de cette famille, avec un $(p-1)$ plan tangent $(\xi_i^1, \xi_i^2, \ldots, \xi_i^p)$ et un $(q-1)$ plan normal $(a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^q)$. On peut faire le changement de coordonnées

$$d\omega_i = \sum_{k=1}^{n} \theta_i^k d\omega'_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les θ_i^k sont des fonctions de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, égales à ξ_i^k si $k \leqslant p$, et à a_i^{k-p} si $k \geqslant p+1$.

Dans ces conditions, le long d'une V_p, on a $d\omega'_{p+1} = 0, \ldots, d\omega'_n = 0$; donc ces équations, équivalentes à $df_1 = 0, \ldots, df_{n-p} = 0$, forment un système complètement intégrable. En désignant par τ'_{ikh} les rotations des $d\omega'_k$, l'identification des équations (2) avec les relations (3, ch. IV) nous donne

$$\left\{\begin{aligned} \tau_{abc} &= \tau'_{abc} \\ P^\alpha_{ab} &= \tau'_{a,p+\alpha,b} \\ R_b^{\alpha\beta} &= \tau'_{p+\alpha,p+\beta,b}; \end{aligned}\right.$$

la dernière relation met bien en évidence la symétrie gauche des $R_b^{\alpha\beta}$; d'après la précédente, la symétrie des P_{ab}^{α} s'écrit $\tau'_{a,p+\alpha,b} - \tau'_{b,p+\alpha,a} = \sigma'_{b,a,p+\alpha} = 0$, qui est bien vérifiée d'après ce que nous savons du système $d\omega'_{p+\alpha} = 0 (\alpha = 1, 2, \ldots, q)$.

Nous appellerons « rotations internes » de V, les τ_{abc}; « rotations externes » de V dans E_n les P_{ab}^{α}, et « rotations de torsion » les $R_b^{\alpha\beta}$.

[**3**] Avant de pousser plus loin cette étude, nous allons généraliser un peu quelques définitions du calcul différentiel absolu. Ayant affaire à des systèmes de quantités à r indices tangents, et s indices normaux, définies sur V, nous appellerons « différentielle absolue le long de V », et nous la représenterons par $\bar{d}_{\mathrm{V}}$, l'opération

$$(3) \qquad \bar{d}_{\mathrm{V}} X^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}_{a_1a_2\ldots a_r} = dX^{\alpha_1\ldots\alpha_s}_{a_1\ldots a_r} - \sum_{kbc} \tau_{a_kbc} X^{\alpha_1\ldots\alpha_s}_{a_1\ldots a_{k-1}ba_{k+1}\ldots a_r} du_c$$
$$- \sum_{h\beta c} R_c^{\alpha_h\beta} X^{\alpha_1\ldots\alpha_{h-1}\beta\alpha_{h+1}\ldots\alpha_s}_{a_1\ldots a_r} du_c.$$

La définition de la dérivation absolue $\dfrac{\bar{\partial}_{\mathrm{V}}}{\partial u_c}$ est toujours $\bar{d}_{\mathrm{V}} X = \sum_c \dfrac{\bar{\partial}_{\mathrm{V}} X}{\partial u_c} du_c$; on pourra encore écrire $\dfrac{\bar{\partial}_{\mathrm{V}} X^{\alpha_1\ldots\alpha_s}_{a_1\ldots a_r}}{\partial u_c} = X^{\alpha_1\ldots\alpha_s}_{a_1\ldots a_r/c}$ quand il n'y aura pas d'ambiguïté avec la dérivation dans E_n, et introduire une virgule pour séparer les indices qui sont laissés de côté dans la dérivation.

Les opérations sur les systèmes d'expressions, définies au chapitre I, se généralisent tout naturellement, car les méthodes de calcul établies pour ces opérations, étaient dues uniquement à la symétrie gauche des τ_{abc}, et nous savons que les $R_c^{\alpha\beta}$ ont la même propriété.

[**4**] La différentiation absolue le long de V n'est pas commutative; pour étudier l'influence de la permutation de deux différentiations successives, il suffit de remarquer que les indices tangents et normaux ont des rôles indépendants et analogues, de sorte que le calcul du chapitre I, qui correspond aux indices tangents, n'a qu'à être reproduit pour les indices normaux à condition de remplacer les rotations internes par les rotations de torsion.

La relation cherchée s'écrit donc

$$(4) \qquad (\overline{\delta, d})_{\mathrm{V}} X^{\alpha_1\ldots\alpha_s}_{a_1\ldots a_r} = (\delta, d) X^{\alpha_1\ldots\alpha_s}_{a_1\ldots a_r} - \sum_{kbcd} \tau^{a_kb}_{cd} X^{\alpha_1\ldots\alpha_s}_{a_1\ldots a_{k-1}ba_{k+1}\ldots a_r} du_c \delta u_d$$
$$- \sum_{h\beta cd} R^{\alpha_h\beta}_{cd} X^{\alpha_1\ldots\alpha_{h-1}\beta\alpha_{h+1}\ldots\alpha_s}_{a_1\ldots a_r} du_c \delta u_d,$$

où les

$$(5) \qquad R^{\alpha\beta}_{cd} = R^{\alpha,\beta}_{c}/_{d} - R^{\alpha,\beta}_{d}/_{c},$$

s'expriment avec $R^{\alpha\beta}_{a}$ comme les τ^{ab}_{cd} avec les τ_{abc}. On a évidemment, d'après leur expression,

$$R^{\alpha\beta}_{cd} = - R^{\alpha\beta}_{dc} = - R^{\beta\alpha}_{cd} = R^{\beta\alpha}_{dc}.$$

Enfin les dérivées premières absolues des $R^{\alpha\beta}_{cd}$ sont reliées entre elles comme celles des symboles de Riemann; on peut le voir en reprenant, par exemple, le calcul du chapitre I (paragr. 13), avec un système de fonctions uniformes X^{α}_{a}. On a donc

$$(6) \qquad R^{\alpha\beta}_{cd}/_{e} + R^{\alpha\beta}_{de}/_{c} + R^{\alpha\beta}_{ec}/_{d} = 0.$$

Remarquons enfin que, les conditions d'intégrabilité d'un système d'équations différentielles étant une conséquence de la théorie du covariant bilinéaire, rien ne sera changé, en principe, sur ce sujet, aux méthodes du premier chapitre.

[**5**] Ceci posé, la recherche des propriétés de V, qui ne dépendent pas du choix des axes du p-plan tangent et du q-plan normal, sera la généralisation immédiate du chapitre II; en particulier, nous devrons retrouver les invariants intrinsèques de V.

Il faut déterminer les invariants pour deux sortes de transformations orthogonales, relatives aux du_a et aux a_i^{α}; nous savons en effet que nos équations sont indépendantes de toute transformation orthogonale relative à l'indice i.

Soient

$$(\mathrm{I}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (7) & \left\{ \begin{aligned} du'_a &= \sum_b \theta_b{}^a\, du_b \\ \xi'^a_i &= \sum_b \theta_b{}^a\, \xi_i^b, \end{aligned} \right. \\[2ex] (8) & \quad a'^{\alpha}_i = \sum_{\beta} \rho_{\beta}{}^{\alpha}\, a_i^{\beta}, \end{array} \right.$$

ces deux groupes orthogonaux; nous aurons, le long de V, deux sortes de covariance, la « covariance tangente », et la « covariance normale », relatives aux deux sortes d'indices. Un système d'expressions $X_{a_1 \ldots a_r}^{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$, à $(r+s)$ indices sera dit covariant (r, s) si les quantités transformées sont

$$X'^{\alpha_1 \ldots \alpha_s}_{a_1 \ldots a_r} = \sum_{b_1 \ldots b_r \beta_1 \ldots \beta_s} \theta_{b_1}^{a_1} \ldots \theta_{b_r}^{a_r} \rho_{\beta_1}^{\alpha_1} \ldots \rho_{\beta_s}^{\alpha_s} X_{b_1 \ldots b_r}^{\beta_1 \ldots \beta_s}; \tag{9}$$

et le principe de la saturation des indices est, naturellement, conservé.

[**6**] Si nous suivons l'ordre du chapitre II, nous devons prolonger les deux groupes (I).

En affectant d'un prime les symboles transformés, on a

$$\bar{d}'\xi'^{a}_{i} = \sum_{ce} \frac{\bar{\partial}'\xi'^{a}_{i}}{\partial u'_{c}} \theta_{e}{}^{c} du_{e} = \sum_{de} \left(\frac{\partial \theta_{d}{}^{a}}{\partial u_{e}} \xi_{i}{}^{d} + \theta_{d}{}^{a} \frac{\bar{\partial}\xi_{i}{}^{d}}{\partial u_{e}} \right) du_{e},$$

$$\bar{d}'a'^{\alpha}_{i} = \sum_{ab} \frac{\bar{\partial}'a'^{\alpha}_{i}}{\partial u'_{a}} \theta_{b}{}^{a} du_{b} = \sum_{\beta b} \left(\frac{\partial \rho_{\beta}{}^{\alpha}}{\partial u_{b}} a_{i}{}^{\beta} + \rho_{\beta}{}^{\alpha} \frac{\bar{\partial} a_{i}{}^{\beta}}{\partial u_{b}} \right) du_{b};$$

et l'identification des deux derniers membres de chacune de ces deux relations donne les transformations cherchées

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \tau'_{abc} = \sum_{de} \theta_{d}{}^{b} \theta_{e}{}^{c} \theta^{a}{}_{d/e} \\ R'_{a}{}^{\alpha\beta} = \sum_{b\gamma} \theta_{b}{}^{a} \rho_{\gamma}{}^{\beta} \rho^{\alpha}{}_{\gamma/b}, \end{cases}$$

$$(\mathfrak{L}_{2,1}) \qquad P'^{\alpha}{}_{ab} = \sum_{\beta cd} \theta_{c}{}^{a} \theta_{b}{}^{d} \rho_{\beta}{}^{\alpha} P^{\beta}{}_{cd}.$$

On déduit de là, par les mêmes calculs que plus haut, que la différentiation absolue conserve la covariance (r, s), et que les dérivées absolues d'ordre l d'un système covariant (r, s) sont des covariants $(r+l, s)$.

Il suffit d'appliquer l'identité (4) à des covariants pour constater que les τ_{cd}^{ab} sont des covariants (4, 0), et, les $R_{ab}^{\alpha\beta}$, des covariants (2, 2).

En résumé, dès les dérivées secondes des fonctions qui définissent V, nous avons des covariants (2, 1), les $P^{\alpha}{}_{ab}$; avec les dérivées troisièmes, des covariants (4, 0), (3, 1), (2, 2), à savoir les τ_{cd}^{ab}, $P^{\alpha}{}_{ab/c}$, $R_{ab}^{\alpha\beta}$; les dérivations successives fournissent alors trois séries de covariants

$$P(2+l, 1), \quad G(4+l, 0), \quad R(2+l, 2), \quad (l = 0, 1, 2, \ldots),$$

à partir des $P^{\alpha}{}_{ab}$, τ_{cd}^{ab}, $R_{ab}^{\alpha\beta}$.

Ces résultats permettent de former des invariants absolus, à l'aide des transformations infinitésimales des deux groupes orthogonaux, et par les méthodes utilisées au chapitre II.

[7] Ces invariants absolus représentent toutes les propriétés de la variété pour un observateur qui ne saurait assujettir le n-èdre d'étude qu'à être tangent à la variété, et ils suffisent à la caractériser par rapport à l'espace E_n.

En effet, étant données deux V_p de l'espace E_n, si l'on peut trouver deux observateurs à qui elles paraissent identiques, ceci se traduira par l'identité de leurs équations (1), relatives à ces deux observateurs particuliers (à une transformation orthogonale des $d\omega_i$ près (¹). On peut dire qu'elles sont « égales par rapport à E_n ».

Pour cela, il faut et il suffit qu'il existe deux transformations orthogonales $\theta^a{}_b$, $\rho^\alpha{}_\beta$, qui rendent compatibles les équations (I). Les conditions d'intégrabilité de ces équations s'obtiennent par différentiation, en tenant compte de (I) lui-même, ce qui donne les systèmes (II), $(\mathfrak{L}_{2,1})$.

$(\mathfrak{L}_{2,1})$ est fini par rapport aux $\theta^a{}_b$, $\rho^\alpha{}_\beta$, de sorte que les condilions de son intégrabilité expriment la covariance (3, 1) des $P^\alpha{}_{ab}/_c$.

D'autre part, le raisonnement employé, au chapitre III, pour la première ligne de ce système (II), s'applique à la deuxième, ce qui donne comme conditions d'intégrabilité de ce système les covariances (4, 0) et (2, 2) des τ^{ab}_{cd} et $R^{\alpha\beta}_{cd}$. Les systèmes $(\mathfrak{L}_{3,1})$, $(\mathfrak{G}_{4,0})$, $(\mathfrak{R}_{2,2})$ obtenus sont finis par rapport aux $\theta^a{}_b$, $\rho^\alpha{}_\beta$, de sorte que leur prolongement consistera à exprimer les covariantes des systèmes $P_{(4,1)}$, $G_{(5,2)}$, $R_{(3,2)}$ et ainsi de suite.

En résumé, les conditions trouvées sont analogues à celles du problème de l'application ; il faut et il suffit que le système

$$\text{(I)} \qquad (\mathfrak{L}_{2,1}) \quad (\mathfrak{L}_{3,1}) \quad (\mathfrak{L}_{4,1}) \ \ldots\ldots$$

$$\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} (\mathfrak{G}_{4,0}) \quad (\mathfrak{G}_{5,0}), \ \ldots\ldots \\ (\mathfrak{R}_{2,2}) \quad (\mathfrak{R}_{3,2}), \ \ldots\ldots \end{array} \right.$$

soit compatible.

Il est clair que si notre observateur peut repérer le n-èdre par rapport à V et à E_n, toutes nos rotations et les symboles qui s'en déduisent représentent des propriétés indépendantes des variables et des coordonnées $d\omega_i$, donc, des propriétés de V ou de certains éléments de V.

(¹) Toute déformation de E_n, supposée possible dans un espace d'ordre supérieur, n'intervient en rien dans nos équations. Mais il est clair que notre relation ne signifierait pas l'égalité relativement à ce dernier espace.

[**8**] Lorsqu'on veut déduire, de systèmes covariants, tous les invariants, il est indispensable de connaître les relations qui vérifient ces covariants. En un point M donné, de E_n, les différents symboles d'une V_p sont nécessairement liés aux symboles P_{ikh} de E_n, de sorte que les covariants absolus $P(2+l, 1)$, $G(4+l, 0)$, $R(2+l, 2)$ ne sont pas indépendants. On aura toutes les identités qui lient ces covariants entre eux en écrivant les conditions d'intégrabilité de (1); on a déjà, ainsi, obtenu (2), et il faut recommencer sur (2). Nous nous bornerons à une nouvelle différentiation.

Remarquons auparavant que les ξ_i^a, a_i^α, ont trois espèces d'indices, ce qui permet de considérer la différentiation absolue $\overline{\overline{d}}$ pour ces indices i, a, α, en prenant pour symboles correspondants les T_{ikh}, τ_{abc} et $R_c^{\alpha\beta}$; dans ces conditions le système d'équations (2) peut s'écrire

$$(2') \quad \left\{\begin{aligned} \overline{\overline{d}}\xi_i^a &= \overline{d}\xi_i^a - \sum_{bc} \tau_{abc}\xi_i^b du_c = \sum_{\alpha b} P^\alpha_{ab} a_i^\alpha du_b, \\ \overline{\overline{d}} a_i^\alpha &= \overline{d} a_i^\alpha - \sum_{\beta b} R_b^{\alpha\beta} a_i^\beta du_b = -\sum_{ab} P^\alpha_{ab}\xi_i^a du_b. \end{aligned}\right.$$

Cette différentiation suivant évidemment les règles connues relatives aux sommes, produits et compositions des systèmes, les conditions d'intégrabilité s'écrivent :

$$(10) \quad \begin{aligned} (\overline{\overline{\delta, d}})\xi_i^a &= -\sum_{khl} T^{ik}_{hl}\xi_k^a d\omega_h\delta\omega_l - \sum_{bcd}\tau^{ab}_{cd}\xi_i^b du_c\delta u_d \\ &= -\sum_{cd} du_c\delta u_d \left\{\sum_{khl} T^{ik}_{hl}\xi_k^a\xi_h^c\xi_l^d + \sum_b \tau^{ab}_{cd}\xi_i^b\right\}, \end{aligned}$$

$$(11) \quad (\overline{\overline{\delta, d}})a_i^\alpha = -\sum_{cd} du_c\delta u_d\left\{\sum_{khl}T^{ik}_{hl}a_k^\alpha\xi_h^c\xi_l^d + \sum_\beta R^{\alpha\beta}_{cd}a_i^\beta\right\};$$

d'autre part, la différentiation de (2′) donne

$$(12) \quad (\overline{\overline{\delta, d}})\xi_i^a = -\sum_{cd} du_c\delta u_d\left\{\sum_\alpha\left(-P^\alpha_{ac/d} + P^\alpha_{ad/c}\right)a_i^\alpha + \sum_{\alpha b}\left(P^\alpha_{ac}P^\alpha_{bd} - P^\alpha_{ad}P^\alpha_{bc}\right)\xi_i^b\right\},$$

$$(13) \quad (\overline{\overline{\delta, d}})a_i^\alpha = -\sum_{cd}du_c\delta u_d\left\{\sum_a\left(P^\alpha_{ac/d}-P^\alpha_{ad/c}\right)\xi_i^a + \sum_{a\beta}\left(P^\alpha_{ac}P^\beta_{ad}-P^\alpha_{ad}P^\beta_{ac}\right)a_i^\beta\right\}.$$

Nous poserons

$$P^{ab}_{cd} = \sum_\alpha(P^\alpha_{ac}P^\alpha_{bd} - P^\alpha_{ad}P^\alpha_{bc}),$$

$$Q^{\alpha\beta}_{cd} = \sum_a (P^\alpha_{ac}P^\beta_{ad} - P^\alpha_{ad}P^\beta_{ac});$$

et il ne reste plus qu'à identifier (10) et (12) d'une part, (11) et (13) d'autre part, pous obtenir les relations cherchées

$$
(\mathrm{III}) \quad \left\{ \begin{array}{lrl}
(14) & \tau_{cd}^{ab} - \mathrm{P}_{cd}^{ab} = & \sum\limits_{ikhl} \mathrm{T}_{hl}^{ik} \xi_i^{\ a} \xi_k^{\ b} \xi_h^{\ c} \xi_l^{\ d} \\
(15) & \mathrm{P}_{ac/d}^{\alpha} - \mathrm{P}_{ad/c}^{\alpha} = & - \sum\limits_{ikhl} \mathrm{T}_{hl}^{ik} a_i^{\ \alpha} \xi_k^{\ a} \xi_h^{\ c} \xi_l^{\ d} \\
(16) & \mathrm{R}_{cd}^{\alpha\beta} - \mathrm{Q}_{cd}^{\alpha\beta} = & \sum\limits_{ikhl} \mathrm{T}_{hl}^{ik} a_i^{\ \alpha} a_k^{\ \beta} \xi_h^{\ c} \xi_l^{\ d}.
\end{array} \right.
$$

Les $\mathrm{Q}_{cd}^{\alpha\beta}$ sont des covariants (2, 2), symétriques gauches par rapport à leurs indices; les P_{cd}^{ab} sont covariants (4, 0) et vérifient les mêmes relations que les τ_{cd}^{ab}; enfin les $\mathrm{P}^{\alpha}{}_{ac/d} - \mathrm{P}^{\alpha}{}_{ad/c}$ sont des covariants (3, 1). Les relations (III) expriment l'analogie des τ_{cd}^{ab} et P_{cd}^{ab}, des $\mathrm{R}_{cd}^{\alpha\beta}$ et $\mathrm{Q}_{cd}^{\alpha\beta}$, et, dans un espace euclidien, ces symboles s'identifient deux à deux.

Les conditions d'intégrabilité de ce système s'obtiennent par de nouvelles différentiations, et donnent, sans difficulté, les relations entre les symboles à cinq indices de V et E_n.

[9] Les identités (III) nous apprennent que les $\dfrac{qp(p+1)}{2}$ rotations externes sont indépendantes entre elles, quant à leurs valeurs numériques en un point donné; les invariants absolus correspondants seront les plus simples de tous, et nous nous bornerons à eux dans ce qui suit. Nous les appellerons les « *courbures externes* », et nous allons déterminer leur nombre.

Auparavant, remarquons qu'on peut les obtenir en suivant les méthodes du chapitre (II); en particulier, on peut en former par saturation des indices, à partir des covariants P_{cd}^{ab} et $\mathrm{Q}_{cd}^{\alpha\beta}$; les premiers donnent un invariant particulièrement important, la « *courbure totale externe* », $\sum\limits_{ab} \mathrm{P}_{ab}^{ab}$; une autre courbure simple est l'invariant $\sqrt{\sum\limits_{\alpha}(\sum\limits_{a} \mathrm{P}^{\alpha}{}_{aa})^2}$, que nous appellerons la « *courbure moyenne externe* » (1).

---

(1) C'est la longueur du vecteur normal, de composantes $\sum\limits_{a} \mathrm{P}^{\alpha}{}_{aa}$, que M. Bompiani appelle la « normale de courbure moyenne ». Cf. *Atti del Reale instituto veneto di Scienze* (tome 80).

Ceci posé, tous les invariants sont les intégrales de deux systèmes, complets, de transformations infinitésimales,

$$(17)\qquad F_{ab}^{(2)}U = \sum_{\alpha, c}\left(P^\alpha_{ac}\frac{\partial U}{\partial P^\alpha_{bc}} - P^\alpha_{bc}\frac{\partial U}{\partial P^\alpha_{ac}}\right) = 0$$

$$(18)\qquad F_{\alpha\beta}^{(1)}U = \sum_{(a, b)}\left(P^\alpha_{ab}\frac{\partial U}{\partial P^\beta_{ab}} - P^\beta_{ab}\frac{\partial U}{\partial P^\alpha_{ab}}\right) = 0,$$

et les parenthèses $(F_{ab}^{(2)}, F_{\alpha\beta}^{(1)})U$ sont identiquement nulles.

Le premier système, relatif aux tenseurs symétriques, contient en tout $\frac{p(p-1)}{2}$ équations linéairement indépendantes. Soit N′ le nombre des équations linéairement distinctes dans le deuxième. Remarquons, d'autre part, que, si on annule les coefficients de ces équations, autres que les P^α_{aa}, les deux systèmes sont linéairement distincts, de sorte que le nombre total N des courbures externes est égal à $\frac{qp(p+1)}{2} - \frac{p(p-1)}{2} - N'$.

Or $\frac{qp(p+1)}{2} - N'$ est le nombre des invariants d'un système de $\frac{p(p+1)}{2}$ vecteurs à q dimensions; donc,

$$\text{si}\quad n \leqslant \frac{p(p+3)}{2},\qquad N = \frac{p(p+3)(n-p)}{2} - \frac{n(n-1)}{2},$$

$$\text{et si}\quad n \geqslant \frac{p(p+3)}{2},\qquad N = \frac{p(p+3)(p^2-p+2)}{8}.$$

Ce dernier nombre est le maximum de courbures externes que peut posséder une V_p.

Exemples : Si $p = 1$, $N = 1$; les équations (2) ne donnent pas d'autre invariant que la première courbure de la courbe, qui apparaît ainsi comme la courbure moyenne externe, alors que la courbure totale externe s'évanouit. On sait d'ailleurs que, pour faire apparaître les autres courbures de la courbe, il faut savoir choisir un $(n-1)$-èdre normal particulier.

Si $p = 2$, $N = 2, 4$, ou 5 suivant que $n = 3, 4$, ou $\geqslant 5$.

[**10**] Occupons-nous, plus particulièrement, d'une V_{n-1}. Dans ce cas, $N = n - 1$, et les équations (2) deviennent

$$(19)\qquad \begin{cases} \dfrac{\bar{\partial}\xi_i^a}{\partial u_b} = \sum_c \tau_{acb}\xi_i^c + P^1_{ab}a_i^1. \\ \dfrac{\bar{\partial} a_i^1}{\partial u_b} = -\sum_a P^1_{ab}\xi_i^a. \end{cases}$$

Nous avons vu au chapitre (IV) que l'on peut déterminer, sur cette V_{n-1}, $n-1$ directions principales orthogonales entre elles; ce qui permet de prendre les ξ_i^a suivant ces directions principales; dans cette hypothèse, on a, par définition,

$$\frac{\bar{\partial} a_i^1}{\partial u_b} = -\lambda_b\,\xi_i^b;$$

tous les P^1_{ab} $(a \neq b)$ sont nuls, et seuls, restent les P^1_{aa}, que nous avons appelés les courbures principales, et qui sont les $(n-1)$ courbures externes de la variété. Les seuls P^{ab}_{cd}, non nuls, sont $P^{ab}_{ab} = P^1_{aa}P^1_{bb}$, donc la courbure totale externe est la somme des produits des courbures principales combinées deux à deux; d'autre part, la courbure moyenne apparaît comme la somme des courbures principales.

D'après les identités (14), il existe une relation très intéressante entre la courbure totale interne et la courbure totale externe d'une V_{n-1}; on a en effet

$$\sum_{(a,b)} \tau^{ab}_{ab} - \sum_{(a,b)} P^{ab}_{ab} = \sum_{(a,b)(ik,hl)} T^{ik}_{hl}(\xi_i^a\xi_k^b - \xi_i^b\xi_k^a)(\xi_h^a\xi_l^b - \xi_h^b\xi_l^a).$$

Pour une V_{n-1}, $\quad \sum_a \xi_i^a\xi_h^a = \varepsilon_{ih} - a_i^1 a_h^1, \quad$ et il vient

$$(20)\qquad \sum_{(a,b)} \tau^{ab}_{ab} - \sum_{(a,b)} P^{ab}_{ab} = \sum_{(i,k)} T^{ik}_{ik} - \sum_{(i,k)} T_{ik}a_i^1 a_k^1,$$

T_{ik} étant le tenseur symétrique de E_m.

Le deuxième membre n'est pas nul en général, de sorte que les deux courbures totales de la variété sont distinctes; elles sont identiques si E_n est euclidien, ce qui donne la généralisation du théorème de Gauss sur les surfaces de l'espace ordinaire. Plus généralement, ceci aura lieu pour toute V_{n-1} de E_n, si le second membre est nul pour tout vecteur unité (a_i^1), ce qui donne immédiatement le :

Théorème. — *Les espaces E_n, dans lesquels les deux courbures totales d'une V_{n-1} quelconque sont identiques, sont les espaces dont le tenseur principal (ξ_{ik}) est identiquement nul; un tel espace, d'ordre 3, est euclidien.*

Si on se pose la même question pour les V_2, on voit facilement que « *les seuls espaces, dans lesquels toute* V_2 *a ses deux courbures totales égales, sont les espaces euclidiens* ».

[**11**] Nous terminerons en appliquant les généralités de ce chapitre à deux cas particuliers importants.

Considérons tout d'abord une V_p « géodésique en un point M », c'est-à-dire formée des géodésiques de E_n, issues, de M, dans les directions du p-plan tangent $(\xi_i^1, \xi_i^2, \ldots, \xi_i^p)$; le point M est évidemment supposé régulier pour V, et il résulte, de la définition, que $\overline{d}^2{}_V u_a = 0$ entraîne, en M, $\overline{d}^2\omega_i = 0$. Or, on a

$$\overline{d}^2\omega_i - \sum_a \xi_i^a \overline{d}^2{}_V u_a = \sum_{ab} \frac{\overline{\overline{\partial}}\xi_i^a}{\partial u_b} du_a du_b = 2 \sum_{(a,b)\alpha} P^\alpha{}_{ab} a_i^\alpha du_a du_b;$$

donc une pareille variété a toutes ses courbures externes nulles, et réciproquement.

Il est clair que cette propriété n'est pas en général dérivable le long de la variété. Nous appellerons « variété plane » une variété géodésique en tous ses points; le long d'une telle variété V, on a

$$\frac{\overline{\partial}\xi_i^a}{\partial u_b} = \sum_c \tau_{acb} \xi_i^c,$$

de sorte qu'elle apparaît comme n'occupant que p dimensions de E_n; par exemple, toute courbe de V a les mêmes $(p-1)$ courbures, qu'elle soit considérée dans E_n ou dans V; et, par suite, toute $V_{p'}$ $(p' < p)$ de V a les mêmes courbures externes par rapport à V et par rapport à E_n. Ce dernier point peut d'ailleurs être vérifié par un calcul direct très simple que je ne reproduis pas pour plus de brièveté.

[**12**] On peut rechercher les espaces E_n pour lesquels toute variété, géodésique en un point M, est plane. La relation (15) exige que les rotations de E_n, en M, vérifient l'identité

$$(21) \qquad \sum_{ikhl} T_{hl}^{ik} a_i^\alpha \xi_k^a \xi_h^b \xi_l^c \equiv 0,$$

a pouvant être égal à b ou à c, et, par suite, que E_n soit à courbure constante K.

Cela suffit évidemment, et, dans ces conditions, les formules (14) nous apprennent qu'une variété plane de cet espace est aussi de courbure constante K. Enfin, d'après (16), les $R^{\alpha\beta}_{cd}$ sont nuls, de sorte qu'on peut annuler toutes les rotations de torsion par un choix convenable des vecteurs normaux; le long d'une telle variété, l'espace normal reste parallèle à lui-même, au sens absolu.

[**13**] Un autre cas intéressant est celui où, en un point d'une V_p, tous les covariants P^{ab}_{cd} sont nuls; une telle variété sera dite « développable en ce point ». Voici un exemple particulier, analogue au cylindre de l'espace ordinaire.

Soit une V_{p-1}, géodésique en un point M; soit, d'autre part, un élément de courbe, normal à cette variété en M, et que nous déplaçons, au voisinage de M, en conservant le parallélisme le long de toute géodésique de V_{p-1}, issue de ce point; nous définissons ainsi une V_p, le long de laquelle on pose

$$d\omega_i = \sum_{a=1}^{p-1} \xi_i^a \, du_a + \xi_i^p \, du_p,$$

avec les identités

$$\frac{\bar{\bar{\partial}} \xi_i^a}{\partial u_b} = 0, \quad \frac{\bar{\partial} \xi_i^p}{\partial u_b} = 0 \qquad (a, b = 1, 2, \ldots, p-1);$$

donc tous les $P^\alpha{}_{ab}$ et $P^\alpha{}_{ap}$ sont nuls, et cette variété est développable en M.

Pour les variétés développables, comme pour les variétés géodésiques, on a

$$\tau^{ab}_{cd} = \sum_{ikhl} T^{ik}_{hl} \xi_i^a \xi_k^b \xi_h^c \xi_l^d; \tag{22}$$

En particulier, on peut dire que « *la courbure riemannienne d'un élément plan* (ξ_i^1, ξ_i^2) *de* E_n *est la courbure totale de toute* V_2 *développable, tangente à cet élément.* »

On voit également que « *dans un espace à courbure constante* K, *toute* V_p *développable est à courbure constante égale, et, réciproquement, toute* V_p *de courbure constante* K *est développable* ».

Voici enfin une autre propriété de ces espaces à courbure constante. Considérons une courbe Γ et les géodésiques de E_n normales à Γ; une famille de ces géodésiques Γ', choisies le long de Γ, définit une V_2; si $du_1 = 0$ sont ces géodésiques, on a $\frac{\bar{\partial} \xi_i^2}{\partial u_2} = 0$, donc τ_{212} et les $P^\alpha{}_{22}$ sont nuls sur la variété; sa courbure externe $P^{12}_{12} = -\sum_\alpha (P^\alpha{}_{12})^2$, de sorte que, si nous raisonnons sur un ds^2 défini positif et des éléments réels, cette V_2 ne sera développable que si tous les $P^\alpha{}_{12}$ sont nuls. Pour le réaliser, il faut d'abord choisir les Γ' de façon que les $P^{\alpha}{}_{12}$ soient nuls le long de Γ; il est clair que, si E_n est quelconque, la V_2 obtenue n'est pas complètement développable; pour qu'elle le soit, il faut et il suffit, d'après

$$P^{\alpha}{}_{22/1} - P^{\alpha}{}_{21/2} = -\frac{\partial P^{\alpha}{}_{21}}{\partial u_2} + 2\tau_{121} P^{\alpha}{}_{12} + \sum_{\beta} R^{\alpha\beta}{}_{2} P^{\beta}{}_{12} = \sum_{ikhl} T^{ik}_{hl} a_i^{\alpha} \xi_k^{2} \xi_h^{1} \xi_l^{2};$$

que les derniers membres de ces équations soient nuls le long de la variété. On obtient ainsi le :

THÉORÈME. — *Pour qu'une géodésique d'un espace E_n, normale à une courbe arbitraire, puisse engendrer une V_2 complètement développable, et cela quelle que soit la position initiale de cette géodésique, il faut et il suffit que E_n soit à courbure constante.*

Remarquons que l'on a $\frac{\partial \xi_i^1}{\partial u_2} = 0$, donc les courbes $du_2 = 0$ s'obtiennent par déplacement parallèle de Γ le long des géodésiques normales Γ'. Dans ce déplacement, la géodésique de E_n issue de ξ_i^1 décrit une V_2, tangente à la variété donnée, le long de la courbe Γ' correspondante, et cette variété tangente est plane, car E_n est à courbure constante; on trouve donc ici la propriété caractéristique des surfaces développables de l'espace ordinaire.