

ROGER SERVILLE

## Études sur le pendule conique

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3<sup>e</sup> série*, tome 15 (1923), p. 87-197

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1923\\_3\\_15\\_\\_87\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1923_3_15__87_0)

© Université Paul Sabatier, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# ÉTUDES SUR LE PENDULE CONIQUE

Par M. ROGER SERVILLE

## INTRODUCTION

**1. Origine du travail.** — Comme je désirais entreprendre un travail sur l'hydrodynamique, M. Bouasse me proposa l'étude de l'oscillation d'un liquide dans un tuyau.

Après la théorie de Navier et les expériences de Poiseuille sur l'écoulement, il semblait intéressant de soumettre l'oscillation à des mesures précises et de rapprocher les résultats obtenus de ceux que donne la théorie de l'écoulement, étendue à l'oscillation.

**2. Obtention et entretien de l'oscillation liquide.** — Remplissons d'eau un tube de verre en forme d'U, créons une dénivellation à l'un des bouts et laissons osciller la colonne liquide. Pour déterminer la période  $\tau$  avec précision, comptons plusieurs oscillations. Les frottements amortissent l'amplitude et l'instant du passage de la colonne liquide par sa position d'équilibre est d'autant plus difficile à déterminer que l'amplitude est plus petite : la précision relative reste faible. Pour l'augmenter entretenons le phénomène.

Au bout du bras horizontal  $b$ , le pendule circulaire P (*fig. 1*), de période T, porte une baguette de verre  $a$  qui plonge dans la colonne liquide  $C_1$ . Le mouvement de la baguette crée une dénivellation liquide (force imposée) sinusoïdale par rapport au temps, de période T, que je suppose d'abord différente de la période propre  $\tau$  de la masse liquide (oscillateur). L'expérience montre qu'après quelques oscillations, sous l'action de la force imposée, l'oscillateur prend la période T avec un retard en phase bien déterminé.

En déplaçant la lentille de plomb A sur la tige du pendule, je lui donne une période  $T, \neq T$ ; je recommence l'expérience. L'oscillateur prend la période  $T_1$  avec un retard qui diffère du précédent : à chaque valeur de  $T$  correspond une valeur du retard.

Helmholtz a montré que  $T = \tau$ , si le retard est d'un quart de période. D'où la méthode suivante pour déterminer  $\tau$  : faire varier  $T$  jusqu'à mettre les phénomènes en quadrature, puis mesurer  $T$ . Cette mesure est facile, puisque le pendule est entretenu : le problème se ramène au contrôle de la quadrature.

**3. Insuffisance du pendule circulaire.** — Le pendule P et l'oscillateur liquide sont en quadrature, si la baguette atteint son élongation supérieure maxima (vitesse nulle), quand le ménisque passe par sa position d'équilibre. L'instant du second phénomène est facile à déterminer; l'instant du premier, difficile. Pour vérifier la coïncidence des deux phénomènes, j'essaie le dispositif suivant :

Au bout de sa course, le doigt  $a'$ , fixé à droite du pendule, touche un levier coudé  $od$  qui porte un miroir  $m$  et pivote autour de l'axe  $o$ . De la fente horizontale F, large d'un centimètre, part un faisceau lumineux qui traverse la lentille  $l$ , se réfléchit sur le miroir  $m$  et donne son image, sous forme d'une bande lumineuse, sur le verre dépoli  $e$ ; ce verre est placé devant la partie supérieure du tube  $C_2$ .

Dans la lunette L, je vise le bas du ménisque  $C_2$ . A cause de la réfraction, ce ménisque envoie peu de lumière et son image sombre coupe nettement l'image brillante de la colonne liquide.

L'amplitude du pendule, entretenu électriquement, est réglée de manière qu'au bout de sa course, la bande lumineuse s'arrête un peu au-dessus du niveau d'équilibre du ménisque. Dans son va et vient, elle éclaire ce niveau d'équilibre à deux instants symétriques par rapport à celui où l'élongation de la baguette est maxima. Le retard est d'un quart de période, si, grâce à la persistance des impressions lumineuses, l'observateur voit les deux images du ménisque à égale distance de part et d'autre du réticule, primitivement confondu avec l'image du ménisque au repos.

En résumé, au lieu d'observer si le ménisque est dans sa position d'équilibre quand l'image s'arrête, je vérifie qu'il est à égale distance de part et d'autre de cette position, quand l'image repasse à la même distance de son élongation maxima.

En pratique, les éclairs sont trop longs, l'image du ménisque manque de netteté, l'observation est rendue difficile par la superposition des deux images : la méthode est d'une précision inférieure à la régularité du phénomène. Le pendule conique est préférable.

**4. Emploi du pendule conique.** — Dans l'appareil précédent, je remplace le pendule P par un autre très léger, en équilibre indifférent. Je lui impose un mouvement sinusoïdal au moyen d'une bielle mue par un pendule conique. J'utilise ce

pendule à produire une étincelle exactement à l'instant du maximum d'élongation de la baguette, ce qui est facile puisque le mouvement de l'extrémité du pendule est uniforme. Je projette cette étincelle, servant de source lumineuse, sur le verre dépoli *e* (fig. 1), au niveau d'équilibre du ménisque : la difficulté précédente est supprimée.

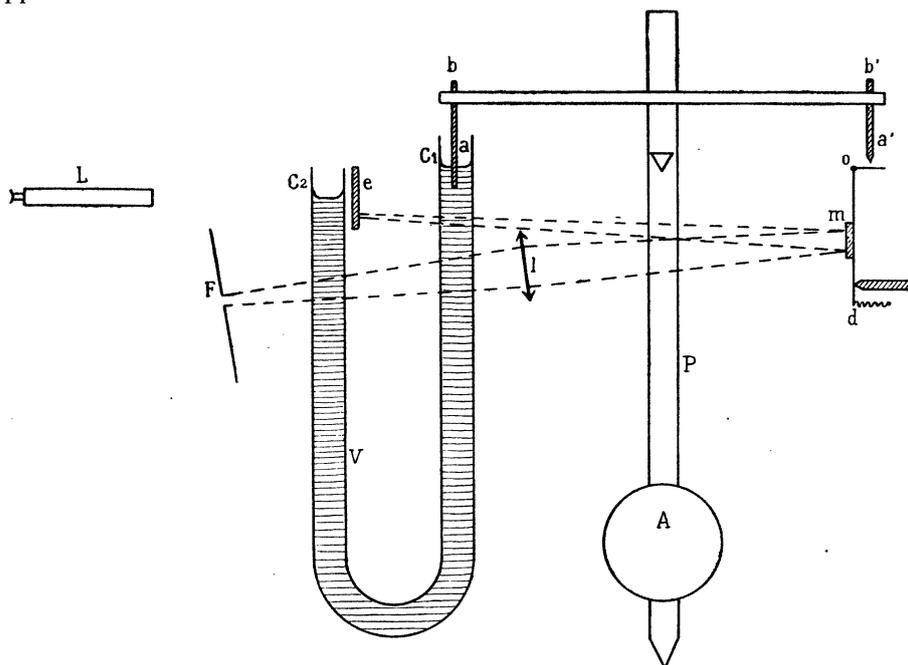


FIG. 1. — Entretien de l'oscillateur liquide par un pendule circulaire.

Un pendule conique construit suivant les données classiques, n'avait pas la régularité de l'oscillation liquide qui est de l'ordre de  $10^{-4}$ . En réduisant les frottements du manège qui porte la fourchette, j'ai rendu la période du pendule constante à l'approximation  $10^{-3}$ , toutes choses égales d'ailleurs. J'ai étudié la loi de variation de cette période en fonction de l'angle au sommet, et, comparant cette loi à celle que veut la théorie, j'ai prouvé l'existence de forces centrales perturbatrices dont j'ai entrepris l'étude systématique.

**5. Étude de la résistance de l'air.** — Ainsi, l'étude du pendule conique m'a conduit à celle des manèges. Disposant d'un mouvement circulaire régulier, je l'utilise à la mesure de la résistance de l'air sur des corps de formes variées, pour des vitesses de 100 à 10 cm. sec.

Pour les vitesses de 10 à 1 cm. sec., un manège spécial, dont les frottements solides sont négligeables, m'a permis de déterminer la loi de passage du régime hydraulique au régime visqueux.

**6. Plan de l'exposé.** — J'expose ces questions dans l'ordre de complexité croissante. Je décris mon manège; je l'applique à l'étude de la résistance de l'air dans le régime hydraulique (I<sup>re</sup> partie) et dans le régime visqueux (II<sup>e</sup> partie). J'utilise le manège à l'entretien du pendule conique considéré comme instrument de régulation (III<sup>e</sup> partie) et comme appareil de mesure des forces centrales (IV<sup>e</sup> partie).

L'application du pendule conique à l'étude de l'oscillation d'un liquide dans un tuyau fera l'objet d'un mémoire spécial.

Je remercie M. Bouasse, qui, avec la plus grande bienveillance, a mis à ma disposition les ressources de son laboratoire, n'a cessé de s'intéresser à mes recherches et de m'encourager de ses conseils.

---

## PREMIÈRE PARTIE

### Étude de la résistance de l'air dans le régime hydraulique.

#### CHAPITRE PREMIER

##### Obtention d'un mouvement circulaire régulier.

**7. Notations.** — Un solide est animé d'un mouvement rectiligne ou circulaire uniforme; désignons par :

$\mathcal{R}$ , la résistance opposée par le fluide au déplacement du corps;

$S$ , l'aire de la section droite du cylindre de contour apparent dont les génératrices sont parallèles à la vitesse;

$V$ , la vitesse linéaire;

$\varphi$  et  $\varphi' = \varphi : g$ , le poids et la masse spécifique du fluide ambiant.

Rappelons le raisonnement de Newton qui donne la résistance pour le régime hydraulique.

Posons que le corps communique une vitesse proportionnelle à  $V$ , à un volume de fluide proportionnel au volume  $SV$  balayé par seconde. Écrivons que le travail  $\mathcal{R}V$ , dépensé pour entretenir le mouvement, se retrouve dans l'énergie cinétique du fluide :

$$(1) \quad \mathcal{R}V = j\varphi SV \left( \frac{V^2}{2g} \right), \quad \mathcal{R} = j\varphi S \frac{V^2}{2g}.$$

Dans cette formule le coefficient  $j$  est sans dimension : c'est un *nombre indépendant du choix des unités*.

En introduisant dans le calcul de Newton les unités du système C. G. S., on retrouve la formule (1) où  $\varphi : g$  est remplacé par la masse spécifique  $\varphi'$ .

Renonçant à l'emploi de  $j$ , nombre de physiciens posent :

$$\mathbf{K} = j\varphi : 2g, \quad \mathcal{R} = \mathbf{K}SV^2.$$

Dans le système pratique et pour la densité de l'air  $\rho = 1,221$  (température  $t = 15^\circ$ ; pression  $h = 760$  mm.; tension de vapeur  $f =$  moitié de la tension maxima F), on a :  $j = 16,06$  K.

Quand  $\mathcal{R}$  est proportionnel à S et à  $V^2$ , pour chaque corps  $j$  est une constante déterminée une fois pour toutes. En fait, cette proportionnalité n'est pas rigoureuse; cependant on conserve la formule (1), y considérant  $j$  comme fonction de S et de V.

**8. Travaux antérieurs.** — 1° Depuis Newton un grand nombre de physiciens ont déterminé pour des corps de formes variées la valeur du coefficient  $j$  et ses variations en fonction de S et de V. La diversité des méthodes prouve leur imperfection. Elles se divisent en deux groupes suivant que le mouvement est imposé au fluide ou au solide :

a) Le corps est immobile, fixé au milieu ou au débouché d'un tunnel dans lequel le fluide est poussé par un ventilateur; malheureusement, loin de se déplacer uniformément, l'air progresse généralement par rafales.

b) Dans le fluide au repos le corps est animé d'un mouvement rectiligne uniforme (par exemple, guidé par un câble vertical, le corps tombe du second étage de la tour Eiffel). Hors le cas des petites vitesses, cette méthode exige le plein air : l'irrégularité des résultats montre que le vent est une forte cause d'erreur.

Pour rester dans un laboratoire, on remplace souvent le mouvement rectiligne par un mouvement circulaire : je critique cette méthode § 9.

2° RÉSULTATS (1). — Pour le plan mince et des vitesses de 50 cm. à 50 m. à la seconde,  $\mathcal{R}$  est proportionnel à  $V^2$  et à  $S^2$ ; le paramètre  $\alpha$  est légèrement plus grand que 1. Après tant d'expériences la valeur de  $j$  devrait être bien connue : or, suivant les physiciens, les résultats varient de 0,96 et 1,90; ce qui prouve la difficulté de préciser les conditions de l'expérience. Eiffel trouve  $j = 1,06$  par la méthode du tunnel;  $j = 1,20$  quand le disque tombe du haut de sa tour. Voici quelques nombres obtenus avec des manèges :

Expérimentateur.	Longueur du bras du manège en cm.	Diamètre du disque en cm.	$j$	K
Mannesmann.....	49	10,0	1,48	0,092
Hagen.....	250	9,2	1,18	0,074
Dines.....	850	11,5	1,36	0,085
Langley.....	925	15,2	1,36	0,085

(1) Voir le résumé des principaux résultats : Eiffel, *Résistance de l'air, Examen des expériences*, Dunod, 1910.

Pour la sphère, les hémisphères et le cylindre, les résultats présentent des écarts analogues :

Expérimentateur.	Méthode.	Date.	Plan $j =$	Sphère.	Hémisphère creux, convexité en avant.	Hémisphère creux, concavité en avant.
Von Lössl. ....	Manège, bras de 100 cm.	1892	1,67	0,48	0,66	1,97
Renard .....						
Eiffel .....	Tunnel.	1914	1,06	0,18	0,34	1,33

Pour un disque plan de  $d = 20$  cm., Renard <sup>(1)</sup> trouve  $j = 1,65$ . Cette valeur étant supérieure à la moyenne des résultats trouvés avant lui, Renard admet que, dans ses expériences, la résistance est augmentée par l'influence du mouvement circulaire et que le vrai coefficient est  $j = 1,36$ . Il pose de plus que cette influence majeure dans le même rapport les résultats pour les autres surfaces. Il corrige ces résultats par le facteur  $1,36 : 1,65$ .

D'après Eiffel <sup>(2)</sup>, les écarts pour le coefficient de la sphère s'expliquent par une discontinuité. Pour une sphère de  $d = 16$  cm.,  $j$  passe de  $j_1 = 0,48$  à  $j_2 = 0,16$ , au voisinage de  $V = 12$  m. sec. Cette discontinuité a lieu pour des vitesses d'autant plus grandes que le diamètre de la sphère est plus petit. En extrapolant les résultats d'Eiffel, cette discontinuité correspond à la vitesse de 17 m. sec., pour la sphère de  $d = 10$  cm., que j'utilise.

Comme je me borne aux vitesses inférieures à 1 m. sec., je reste dans la région où  $j_1 = 0,48$ . Pour des sphères de diamètre supérieur à 16 cm., Eiffel trouve  $j_1$  inférieur à 0,48.

Eiffel ne rencontre pas semblable discontinuité pour les hémisphères.

**9. Critique de la méthode du manège.** — 1° Dans l'application de la méthode du manège, deux conditions faciles à remplir, sont souvent négligées.

a) Lorsque la vitesse angulaire du manège n'est pas constante, on compare la résistance moyenne à la vitesse moyenne, ce qui n'est pas légitime, puisque  $\mathcal{R}$  est proportionnel à  $V^2$ .

Pour réaliser une vitesse constante, j'utilise un poids comme moteur et je réduis les frottements solides du manège : sa régularité dépasse alors celle du phénomène (voir § 13).

<sup>(1)</sup> Renard, *C. R.*, 24 mai 1904.

<sup>(2)</sup> Eiffel, *La résistance de l'air et l'aviation*, Dunod, 1914.

b) Le dynamomètre, placé près du corps, trouble le phénomène.

Je prends pour mesure de la résistance le poids moteur, ce qui me dispense de tout dynamomètre.

2° La méthode *elle-même* prête à de graves objections.

c) On ne peut supprimer le bras qui trouble le phénomène.

En réduisant l'épaisseur du bras, je rends ce trouble négligeable (voir § 18).

d) Le corps trouve devant lui une atmosphère agitée par ses passages antérieurs. Après quelques tours, le fluide prend même un mouvement d'ensemble (coaxial au manège), qui diminue la valeur apparente de la résistance.

L'erreur *absolue* croît quand diminue le rayon du manège, quand augmente la vitesse et le diamètre du corps. L'erreur relative augmente quand la vitesse diminue (Deutsche Seewarte) (1); Reckuagel (2) admet qu'avec un bras de 2 m., la vitesse d'entraînement de l'air atteint 0,05 de la vitesse du corps, ce qui donne une correction de 0,1 sur  $j$ .

Je trouve que l'erreur due à l'entraînement est inférieure à 0,01, pour un bras de 35 cm., un disque de  $d = 10$  cm., des vitesses de 55 et 110 cm. sec. (§ 19).

e) Le mouvement étant circulaire, les divers points du corps n'ont pas la même vitesse linéaire; le phénomène (intéressant en lui-même) ne peut être confondu avec celui de la translation.

J'étudie la variation de  $j$  en fonction du rayon  $R$  du manège. Quand  $R$  croît,  $j$  tend vers une limite que je prends comme valeur de  $j$  pour la translation.

**10. Entretien indéfini d'un manège.** — 1° L'axe vertical  $a$  (fig. 2) traverse la bande métallique  $m$ , et pivote sur une crapaudine. Il porte la poulie motrice  $M$  de rayon  $r'$  (entraînée par fil sans fin) et deux bras opposés  $b, b'$ , au bout desquels je fixe les corps à étudier. La portion de fil qui s'éloigne de  $M$ , passe sur les poulies  $P_1, P_1, Q, P_2, P_3$  et revient sur  $M$ .  $P_1$  porte un plateau et des poids;  $P_2$ , un pont en fil de platine dont les extrémités plongent dans deux godets remplis d'eau acidulée. Par construction, les systèmes  $P_2 + \text{pont}$ ,  $P_1 + \text{plateau}$ , ont même poids. La poulie  $M$  tourne sous l'action du poids  $Pg$ , placé dans le plateau. Par tour de  $M$ , le fil se déroule de  $2\pi r'$ ,  $P_1$  descend,  $P_2$  monte de  $\pi r'$ , d'où (en C. G. S.) :

$$\begin{aligned} \text{Travail moteur :} & \quad \pi r' Pg, \\ \text{Couple moteur :} & \quad r' Pg : 2. \end{aligned}$$

2° Si la poulie  $Q$  était immobile le mouvement s'arrêterait bientôt. Pour l'entretenir, une dynamo, montée avec le pont en dérivation sur le secteur, fait tourner  $Q$  dans le sens qui remonte  $P_1$ . Sous l'action du poids  $P$ , le manège prend une certaine vitesse à laquelle doit correspondre la vitesse du moteur pour maintenir immobile le plateau et le pont. Si le moteur va trop vite, le pont descend dans l'eau aci-

(1) et (2) Eiffel, *Résistance de l'air*, Dunod, 1910, page 22.

dulée, la résistance électrolytique de la dérivation diminue, le courant qui la traverse augmente, celui qui alimente la dynamo diminue. C'est l'inverse si le moteur va trop lentement : après quelques oscillations, le pont se fixe à un niveau tel que la vitesse du moteur corresponde à celle du manège.

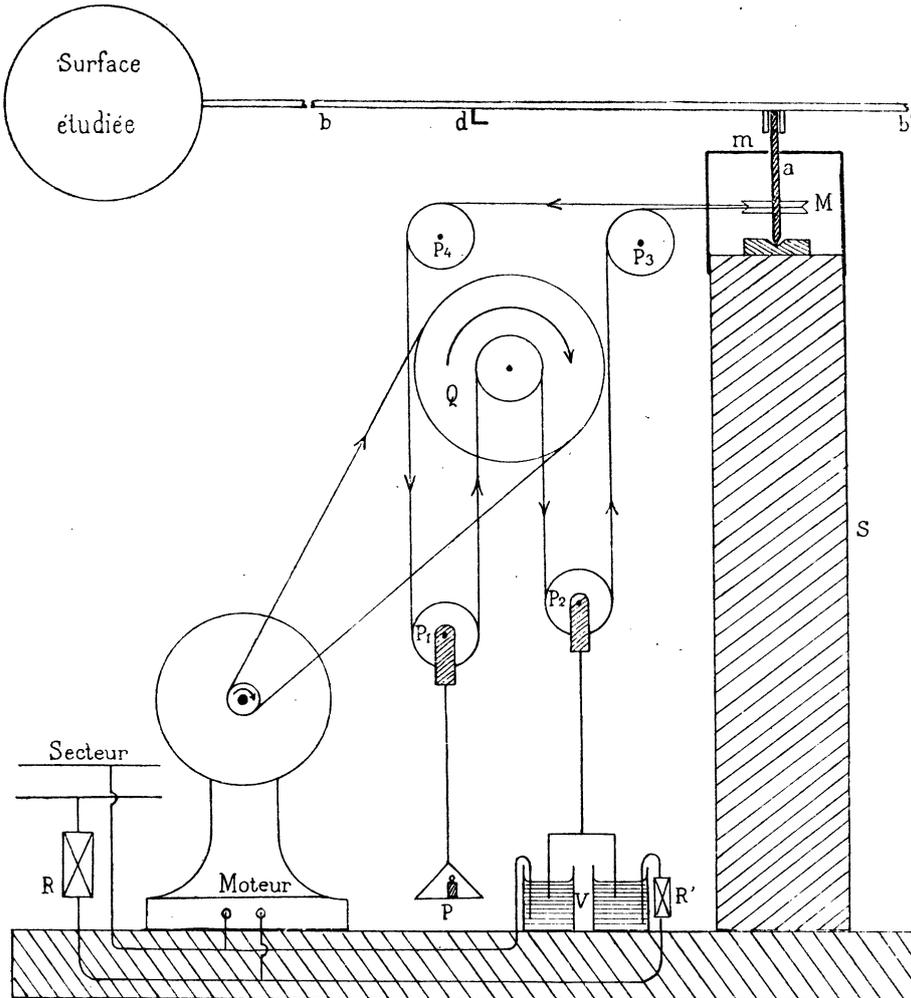


FIG. 2. — Manège 1. indéfiniment entretenu.

**11. Étude des frottements du manège.** — 1° Le couple moteur étant invariable, la régularité du manège dépend de la fixité des frottements : d'où l'avantage de les réduire au minimum.

Le frottement du pivot sur la crapaudine est négligeable (§ 16); celui de l'axe sur le bord du trou de la bande  $m$  est petit à condition d'équilibrer sur le pivot les bras et ce qu'ils portent. Reste le frottement de l'axe des quatre poulies  $P_1, P_2, P_3, P_4$ ,

puisqu'il celui de la poulie Q n'intervient pas. Pour rendre minimum le travail du frottement des axes sur leurs coussinets, le travail étant proportionnel à la charge et au déplacement, il faut prendre des poulies de grand rayon, d'axe fin et de faible masse.

2° Si les poulies  $P_1, P_2$  s'inclinent, la paroi verticale de la gorge frotte contre le fil. Pour l'éviter, j'abaisse le centre de gravité du système poulie + plateau (ou pont), au-dessous du point le plus bas de la poulie : sous la chape, je soude une tige longue de 20 cm., qui porte à son extrémité inférieure le plateau ou le pont. Le manège en marche, j'amène le fil au milieu de la gorge en fléchissant la tige avec les doigts.

**12. Détails sur la construction du manège 1.** — 1° Comme axe j'utilise une aiguille à repriser; comme bras, deux baleines de parapluie soudées sur un tube de clinquant vertical, qui coiffe à frottement dur le sommet de l'axe (*fig. 2*).

Les poulies de  $d = 3$  cm., en aluminium, pèsent 7 gr. Leurs axes, en acier, supportent sans fléchir des charges de 400 gr. Les pointes des axes s'engagent dans des empreintes coniques que j'imprime, d'un coup de pointeau, sur la bande métallique qui forme la chape. Le rayon  $r'$  de la poulie motrice M vaut 3,04 cm.

Pour que les branches du pont ne s'appliquent pas contre la paroi des vases, elles traversent les trous d'une plaque de verre (non représentée *fig. 2*), qui repose sur les vases.

Pour que le pont n'oscille pas dans la verticale, il faut que la vitesse angulaire du moteur varie lentement quand le courant moteur varie brusquement (en particulier si le pont quitte la surface libre du liquide) : d'où la nécessité de donner au rotor, par un procédé quelconque, un grand moment d'inertie et une vitesse angulaire notable.

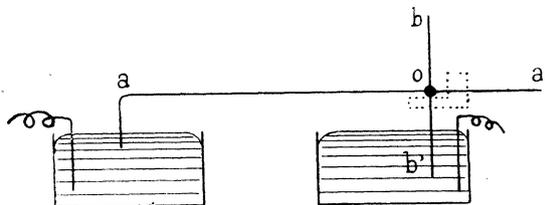


FIG. 3. — Levier coudé interrupteur.

2° Pour mesurer la vitesse de rotation du manège, un fil métallique fin, en forme de levier coudé  $ob$  (*fig. 3*), est soudé sur une aiguille  $o$ , qui sert d'axe horizontal. Le prolongement  $ob'$  de  $ob$  et le fil  $oa$  plongent dans des godets de mercure et ferment un circuit électrique. A chaque tour du manège, le doigt  $d$ , fixé sous le bras  $b$  (*fig. 2*), heurte  $ob$ , fait basculer le levier et rompt le circuit. Celui-ci contient l'électro d'un chronographe enregistreur, ou une lampe à filament métallique (qui reste lumineux moins longtemps que le filament de charbon et donne un signal plus net).

**13. Régularité du manège et du phénomène.** — 1° J'étudie le manège avec des bras de 65 cm., d'abord vides. J'accroche sous chaque poulie  $P_1$ ,  $P_2$ , des tares de 5 gr. (voir § 16). Pour un poids moteur  $p = 1,5$  gr., la période  $T$  est de 8,90 sec., quand la vitesse limite est atteinte.

J'augmente  $p$ ,  $T$  diminue; je détermine  $p(T)$  (courbe 65, *fig. 7*). Au point  $P_1(p = 1,5, T = 8,90)$ , je construis la tangente : son coefficient angulaire est 0,0130.

Pour étudier la régularité du manège vide, un grand nombre de fois et à plusieurs jours d'intervalle, je place dans le plateau le *même* poids  $p = 1,5$  gr., et je mesure  $T$ . Je trouve des nombres *différents*, qui oscillent autour de  $T = 8,90$  sec., avec un écart maximum de  $\Delta T = 0,077$  sec. J'attribue ces écarts à la variation des frottements solides.

Évaluons la variation maxima des frottements par la variation  $\Delta p$  de poids moteur qui produirait le même  $\Delta T$ .

Quand le frottement varie, la courbe 65 (obtenue pour un certain frottement), se déplace parallèlement à l'axe des ordonnées (§ 16).

Au point  $p = 1,5$ ,  $T = 8,90 + 0,077$ , de la courbe du frottement maximum, comme coefficient angulaire de la tangente, je prends le coefficient 0,130 déjà calculé au point voisin  $P_1$  de la courbe 65.

$$\text{Alors :} \quad \Delta p = 0,130 \times \Delta T = 0,010 \text{ gr.}$$

2° Pour étudier la régularité du manège chargé de corps, j'enlève les tares de 5 gr. et je place dans le plateau un poids moteur ( $P = 10$  gr.), tel que le manège prenne une période voisine de celle de l'expérience précédente. D'après celle-ci, la variation maxima des frottements solides du manège correspond à une variation de 0,010 gr. du poids moteur. Ce poids étant de 10 gr., l'énergie fournie aux corps est déterminée à  $10^{-3}$  près. Si le phénomène aérodynamique était régulier, l'écart relatif serait de 1 : 1000 sur  $\mathcal{R}$  et de 1 : 2000 sur  $T$  ou  $V$ , puisque  $\mathcal{R}$  est proportionnel à  $V^2$ .

Je mesure  $T$  un grand nombre de fois et je compare ses valeurs extrêmes à leur moyenne : l'écart est de 1 : 200 sur  $T$  ou  $V$ , soit 1 : 100 sur  $\mathcal{R}$ , dix fois plus grand que l'écart précédemment calculé. Cette expérience fixe la régularité du phénomène aérodynamique.

3° Les écarts de vitesse restent de l'ordre de 1 : 200 avec les manèges 2 et 2 *bis* (§§ 25 et 40), malgré la quasi suppression des frottements solides. Ceci confirme le résultat précédent : l'irrégularité vient du phénomène aérodynamique et non de la variation des frottements solides, ici négligeables.

Je change la forme du corps (plan, sphère, cylindre, etc.), la longueur du bras (35 à 140 cm.), la vitesse linéaire (10 à 100 cm. sec.), je retrouve les mêmes écarts de vitesse que j'attribue à l'état turbulent du phénomène.

## CHAPITRE II

### Mesure de la Résistance.

**14. Couple résistant  $\Omega$ , correction  $\omega$ , résistance  $\mathcal{R}$ .** — Dans ce travail je n'étudie que la composante horizontale de la résistance de l'air.

1° COUPLE RÉSISTANT  $\Omega$ . — Au bout des bras du manège 1, je place deux surfaces identiques et j'abandonne le système à l'action du couple moteur  $r'Pg : 2$ , indépendant de la vitesse du manège. A cause de la résistance de l'air le couple résistant croît avec la vitesse; je le représente par  $\Omega(T)$  où  $T$  est la période du manège. Après quelques tours le système atteint une vitesse limite telle que :

$$\Omega(T) = r'Pg : 2.$$

2° CORRECTION  $\omega$ . — Le couple  $\Omega$  résulte des frottements solides du manège, de la résistance de l'air sur les bras et sur les corps. Pour tenir compte des frottements solides et de la résistance de l'air sur les bras, je les sectionne en face du bord intérieur des corps que je retire et je cherche le couple moteur :

$$\omega = r'pg : 2,$$

qui entretient le manège vide dans les conditions de vitesse et de tension de fil de l'expérience précédente (§ 16). La présence des corps augmente le couple résistant de :

$$\Phi = \Omega - \omega = (P - p)r'g : 2.$$

3° La résistance  $\mathcal{R}$  sur chaque corps est donnée par la relation :

$$\Phi = 2\mathcal{R}R = (P - p)gr' : 2 \tag{1}$$

où  $R$  est la distance de l'axe au point d'application de la résistance. Ce point est sensiblement confondu avec le centre de symétrie, même pour des rotations de petits rayons (§ 15).

Introduisons  $j$  (§ 7), utilisons le système C. G. S. ( $\rho' = 0,001221$ ), remplaçons  $V$  par  $2\pi R : T$  :

$$j = \frac{2\mathcal{R}}{\rho' SV^2} = \frac{(P - p)gr'T^2}{4\pi^2 \rho' 2SR^3}; \tag{2}$$

relations où  $2\mathcal{R}$  est la résistance,  $2S$  la surface de l'ensemble des deux corps.

15. Position du point d'application. — Dans la rotation la vitesse du bord extérieur du corps est plus grande que celle du bord intérieur; si, pour chaque élément de surface, la pression était proportionnelle au carré de la vitesse de cet élément, le centre de pression serait au delà du centre de symétrie.

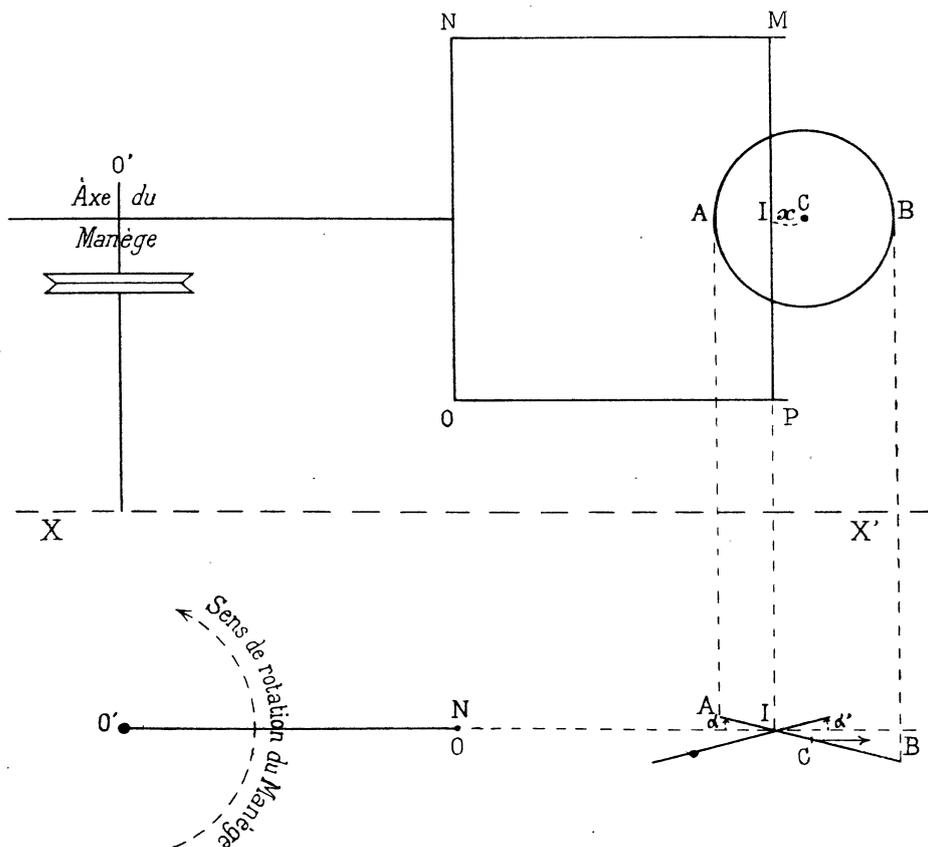


FIG. 4. — Détermination du point d'application de la résistance.

1° EXPÉRIENCE DE JOESSEL<sup>(1)</sup> SUR LE GOUVERNAIL. — Un disque oscille librement autour d'un axe vertical MP, distant de  $\overline{IC} = \alpha$  du centre de symétrie C (fig. 4). Immergé dans un courant uniforme d'eau, ce disque prend une position d'équilibre stable définie par l'angle  $\alpha$  (ou une position  $\alpha'$  symétrique par rapport à la direction de la vitesse). Le disque n'est soumis qu'à l'action de l'eau et à la réaction de l'axe : quand l'équilibre est atteint, la résistance coupe l'axe, par raison de symétrie, en I. En d'autres termes, le disque prend de lui-même une position  $\alpha$ , telle que la résistance passe par le point I, arbitrairement choisi à l'avance. Pour un disque carré Joessel trouve :

<sup>(1)</sup> Bouasse, *Mécanique physique*, 1912, p. 417.

si $x = 0$ ,	$\alpha = \alpha' = 0$ ;
si $x$ croît de 0 à $0,6 \overline{AC}$ ,	$\alpha = \alpha'$ croît de 0 à $90^\circ$ ;
si $x$ croît de $0,6 \overline{AC}$ à $\overline{AC}$ ,	$\alpha = \alpha' \equiv 90^\circ$ .

2° EXPÉRIENCE AVEC LE MANÈGE. — Mon manège porte une fourche MNOP (*fig. 4*), sur laquelle est tendu le cheveu MP, à  $R = 35$  cm. de l'axe  $O'$ . Le cheveu est collé sur un disque de carton de  $d = 10$  cm., à la distance  $IC = x$  de son centre. Voici les valeurs de  $\alpha, \alpha'$  en fonction de  $x$  :

$x$ en cm.	0	0,1	0,3	0,5	1	2	3	4
$\alpha$	0	$5^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$50^\circ$	$65^\circ$	$70^\circ$
$\alpha'$	0	$5^\circ$	$50^\circ$					

Pour  $x = 0$ ,  $\alpha = \alpha' = 0$  : le point d'application de la résistance est confondu avec le centre de symétrie. Pour  $x$  petit,  $\alpha$  est voisin de  $\alpha'$ ; quand  $x$  augmente,  $\alpha'$  croît plus vite que  $\alpha$  : pour  $x = 0,3$  cm., le disque ne reste pas indéfiniment dans la position instable  $\alpha'$  et saute en  $\alpha$ ; pour  $x > 0,3$  cm., la position  $\alpha$  subsiste seule; quand  $x$  croît jusqu'à  $\overline{AC}$ ,  $\alpha$  tend vers une limite inférieure à  $90^\circ$  : par rapport au cas de la translation les différences s'expliquent par l'addition en C de la force centrifuge (poids du disque = 2,6 gr.).

3° STABILITÉ, AUTOROTATION. — Les positions précédentes d'équilibre sont stables. D'un coup de baguette, augmentons  $\alpha$  : la résistance croît sur l'avant AI, décroît sur l'arrière IB, le point d'application passe à gauche de I,  $\alpha$  tend à reprendre sa valeur d'équilibre.

D'un fort coup de baguette imprimons au disque une rotation complète autour du cheveu : la rotation continue indéfiniment (autorotation de Lord Kelvin, Riabouchinsky, etc.). Elle s'entretient d'autant mieux que  $x$  est petit, R et V grands. Par exemple, pour  $x = 1$  cm.,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $R = 35$  cm., l'autorotation continue indéfiniment si  $T < 2''$ .

4° VARIATION DU RAYON DU MANÈGE ET DES DIMENSIONS DU DISQUE. — Pour  $x = 0$ , je fais décroître R de 70 à 10 cm. :  $\alpha \equiv 0$ , le point d'application reste confondu avec le centre.

Je modifie la forme du corps. Pour le disque carré, mêmes résultats que pour le circulaire. En  $R = 35$ , je place un rectangle de  $20 \times 5$  cm., sa grande dimension horizontale; pour  $x = 0$ , le bord extérieur avance,  $\alpha' = 5^\circ$  : d'où résulte que lorsque le rectangle est fixé en  $\alpha' = 0$ , le point d'application est entre l'axe du manège et le

centre de symétrie. Pour vérifier que ce résultat ne provient pas d'un défaut de symétrie du rectangle, je le retourne : c'est toujours le bord extérieur qui se place en avant.

**16. Mesure de la correction  $\omega$ .** — Je détermine  $\omega$  en plaçant le manège dans les conditions de l'expérience primitive : le pivot porte la même charge, le manège tourne à la même vitesse et sous la même tension du fil.

1° RÔLE DU POIDS DES CORPS ENLEVÉS. — Pour montrer qu'il est inutile de tenir compte du poids des corps enlevés et que le frottement du pivot est négligeable, je laisse invariable le poids moteur  $p$  et je mesure la période du manège :

a) un cavalier de plomb du poids des corps retirés, à cheval sur le sommet de l'axe ;

b) le cavalier précédent remplacé par un autre dix fois plus lourd ;

c) sans cavalier.

Dans les trois cas, je trouve la même période.

Pour montrer la nécessité d'équilibrer le manège 1 sur son pivot, je recommence la première expérience après avoir désaxé le cavalier : la période est fortement accrue, ce qui s'explique par l'augmentation du frottement de l'axe sur le trou de la bande  $m$  (*fig. 2*).

2° RÔLE DE LA VITESSE. — Pour le manège 1, des tares de 5 gr. placées sous les poulies  $P_1, P_2$ , je détermine les courbes  $p_1(T)$  avec les bras vides de 30, 45, 65, 85 cm. (*fig. 7*). Quand  $p_1$  décroît,  $T$  croît ; pour une valeur assez faible de  $p_1$ ,  $T = \infty$  (lancé à la main le manège s'arrête).

Par exemple, corrigeons la première expérience du tableau 1. Pour deux disques de  $d = 10$  cm., placés à  $R = 70$  cm. de l'axe,  $T = 11,50$  sec., quand  $P = 10$  gr. Par interpolation, sur la courbe 65, je détermine le poids  $p_1 = 1,28$  gr., qui donne cette période au manège vide. Le poids moteur corrigé serait  $P - p_1 = 10 - 1,28 = 8,72$  gr., si la tension du fil était la même dans les deux expériences.

3° RÔLE DE LA TENSION DU FIL. — Le poids  $p_1$  étant bien plus petit que  $P$ , la diminution de tension réduit le frottement de l'axe des poulies sur les coussinets. Vraisemblablement, cette variation du frottement solide (mesurée par la différence  $\Delta p_1$  des poids moteurs, pour la même période  $T$ ), est :

a) indépendante de la vitesse du manège. Pour le vérifier, je détermine  $p_1(T)$  en remplaçant les tares  $t = 5$  gr. (courbe 65, *fig. 7*), par d'autres tares  $t = 40$  gr. (courbe 65 bis) : on passe d'une courbe à l'autre par la translation  $\Delta p_1 = 1,26$  gr., indépendante de  $T$  ;

b) proportionnelle à la variation de tension moyenne. Comme tension moyenne, je prends la somme  $S$  des charges portées par le fil :

$$S = A + 2t + P \text{ (ou } p)$$

en appelant A le poids des poulies et de leurs accessoires : il faut vérifier que  $\Delta p_1 : \Delta S = c^e$ .

Pour des tares de 5, puis de 40 gr., l'expérience précédente donne :

$$\begin{aligned}\Delta p_1 &= p'_1 - p_1 = 1,26 \text{ gr.}, \\ \Delta S &= A + 2 \times 40 + p'_1 - (A + 2 \times 5 + p_1) = 71,26 \text{ gr.}, \\ \Delta p_1 : \Delta S &= 0,018.\end{aligned}$$

Pour des tares de 5, puis de 15 gr. (si  $l = 15$  gr. et  $p'_1 = 1,7$  gr., on a :  $T = 10,7$  sec., point P) :

$$\begin{aligned}\Delta p_1 &= p'_1 - p_1 = 0,36, \\ \Delta S &= A + 2 \times 15 + p'_1 - (A + 2 \times 5 + p_1) = 20,36, \\ \Delta p_1 : \Delta S &= 0,018.\end{aligned}$$

Pour des tares de 5, puis de 25, 35, 45, 55 gr., je trouve toujours  $\Delta p_1 : \Delta S = 0,018$ . Utilisons ce résultat pour finir de corriger la première expérience du tableau 1 :

$$\begin{array}{l} \text{dans l'expérience primitive :} \quad S = A + 0 + 10, \\ \text{dans la mesure de la correction } p_1 : \quad S' = A + 2 \times 5 + 1,28, \\ \hline \Delta S = + 1,28 \end{array}$$

$$\text{d'où : } \Delta p_1 = 0,018 \times 1,28 = 0,02 \text{ gr.}$$

Comme  $S' > S$ ,  $p_1$  est par excès, la charge corrigée devient :

$$P - (p_1 - \Delta p_1) = 10 - (1,28 - 0,02) = 8,74 \text{ gr.}$$

$\Delta p_1$ , en général notable, est ici petit parce que les tares compensent exactement, sous le rapport de la tension moyenne, la diminution du poids moteur qui résulte de la suppression des surfaces.

**17. Influence des obstacles.** — Le milieu n'est pas indéfini puisque le manège tourne dans un laboratoire : étudions l'influence des obstacles.

Au bout de chaque bras ( $oA, oA' = 40$  cm., *fig. 5 et 6*), je place un disque circulaire ( $AC = A'C' = 20$  cm.); sous l'action du poids moteur  $P = 10$  gr., je mesure T. Je recommence cette mesure après avoir placé un écran carré ( $DF = 70$  cm.) :

- 1° dans un méridien (*fig. 5*), la distance CD étant 10 cm., puis 1 cm.;
- 2° dans un plan normal au méridien (*fig. 6*), CE étant 10 cm., puis 1 cm.

Voici les périodes observées :

Expérience.	Sans écran.	1 CD = 10 cm.	1 bis. CD = 1 cm.	2 CE = 10 cm.	2 bis. CE = 1 cm.
T en sec. (Moyenne de 10 T).	7,995	7,975	7,962	7,958	7,864
Écart.....		- 0,020	- 0,033	- 0,037	- 0,131

L'incertitude du résultat est de 1 : 200 (§ 13), soit 0,04 sec. sur  $T = 8$  sec. L'écart est plus petit pour les expériences 1, 1 bis et 2 : le trouble est négligeable quand le disque passe à 1 cm. d'un petit obstacle (fil électrique, tuyau de gaz) et à 10 cm. d'un gros obstacle (poutre, mur).

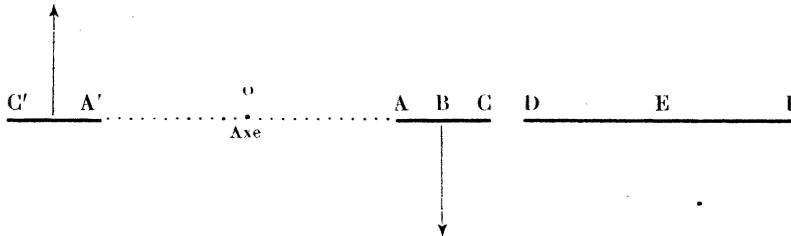


FIG. 5.

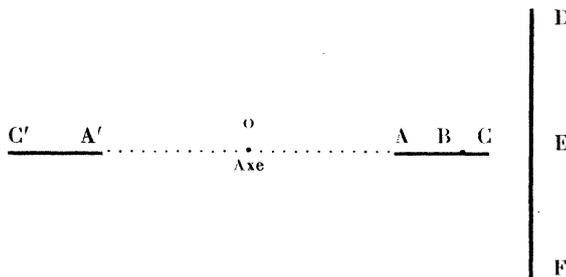


FIG. 6.

Dans l'expérience 2 bis, l'écart est supérieur à 0,04; la vitesse est augmentée par l'obstacle : près de lui, entre deux passages des disques, le mouvement de l'air entraîné ne s'amortit pas (cf. § 9, d).

Dans ce qui suit, je m'arrange pour que la trajectoire des corps soit à plus de 50 cm. de tout obstacle.

**18. Influence du bras.** — 1° A la vérité, je cherche la résistance des corps qui tourneraient sans l'aide des bras. Comme je ne puis les supprimer, je retranche leur

résistance de celle de l'ensemble (§ 14). Cette méthode n'est pas correcte en général, l'addition d'une surface modifiant l'ensemble des filets; elle paraît légitime ici parce qu'il s'agit d'une correction, le diamètre du bras étant petit devant celui du corps (0,2 cm. devant 10 cm.).

2° Pour contrôler que l'influence du bras est négligeable, je vérifie que  $\mathcal{R}$  ne change pas lorsque le diamètre du bras décroît de l'épaisseur de 0,2 cm. à celle d'un cheveu.

Au bout de chaque bras de 140 cm. du manège 2 (*fig. 10*), j'attache un cheveu, long de 15 cm., qui porte une sphère de  $d = 10$  cm. Pour un certain poids moteur,  $V = 64$  cm. sec., je coupe les cheveux au ras des sphères; je détermine la courbe  $p(T)$  du manège vide, avec laquelle je corrige l'expérience précédente. Sous l'action de la force centrifuge, les sphères s'écartent de la verticale de 0,6 cm., quand  $V = 64$  cm. sec., le rayon de la trajectoire est 140,6 cm. : je calcule  $j_2 = 0,495$ .

J'enlève les cheveux; au bout des bras je colle les sphères, leur centre à  $R = 140$  cm.; je mesure  $T$  pour divers poids moteurs. Je coupe les bras à  $R = 135$  cm.; je détermine la courbe  $p(T)$ , avec laquelle je corrige les expériences précédentes : je trace  $j(V)$  (*fig. 12*). Par interpolation sur cette courbe je détermine  $j_1 = 0,498$ , correspondant à la vitesse  $V = 64$  cm. sec. de l'expérience qui donne  $j_2$ .

Les dispositifs ne diffèrent que par l'épaisseur du bras; s'il troublait le phénomène, une variation de son diamètre modifierait le trouble : celui-ci est négligeable puisque  $j_1 = j_2$ .

3° Lorsque les sphères sont suspendues au bout des cheveux, l'expérience est difficile à cause de l'instabilité des sphères sur leur trajectoire circulaire. Quand la vitesse limite est atteinte, pendant quelques tours, les sphères gardent une position fixe dans le méridien. Peu à peu, dans ce méridien, autour du point d'attache du cheveu, elles prennent un mouvement oscillatoire d'amplitude croissante. Je retarde ces oscillations en lestant les sphères avec de la grenaille de plomb, sans atteindre le poids de 50 gr., qui casserait le cheveu. Les sphères lestées ne commencent à osciller qu'après dix tours; ces oscillations augmentent légèrement la période  $T$  du manège.

**19. Entraînement de l'air.** — 1° Il est évident que l'entraînement n'atteint sa limite qu'après plusieurs tours; comme il diminue la résistance, s'il est notable, les durées des quatre premiers tours décroissent :

$$T_4 < T_3 < T_2 < T_1.$$

Avec le manège 2 (*fig. 10*) placé dans une cave de  $6 \times 6 \times 2,40$  m., des corps de  $d = 10$  cm., fixés au bout de bras de  $R = 140$  cm., l'expérience donne :

$$T_4 = T_3 = T_2 < T_1,$$

pour des corps de quelques grammes. Pour les cylindres et les sphères qui pèsent 20 gr., la vitesse limite est atteinte au troisième tour : l'entraînement est négligeable.

Si l'on réduit les dimensions de la cave (en plaçant le manège dans une cage de papier), l'entraînement devient manifeste (§ 42).

2° Étudions l'entraînement par une autre méthode. L'entraînement doit être presque moitié quand j'enlève un des corps et que je laisse tourner l'autre, parce que la fréquence des passages devient moitié pour la même vitesse du manège.

Reprenons l'expérience du § 21. Après avoir mesuré  $T$  pour diverses valeurs de  $P$  (sphères de  $d = 10$  cm. collées sur les bras de  $R = 140$  cm. du manège 2), je sectionne l'un des bras, je retire la sphère qu'il portait et je conserve l'autre. J'équilibre le manège en collant sur le bras vide un cylindre de plomb qui offre à l'air une faible résistance, son axe étant parallèle à la vitesse. Pour un certain poids moteur,  $V$  égale 56 cm. sec. Je sectionne le second bras, je détermine  $p(T)$  et je corrige les expériences précédentes.

Avec une seule sphère : pour  $V = 56$  cm. sec.,  $j_2 = 0,504$ .

Avec deux sphères (courbe  $j(V)$ , *fig. 12*) : pour  $V = 56$  cm. sec.,  $j_1 = 0,501$ . Puisque  $j_1 = j_2$ , l'entraînement est négligeable.

Dans la mesure de  $j_2$ , la résistance négligée de l'air sur le cylindre de plomb, augmentant  $j_2$ , ne peut masquer l'entraînement qui agit dans le même sens.

3° Reconnaissons l'expérience avec un manège de petit rayon. Sur le manège 1, à  $R = 35$  cm., je place un disque ( $d = 10$  cm.), puis deux disques :  $j$  passe de 1,740 à 1,730, quand  $V = 55$  cm. sec.; de 1,728 à 1,743, quand  $V = 110$  cm. sec. Les écarts relatifs sont de l'ordre de 1 : 200 : *l'entraînement est négligeable même pour un manège de 35 cm. de rayon.*

Au-dessous de la trajectoire du disque, produisons des fumées ascendantes (§ 28). Observons-les dans un certain méridien. L'air entraîné par le disque est simplement agité, sans direction définie, quand un nouveau disque arrive dans le méridien.

Pour des rayons inférieurs à 35 cm., l'entraînement de la fumée devient manifeste.

**20. Approximation de  $j$ .** — Dans la relation (2) du § 14, pour déterminer le rayon  $r'$  de la poulie  $M$  (*fig. 2*), sur une règle graduée, je mesure le déplacement du nœud du fil quand je fais tourner le manège avec la main, d'un nombre exact de tours. Ce déplacement, de l'ordre de 50 cm., est mesuré à  $10^{-3}$  près.

Le poids moteur ( $P - p$ ), de l'ordre de 10 gr., est mesuré à  $10^{-3}$  près.

Le diamètre  $d$  du corps, de l'ordre de 10 cm., est mesuré au pied à coulisse à  $10^{-3}$  près; donc  $S$  à  $2 \cdot 10^{-3}$  près.

Le diamètre  $2R$  du manège, de l'ordre du mètre, est mesuré avec une règle graduée à  $10^{-3}$  près.

L'erreur principale vient de l'irrégularité de la vitesse. Les écarts de 1 : 200 sur  $T$ , de 1 : 100 sur  $T^2$  limitent à 1 : 100 l'approximation de  $j$ .

## CHAPITRE III

### Étude de la Résistance.

**21. Construction des surfaces et mesure de S.** — Comme surface, j'utilise :

- a) des disques de diamètre  $d = 10$  cm., en carton léger;
- b) des disques de  $d = 10$  cm., en carton percé. Les trous de  $d = 0,065$  cm., d'une surface de  $0,0634$  cm<sup>2</sup>, au nombre de 62 par cm<sup>2</sup>, couvrent  $0,21$  cm<sup>2</sup> par cm<sup>2</sup>, un cinquième environ;
- c) des disques de  $d = 10$  cm., en tulle de soie fin (tulle illusion), tendu sur un cercle en fil d'acier fin ( $d = 0,03$  cm.). La surface totale des fils est négligeable;
- d) des cylindres hauts et larges de 10 cm. environ, en carton léger, fermés aux deux bouts par des disques de papier;
- e) des sphères de  $d = 10$  cm. environ, en celluloid;
- f) des hémisphères creux de  $d = 10$  cm. environ, obtenus en coupant dans un plan diamétral une des sphères précédentes. Ces hémisphères présentent leur convexité en avant;
- f bis) des mêmes hémisphères, leur concavité en avant. Pour passer de  $f$  à  $f$  bis, je change le sens de rotation du manège en permutant plateau et pont et en croisant la corde qui relie le moteur à la poulie Q (*fig. 2*);
- g) des disques de  $d = 20$  cm., en carton;
- h) des disques de  $d = 6$  cm., en carton.

Je mesure le diamètre des corps avec un pied à coulisse. Pris à plusieurs niveaux, les diamètres des cylindres diffèrent de leur moyenne de 1 : 200; pris dans plusieurs directions, les diamètres des sphères diffèrent de 1 : 100. Pour obtenir des résultats comparables, dans toutes les expériences, je place à l'avant le même point de ces corps. Pour les autres surfaces, les écarts des diamètres sont inférieurs à 1 : 200.

J'inscris la moyenne  $d$  des diamètres des corps accouplés dans la colonne 2 du tableau 1, la somme S des sections droites dans la colonne 3.

La densité de l'air reste voisine de 1,221 (15°, 760 mm.,  $f = F : 2$ ); lorsque ses variations atteignent  $10^{-2}$ , je ramène le résultat de l'expérience à ce qu'il serait dans les conditions précédentes, en admettant la proportionnalité de  $\mathfrak{R}$  à  $\rho$ .

**22. Application du manège 1 à l'étude de la rotation. Variation de  $j$  en fonction du rayon du manège.** — 1° MARCHÉ DE L'EXPÉRIENCE. — Je prolonge les baleines  $bb'$  (*fig. 2*) par un fil d'aluminium de  $d = 0,2$  cm., repéré à 30, 45, 65, 85 cm. de

l'axe  $a$  et coupé à 95 cm. Ce bras prolongé est soutenu par un fil métallique fin, fixé au sommet d'une potence de 15 cm. (non représentée sur la fig. 2), qui prolonge l'axe  $a$ .

Avec de la cire je colle le premier couple de surfaces, le bord intérieur en face du repère 85 : je mesure  $T$  pour  $P = 10$  gr. Je recommence l'expérience après avoir remplacé le premier couple par le second, puis par le troisième, etc.

Afin d'utiliser pour les huit expériences la même courbe de correction, je mets le bord intérieur du corps, quel que soit son diamètre, en face du repère 85.

Après la huitième expérience je sectionne les bras à 85 cm. ; je place une tare de 5 gr. sous chaque poulie  $P_1, P_2$  ; je détermine  $p_1(T)$  (courbe 85, fig. 7), sur laquelle je relève les huit corrections.

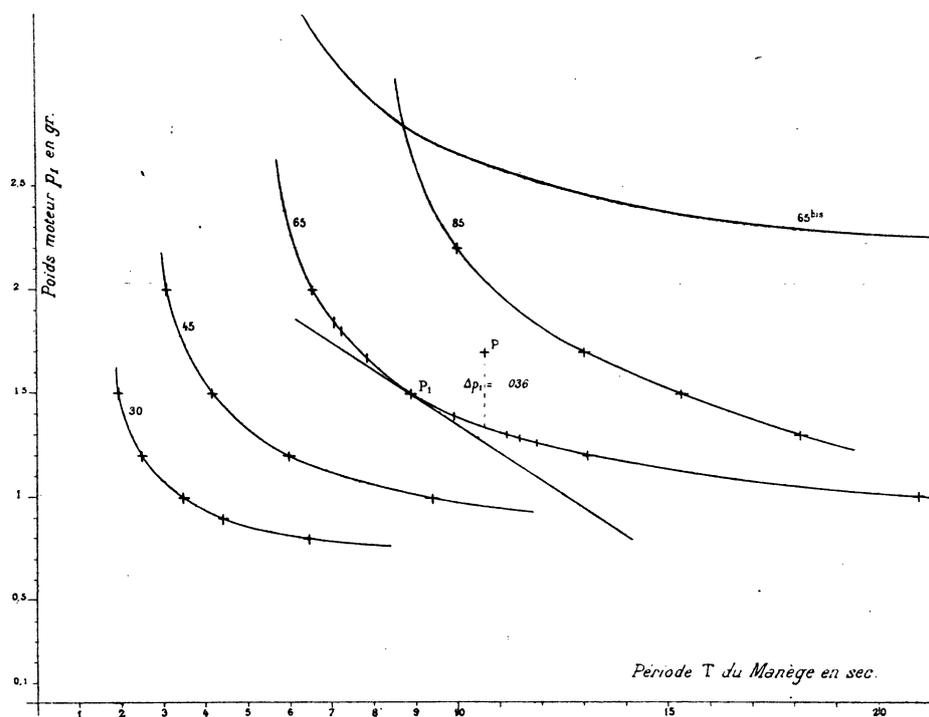


FIG. 7. — Courbes de correction du manège 1.

Dans une seconde série d'expériences, les bras étant coupés à 75 cm., je place le bord intérieur des corps en face du repère 65 et je mesure  $T$  pour  $P = 10$  gr. ; je sectionne les bras à 65 cm. et je détermine  $p_1(T)$  (courbe 65, fig. 7).

Dans une troisième série j'utilise le repère 45 ; dans une quatrième, le repère 30.

Sur les courbes de correction (fig. 7), le frottement (mesuré par le poids moteur  $p_1$ ) croît avec la longueur des bras, d'autant plus vite que la vitesse est plus grande ( $T$  petit).

Tableau 1 (bord intérieur des corps à 65cm de l'axe);  $j = 4R : \rho_1 S V^2$ .

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
SURFACES	Diamètre moyen $d$ des surfaces accolées en cm.	Somme $\Sigma S$ des sections droites, en $cm^2$ .	$10T$ (pour 4 expériences) en sec.	T moyen.	V en cm. sec.	$V^2$	Poids moteur P en gr.	Correction $p_1$ en gr.	Correction $\Delta p_1$ en gr.	$P - (p_1 - \Delta p_1)$ ou poids moteur corrigé en gr.	Résistance $\Sigma R = (P - p) / \rho_1 : 2R$	Coefficient $j$ pour $R = 70^{cm}$	Coefficient $j$ pour $R = 140^{cm}$
a	Disques. 10	157,0	115,4 114,6 115,2	11,50	38,24	1462	10 sans faxes	1,28	0,02	8,74	0,1897 g	1,328	1,195
b	Disques carton percé. 10	157,0	112,2 113,2 112,0	11,20	39,27	1542	10	1,30	0,02	8,72	0,1892 g	1,256	1,142
c	Disques tulle. 10	157,0	78,0 78,4 78,2	7,80	56,38	3178	10	1,68	0,03	8,35	0,1812 g	0,581	
d	Cylindres. 10,1	201,3	99,2 99,8 99,6	9,96	44,15	1949	10	1,40	0,03	8,63	0,1873 g	0,767	0,717
e	Sphères. 9,80	150,5	70,9 71,0 71,2	7,10	61,94	3836	10	1,85	0,03	8,18	0,1780 g	0,497	0,495
f	Hémisphères présentant leur convexité en avant. 9,60	144,6	72,7 72,4 72,6	7,25	60,66	3680	10	1,80	0,03	8,23	0,1787 g	0,540	0,515
f bis.	Hémisphères présentant leur concavité en avant. 9,60	144,6	119,2 119,2 119,0	11,9	36,96	1366	10	1,27	0,02	8,75	0,1900 g	1,545	1,510
g	Disques. 20	628,2	268,0 268,2 268,4	26,80	17,58	309	10	0,95	0,02	9,07	0,1838 g	$R = 75$	$R = 145^{cm}$
h	Disques. 6	56,5	66,9 66,8 66,7	6,68	63,93	4087	10	1,98	0,04	8,06	0,1801 g	$R = 68$	$R = 138^{cm}$

2° RÉSULTATS. — Pour fixer les idées, je transcris les résultats de la seconde série (tableau 1). A côté de  $j$  (col. 13), j'inscris (col. 14) la valeur de ce coefficient pour la même vitesse linéaire quand  $R = 140$  cm. (§ 26).

Le bord intérieur des corps étant à 65 cm. de l'axe, le rayon  $R$  de la trajectoire du centre de symétrie dépend du diamètre du corps. Pour les six premiers couples,  $R = 70$  cm.; pour les disques de  $d = 20$  cm.,  $R = 75$  cm.; pour ceux de  $d = 6$  cm.,  $R = 68$  cm.

Le poids moteur  $P$  (col. 8) est le même dans toutes les expériences; le poids moteur corrigé (col. 11) varie avec les surfaces parce que la correction (col. 9 et 10) augmente avec la vitesse de l'expérience.

Tableau 2.

	R=0,90 cm.		R=0,70		R=0,50		R=0,35	
	V en cm. sec.	$j$	V	$j$	V	$j$	V	$j$
Disques $d = 10$ cm. ....	34,4	1,246	38,2	1,328	43,0	1,502	48,2	1,743
Disques carton percé ..			39,3	1,256	44,5	1,397	51,3	1,530
Disques tulle .....	47,5	0,626	56,4	0,581	69,5	0,554	87,9	0,0514
Cylindres .....			44,1	0,767	49,8	0,864	55,5	1,020
Sphères .....			61,9	0,497	69,8	0,575	75,8	0,719
Hémisphères convexe ..			60,7	0,540	65,4	0,681	66,6	0,976
Hémisphères concave ...	33,0	1,487	37,0	1,545	41,2	1,776	46,7	2,015

Le tableau 2 résume les résultats des quatre séries d'expériences : pour chaque rayon  $R$ , en face de chaque surface, j'inscris la valeur de  $j$ , pour la vitesse  $V$ .

3° DISCUSSION. — a) Comparons les courbes  $j(R)$  (fig. 8) pour des corps de même diamètre ( $d = 10$  cm.) et de forme différente :  $j$  décroît quand  $R$  croît et tend vers une limite que je prends comme valeur de  $j$  pour la translation. Cette limite est atteinte pour des rayons d'autant plus petits que le corps est mieux fuselé (disque, hémisphère concave, cylindre, hémisphère convexe, sphère); elle est sensiblement atteinte avec tous les corps pour le rayon  $R = 130$  cm., à partir duquel on peut assimiler rotation et translation.

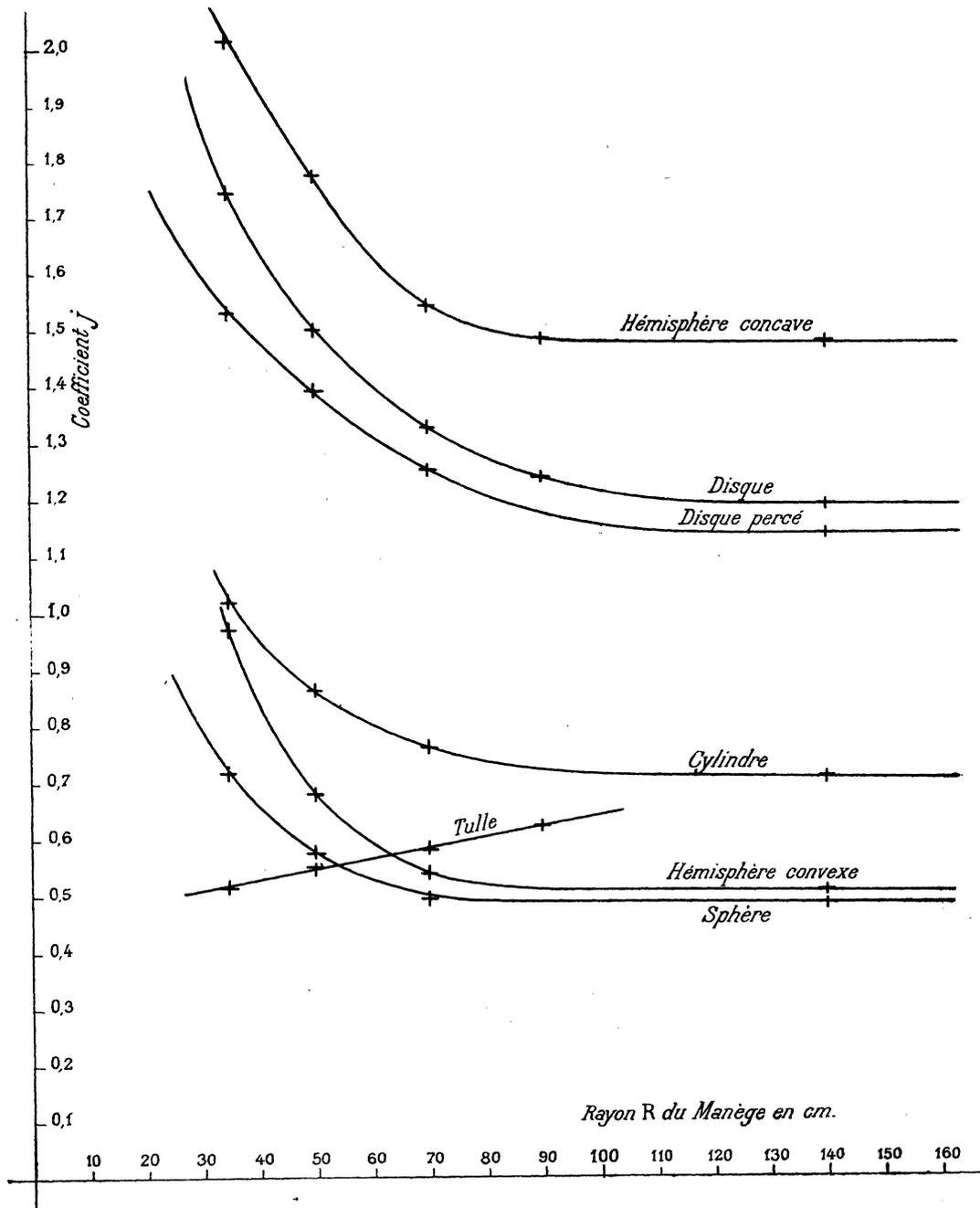


FIG. 8. — Coefficient  $j$  en fonction du rayon  $R$  du manège.

Déterminons un point de la courbe du disque près de l'axe des ordonnées. Pour des disques de  $d = 10$  cm., placés à  $R = 10$  cm., je trouve  $j = 3,774$  : le point représentatif est très au-dessus des limites de la fig. 8. Dans cette expérience, le point d'application de la résistance est confondu avec le centre de symétrie (§ 15), mais l'entraînement de l'air diminue  $j$  (§ 19).

b) Comparons les valeurs de  $j$  pour les disques pleins et percés. Pour le carton percé, les trous réduisent la surface de  $1 : 5^{\circ}$  et la résistance de  $1 : 20^{\circ}$ . Pour le tulle, quoique la surface des fils soit quasi nulle, la résistance n'est réduite que de moitié.

**23. Variation de  $j$  en fonction de la vitesse.** — Dans les expériences précédentes le poids moteur  $P = 10$  gr. reste invariable quel que soit le rayon du manège : la vitesse linéaire varie largement. Étudions ce que deviendraient les courbes  $j(R)$ , si  $j$  était mesuré à vitesse constante.

Pour cela, entre chaque expérience de la seconde série ( $R = 0,70$ ), je remplace le poids moteur de 10 gr. par un autre de 51 gr. et je détermine  $j$  en tenant compte, dans le calcul de la correction, de la tension accrue du fil.

Sauf pour le tulle,  $j$  conserve la même valeur quand la vitesse croît : les courbes  $j(R)$  ne dépendent pas de la vitesse.

Pour le tulle, quand la charge nette décroît de 42,6 à 8,35 gr.,  $V$  diminue de 158 à 56 cm. sec.,  $j$  croît de  $j_1 = 0,382$  à  $j_2 = 0,581$ . Ce résultat s'explique par la filtration de l'air à travers les mailles (§ 33, 4°). La viscosité de l'air introduit un terme en  $V$ ; quand la vitesse décroît,  $\mathcal{R}$  décroît moins vite que d'après la relation  $\mathcal{R} = jV^2$ , et, si l'on conserve cette relation pour définir  $j$ , ce coefficient croît. Ceci explique l'allure ascendante de la courbe du tulle (fig. 11) : quand  $R$  croît,  $V$  décroît,  $j$  croît.

Comparons les valeurs de  $j$  pour la même vitesse. Pour  $R = 35$  cm.,  $V_0 = 87,9$  cm. séc.,  $j = 0,514$ . Pour  $R = 70$  cm. et la même vitesse  $V_0$ , par interpolation entre les valeurs précédentes  $j_1, j_2$ , je calcule  $j = 0,518$  : pour le disque de tulle la résistance est indépendante du rayon du manège.

**24. Variation de  $j$  en fonction de la surface.** — Comparons les valeurs de  $j$  pour les disques de  $d = 6, 10, 20$  cm. (courbes pleines, fig. 9) : pour une même valeur de  $R$ ,  $j$  croît avec  $d$ .

Essayons l'hypothèse la plus simple, conséquence de la loi de similitude : pour des corps semblables, placés à des distances  $R$  de l'axe proportionnelles à leurs dimensions homologues  $d$ , le coefficient  $j$  est le même :  $j = j_0 f(R : d)$ .

Pour vérifier cette hypothèse, portons en abscisses  $R : d$  ou mieux  $10R : d$ , afin de conserver la courbe  $d = 10$ . Les courbes 6 et 20, dont les abscisses sont multipliées par  $10 : 6 = 1,66$  et  $10 : 20 = 0,5$ , se transforment en 6' et 20' (fig. 9), qui devraient se confondre avec 10.

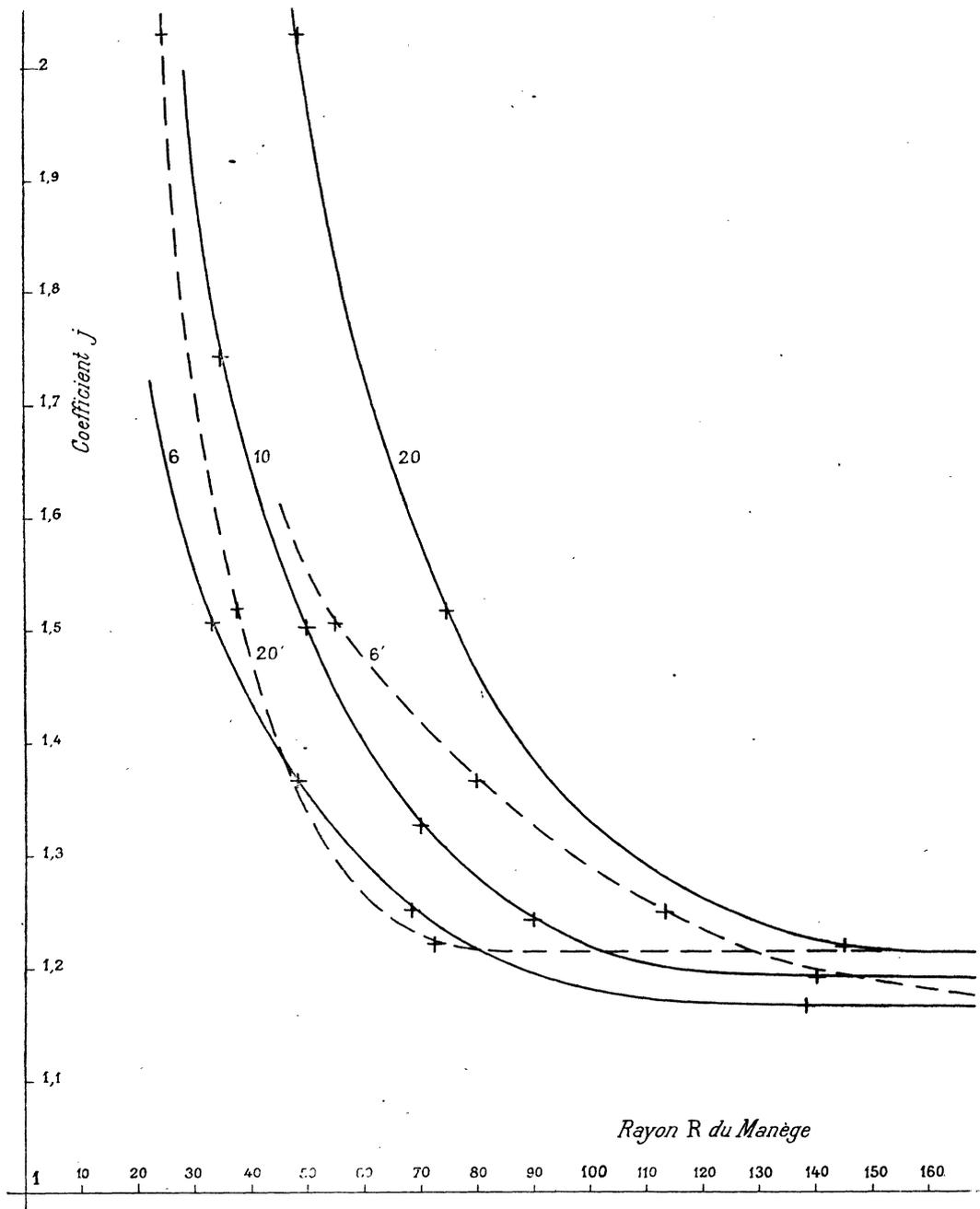


Fig. 9. — Coefficient  $j$  en fonction du rayon  $R$  du manège (disques de  $d = 6, 10, 20$  cm.).

La loi de similitude est insuffisante : les courbes sont distinctes, la différence relative des valeurs de  $j$  pour les courbes 6' et 20' passe, pour  $R = 60$  cm., par un maximum voisin de 40 %; les courbes se rapprochent de l'horizontale (résistance de translation), pour des valeurs d'autant plus petites de  $R : d$ , que  $d$  est plus grand.

25. Étude de la translation, manège 2. — Pour des corps de  $d = 10$  cm., on peut assimiler rotation et translation quand la longueur du bras dépasse 130 cm. (§ 22) : pour étudier la translation, je prends des bras de 140 cm. La vitesse limite du manège étant alors atteinte avant le troisième tour (§ 19), il est inutile d'entretenir indéfiniment le manège : je le simplifie en supprimant les poulies qui remontent le poids moteur.

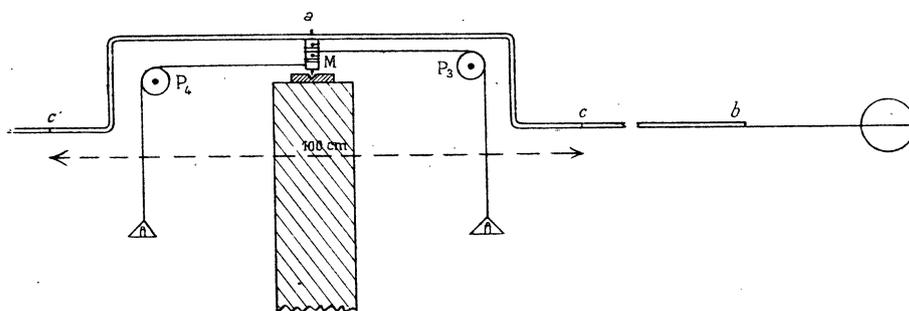


FIG. 10. — Manège n° 2.

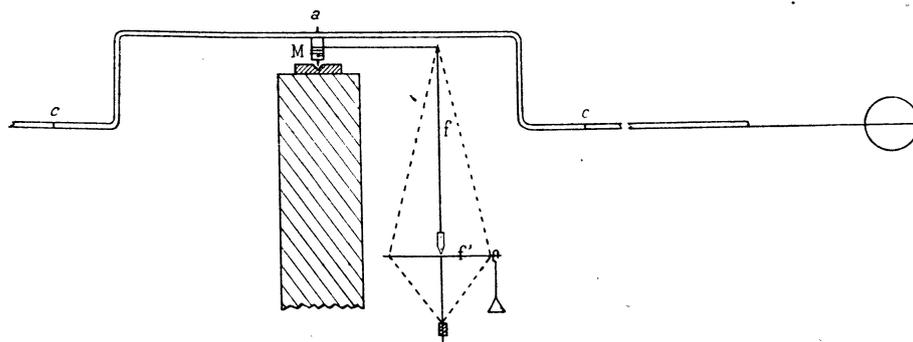


FIG. 11. — Manège n° 2 bis.

1° DESCRIPTION. — Sur la poulie cylindrique  $M$  (*fig. 10*), finement tournée sur l'axe  $a$ , s'enroulent deux cheveux qui passent sur les poulies  $P_3$ ,  $P_2$  et portent des plateaux de papier.

Pour éviter le frottement de l'axe du manège sur le bord du trou de la bande  $m$  (*fig. 2*), je la supprime et j'abaisse le centre de gravité du système au-dessous du pivot en recourbant les bras formés d'un tube d'aluminium épais de 0,8 cm.

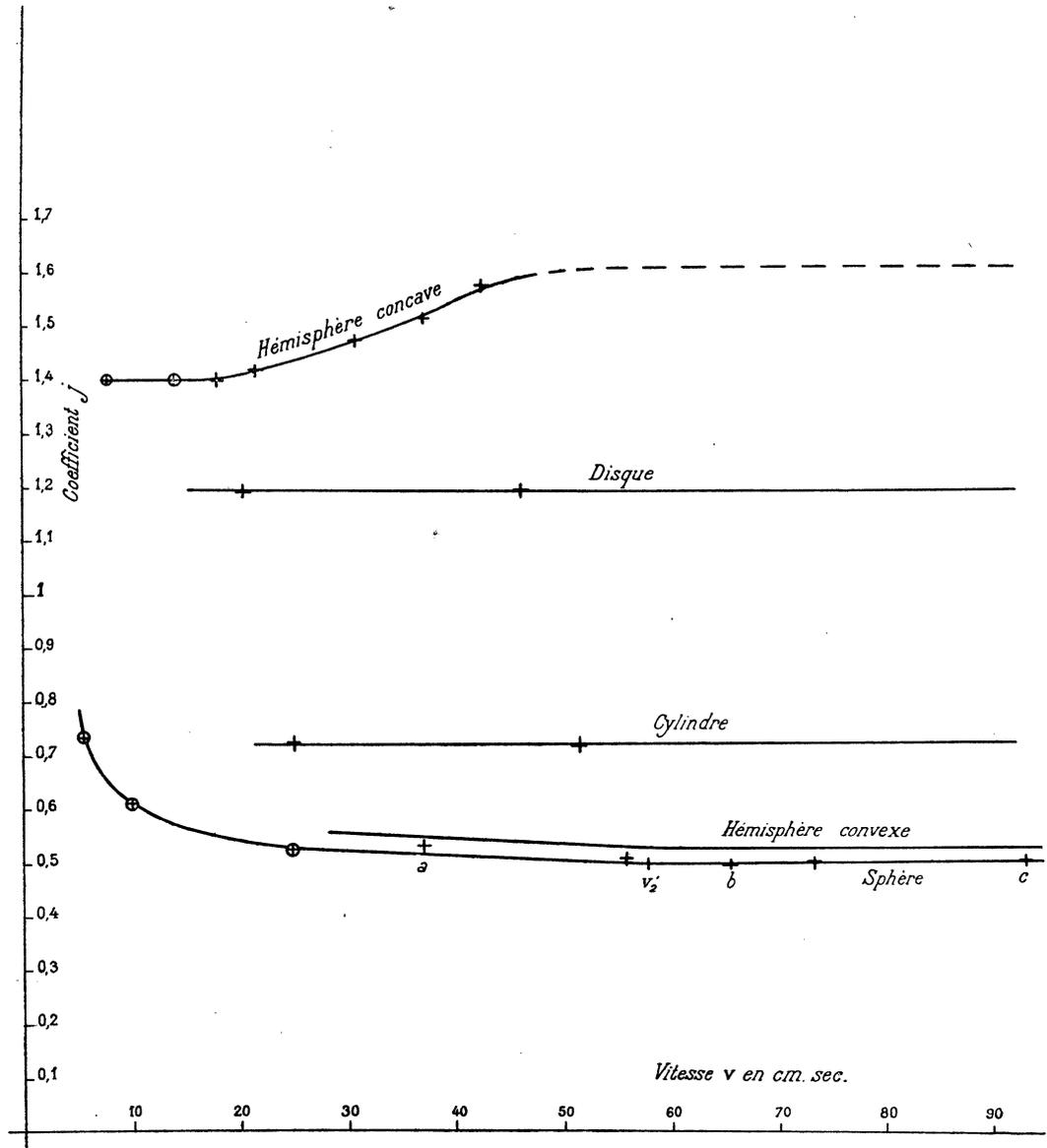


FIG. 12. — Coefficient  $j$  en fonction de la vitesse.

2° FROTTEMENTS. — Le frottement solide se réduit à celui des poulies  $P_3$ ,  $P_4$  et à celui du pivot. Pour montrer que la variation de ce frottement est négligeable, je laisse invariable le poids moteur  $P$  et je mesure  $T$  :

- a) Un fil portant 20 gr. à chaque bout, à cheval sur chaque poulie  $P_3$ ,  $P_4$  ;
- b) Un cavalier de plomb du poids du manège (150 gr.), à cheval sur l'axe  $a$  ;
- c) Les charges précédentes enlevées.

Dans les trois cas je trouve la même période.

3° COURANTS D'AIR. — Pour éviter l'action perturbatrice des courants d'air, je place le manège dans une cave de  $6 \times 6 \times 2,40$  m. Quand l'expérience est prête, devant le bras je dispose un arrêt maintenu par un électro. Je ferme la porte de la cave que je quitte; j'attends que son atmosphère soit au repos pour couper le circuit de l'électro : le manège part.

4° MESURE DE  $j$ . — Par tour de manège, le poids moteur  $P$  ( $P : 2$  dans chaque plateau) tombe, non de  $\pi r$  comme pour le manège 1, mais de  $2\pi r$  : dans la formule (2) du § 14, il faut remplacer  $(P - p)$  par  $2(P - p)$ .

Je mesure le diamètre de la poulie  $M$  ( $2r' = 2,14$  cm.) au palmer, soit à  $10^{-2}$  près;  $(P - p)$ ,  $d$ ,  $2R$  (§ 20) à  $10^{-3}$  près. Sur un grand nombre d'expériences, les écarts sur la vitesse sont de 1 : 200 :  $j$  est déterminé à 1 : 100 près.

**26. Variation de  $j$  en fonction de la vitesse.** — 1° MARCHÉ DE L'EXPÉRIENCE. — J'enroule les cheveux sur la poulie  $M$  en imprimant au manège une rotation dans le sens qui remonte  $P$ . Ces cheveux, longs de 100 cm., sont prolongés par des fils de soie, longs de 50 cm., qui portent les plateaux. Pour que la charge motrice reste invariable pendant la chute de  $P$ , je ne commence la mesure de  $T$  que lorsque les cheveux (de poids négligeables) atteignent les poulies  $P_3$ ,  $P_4$  ; le poids du fil et du plateau s'élimine dans  $(P - p)$ .

Sur chaque tube d'aluminium, à la distance de 50 cm. de l'axe  $a$ , je trace un repère  $c$ ,  $c'$  (*fig. 10*). Je prolonge chaque tube par un fil métallique de  $d = 0,1$  cm., au bout duquel je colle la surface étudiée, son bord intérieur à 85 cm. du repère  $c$ , soit à  $R = 135$  cm. de l'axe  $a$ . A la fin des expériences je coupe les fils à  $R = 135$  cm. et je détermine la courbe de correction  $p(T)$ . Le poids des corps fléchissant les coudes supérieurs du tube, avant chaque expérience je vérifie avec une jauge que la distance  $cc'$  est exactement de 100 cm. Au besoin, je la ramène à cette valeur en fléchissant les parties verticales du tube.

2° RÉSULTATS. — Pour le disque,  $j$  (indépendant de la vitesse) vaut 1,20.

Pour le cylindre,  $j$  (indépendant de la vitesse) vaut 0,720.

Pour la sphère, quand  $V$  passe de 93 à 37 cm. sec.,  $j$  croît de 0,496 à 0,530 ; voici les résultats pour les points  $a$ ,  $c$  (*fig. 12*), qui montrent que la variation de  $j$  est supérieure aux erreurs expérimentales :

	P en gr.	$p$	$P - p$	T en sec.	T moyen.	V en cm. sec.	$j$
Point <i>a</i> (fig. 12).....	14	5,1	8,9	23,52 23,60 23,70 23,66	23,5	37,0	0,530
Point <i>c</i> (fig. 12).....	80	27,5	52,5	9,40 9,44 9,48 9,44	9,44	93,2	0,496

D'expériences postérieures (points entourés d'un cercle, obtenus au § 48) résulte que :

*a*) Quand  $V$  décroît de 100 à 58 cm. sec.,  $j$  (invariable) = 0,500 :

*b*) Pour des vitesses inférieures à 58 cm. sec., la courbe se relève : la résistance cesse d'être proportionnelle au carré de la vitesse.

Pour l'hémisphère convexe, mêmes résultats que pour la sphère, mais  $j$  est augmenté de 4 %.

Pour l'hémisphère concave, le manège oscille (§ 53) et les résultats sont peu réguliers.  $j$  décroît quand  $v$  décroît de 40 à 20 cm. sec. D'expériences postérieures (points entourés d'un cercle, obtenus au § 50) résulte que, lorsque  $V$  décroît de 18 à 7 cm. sec.,  $j$  (invariable) = 1,392 ; d'autre part, pour des vitesses comprises entre 4 et 30 mètres sec., Eiffel<sup>(1)</sup> trouve  $j$  (invariable) = 1,61 : ma courbe correspond au changement de régime.

**27. Variation de  $j$  en fonction de la surface.** — Sur le manège 2, je place successivement les disques de  $d=6, 10, 20$  cm. Le coefficient  $j$  prend les valeurs correspondantes : 1,169 ; 1,198 ; 1,224.  $j$  croît quand  $S$  croît ; les valeurs extrêmes de  $j$  diffèrent de 5 : 100, mais comme chaque valeur n'est définie qu'à 1 : 100 près, il serait illusoire de discuter la forme de la courbe  $j(S)$ .

(<sup>1</sup>) Eiffel, *Résistance de l'air*, Dunod, 1914.

## CHAPITRE IV

### Etude aérodynamique de l'air.

**28. Éclairement d'un filet.** — 1° Sous l'un des points de la trajectoire du corps produisons des fumées ascendantes. Elles sont vivement agitées au moment du passage du corps, sans qu'on puisse distinguer la direction des filets.

Au contraire, fixons sur le corps la source des fumées (tortillon de papier d'Arménie); elles prennent une trajectoire facile à observer, quoique mobile dans l'espace, parce que fixe par rapport au corps.

J'éclaire avec une forte lampe électrique et, protégeant par un écran mon œil des rayons de la lampe, j'observe les fumées sur fond noir.

2° Pour obtenir d'abondantes fumées blanches avec une source assez petite pour ne pas troubler le phénomène, je remplace le tortillon de papier d'Arménie par une mèche imprégnée de nitrate de potasse et d'encens.

Je fabrique ces mèches en trempant un fil de coton à reprendre dans de l'eau saturée de nitrate, puis, après égouttage et séchage, dans de l'éther saturé d'encens. Ces mèches, dont le diamètre varie avec le nombre des brins de coton, brûlent d'autant mieux qu'elles sont plus épaisses et que la proportion du nitrate à l'encens est plus grande. Avec un seul brin ( $d = 0,03$  cm.), pour que la mèche ne s'éteigne pas, il faut l'égoutter fortement au sortir de la solution d'encens.

Dans les régions du phénomène où la vitesse change rapidement de direction, j'utilise les mèches formées d'un brin unique; dans les autres régions, les mèches de 4 brins ( $d = 0,1$  cm.). Pour produire beaucoup de fumée dans une portion de fluide agité sur place, je tresse des torons de 16 et 32 brins.

3° Par un de ses bouts la mèche est collée sur le corps avec de la cire; l'autre bout est dirigé vers la région explorée. Au delà de 7 cm., la mèche se déforme sous l'action de son poids : je la fixe à l'extrémité d'un fil d'acier fin soudé au corps.

Sur la mèche, à partir du corps, j'imprime tous les centimètres une encoche avec un canif. J'allume le bout de la mèche, je lance le manège et je note la direction du filet de fumée chaque fois que le point qui brûle atteint une encoche.

**29. Étude des filets autour d'un disque, coupe par un plan horizontal X.** — Sur le manège 1, je place le disque circulaire de  $d = 10$  cm., son centre à  $R = 30$  cm. de l'axe du manège. J'explore successivement le plan horizontal X passant par le centre du disque, le plan vertical Y parallèle au disque à 6 cm. derrière lui, le cylindre vertical Z passant par le cercle que décrit le centre du disque.

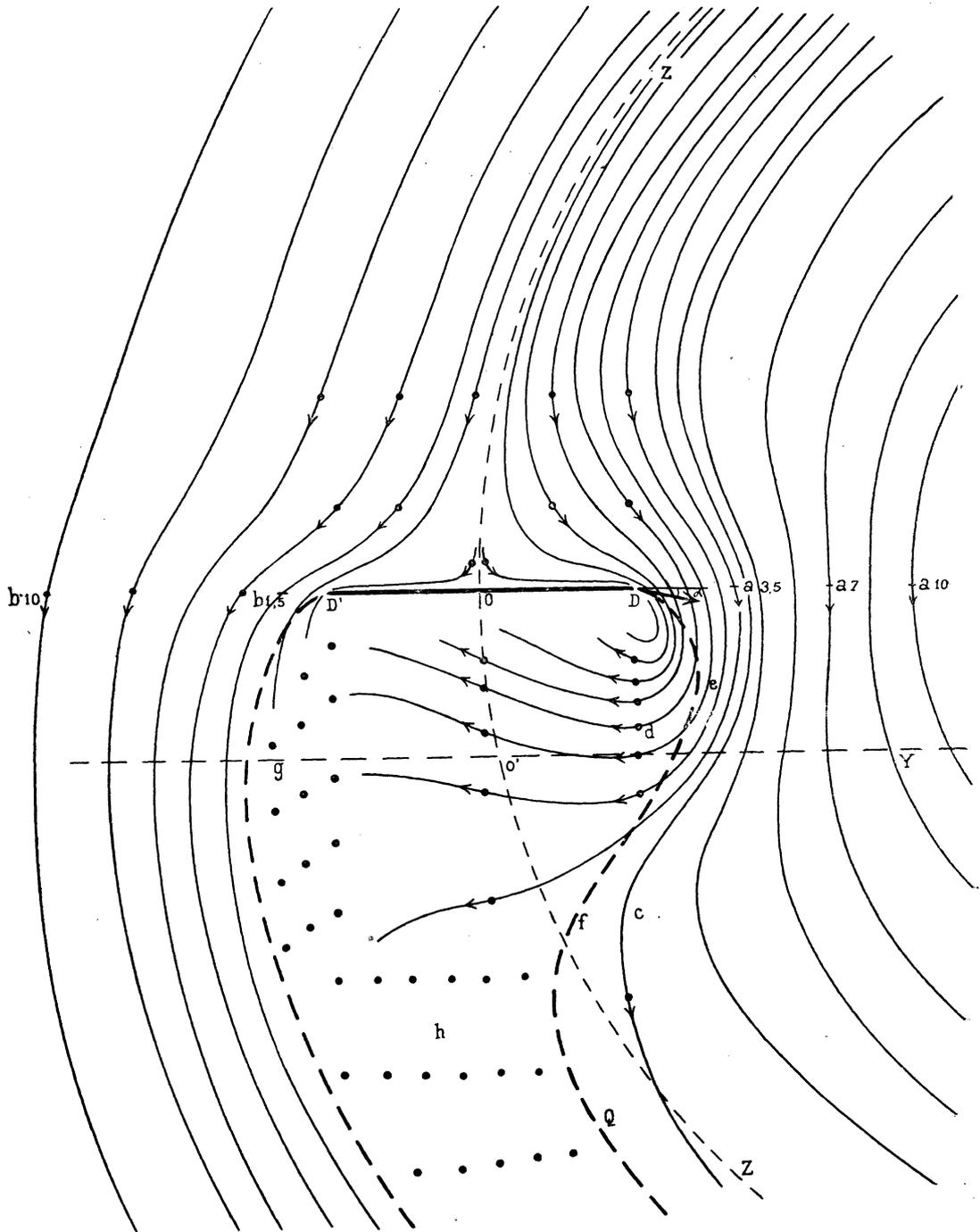


FIG. 13. — Coupe par un plan horizontal  $\lambda$ .

Sur la coupe horizontale (*fig. 13*), le disque (supposé immobile) est en  $DOD'$ ; la trace du plan  $Y$ , en  $Y$ ; celle du cylindre  $Z$ , en  $Z$ . Si les filets n'étaient pas déviés, ils décriraient des cercles concentriques à  $Z$ .

Devant le disque, à gauche et à droite, les filets s'écartent régulièrement; la vitesse des particules est très petite sur les filets voisins de  $O$ .

Dans le plan du disque, à 10 cm. du bord intérieur  $D$ , dans la direction  $a$  (point  $a_{1,0}$ ), le filet est peu dévié. En  $a_{1,1}$ , il se déforme au voisinage du disque. Quand le point qui brûle se rapproche de  $D$ , le filet devient centripète. Jusqu'en  $a_{3,3}$ , il suit une trajectoire régulière et ne s'estompe que lentement après avoir dépassé l'écran. A partir de  $a_3$ , il se replie derrière le disque, pénètre dans un tourbillon hélicoïdal d'axe horizontal et s'estompe dans une région agitée, représentée par les points  $h$ .

A 10 cm. du bord extérieur  $D'$ , dans la direction  $b$  (point  $b_{1,0}$ ), le filet est peu dévié par le disque. Quand le point qui brûle se rapproche de  $D'$ , le filet devient centrifuge. En  $b_{1,5}$  la déviation est grande, mais le filet ne revient pas derrière l'écran pour participer au tourbillon, toutefois en  $b_{0,3}$  il s'estompe en pénétrant dans une région agitée, représentée par les points  $g$ .

En résumé, les lignes de courant ne sont pas symétriques par rapport au disque. Devant lui, elles s'incurvent régulièrement à droite et à gauche du cercle  $Z$ ; derrière lui, leur forme diffère suivant le bord considéré : à l'extérieur, elles s'incurvent régulièrement; à l'intérieur, elles se rabattent violemment derrière le disque, décrivent 2 à 3 spires en s'éloignant de lui et s'estompent dans une région agitée.

**30. Coupe par un plan vertical  $Y$ .** — 1° J'explore le plan vertical  $Y$ , parallèle au disque à 6 cm. derrière lui (*fig. 14*). Je place des mèches sur l'horizontale  $X$ , sur la verticale  $Z$  (traces du plan  $X$ , du cylindre  $Z$ ) et sur les bissectrices successives de leurs angles.

Quand le disque traverse le plan de coupe,  $O$  est en  $O'$  (*fig. 13*). De ce point comme centre (*fig. 14*), en trait plein, je décris un cercle de rayon égal à celui du disque.

Je représente par des flèches les composantes de la vitesse dans le plan de coupe. Près de  $O'$ , cette composante est grande devant la composante normale au plan; loin de  $O'$ , cette composante est négligeable devant la composante normale : les particules d'air s'écoulent sans participer au tourbillon.

Les lignes fermées, tangentes aux flèches, donnent les directions de toutes les particules qui traversent le plan de coupe au même instant. Il est clair que la même particule ne parcourt pas entièrement une même ligne : elle la quitte, près de  $O'$ , pour se rapprocher du disque; à une certaine distance de  $O'$ , pour s'en éloigner (voir *fig. 13*).

Ces lignes forment deux tourbillons symétriques par rapport à l'horizontale  $X$ ,

sur laquelle la vitesse des particules est maximum. Les centres  $c$ ,  $c'$  des tourbillons sont à gauche de la verticale  $Z$  du centre du disque.

2° Avec des moulinets vérifions directement l'existence des tourbillons. En forme de cornière je plie une bande de papier longue de 3 cm., large de 1 cm. Par le centre des ailes de cette cornière, j'enfonce un fil d'acier fin, long de 10 cm., que je pique en  $c$ , normalement au disque.

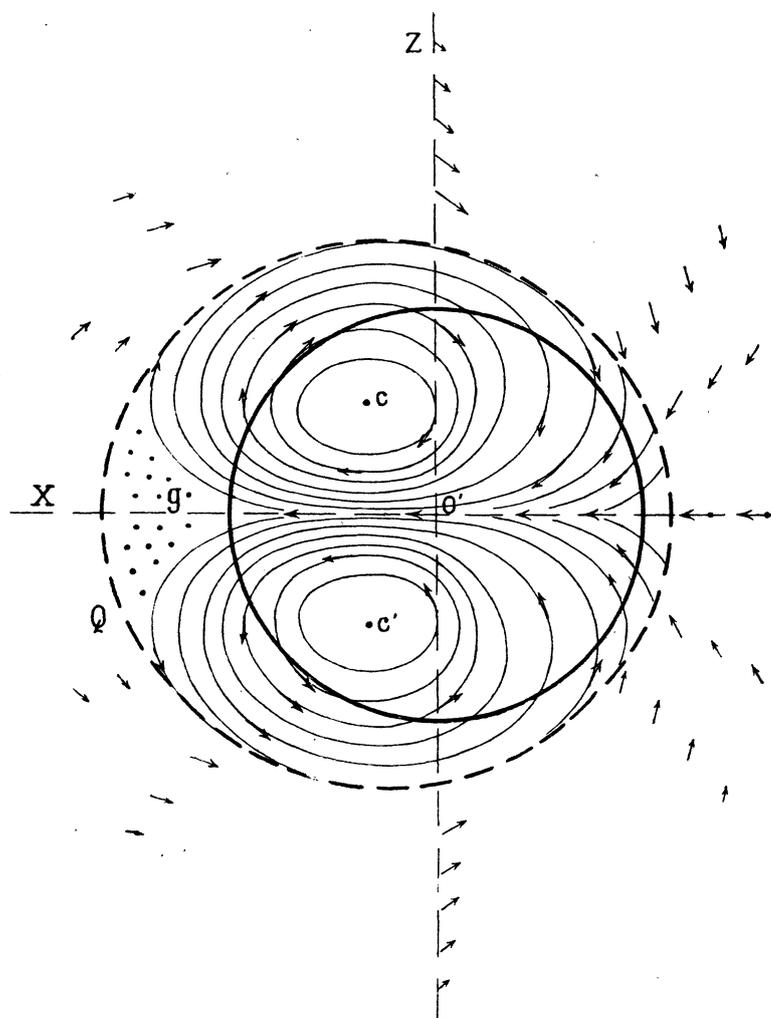


FIG. 14. — Coupe par un plan vertical  $Y$ . Disque vu de dos, axe du manège à droite.

Je lance le manège. Placé à 1 cm. du disque, le moulinet ne tourne pas : le tourbillon est trop lent pour vaincre les frottements solides du moulinet. A 3 cm. du disque, le moulinet prend un rapide mouvement de rotation, s'écarte du disque en glissant sur le fil, atteint son extrémité après quelques minutes.

En  $c'$  ajoutons un second moulinet : les deux moulinets tournent en sens inverse dans le sens des flèches (*fig. 14*).

**31. Définition de la queue.** — 1° Dans le plan horizontal X, au voisinage du bord intérieur du disque, en  $a_{3,8}$  ou mieux en  $d$  (*fig. 13*), je place une source de fumée alimentant les deux tourbillons. Le disque entraîne derrière lui une masse d'air, remplie de fumée éclairée, dont le contour apparaît nettement sur le fond noir.

Quand j'allume la mèche, la fumée se répand en une fraction de seconde dans le volume occupé par les tourbillons; quand la mèche s'éteint, la fumée disparaît aussitôt : derrière le disque, l'air partiellement entraîné se renouvelle sans cesse.

Sur la surface extérieure des tourbillons, la fumée qui s'échappe est balayée par les filets voisins dont la vitesse (composante normale au disque) est considérable devant celle des filets qui participent à la rotation : d'où la netteté de la surface qui limite la masse d'air entraînée. J'appelle queue cette masse d'air remplie de fumée, formée jusqu'à 12 cm. du disque par les tourbillons, au delà par une atmosphère agitée.

2° Déterminons l'enveloppe de la queue.

Dans le plan X, sa trace quitte le bord intérieur D du disque sous un petit angle  $\alpha$  (*fig. 13*), coupe les lignes de courant, s'écarte du cercle Z jusqu'en  $e$ , s'en rapproche, le coupe en  $f$ , s'oriente parallèlement à lui en perdant sa netteté. De l'autre côté du disque, en D', cette trace quitte le disque sous un angle petit, coupe les premiers filets, puis s'oriente dans leur direction et devient parallèle à Z en perdant sa netteté.

Dans le plan Y, cette trace a la forme d'un cercle dont le centre est à gauche de O' (*fig. 14*).

**32. Coupe par un cylindre vertical Z.** — La queue étant déviée vers l'extérieur du cercle Z (*fig. 13*), un vide devrait se produire en  $c$  puisque le filet  $a_{10}$  n'est pas dévié : d'où la nécessité de l'étude des filets au-dessus et au-dessous de l'écran. Avec des mèches j'explore le cylindre vertical Z que je développe sur la *fig. 15*.

Le disque DD' vu de profil est en gros trait; les lignes de courant sont symétriques par rapport à la droite X, développée du cercle Z. En  $c_{10}$ , le filet est peu dévié; en  $c_8$ , il s'incurve légèrement au voisinage du disque; à partir de  $c_7$ , il devient centripète, coupe le cylindre Z sous un angle qui atteint 10° au point  $c_5$  : ces filets centripètes convergent vers la poche  $c$  et la comblent. A partir de  $c_3$ , le filet toujours centripète alimente le tourbillon caudal.

Q est la trace de la queue.

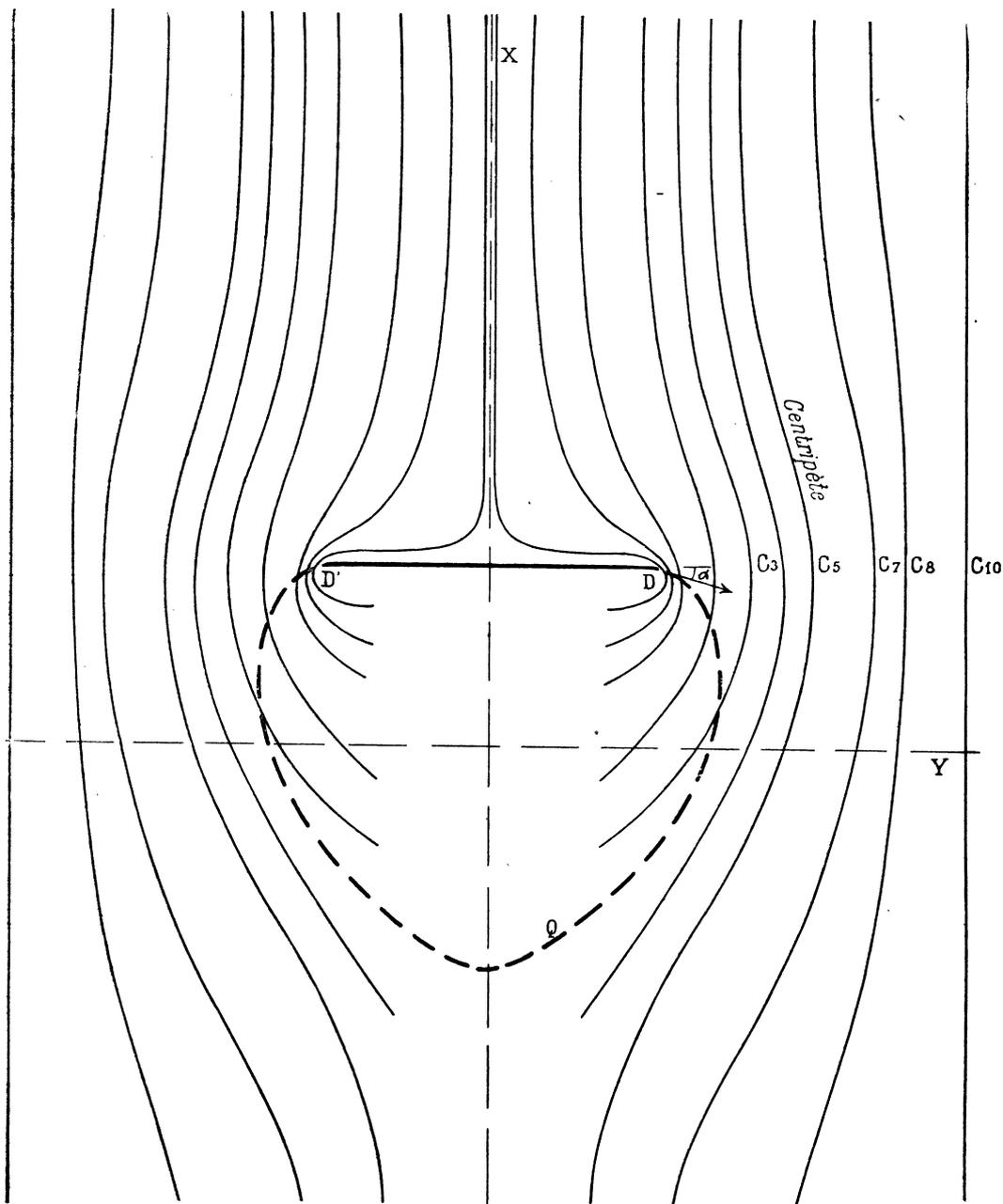


FIG. 15. — Coupe par un cylindre vertical Z.

En résumé, le passage du disque provoque à travers le cylindre Z un double mouvement d'ensemble des particules : au niveau du disque, il les déplace vers l'extérieur de Z ; au-dessus et au-dessous, vers l'intérieur.

**33. Généralité du double tourbillon caudal derrière un corps en rotation.** — Pour tous les corps placés à  $R = 30$  cm., je retrouve le double tourbillon caudal.

1° CARRÉ DE 10 CM. DE CÔTÉ. — L'angle  $\alpha$  de raccordement (*fig. 13*), de l'ordre de quelques degrés dans les coins, croît lorsqu'on s'en éloigne, atteint  $40^\circ$  au milieu des côtés horizontaux.

2° TRIANGLE ÉQUILATÉRAL DE 15 CM. DE CÔTÉ, UNE MÉDIANE VERTICALE. — Les deux tourbillons sont tangents dans le plan horizontal du centre de gravité.

3° SPHÈRE, HÉMISPÈRE CONVEXE ET CONCAVE DE  $d = 10$  CM. — Pour la sphère et l'hémisphère convexe (coupe par le plan horizontal X, *fig. 16, 17, 18*),  $\alpha = 90^\circ$  ; la queue part tangentiellement à la sphère.

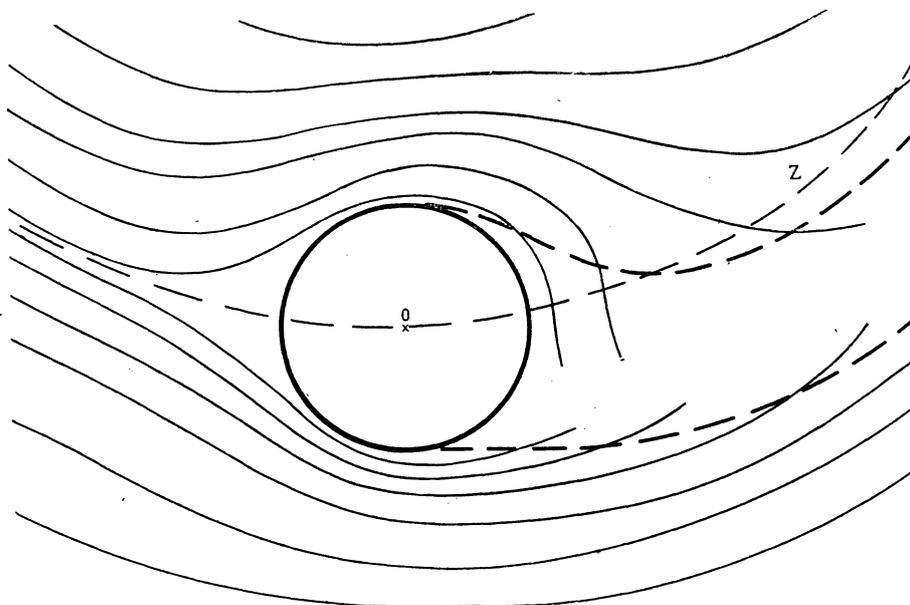


FIG. 16. — Sphère placée à  $R = 30$  cm.

La section de la queue et la vitesse de rotation des tourbillons diminuent à mesure que le corps est mieux fuselé à l'avant (hémisphère concave, plan, hémisphère convexe et sphère).

Pour tous les corps, la queue est déviée vers l'extérieur du cercle Z et les filets au-dessus et au-dessous du corps, en  $c$ , (*fig. 15*), sont centripètes. Quand le point qui brûle se rapproche du corps dans la direction  $c$ , le filet commence à pénétrer dans le tourbillon pour :

- Dc = 4 cm. avec l'hémisphère concave,
- Dc = 3 cm. avec le disque circulaire,
- Dc = 1 cm. avec l'hémisphère convexe,
- Dc = 1 cm. avec la sphère.

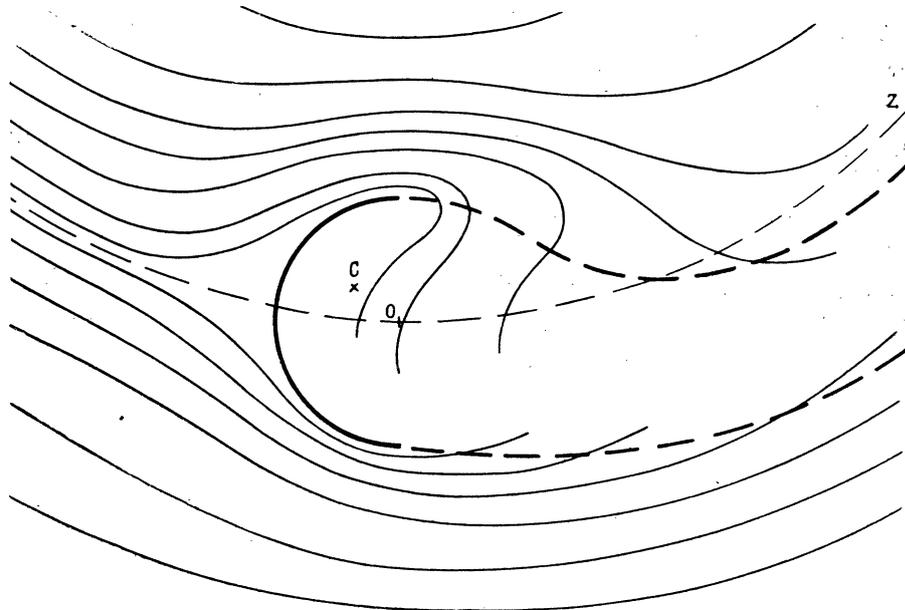


FIG. 17. — Hémisphère, convexité en avant.

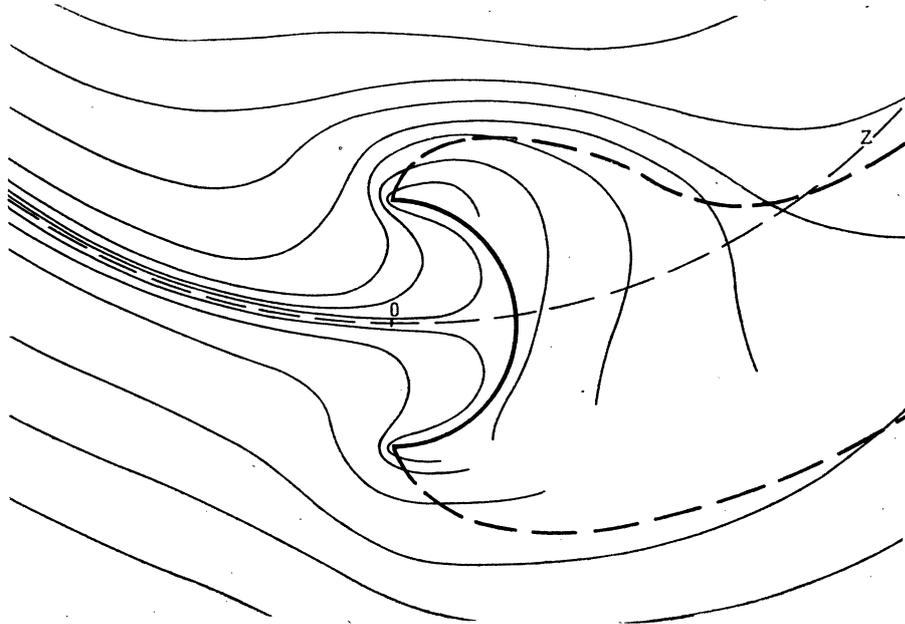


FIG. 18. — Hémisphère, concavité en avant.

Pour observer le double tourbillon caudal derrière une sphère en rotation, il est inutile d'avoir un manège. Je construis un pendule conique en suspendant une sphère de  $d = 20$  cm. au bout d'un fil de 2 m. J'allume une mèche au-dessus et au-dessous

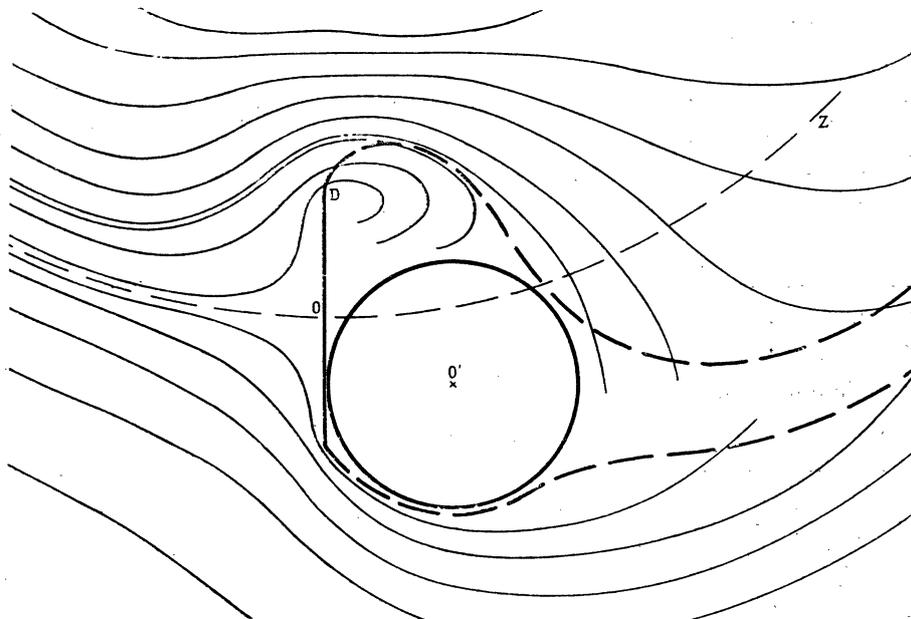


FIG. 19. — Sphère derrière disque.

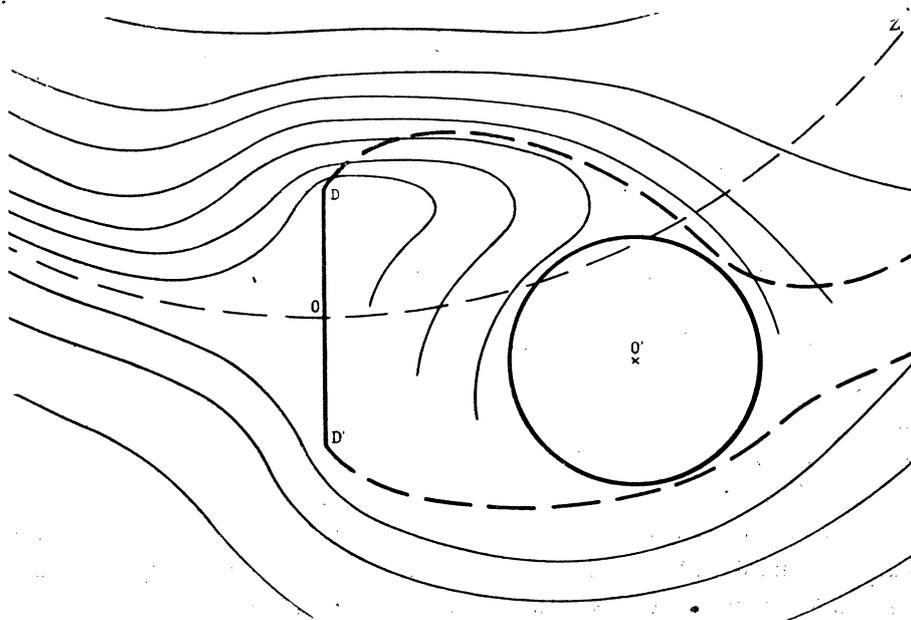


FIG. 20. — Sphère derrière disque.

de la sphère que je lance sur un parallèle. Si les mèches sont épaisses, la fumée remonte dans la mèche à plusieurs centimètres du point qui brûle et s'échappe suivant une nappe verticale. La nappe supérieure s'incurve d'après les flèches de la

fig. 14, est tangente à la nappe inférieure dans le plan horizontal X de symétrie, puis remonte pour alimenter le tourbillon.

4° DISQUE DE TULLE. — Les filets sont de forme sensiblement circulaire, légèrement déviés au voisinage des bords du disque. La vitesse des particules d'air est plus faible derrière que devant le disque, mais chaque filet reste dans un plan horizontal : pas de tourbillon, pas de queue entraînée.

**34. Rôle de la surface.** — Laissant invariable le rayon du manège ( $R = 30$  cm.), je change les dimensions de l'écran.

Avec des disques de  $d = 6$  cm. et 20 cm., j'observe le double tourbillon, plus net avec le plus grand des disques.

1° J'utilise des écrans plus larges que hauts. Avec un rectangle de  $14 \times 7$  cm., sa grande dimension horizontale, en  $a_1$ , les filets se recourbent et frappent le derrière de l'écran plus fortement que pour le carré. Au-dessus et au-dessous, les filets, centripètes, décrivent seulement une demi spirale dans le tourbillon, puis s'estompent dans la région agitée. L'angle  $\alpha$  croît de l'extrémité au milieu des côtés horizontaux. Avec un rectangle de  $25 \times 4$  cm., les phénomènes sont analogues.

2° J'utilise des écrans plus hauts que larges, en plaçant dans la verticale la grande dimension des rectangles précédents. Les tourbillons caudaux subsistent aux extrémités des rectangles, le reste de la queue est simplement agité. Une mèche placée en  $a_1$ , enfume toute la queue en une fraction de seconde.

**35. Rôle du rayon du manège.** — Je place le disque circulaire de  $d = 10$  cm., à des distances croissantes de l'axe. Dans chacune des directions  $a, b$ , j'allume une mèche; j'observe par dessous :

pour  $R < 30$  cm., les phénomènes précédents s'exagèrent, la queue est d'autant plus déviée vers l'extérieur que  $R$  est plus petit;

pour  $R = 50$  cm., les filets émis en  $a, b$  sont presque symétriques par rapport au cercle Z, mais la queue est nettement déviée vers l'extérieur et les tourbillons subsistent, quoique leur vitesse de rotation soit plus petite que lorsque  $R = 30$  cm.;

pour  $R = 100$  cm., les filets  $a, b$  sont sensiblement symétriques, mais la queue est encore légèrement déviée; les tourbillons sont à peine perceptibles;

pour  $R = 130$  cm., les filets  $a, b$  sont symétriques, la queue n'est plus déviée, les tourbillons n'existent plus : le disque entraîne une masse d'air remplie de fumée éclairée, où les mouvements des particules sont rapides et mal définis.

L'étude des filets confirme les résultats de l'étude de la résistance : à partir de  $R = 130$  cm., on peut assimiler rotation et translation.

## DEUXIÈME PARTIE

### Passage du régime hydraulique au régime visqueux.

#### CHAPITRE V

##### Mesure de la résistance pour les petites vitesses.

**36. Théorie de Stokes** <sup>(1)</sup>. — La théorie de la résistance visqueuse d'un fluide à la translation uniforme d'un solide n'a été traitée que pour la sphère.

Résumons les hypothèses de Stokes. Soient  $u, v, w(x, y, z, t)$  les vitesses en un point,  $p$  la pression,  $\gamma$  la viscosité,  $\rho$  la densité,  $X, Y, Z$  les composantes de la force extérieure; les équations de Navier :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \gamma \Delta u + X - \rho \frac{\partial u}{\partial t}$$

et deux autres en  $y, z$ , négligent le carré des vitesses et supposent le fluide incompressible ( $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \equiv 0$ ), ce qui, pour un gaz, exige des mouvements lents.

Repérons le phénomène par rapport à la sphère, le mouvement étant permanent  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$ ; supposons les forces extérieures nulles  $X = Y = Z = 0$  : les seconds membres des équations de Navier se réduisent à leur premier terme.

Exprimons les vitesses  $u, v$ , à l'aide d'une fonction symétrique en  $x, y$  et déterminons  $w$  pour satisfaire  $\theta = 0$  :

$$u = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}, \quad v = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}, \quad w = -\Delta \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

---

<sup>(1)</sup> Stokes, *Philos. trans.*, vol. IX, 2<sup>e</sup> partie. La traduction française de ce mémoire a été publiée par la Société de Physique : *Mémoires sur le pendule*, tome IV, Gauthier-Villars, 1889, p. 277. Pour l'établissement et la discussion de la formule de Stokes, voir Bouasse, *Mécanique Physique*. Delagrave, 1912, p. 347.

Les équations de Navier deviennent :

$$p = \tau_1 \Delta \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \Delta \Delta \varphi = 0.$$

Stokes propose la solution :

$$\varphi = \frac{a}{r} + br + c \frac{r^2}{4}$$

qui vérifie  $\Delta \Delta \varphi = 0$  et donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{xz}{r^2} \left( \frac{3a}{r^3} - \frac{b}{r} \right), \quad w = \frac{z^2}{r^2} \left( \frac{3a}{r^3} - \frac{b}{r} \right) - \left( \frac{a}{r^3} + \frac{b}{r} + c \right), \\ v = \frac{yz}{r^2} \left( \frac{3a}{r^3} - \frac{b}{r} \right), \quad p = -2\tau_1 \frac{bz}{r^3}. \end{array} \right. \quad (1)$$

Au loin la vitesse du fluide est  $w = -c$ ; en supposant l'adhérence parfaite sur la sphère ( $r = R$ ,  $u = v = w = 0$ ),  $a$  et  $b$  s'expriment en fonction de  $c$  : le problème est résolu.

Les équations (1) permettent de calculer la résistance du fluide sur la sphère :

$$\mathfrak{R} = 6\pi\tau_1 R w. \quad (2)$$

Cette résistance est proportionnelle :

1° à la vitesse uniforme de translation du fluide loin de la sphère, ce qui résulte *a priori* des équations de Navier, linéaires par rapport à la vitesse;

2° au rayon de la sphère.

Le coefficient de proportionnalité  $6\pi\tau_1$  vaut 0.00339 C. G. S. pour l'air (à 15°,  $\tau_1 = 1,8 \times 10^{-4}$ ).

**37. Discussion de la théorie de Stokes.** — Les lignes de courant, ici confondues avec les trajectoires des particules [équations (1)], sont symétriques par rapport au plan  $xoy$ . En particulier sur  $zz'$ , en deux points P, P' (*fig. 21*) équidistants de o, les vitesses sont égales et de même sens : il n'y a pas de queue entraînée.

Puisque dans le régime hydraulique il existe une queue entraînée (*fig. 13*), la théorie ne s'applique que si :

- a) le régime visqueux est distinct du régime hydraulique,
- b) dans le régime visqueux, il n'existe pas de queue entraînée.

De mes expériences résulte que les deux régimes sont distincts, mais que, pour tous deux, il existe une queue entraînée (§ 54) : la théorie de Stokes n'est pas applicable au phénomène. D'ailleurs, pour l'air, mon expérience donne un coefficient 8,2 fois supérieur à  $6\pi\tau_1$ .

**38. Position du problème expérimental.** — Pour vérifier la relation (2), il faut mesurer  $\mathcal{R}$ ,  $r$ ,  $w$ , la viscosité  $\eta$  étant définie et déterminée par une expérience antérieure (écoulement dans un tube fin). La mesure de  $r$  est facile avec un palmer ou un microscope; celle de  $w$  aussi, le phénomène étant permanent : reste la mesure de  $\mathcal{R}$ .

Supposons un instant que la formule de Stokes soit applicable au régime visqueux et que l'on passe brusquement d'un régime à l'autre : évaluons l'ordre de grandeur de  $\mathcal{R}$  pour le changement de régime.

Dans le régime visqueux, d'après la formule de Stokes, pour l'air :

$$\mathcal{R}_1 = 6\pi\eta rv = 0,003\cdot39 rv \text{ (C. G. S.)}$$

Dans le régime hydraulique, en prenant  $j = 0,500$ ,  $\rho' = 0,001\cdot221$  (§ 26) :

$$\mathcal{R}_2 = j\rho'SV^2 : 2 = 0,000\cdot960 r^2v^2 \text{ (C. G. S.)}$$

Pour le changement de régime  $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$  :

$$0,003\cdot39 rv = 0,000\cdot960 r^2v^2, \quad rv = 3,53.$$

La valeur commune de la résistance :

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = 0,003\cdot39 \times 3,53 = 0,012 \text{ dyne,}$$

indépendante de  $r$ ,  $v$ , n'est pas accrue par l'emploi d'une sphère de grand rayon.

Pour mesurer cette résistance à  $10^{-2}$  près, il faut déterminer  $10^{-4}$  mgr. : d'où la difficulté de l'expérience.

Reprenons le calcul pour l'eau :

$$\begin{aligned} \eta &= 0,0178, & \mathcal{R}_1 &= 0,335 rv \text{ (C. G. S.)}; \\ K &= 22 \text{ (S. P.)}, & \mathcal{R}_2 &= 0,677 r^2v^2 \text{ (C. G. S.)}; \\ \text{pour } rv &= 0,50 : & \mathcal{R}_1 &= \mathcal{R}_2 = 0,16 \text{ dyne.} \end{aligned}$$

L'expérience est plus facile dans l'eau que dans l'air.

**39. Expériences antérieures.** — 1° DANS L'AIR. — Au bout du fléau d'une balance, Becker (\*) fixe un fil de verre ( $d = 0,01$  mm.), qui pénètre dans un tube vertical ( $d = 2,4$  à  $4,8$  cm.) et porte une sphère d'aluminium ( $d = 0,17$  à  $0,39$  cm.). Le tube est traversé par un courant d'air ou de  $\text{CO}^2$ .

La résistance est de l'ordre de  $0,02$  dyne pour une sphère de  $d = 0,39$  cm., placée dans un courant de  $\text{CO}^2$  de  $v = 4$  cm. séc. : la balance, précise à  $0,1$  dyne, n'est pas assez sensible pour les petites vitesses.

(\*) Becker, *Annalen der physik.*, 1907, n° 24, p. 863.

Becker représente ses résultats par la formule :

$$\mathcal{R} = K\gamma rv + K'\pi r^2 v^2,$$

dans laquelle il adopte  $K' = 0,036$  (S. P.). Cette formule définit  $K$  en fonction de  $v$  : pour  $v = 4$  cm. sec.,  $K = 70$  (C. G. S.), alors que la formule de Stokes donne  $K = 6\pi = 18$ ;  $K$  croît avec  $v$  jusqu'à 130 pour  $v = 30$  cm. sec., puis conserve cette valeur.

Au sommet d'un tube vertical, long de 70 cm., Zeleny et Mc. Keehan (<sup>1</sup>) soufflent horizontalement de la poussière de lycopode. Au bas du tube, les grains de lycopode sont recueillis sur une bande horizontale de papier noir, animé d'une translation uniforme. Le rayon  $r$  de l'un des grains est déterminé au microscope; le temps de chute est mesuré par le déroulement de la bande, la résistance  $\mathcal{R}$  par le poids du grain. Comme densité du grain, on prend la densité *moyenne* de la poudre.

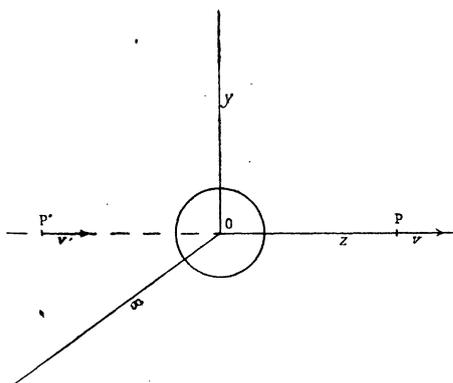


FIG. 21.

Les résultats sont représentés par la formule :

$$\mathcal{R} = 6\pi\gamma rv(1 + Al : r)^{-1},$$

tirée par Cunningham de la théorie cinétique des gaz ( $l$  = libre parcours moyen des molécules,  $A$  = une constante qui vaut 1,50 pour le choc élastique des particules et 1,05 pour le choc non élastique).

Pour  $r = 10^{-4}$ ,  $Al$  étant de l'ordre  $10^{-5}$ , la correction  $Al : r = 0,1$  : d'où  $\mathcal{R}$  est inférieure à la valeur de Stokes. Pour  $r = 10^{-3}$ , la correction est négligeable :  $\mathcal{R}$  correspond à la valeur de Stokes. Pour des rayons plus grands l'expérience donne une résistance supérieure aux formules Cunningham-Stokes, alors confondues ( $r = 0,00158$  cm.,  $v$  observé = 1,76 cm. sec.,  $v$  de Stokes = 3,40 cm.).

Mc. Keehan vérifie la formule de Cunningham sous une pression inférieure à celle de l'atmosphère; sous 0,32 mm. de Hg,  $Al : r = 250$  : le terme de Stokes devient négligeable.

Dans ses expériences sur l'ionisation de l'air, Millikan utilise avec succès la formule de Cunningham.

2° DANS L'EAU. — Allen (<sup>2</sup>) abandonne une bulle d'air au fond d'un tube de verre

(<sup>1</sup>) Zeleny et Mc. Keehan, *Physical review*, 1910, p. 535.

(<sup>2</sup>) Allen, *Philosophical Magazine*, série V, 1900, tome L, pp. 323 et 519.

plein d'eau, mesure la durée d'ascension, recueille la bulle avant qu'elle éclate dans l'air et la porte sous un microscope : la résistance est mesurée par la force ascensionnelle de la bulle. Voici quelques résultats :

$r$ en cm.	$v$ observée en cm. sec.	$v$ de Stokes en cm. sec.
0,00570	0,511	0,505
0,00719	0,626	0,802
0,0106	1,40	1,75
0,0305	5,54	14,0

La méthode de la chute libre (Allen et Mc. Keehan) rend facile la mesure de la résistance qu'elle détermine indirectement par le rayon et la densité de la sphère; par contre, cette méthode ne permet pas de faire varier indépendamment  $r$ ,  $v$  et de définir le rôle de chacun d'eux dans la correction.

3° De ces expériences résulte que  $\mathcal{R}$  croît plus vite que proportionnellement à  $r$ . Pour  $r = 10^{-3}$  cm. dans l'air,  $5 \cdot 10^{-3}$  cm. dans l'eau, la résistance serait voisine de celle de Stokes. Elle serait inférieure pour des rayons plus petits, supérieure pour des rayons plus grands : d'où l'intérêt de son étude pour des rayons de l'ordre du centimètre.

**40. Suppression des poulies du manège 2, manège 2 bis.** — 1° Pour réduire les frottements solides du manège 2 (*fig. 10*), je supprime les poulies  $P_3$ ,  $P_4$ .

J'attache le cheveu au bout du fléau  $f$  d'une légère balance, en baleine de parapluie (*fig. 11*); l'autre fléau  $f'$  porte le plateau ( $f = 40$  cm.,  $f' = 10$  cm.,  $f' : f = 1 : 4$ ). Dans la formule (2) du § 14, il faut remplacer  $(P - p)$ , non par  $2(P - p)$  comme pour le manège 2 (§ 25), mais par  $(P - p) : 2$ .

2° Pour compter les tours du manège, j'utilise un très léger levier coudé interrupteur (*fig. 3*). Quand  $T$  dépasse  $500''$ , je supprime ce levier et j'observe les passages d'une cave voisine, séparée de la première par une cloison que traverse un viseur.

J'enroule le cheveu sur la poulie  $M$  ( $r' = 0,52$  cm.), en imprimant au manège une rotation dans le sens qui remonte  $P$ . Quand l'atmosphère de la cave est au repos, j'abandonne le système à lui-même et je mesure les périodes successives  $T_1$  à  $T_6$ . Le régime est atteint à la fin de  $T_1$ , puisque  $T_3 = T_2$ . Le fléau  $f$  passe dans la verticale pendant  $T_1$ ; je prends pour mesure de  $T$  la moyenne de  $T_3$ ,  $T_4$ ,  $T_5$ .

3° Le frottement solide se réduit à celui du pivot; pour montrer que la variation de ce frottement est négligeable, je laisse invariable  $P$  et je mesure  $T$ , en plaçant sur le pivot des charges croissantes :  $T$  reste invariable.

Je mesure la valeur absolue de ce frottement par le poids minimum  $P = 0,1$  gr., nécessaire au départ du manège vide. Pour  $P = 0,2$ ,  $T = 1350''$ , puis  $1410''$  : quoique lent, le mouvement est assez régulier (point *b*, *fig.* 22).

41. Courbe de correction, sensibilité du manège 2 bis. — J'augmente successivement  $p$  et je détermine la courbe de correction pour des bras vides de 135 cm.

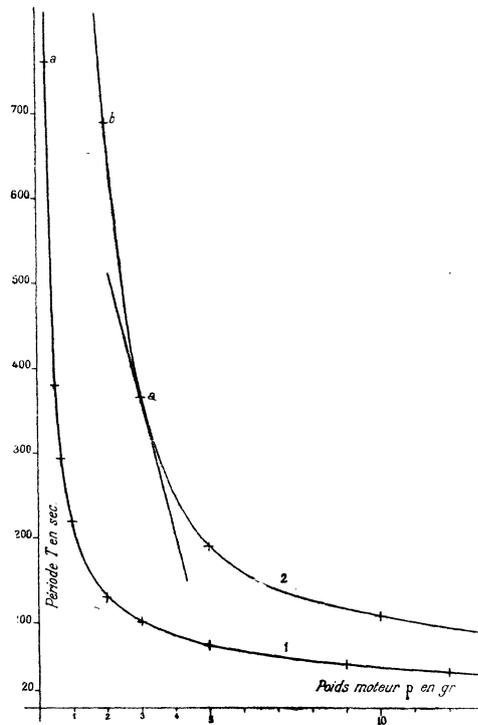


FIG. 22. — Période  $T$  du manège vide en fonction du poids moteur  $p$  (courbe de correction).

(courbe 1, *fig.* 22). Pour  $p$  petit, cette courbe est presque parallèle à l'axe des ordonnées; je multiplie les abscisses par 10, les ordonnées par 0,5 (courbe 2).

La balance est sensible à la dyne.

Pour étudier la régularité du manège, qui détermine la sensibilité de l'appareil, je reprends l'expérience du § 13. Laisant invariable  $p = 0,3$ , je mesure  $T$  à plusieurs reprises; je trouve des nombres différents, qui oscillent autour de  $T = 730''$ , avec un écart maximum  $\Delta T = 10''$ . Sur la courbe 2, je trace la tangente en  $a$  ( $p = 0,3$ ,  $T = 730$ ); pour  $\Delta T = 10''$ ,  $\Delta P = 0,004$  gr. : l'appareil est sensible à  $\Delta P = 0,004$  gr.

Au bout des bras je place des corps, leur centre à  $R = 140$  cm. De ce qui précède résulte que l'appareil permet d'apprécier la résistance  $2\Delta R$  (§ 14) :

$$2\mathcal{R}R = (P - p)gr' : 4,$$

$$2\Delta\mathcal{R} = \frac{\Delta Pgr'}{4R} = \frac{0,004 \times 980 \times 0,52}{4 \times 140} = 0,004 \text{ dyne.}$$

La sensibilité propre de la balance est accrue dans le rapport du rayon du manège à celui de la poulie. La pesée de la résistance n'est pas troublée par le poids des corps; ces poids, normaux à la résistance, s'éliminent grâce au pivot : d'où la précision de la méthode.

42. Suppression des courants de convection. — 1° Le plafond de la cave étant à 40 cm. au-dessus du niveau du sol, celle-ci est mal isolée thermiquement. Si pendant

quelques jours la température moyenne extérieure reste différente de la température de la cave, les résultats deviennent irréguliers. Pour la mesure d'une même résistance, la période du manège, précédemment égale à  $T$ , devient supérieure ou inférieure suivant le sens de rotation : contre les murs naissent des courants de convection qui prennent un mouvement d'ensemble.

2° Pour éviter ces courants, je place l'appareil dans une cage : avec des liteaux je construis autour du manège un cylindre coaxial ( $d=420$  cm.,  $h=120$  cm.), que je couvre de papier et que je ferme par des fonds.

Voici les périodes  $T_2$  à  $T_6$  pour des sphères de  $d=10$  cm. :

Poids moteur P.	Avec cylindre et fonds.	Avec fonds sans cylindre.	Sans cage.
1 gr.	$T_2 = 401$	440	466
	$T_3 = 390$	435	465
	$T_4 = 373$	428	464
	$T_5 = 357$	425	457
	$T_6 = 350$	420	460
2 gr.	$T_2 = 239$	248	246
	$T_3 = 229$	239	245
	$T_4 = 224$	238	246
	$T_5 = 218$	236	244
	$T_6 = 215$	235	246

La décroissance des périodes successives, rapide avec cylindre et fonds, s'atténue quand je retire le cylindre en laissant les fonds, disparaît quand j'enlève cylindre et fonds : dans la cage trop petite, l'air prend un mouvement de rotation de même sens que le manège.

Je renonce à construire un cylindre plus grand et, supprimant toute cage, je continue mes expériences au moment où la température extérieure reste voisine ou un peu au-dessus de celle de la cave (mois d'avril et de mai).

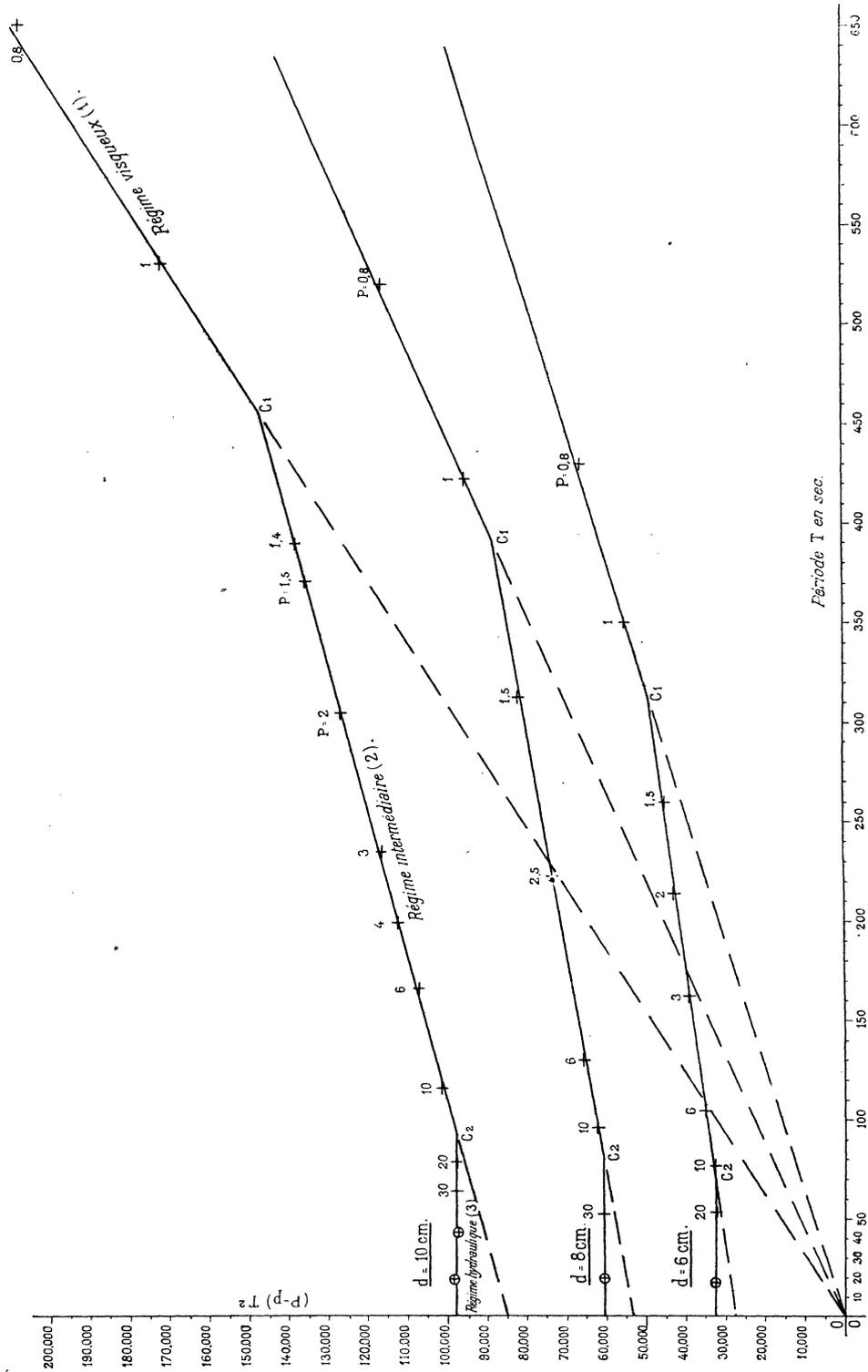


Fig. 23. — Variation de  $(P - p)T^2$  en fonction de  $T$  (disques  $d = 10, 8, 6$  cm.).

## CHAPITRE VI

### Etude du changement de régime.

**43. Représentation des résultats.** — Soit  $r$  le rayon de la section droite en cm.,  $s$  sa surface en cm.<sup>2</sup>,  $a$  et  $b$  deux constantes; la relation :

$$2\mathcal{R} = 2arv + 2bsv^2, \quad (1)$$

représente à la fois le régime visqueux ( $a \neq 0$ ,  $b = 0$ ) et le régime hydraulique ( $a = 0$ ,  $b \neq 0$ ). La courbe  $\mathcal{R}(v)$  est une droite pour le premier, une parabole pour le second. Pour étudier le point d'intersection de ces courbes, je les transforme en droites.

Remplaçons  $2\mathcal{R}$  par  $(P - p)gr' : 4R$  (§§ 14 et 40),  $v$  par  $2\pi R : T$ , la relation (1) devient :

$$\frac{(P - p)gr'}{4R} = \frac{2ar \cdot 2\pi R}{T} + 2bs \frac{4\pi^2 R^2}{T^2},$$

$$(P - p)T^2 = A \cdot 2arT + B \cdot 2bs, \quad (2)$$

$$\text{en posant } A = 8\pi R^2 : r'g, \quad B = 16\pi^2 R^3 : r'g.$$

L'expérience donne  $T$ ,  $(P - p)$ ; je porte  $T$  en abscisse,  $(P - p)T^2$  en ordonnée : le régime visqueux ( $a \neq 0$ ,  $b = 0$ ) est représenté par une droite passant par l'origine, le régime hydraulique ( $a = 0$ ,  $b \neq 0$ ), par une droite parallèle à l'axe des abscisses.

**44. Existence de trois régimes, disques circulaires.** — 1° Même marche expérimentale qu'avec le manège 2 (§ 26) : je place à 135 cm. de l'axe le bord intérieur de tous les corps, quel que soit leur diamètre, afin d'utiliser la même courbe de correction (*fig. 22*), pour toutes les expériences.

Avec des disques de  $d = 10$  cm. (tableau 3 et courbe  $d = 10$ , *fig. 23* et *24*), pour  $T > 455''$  ( $v < 1,93$  cm. sec.),  $(P - p)T$  est constant (avant-dernière ligne du tableau); la courbe est une droite passant par l'origine : la résistance est proportionnelle à la vitesse (régime visqueux 1).

Pour  $T < 95''$  ( $v > 9,26$  cm. sec.),  $(P - p)T^2$  est constant (dernière ligne du tableau 3); la courbe est une droite parallèle à l'axe des abscisses : la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse (régime hydraulique 3). J'entoure d'un petit

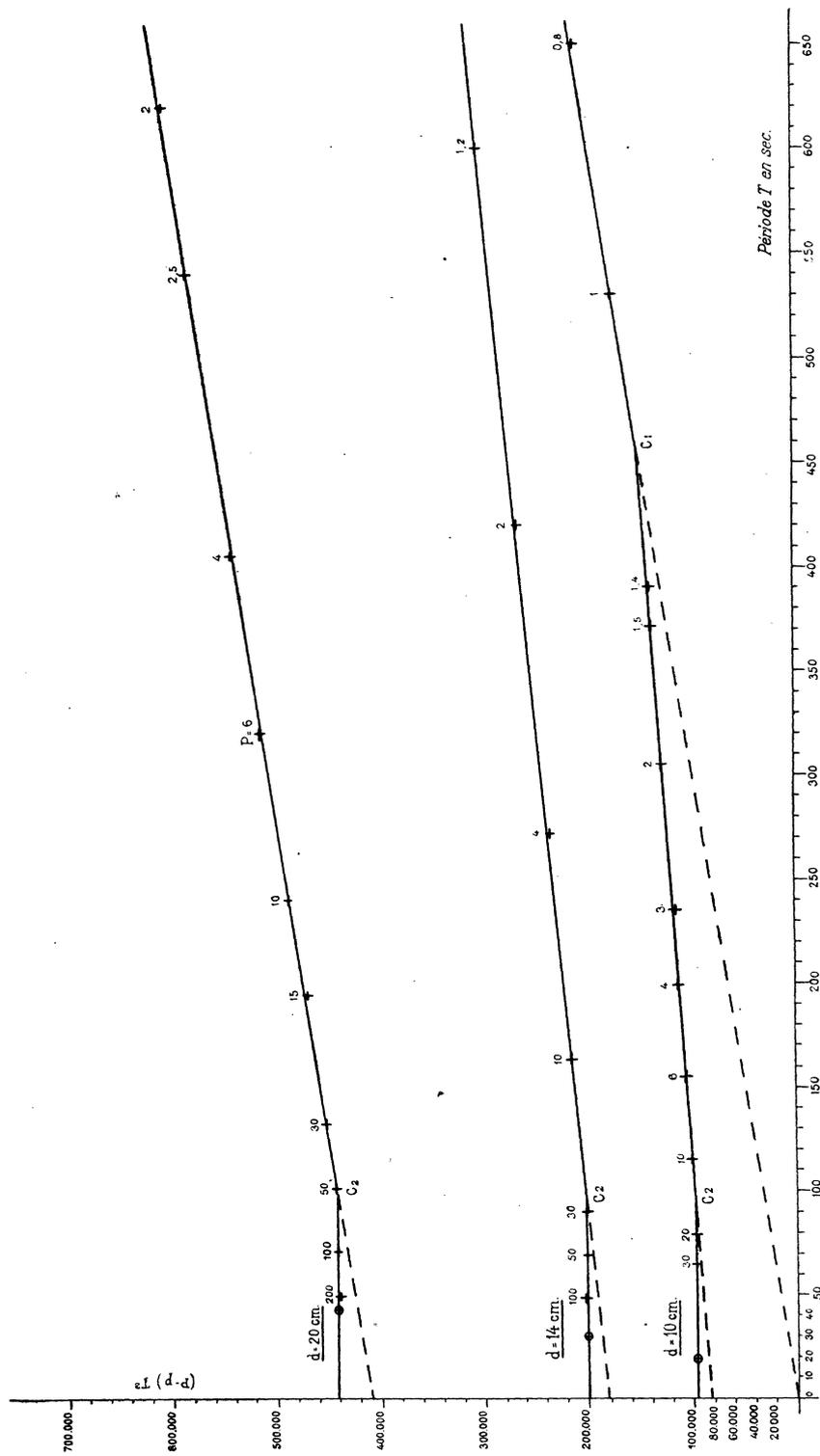


Fig. 24. — Variation de  $(P - p)/\Gamma^2$  en fonction de T (disques  $d = 20, 14, 10$  cm.).

cercle les points obtenus avec le manège 2 (§ 26) : ils se placent sur la droite précédente.

Pour T compris entre 455 et 95" la courbe est encore une droite représentée par la formule (1), où les coefficients  $a$ ,  $b$  sont tous deux  $\neq 0$  (régime intermédiaire 2).

Tableau 3. — Disques de  $d=10\text{cm.}$  à  $R=140\text{cm.}$

P en gr.	0,5	0,8	1,0	1,4	1,5	2,0	3,0	4,0	6	10	20	30
P en gr. . . . .	0,225	0,308	0,385	0,490	0,510	0,63	0,89	1,15	1,60	2,40	4,40	6,10
P - p . . . . .	0,275	0,492	0,615	0,910	0,99	1,37	2,11	2,85	4,40	7,60	15,60	23,90
T <sub>2</sub> . . . . .		645	532	391	370	304	235	198,0	156,4	115,6	79,0	64,2
T <sub>1</sub> . . . . .	1200	639	536	390	372	305	234	199,2	155,4	115,8	79,0	63,8
T <sub>3</sub> . . . . .		650	529	389	370	307	235	199,8	156,6	115,6	78,8	63,8
T moyen en sec.	1200	650	530	390	371	305	235	199	156	115,6	79,0	64,0
T <sup>2</sup> . . . . .		422·500	280·900	152·400	137·600	93·000	55·200	39·600	24·340	13·360	6·240	4·096
(P - p) T . . . . .	330	320	326									
(P - p) T <sup>2</sup> . . . . .		208·000	172·700	133·400	136·200	127·400	116·500	112·800	107·100	101·500	97·400	97·900

L'existence de ces trois régimes est un phénomène général : je retrouve les trois droites quelles que soient la forme et les dimensions de la surface étudiée.

En résumé, la formule (1) représente l'ensemble du phénomène, à la condition de prendre pour  $a$ ,  $b$  des valeurs distinctes suivant les régimes :

Régime visqueux 1 :  $\mathcal{R} = a_1rv$ ;  $a_1 \neq 0, b_1 = 0$ ;

Régime intermédiaire 2 :  $\mathcal{R} = a_2rv + b_2sv^2$ ;  $a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$ ;

Régime hydraulique 3 :  $\mathcal{R} = b_3sv^2$ ;  $a_3 = 0, b_3 \neq 0$ .

En tout, quatre coefficients à déterminer :  $a_1, a_2$ , proportionnels aux coefficients angulaires des droites 1, 2;  $b_2, b_3$ , proportionnels aux ordonnées à l'origine des droites 2, 3.

2° Les intersections des droites 1 — 2 et 2 — 3 sont les points critiques C<sub>1</sub> et C<sub>2</sub>. Les valeurs de T<sub>1</sub>, v<sub>1</sub> et T<sub>2</sub>, v<sub>2</sub> en ces points sont les périodes et les vitesses critiques.

45. **Stabilité du régime intermédiaire près du régime visqueux.** — Par analogie avec les résultats que Poiseuille obtient pour l'écoulement dans un tube fin, je cherche des points de la courbe 1 pour  $T < 455''$ .

Avec le poids  $P = 1,5$  gr. (fig. 23), puis  $P = 1,4$  gr., je recommence plusieurs expériences :

a) Les périodes successives  $T_3, T_1, T_3$  d'une même expérience ont même valeur (tableau 3) : les régimes n'alternent pas.

b) Pour toutes les expériences, les points se placent sur la courbe 2 : il est impossible d'obtenir le régime 1, du moins après que le corps a parcouru un tour de manège, soit 880 cm.

Même stabilité du régime 3 près du régime 2.

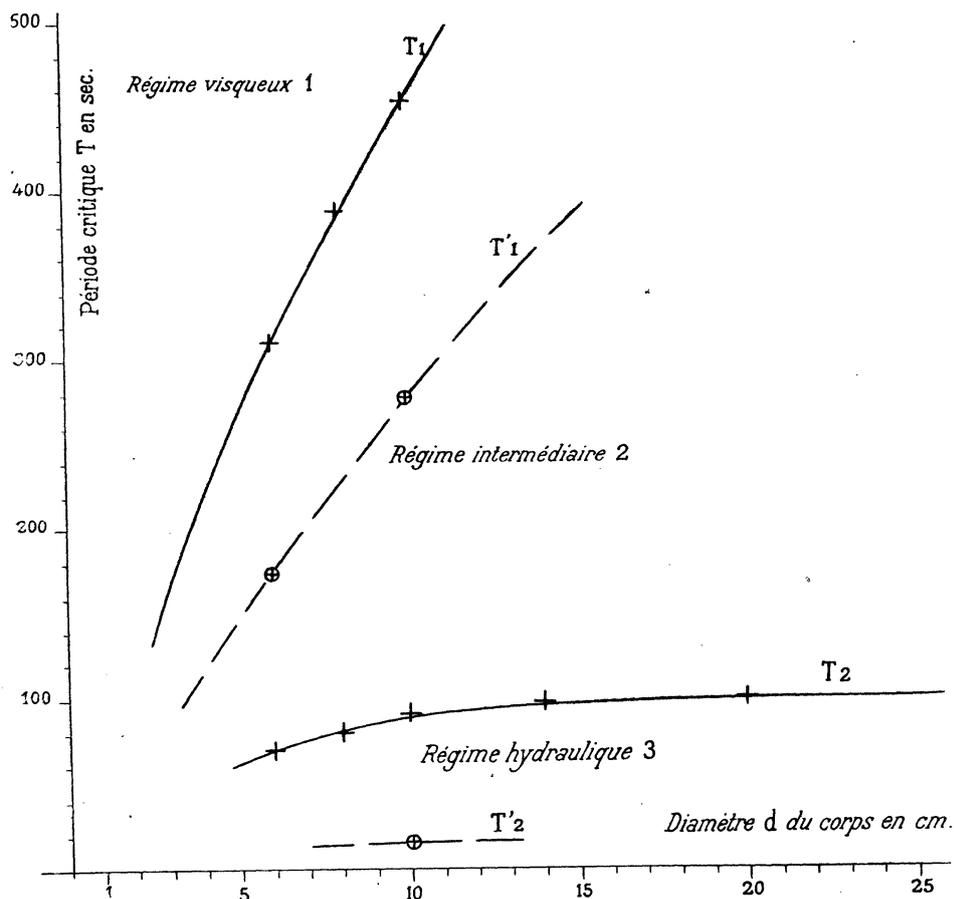


FIG. 25. — Périodes critiques en fonction du diamètre du corps (disque  $T_1, T_2$ ; sphère  $T'_1, T'_2$ ).

46. **Variation des vitesses critiques en fonction du diamètre du disque.** — Déterminons  $(P - p)T^2$  en fonction de  $T$  pour des disques de  $d = 6, 8, 10, 14, 20$  cm.

(fig. 23 et 24; l'échelle des ordonnées de la fig. 23 est quadruple de celle de la fig. 24).

Les courbes 6, 8, 10 sont formées de trois droites. Les courbes 14, 20 se réduisent aux droites 3, 2, le point  $C_1$  n'étant atteint que pour des vitesses inférieures à celles que j'utilise : ces courbes permettent d'observer le régime intermédiaire sur un vaste intervalle de vitesse.

Je construis la courbe des périodes critiques  $T_1$ ,  $T_2$  en fonction du diamètre  $d$  du disque (tableau 4, fig. 25).

$T_1$  est proportionnel à  $d$  (en réalité,  $T_1$  croît un peu moins vite que  $d$ ); le produit de la vitesse critique  $v_1$  (à laquelle apparaît le terme en  $v^3$ ) par le diamètre du disque est constant :  $v_1 d = k$ . Ce résultat est comparable à celui de Reynolds pour l'écoulement dans un tube fin : le produit de la vitesse critique par le diamètre du tube est constant.

**Tableau 4.** — Périodes et vitesses critiques, coefficients  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  pour des disques de  $d = 6, 8, 10, 14, 20$  cm.

Rayon du disque en cm.	Surface du disque en cm <sup>2</sup> .	Régime 1. ( $P - p$ ) $T$ proport. à $a_1 r$	Point critique $c_1$		Régime 2.		Point critique $c_2$		Régime 3. ( $P - p$ ) $T_2$ proport. à $b_3 s$
			$T_1$ en sec.	$V_1$ en cm. sec.	( $P - p$ ) $T$ proport. à $a_2 r$	( $P - p$ ) $T^2$ proport. à $b_2 s$	$T_2$ en sec.	$V_2$ en cm. sec.	
3	28,3	158	312	2,8	69,6	27·700	70	12,5	32·800
4	50,3	227	390	2,2	92	52·600	80	11,0	60·300
5	78,5	323	455	1,93	138	85·000	95	9,26	98·000
7	153,9				200	182·000	97	9,1	202·000
10	314,1				320	410·000	100	8,8	442·200

$T_2$ , qui croît vite avec  $d$  pour de petits diamètres, est presque indépendant de  $d$  à partir de  $d = 10$  cm. : la vitesse critique  $v_2$  (à laquelle disparaît le terme en  $v$ ) est sensiblement indépendante du diamètre du disque.

Les courbes  $T_1$ ,  $T_2$  divisent le plan en trois régions qui correspondent aux trois régimes. Pour un même disque, augmentons  $P$  (tableau 3),  $T$  décroît : on décrit une parallèle à l'axe des ordonnées, qui traverse successivement les régimes 1, 2, 3, ce que vérifie l'expérience.

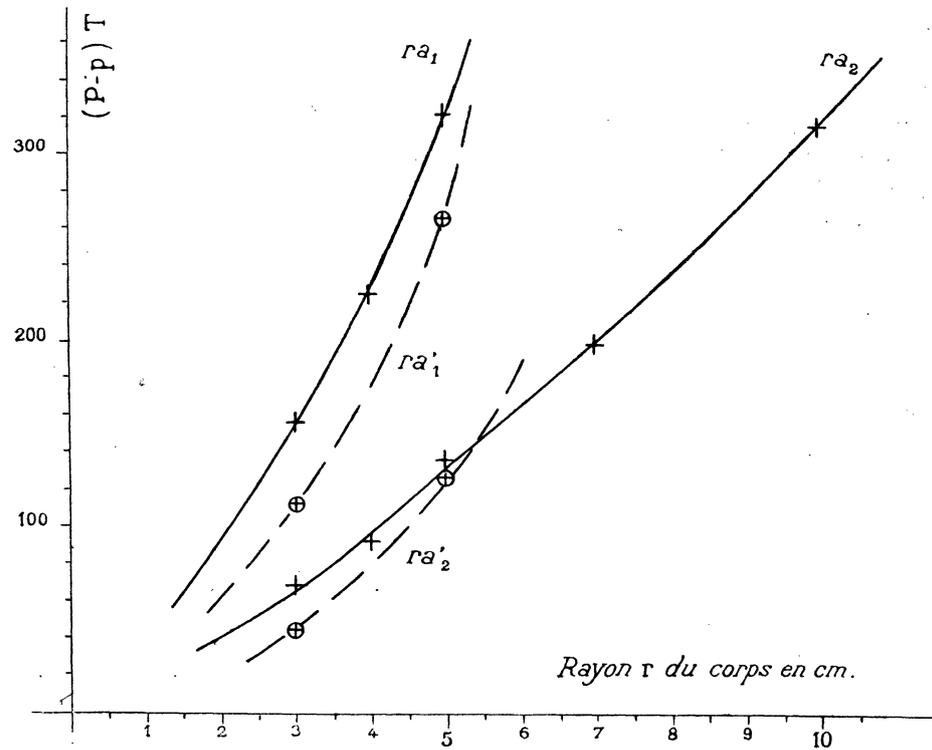


FIG. 26. — Coefficients  $a_1, a_2$  en fonction du rayon  $r$  du corps (disque  $ra_1, ra_2$ ; sphère  $ra'_1, ra'_2$ ).

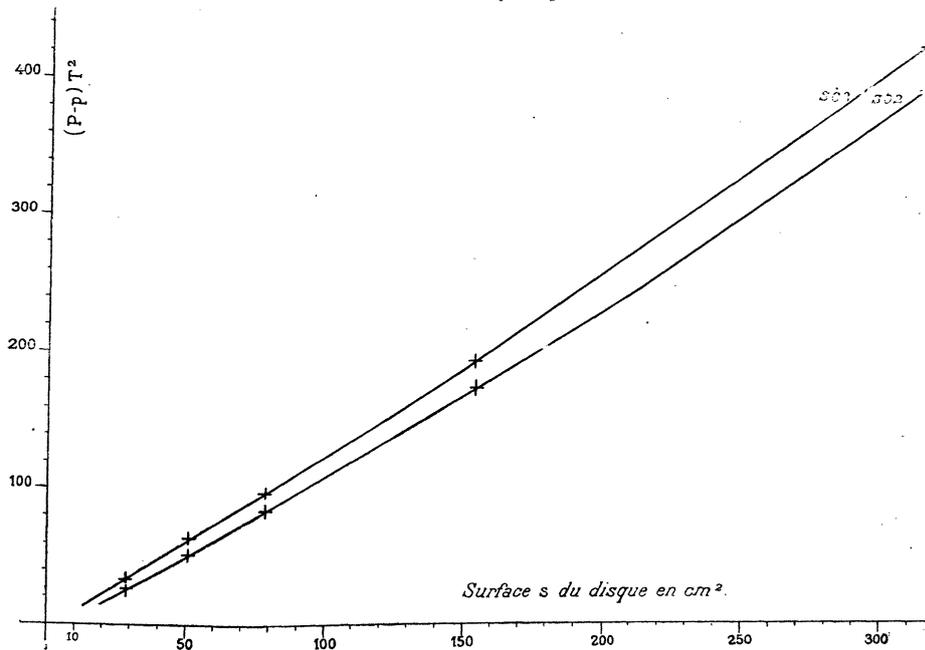


FIG. 27. — Coefficients  $b_2, b_3$ , en fonction de la surface  $s$  du disque.

47. **Variation des coefficients  $a_1, a_2, b_2, b_3$  en fonction du diamètre du disque.**  
 Comme valeur de  $a_1r, a_2r, b_2s, b_3s$ , je prends les quantités proportionnelles  $(P-p)T$  (régime 1),  $(P-p)T$  (régime 2),  $(P-p)T^2$  (régime 2),  $(P-p)T^2$  (régime 3) (tableau 4). Je construis les courbes  $a_1r, a_2r$  en fonction de  $r$  (*fig. 26*),  $b_2s, b_3s$  en fonction de  $s$  (*fig. 27*). Si les coefficients étaient constants, ces courbes seraient des droites passant par l'origine. Ces courbes se relèvent légèrement quand  $r$  croît : les coefficients croissent avec  $r$ . C'est la généralisation aux quatre coefficients, de l'accroissement déjà observé dans le régime hydraulique pour  $j$ , proportionnel à  $b_3$  (§ 27).

48. **Sphères.** — 1° EXISTENCE DES TROIS RÉGIMES. — Avec des sphères en celluloid de  $d=9,80$  cm. (tableau 5, *fig. 28*), pour  $T > 280''$  ( $v < 3,2$  cm. sec.),  $(P-p)T$  est

Tableau 5. -- Sphères de  $d=9,80$  cm. à  $R=140$  cm.

P en gr.	0,5	0,8	1,0	1,2	1,5	2,0	3,0	4,0	6	10	50	100
$p$ en gr. . . .	0,240	0,350	0,425	0,51	0,62	0,83	1,23	1,60	2,30	3,80	17,5	34,5
$P-p$ . . . . .	0,260	0,450	0,575	0,69	0,88	1,17	1,77	2,40	3,70	6,20	32,5	65,5
$T_3$ . . . . .	993	590	465	375	305	245	188	155	118,0	86,8	35,2	24,6
$T_4$ . . . . .	990	580	464	376	305	246	187	154	118,0	87,8	35,2	24,4
$T_5$ . . . . .	1063	600	457	374	306	244	188	154	118,0	87,4	35,1	24,8
T moyen en sec.	1020	590	460	375	305	245	188	154	118,0	87,4	35,2	24,6
$T^2$ . . . . .	1-040-000	348-000	211-600	140-600	93-000	60-000	35-300	23-700	13-920	7-640	1-240	605
$(P-p)T$ . . .	265	266	264	259	268							
$(P-p)T^2$ . . .	270-000	456-600	421-700	97-000	81-800	70-200	62-480	56-900	51-500	47-400	40-300	39-600

constant (avant-dernière ligne du tableau 5); la courbe est une droite passant par l'origine : la résistance est proportionnelle à la vitesse (régime 1).

Pour  $T < 280''$ , la courbe est une droite représentée par la formule (1), où  $a, b$  sont tous deux  $\neq 0$  (régime 2).

L'appareil ne donne pas de vitesses assez grandes pour atteindre  $C_2$ . Portons sur la *fig. 28* les points  $a, b, c$  obtenus avec le manège 2 (*fig. 12*);  $a$  se place sur la

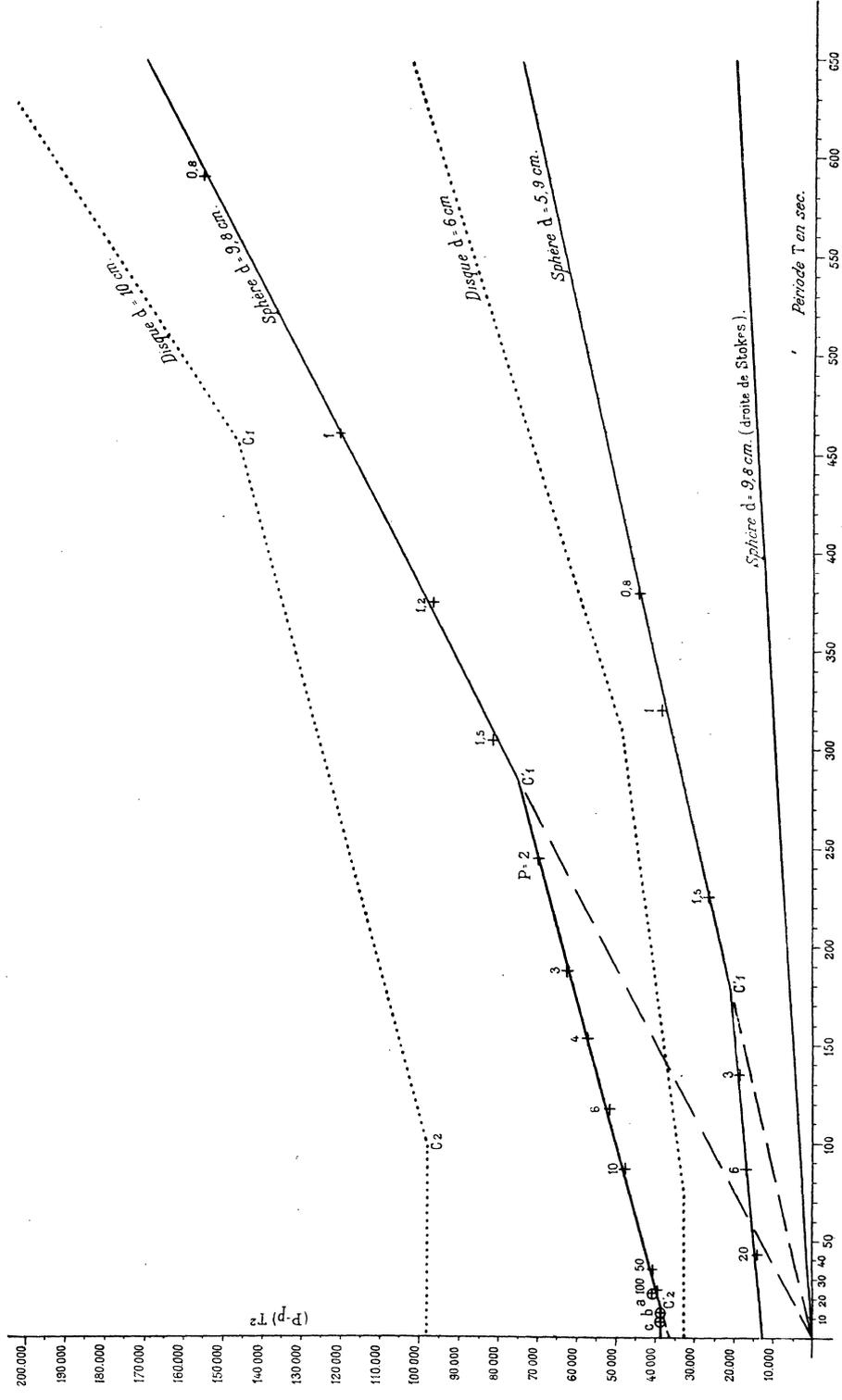


Fig. 28. — Variation de  $(P - p)T^3$  en fonction de  $T$  (sphères).

droite 2, tandis que  $b$ ,  $c$  définissent une troisième droite, parallèle à l'axe des abscisses, sur laquelle la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse (régime 3).

Comparons cette courbe à celle du disque de  $d = 10$  cm. (*fig. 28*). Pour une même vitesse la résistance est plus petite, mais la diminution de résistance, due à la forme sphérique, est plus grande dans le régime hydraulique que dans le régime visqueux.

Les vitesses critiques  $v'_1$ ,  $v'_2$  sont plus grandes : 3,2 cm. sec. au lieu de 1,9; 5,9 cm. sec. au lieu de 9,2.

2° VARIATION DE LA VITESSE CRITIQUE  $v'_1$ , DES COEFFICIENTS  $a'_1$ ,  $a'_2$  EN FONCTION DU DIAMÈTRE DE LA SPHÈRE. — Pour des sphères en celluloïd de  $d = 5,9$  cm. (courbe  $d = 5,9$ , *fig. 28*), je détermine les nouvelles valeurs de  $T'_1$ ,  $a'_1$ ,  $a'_2$  :

$T'_1$  est proportionnel à  $d$  (courbe pointillée, *fig. 25*),  $v'_1 d = K$ , comme pour le disque.

$a'_1$ ,  $a'_2$  croissent avec  $r$  (courbe pointillée; *fig. 26*), plus vite que pour le disque.

**49. Comparaison de la droite de Stokes au résultat précédent.** — Sur la *fig. 28*, plaçons la droite de Stokes pour une sphère de  $d = 9,8$  cm. D'après la formule de Stokes (§ 36) :

$$\mathcal{R} = 6\pi_1 r v; \quad a = 6\pi_1 = 0,003 \cdot 39 \text{ (C. G. S.)};$$

d'où le coefficient angulaire de la droite cherchée (§ 52) :

$$(P - p)T = A \cdot 2ar = 32,2.$$

L'expérience donne  $(P - p)T = 265$  (avant-dernière ligne du tableau 5), coefficient 8,2 fois plus grand.

**50. Hémisphères et cylindres.** — J'utilise la formule (2) du § 43 et les coefficients  $a$ ,  $b$  (déjà déterminés pour le disque de  $d = 10$ , et la sphère de  $d = 9,80$ ), pour tracer (*fig. 29*) les courbes du disque et de la sphère du diamètre 9,60 cm., égal à celui des hémisphères.

Pour l'hémisphère (plein ou creux), convexité en avant, la résistance est supérieure de 2 % à celle de la sphère.

Pour l'hémisphère plein, plan en avant, la résistance est inférieure à celle du disque. La diminution est plus grande dans les régimes 1 et 3 que dans le régime 2.

Pour l'hémisphère creux, concavité en avant, la résistance est plus grande que celle du disque et de la sphère; l'augmentation, petite dans le régime 1, croît quand la vitesse augmente. Le point  $P = 100$  gr. et les points entourés d'un cercle, obtenus avec le manège 2 (§ 26), ne se placent pas sur la droite 3 : la courbe se relève

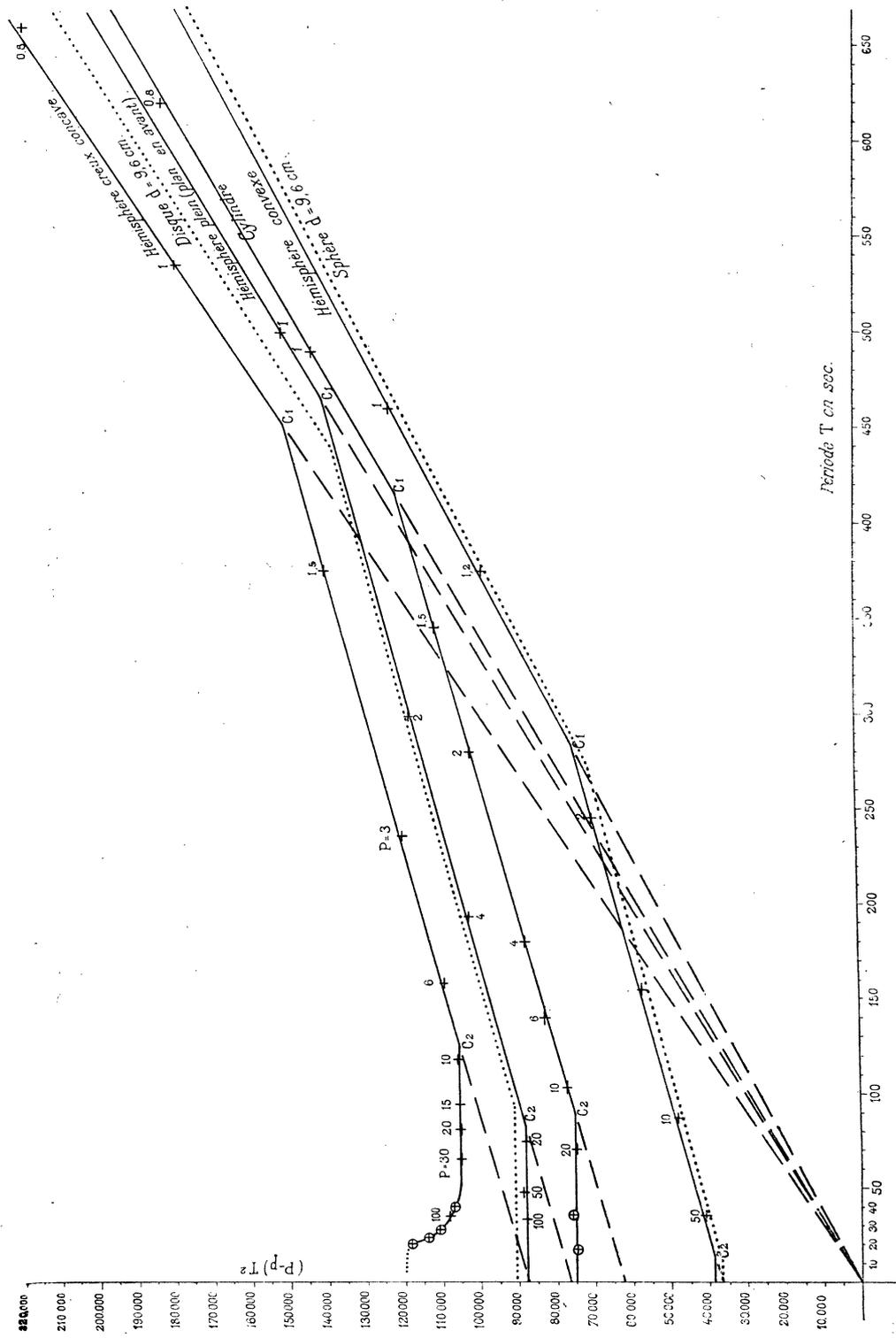


Fig. 29. —  $(P - p)T^2$  en fonction de  $T$  (Hémisphères et cylindre).

pour atteindre probablement un second régime hydraulique, trouvé par Eiffel entre 4 et 30 m. sec. (courbe pointillée).

Pour le cylindre ( $d = 10,06$ ,  $h = 10$  cm.), la résistance est comprise entre celle de l'hémisphère convexe et celle de l'hémisphère plein, plan en avant.

**51. Cônes.** — Les cônes en carton mesurent 10 cm. de hauteur et de diamètre de base.

Pour le cône, plein ou creux, pointe avant, la résistance est plus petite que celle de la sphère dans le régime visqueux, plus grande dans le régime hydraulique (*fig. 30*). Pour  $T = 150''$  ( $v = 5,8$  cm. sec.), dans le régime 2, les résistances sont égales.

Pour le cône plein, pointe arrière, la résistance est peu inférieure à celle du disque dans le régime 1, très inférieure dans le régime 2, voisine dans le régime 3.

Pour le cône creux, pointe arrière, la résistance est plus petite que celle du plan dans le régime 1, beaucoup plus grande dans le régime 3; pour  $T = 200''$  ( $v = 4,4$  cm. sec.), dans le régime 2, les résistances sont égales.

Pour les deux derniers corps, la longueur de la droite 2 est réduite, probablement à cause du fuselage à l'arrière.

En résumé, pour diminuer la résistance, il faut employer la forme sphérique dans le régime hydraulique, la forme conique dans le régime visqueux.

**52. Calcul des coefficients en C. G. S.** — Les coefficients  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  (lignes 5, 8, 9, 13, du tableau 6) sont déterminés par la relation (2) du § 43, où  $R = 140$  cm.,  $r' = 0,52$  cm.,  $1 : A = 1,036 \cdot 10^{-3}$ ;  $1 : B = 1,177 \cdot 10^{-6}$ .

Pour le régime 1 :

$$a_1 = (P - p) T : 2Ar,$$

relation où  $(P - p)T$  est le coefficient angulaire de la droite 1 (ligne 4). Sous l'action du même poids moteur  $P = 1$  gr., le manège prend pour les divers corps la période  $T$  (ligne 3).

Pour le régime 2 :

$$a_2 = (P - p) T : 2Ar, \quad b_2 = (P - p) T^2 : 2Bs,$$

relation où  $(P - p)T$ ,  $(P - p)T^2$  sont le coefficient angulaire, l'ordonnée à l'origine de la droite 2.

Pour le régime 3 :

$$b_3 = (P - p) T^2 : 2Bs$$

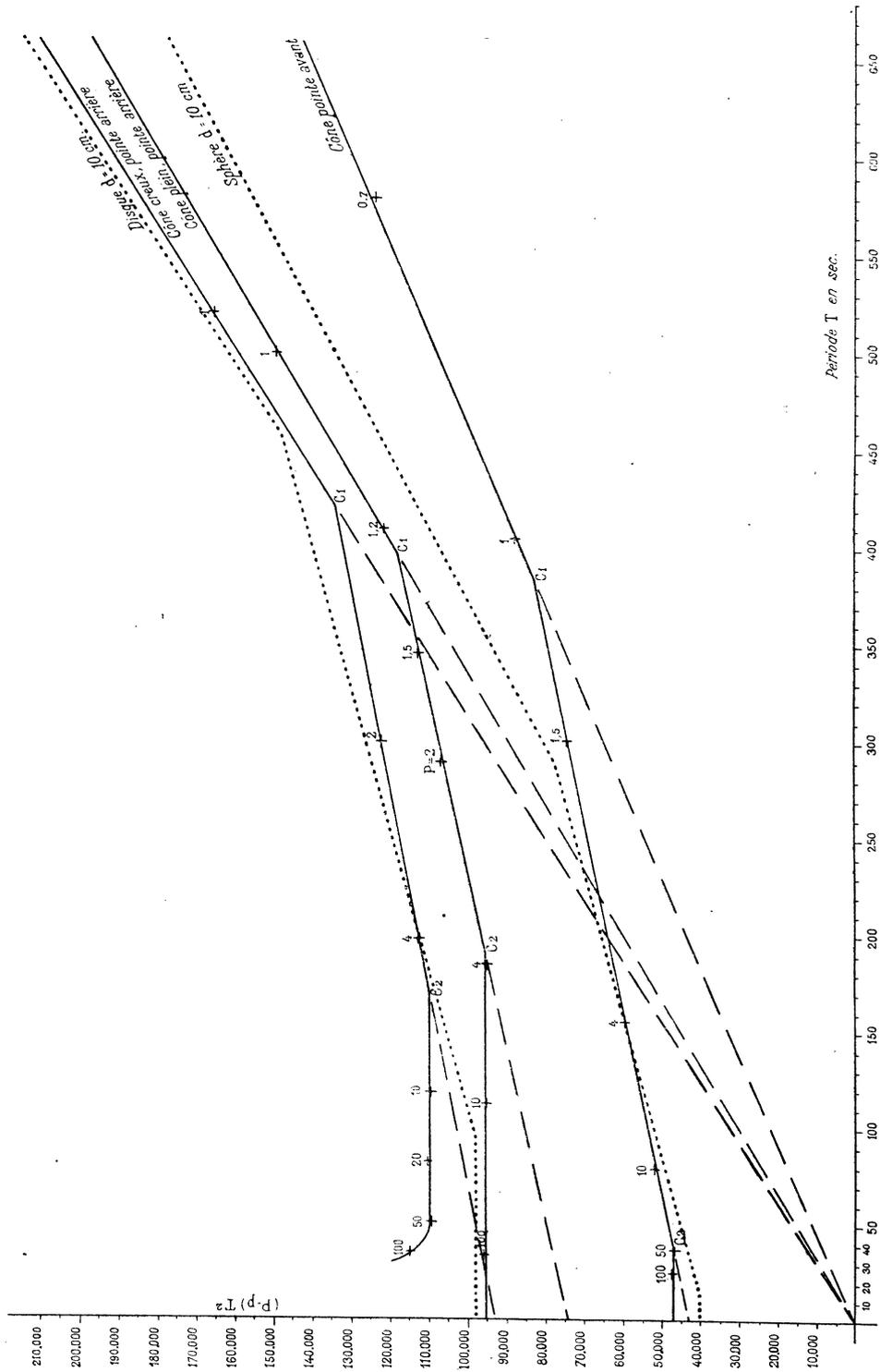


Fig. 30. —  $(P - p)\Gamma^2$  en fonction de  $T$  (cônes).

relation où  $(P - p)T^2$  est l'ordonnée à l'origine de la droite 3. Sous  $b_3$ , j'inscris les valeurs correspondantes de  $j$  et de  $k$  (lignes 14 et 15).

Dans le tableau 6, je classe les corps pour que  $a_1$  croisse de gauche à droite. Cet ordre de résistance croissante n'est pas le même dans le régime hydraulique et dans le régime visqueux (*fig. 31*).

Voici les vitesses critiques et les formules pour quelques corps :

*Disque :*

$$\begin{aligned} v < 1,93 \text{ cm. sec.}, & \quad \mathfrak{R} = 0,0338rv, \\ 1,93 < v < 9,26, & \quad \mathfrak{R} = 0,0143rv + 638.10^{-6}sv^2, \\ 9,26 < v, & \quad \mathfrak{R} = 731.10^{-6}sv^2. \end{aligned}$$

*Sphère :*

$$\begin{aligned} v < 3,14 \text{ cm. sec.}, & \quad \mathfrak{R} = 0,0280rv, \\ 3,14 < v < 58,6, & \quad \mathfrak{R} = 0,0142rv + 290.10^{-6}sv^2, \\ 58,6 < v < 1700, & \quad \mathfrak{R} = 300.10^{-6}sv^2; \end{aligned}$$

d'après Eiffel, au voisinage de  $v = 17$  m., la résistance décroît brusquement, puis redevient proportionnelle au carré de la vitesse (second régime hydraulique) :

$$1700 < v < 3000, \quad \mathfrak{R} = 100.10^{-6}sv^2.$$

*Hémisphère convexe :*

$$\begin{aligned} v < 3,10 \text{ cm. sec.}, & \quad \mathfrak{R} = 0,0285rv, \\ 3,10 < v < 52, & \quad \mathfrak{R} = 0,0145rv + 300.10^{-6}sv^2, \\ 52 < v, & \quad \mathfrak{R} = 313.10^{-6}sv^2; \end{aligned}$$

il est probable qu'entre 52 et 400 cm. sec., la résistance décroît brusquement pour atteindre un second régime hydraulique trouvé par Eiffel ;

$$400 < v < 3000, \quad \mathfrak{R} = 200.10^{-6}sv^2.$$

*Hémisphère concave :*

$$\begin{aligned} v < 1,95 \text{ cm. sec.}, & \quad \mathfrak{R} = 0,0355rv, \\ 1,95 < v < 7, & \quad \mathfrak{R} = 0,0147rv + 712.10^{-6}sv^2, \\ 7 < v < 18, & \quad \mathfrak{R} = 850.10^{-6}sv^2; \end{aligned}$$

à partir de  $v = 18$  cm. sec., la résistance croît rapidement pour atteindre un second régime hydraulique trouvé par Eiffel ;

$$400 < v < 3000, \quad \mathfrak{R} = 1000.10^{-6}sv^2.$$

Tableau 6. — Vitesses critiques  $v_1, v_2$  et valeur des coefficients  $a_1, a_2, b_2, b_3$ , en c. g. s.

	Cône hémisphère	Cône pointe avant	Hémisphère cône	Sphère	Hémisphère convexe	Cylindre	Cône plein plan en avant	Hémisphère plein plan en avant	Cône creux, pointe en arrière	Disque	Hémisphère concave
	1	2-3	4	5	6-7	8	9	10	11	12	13
$2r$ .....	10	10	10	9,80	9,60	10,06	10	9,60	10	10	9,60
$28$ .....	157,0	157,0	157,0	150,5	144,6	201,3	157,0	144,6	157,0	157,0	144,6
T pour $P = 1$ gr.	390	405	460	460	460	490	500	500	520	530	535
( $P - p$ ) T.....	199	219	264	264	264	289	300	300	320	326	329
$a_1$ .....	0,0206	0,0227	0,0274	0,0280	0,0285	0,0297	0,0310	0,0322	0,0331	0,0338	0,0355
$T_1$ en sec.....		385		280	285	415	395	465	420	455	450
$v_1$ en cm.....		2,3		3,14	3,10	2,1	2,0	1,9	2,1	1,93	1,95
$a_2$ .....		0,0110		0,0142	0,0145	0,0144	0,0116	0,0144	0,0103	0,0143	0,0147
$b_2 \cdot 10^{-6}$ .....		323		290	300	362	555	626	697	638	712
$T_2$ en sec.....		40		15	17	90	190	80	170	95	125
$v_2$ en cm.....		22		58,6	52	9,8	4,6	11	5,2	9,26	7,04
( $P - p$ ) $T^2$ .....	44 600	47 300	40 800	38 500	38 500	74 500	96 000	87 200	111 000	97 500	104 500
$b_3 \cdot 10^{-6}$ .....	335	355	306	301	313	436	720	710	832	731	850
$j$ .....	0,548	0,581	0,501	0,493	0,512	0,715	1,178	1,163	1,362	1,195	1,392
$K$ .....	0,0341	0,0362	0,0312	0,0307	0,0319	0,0445	0,0734	0,0724	0,0848	0,0744	0,0867

Régime 1.

Régime 2.

Régime 3.



rieures à 15 cm. sec., mais pour le cône plein, plan en avant, la courbe reste confondue avec la droite 3, malgré les oscillations.

J'attribue ces oscillations à l'irrégularité des vitesses dans la queue, ce qui provoque un défaut de symétrie (par rapport à l'axe du mouvement) des pressions sur le fuselage arrière; en effet :

- a) les oscillations ne se produisent que pour des corps à l'arrière fuselé;
- b) l'amplitude des oscillations augmente quand on substitue l'avant concave à l'avant plan, ce qui accroît la section de la queue et l'irrégularité des vitesses.

**54. Expériences dans l'eau.** — Sur le corps fixons une mèche imprégnée d'encens, dont nous observons la fumée. Moins dense que l'air, celle-ci monte et trouble le phénomène dès que la vitesse du corps est petite : pour étudier la disposition des filets dans le régime visqueux, j'expérimente dans l'eau.

Dans un vase muni de regards vitrés, j'abandonne *sans vitesse initiale* une sphère (de  $d = 5$  cm.) convenablement lestée. J'éclaire fortement à travers l'un des regards; dans une direction perpendiculaire, j'observe une poussière, ou mieux le filet que colore un cristal de permanganate, collé sur la sphère.

a) Pour des vitesses limites inférieures à une certaine vitesse  $v_1$ , le centre de la sphère décrit une verticale  $zz'$  (*fig. 21*). A l'avant et à l'arrière de la sphère, les nappes de courant, symétriques par rapport à  $zz'$ , glissent régulièrement les unes sur les autres; le filet de permanganate se conserve; la viscosité seule intervient pour entraîner les particules liquides : la résistance est proportionnelle à  $v$  (régime visqueux).

Sur  $zz'$ , en deux points P, P', équidistant du centre O de la sphère (supposée immobile), les vitesses  $v$ ,  $v'$  n'ont pas même valeur. Le phénomène est visible dans l'eau, mais pour éviter l'incertitude due à la vitesse propre des poussières, j'abandonne la sphère dans un vase rempli de glucose cristal qui porte en suspension des particules solides dont la vitesse propre est négligeable. Pendant la chute de la sphère, à l'aide d'un viseur, je détermine la vitesse des particules; je trouve  $v' > v$  : dans le régime visqueux, il existe une queue entraînée.

Dans l'eau, comme dans l'air, la résistance est très supérieure à celle de la théorie de Stokes.

b) Pour des vitesses limites comprises entre  $v_1$  et une certaine vitesse  $v_2 > v_1$ , la sphère part sur la verticale  $zz'$ , puis s'en écarte lentement. Derrière la sphère les nappes de courant ne sont plus symétriques par rapport à  $zz'$ , mais le filet de permanganate se conserve; la viscosité n'intervient plus seule dans l'entraînement des particules liquides : le terme en  $v^2$  apparaît (régime intermédiaire).

c) Pour des vitesses limites plus grandes que  $v_2$ , la sphère décrit la verticale pendant 30 cm., puis, brusquement, est projetée à une distance de deux à trois rayons de la verticale, dans un azimut variable d'une expérience à l'autre. Le mouvement vertical de la sphère, ralenti au moment de la projection, reprend bientôt sur une

trajectoire de forme sinusoïdale. La sphère décrit probablement cette trajectoire par des projections analogues à la première, mais d'amplitude inférieure et de sens successivement opposés. L'amplitude de la sinusoïde diminue quand la vitesse limite augmente : pour des vitesses de 50 cm. sec., la trajectoire se compose de deux portions de verticales distinctes.

La sphère entraîne derrière elle une masse liquide agitée, dans laquelle le filet de permanganate se détruit; le rôle de la viscosité devient négligeable, le terme en  $v$  disparaît : la résistance est proportionnelle à  $v^2$  (régime hydraulique).

Pour la sphère de  $d=5$  cm., la vitesse critique  $v_1$  est de 1 cm. sec.; la vitesse critique  $v_2$  est difficile à déterminer parce que la sphère projetée ne passe plus devant les regards vitrés; cette vitesse  $v_2$  est de l'ordre de 10 cm. sec.

L'ascension des bulles d'air dans l'eau donne les mêmes phénomènes : pour les petites bulles (mouvement lent), la trajectoire est rectiligne; à partir d'un certain rayon (mouvement rapide), la trajectoire est de forme sinusoïdale.

Le détail des expériences dans l'eau fera l'objet d'un mémoire spécial.

**55. Expériences de Sorkau sur les régimes hydrauliques multiples.** — Des expériences d'Eiffel et de ce qui précède résulte que le régime hydraulique n'est pas unique pour certains corps (sphère, hémisphères, cônes).

Pour l'écoulement dans un tube fin, Sorkau<sup>(1)</sup> trouve aussi plusieurs régimes hydrauliques. Écrivons que la vitesse moyenne  $u$  d'écoulement est proportionnelle à la puissance  $n$  de la différence  $p$  des pressions aux bouts du tube :

$$u = ap^n, \quad \log u = \log a + n \log p,$$

relation où  $n=1$  pour le régime visqueux et  $n < 1$  pour le régime hydraulique.

Sorkau porte  $\log p$  en abscisses,  $\log u$  en ordonnées; quand  $u$  croît, les points se placent :

- a) pour l'eau, sur une droite unique;
- b) pour le chloroforme et l'acétone, d'abord sur une droite  $n_1$ , puis, brusquement, le coefficient angulaire de cette droite varie et les points se placent sur une seconde droite  $n_2$  : chaque valeur de  $n$  définit un régime hydraulique;
- c) pour l'acétate d'éthyle, sur trois droites successives de coefficient angulaire  $n_1=0,66$ ,  $n_2=0,43$ ,  $n_3=0,46$  : d'où l'existence de trois régimes hydrauliques distincts.

(1) Sorkau. *Physikalische Zeits.*, 1911, tome XII, p. 582; 1912, tome XIV, p. 805.

## TROISIÈME PARTIE

### Emploi du pendule conique comme régulateur <sup>(1)</sup>.

#### CHAPITRE VII

##### Insuffisance des procédés classiques d'entretien, emploi de mon manège.

En dehors du cas particulier de la régulation d'un mouvement de rotation (§ 4), le pendule conique semble préférable au pendule circulaire : le mouvement est simplifié, l'échappement supprimé, l'entretien obtenu par simple rotation d'une fourchette. Avec le mouvement *continu* du pendule conique, la régulation (moyenne) paraît être meilleure qu'avec le mouvement *saccadé* du pendule circulaire ; mais avec les procédés d'entretien employés jusqu'ici le pendule conique est peu régulier, c'est pourquoi il n'est utilisé ni par l'horloger, ni par le physicien.

**56. Construction d'un pendule conique. Notations.** — Un fil d'acier (corde de piano), attaché au clou E (*fig. 32*), traverse le trou A de même diamètre que lui et porte la tige DBC. Des vis de serrage  $v, v'$  calent sur la tige le corps de révolution BC, la pointe P. Cette pointe traverse la fourchette F et s'appuie sur l'arrêt  $d$ , quand le pendule est au repos.

Soit : M, la masse du corps ;  $\theta$ , l'angle  $\widehat{HAB}$  (amplitude) ;  
T, la période ;  $\omega = 2\pi : T$ , la vitesse angulaire.

Dans le méridien,  $\theta$  reste constant si les forces  $Mg, Te$  et la force centrifuge  $M\omega^2 r'$  s'équilibrent. Décomposons  $Mg$  sur MP, MH ; sur MH :

$$Mg \operatorname{tg} \theta = M\omega^2 r' = M\omega^2 l \sin \theta ;$$

---

<sup>(1)</sup> M. le Doyen Sabatier a bien voulu présenter à l'Académie deux notes sur ce travail (*C. R.*, 1921, t. 173, second semestre, pages 404 et 470).

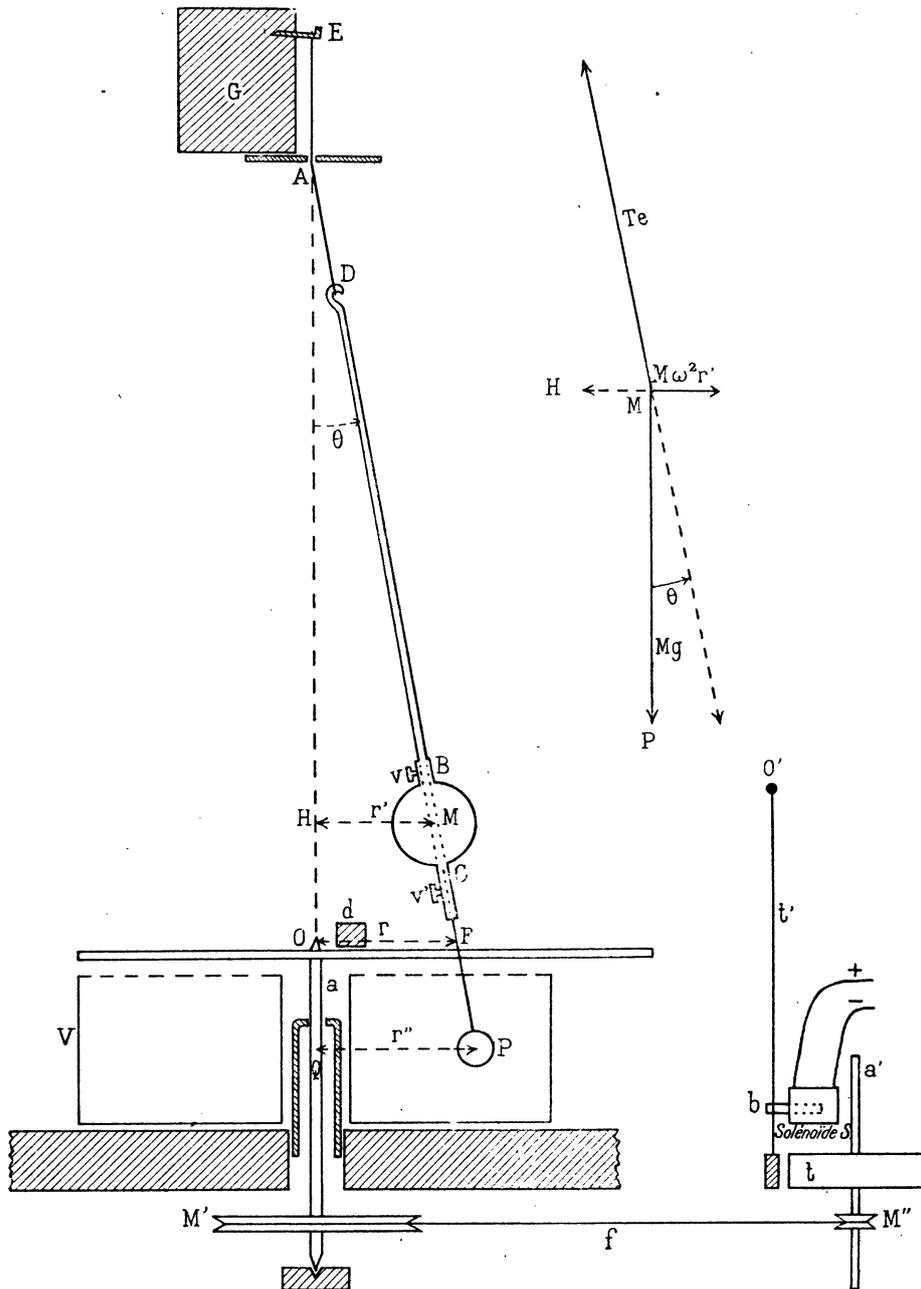


FIG. 32. — Pendule conique ( $AM = l$ ,  $AF = a$ ,  $AP = b$ ).

d'où :

$$g = \omega^2 l \cos \theta, \quad T = 2\pi \sqrt{l \cos \theta}; \quad g = T_0 \sqrt{\cos \theta}; \quad (1)$$

par approximation :

$$T = T_0(1 - \theta^2 : 4), \quad \Delta T : T_0 = -\theta \Delta \theta : 2. \quad (2)$$

Quand  $\theta$  croît,  $T$  diminue pour le pendule conique, croît pour le pendule circulaire [ $T = T_0(1 + \theta^2 : 16)$ ]; en valeur absolue, le terme en  $\theta^2$  est plus grand (l'isochronisme est moins bien réalisé) pour le premier que pour le second.

La condition  $\cos \theta \leq 1$  donne :

$$g \leq \omega^2 l, \quad T \leq 2\pi \sqrt{l}; \quad g = T_0 :$$

le pendule ne quitte la verticale que pour une vitesse angulaire  $\omega_0$  suffisante de la fourchette.

**57. Variation des frottements à courte et à longue période.** — 1° Pour l'ensemble pendule-système d'entretien, soit :

$\Gamma$ , le couple moteur qui résulte de l'action d'un poids, d'un ressort, d'une dynamo, etc.

$\gamma$ , le couple résistant indépendant de  $\theta$ , dû aux frottements solides des rouages et des pivots, à la résistance de l'air sur la fourchette, etc.

$\gamma_0$ , le couple résistant dépendant de  $\theta$ , dû à la résistance de l'air sur le pendule, etc.

$\theta$  reste constant,  $T$  aussi d'après (1), si :

$$\Gamma = \gamma + \gamma_0; \quad \Gamma - \gamma = \gamma_0. \quad (3)$$

Par malheur,  $\Gamma$  et  $\gamma$  varient de  $\Delta\Gamma$  (variation de tension du ressort, de l'intensité du courant qui traverse la dynamo) et de  $\Delta\gamma$  (variation du graissage des rouages et des pivots).

2° Supposons ces variations de courte période : pendant quelques secondes,  $\Delta\Gamma - \Delta\gamma > 0$  (puis  $\Gamma - \gamma$ ) reprend sa valeur initiale. Le couple moteur est supérieur au couple résistant,  $\omega$  croît; l'équilibre des trois forces  $Mg$ ,  $Te$ ,  $M\omega^2 r'$  est rompu par la croissance de la dernière :  $\theta$  croît.

L'excès d'énergie fournie est absorbé par l'augmentation  $\Delta E$  de l'énergie cinétique  $E$  du pendule :

$$\begin{aligned} 2E &= MV^2 = M(\omega l \sin \theta)^2, \\ \Delta E &= Ml^2 \omega (\theta^2 \cdot \Delta \omega + \omega \theta \cdot \Delta \theta), \end{aligned} \quad (4)$$

en remplaçant  $\sin \theta$  par  $\theta$ ,  $\cos \theta$  par 1, puisque  $\theta$  est petit.

Différentions (1) et (2) :

$$2\Delta \omega = \omega \theta \cdot \Delta \theta, \quad \theta \Delta \theta = -2\Delta T : T_0, \quad (5)$$

$\Delta \omega$  est négligeable devant  $\Delta \theta$ ;  $\Delta E$  devient :

$$\Delta E = -2Ml^2 \omega^2 \cdot \Delta T : T_0.$$

Pour absorber  $\Delta E$ ,  $T$  varie d'une quantité  $\Delta T$ , inversement proportionnelle à  $M$ .

Pour comparer la régulation du pendule à celle d'un volant, je fixe la pointe dans la fourchette ( $\Delta \theta \equiv 0$ ) : l'excès d'énergie est absorbé par la variation négligée  $d'\omega$ . D'après (5), les deux termes de (4) sont dans le rapport de  $\theta^2 : 2$ . Si  $\theta = 0,1$ , pour absorber  $\Delta E$  avec un même  $\Delta T$ , il faut prendre la masse du volant 200 fois plus grande que celle du pendule. Remarquons de plus que, pour une même masse, les frottements solides sont plus grands pour le volant que pour le pendule.

3° Supposons la variation des frottements à longue période :  $(\Gamma - \gamma)$  prend et garde une nouvelle valeur, telle que  $\Delta \Gamma - \Delta \gamma > 0$ .  $\theta$  croît jusqu'à ce que l'augmentation de  $\gamma_0$  rétablisse l'égalité des couples moteurs et résistants :

$$\Delta \Gamma - \Delta \gamma = \Delta \gamma_0. \quad (6)$$

Si la résistance éprouvée par le pendule est proportionnelle au carré de la vitesse linéaire :

$$\gamma_0 = Kl \sin \theta (\omega l \sin \theta)^2 = K'\theta^3. \quad (7)$$

En d'autres termes, le pendule est stable dans la fourchette parce que  $\gamma_0$  croît avec  $\theta$  ( $\Delta \gamma_0 : \Delta \theta > 0$ ); la régulation se fait d'autant mieux que  $\Delta \gamma_0 : \Delta \theta$  est plus grand; si ce rapport est négatif, le pendule est instable (§ 80).

**58. Position du problème de la régulation.** — 1° Écrivons l'équation (6) sous la forme :

$$\Delta \Gamma - \Delta \gamma = (\Delta \gamma_0 : \Delta \theta) (\Delta \theta : \Delta T) \Delta T.$$

Le problème de la régulation consiste à rendre  $\Delta T$  petit; pour cela, chacune des conditions suivantes suffit :

a) diminuer  $\Delta\Gamma - \Delta\gamma$ , c'est-à-dire prendre un couple moteur régulier et réduire les frottements d'entretien (emploi de mon manège);

b) augmenter  $\Delta\gamma_0 : \Delta\theta$ , en ajoutant une résistance d'absorption qui croisse rapidement avec  $\theta$ ;

c) augmenter  $\Delta\theta : \Delta T$ , en rendant horizontale la courbe  $T(\theta)$  (isochronisme).

2° Montrons que dans les cas de la loi (7) la régulation est meilleure aux grandes amplitudes.

$$\text{D'après (7) : } \Delta\gamma_0 : \Delta\theta = 3K'\theta^2;$$

$$\text{d'après (2) : } \Delta\theta : \Delta T = -2 : \theta T_0;$$

$$\text{d'où : } \Delta\Gamma - \Delta\gamma = -6K'\theta \cdot \Delta T : T_0.$$

Pour une même variation du couple moteur,  $\Delta T$  est inversement proportionnel à  $\theta$ .

**59.  $\gamma_0$  augmenté par barbotage de la pointe.** — Le procédé de régulation le plus simple paraît être fourni par la condition *b* : augmenter  $\Delta\gamma_0 : \Delta\theta$ .

1° Sous l'axe *a'* (*fig. 32*) de la vis sans fin d'un tournebroche à poids, bien graissé, je fixe la poulie *M'*, qui entraîne, par le fil *f*, l'axe *a* qui porte la fourchette *F*. Je lis directement *r* sur cette fourchette graduée au mm.; je détermine *T* en mesurant au chronographe la durée de 50 périodes.

Sous la fourchette je place le vase cylindrique annulaire *V*, de diamètre intérieur  $d = 2,3$ , extérieur  $d = 14,1$  cm.; je lance le pendule sur le parallèle équidistant des parois verticales du vase; je place dans le plateau le poids moteur *P*, nécessaire à l'entretien du pendule sur ce parallèle et je mesure *T* :

a) le vase vide. Le rayon *r* ne se fixe pas; *P* restant invariable, la pointe s'approche de l'axe *a* du manège dans certaines expériences, s'en éloigne dans d'autres et touche, après quelques minutes, le bout de la fourchette : la variation de  $j_0$  (résistance de l'air sur le pendule) est insuffisante pour compenser la variation des frottements du tournebroche :

b) le vase plein d'huile très visqueuse, la pointe (cylindre de  $d = 2,5$  mm.) y pénétrant de 4 cm. : le rayon *r* se fixe à quelques mm. près ;

c et d) Le vase plein d'huile, la pointe portant une sphère de  $d = 2,8$ , puis de  $d = 5,3$  cm. : le rayon se fixe à 1 mm. près.

2° J'étudie la régularité de la période en la mesurant sur un grand nombre de séries successives de 50 *T*. Pour la disposition *b*, les valeurs extrêmes de *T* diffèrent de leur moyenne de 1 : 200; pour les dispositions *c* et *d*, quoique les variations de *r* soient plus petites, les écarts de *T* sont du même ordre; dans les trois cas, ces écarts sont très supérieurs à ceux qui correspondent sur la courbe théorique  $T(r)$  (équation [1], § 56, courbe 1, *fig. 44*), à la fixité expérimentale de *r*.

Pour expliquer ces résultats, je détermine les courbes expérimentales  $T(\lg \theta)$  : à

chaque valeur de  $P$ , correspond une valeur de  $r$  ( $\operatorname{tg} \theta = r : AO = r : 130$ ) et de la période moyenne  $T$ .

Pour la disposition  $b$ , j'obtiens le point  $p$  (*fig. 33*);  $T$  conserve la même valeur (à 1 : 200 près), quand  $\operatorname{tg} \theta$  varie. Je construis la courbe théorique  $T = T_0 \sqrt{\cos \theta}$ , qui passe par le point  $p$  ( $\operatorname{tg} \theta = 0,08$ :  $\sqrt{\cos \theta} = 0,9984$ ;  $T = 1,7700$ ; d'où  $T_0 = 1,7726$ ). A l'échelle de la figure, cette courbe  $b$  se confond avec la parallèle à l'axe des abscisses.

Pour les dispositions  $c$ ,  $d$ , les courbes  $c$ ,  $d$  (*fig. 33*) sont :

$a'$ ) d'autant plus inclinées que la sphère est plus grosse, ce qui s'explique par une répulsion des parois (§ 66).

$b'$ ) dans leur ensemble, très au-dessus de la courbe  $b$ . La poussée d'Archimède, supérieure au poids de la sphère que j'ajoute, est la principale cause de l'augmentation de  $T$  (§ 67).

En résumé, si le diamètre du vase n'est pas très supérieur à celui de la sphère, la régulation n'est pas meilleure quand on augmente ce dernier : on perd sur  $\Delta \theta : \Delta T$  ce qu'on gagne sur  $\Delta \gamma_0 : \Delta \theta$  (§ 58).

**60.  $\gamma_0$  augmenté par freinage.** —

1° Montrons que le dispositif suivant, décrit dans tous les ouvrages, ne donne qu'une relation grossière.

Quand le pendule s'écarte de la verticale, pour un certain rayon  $r_0$ , la pointe vient frotter (directement ou par

l'intermédiaire d'un levier), sur un cylindre extérieur vertical, coaxial au manège.

Avec ce dispositif le couple résistant croît rapidement, mais  $T$  décroît très vite, à cause de la réaction centripète du cylindre sur le pendule (§ 75) : comme au § 59, on perd sur  $\Delta \theta : \Delta T$  ce qu'on gagne sur  $\Delta \gamma_0 : \Delta \theta$ .

2° Je supprime cette réaction centripète en plaçant le frein sur le système d'entretien, le pendule ne jouant qu'un simple rôle d'interrupteur électrique.

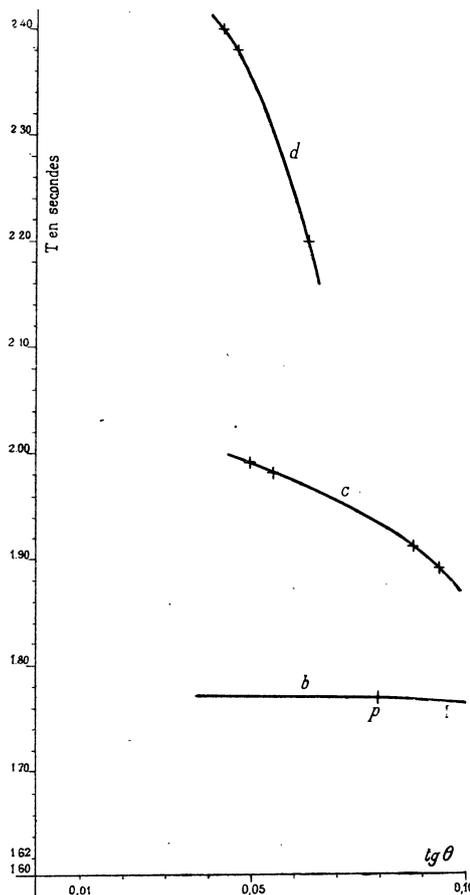


FIG. 33. — Variation de  $T$  en fonction de  $\operatorname{tg} \theta$ , quand la pointe du pendule porte une sphère qui barbote dans une huile très visqueuse.

L'axe  $a'$  de la vis sans fin du tournebroche porte le tambour  $l$  (*fig. 32*), que freine la tige  $l'$ , articulée en  $O'$ . Sur cette tige est fixé le barreau  $b$ , qui pénètre dans le solénoïde  $S$ .

Je remplis le vase  $V$  d'une solution de soude, jusqu'à un niveau tel que la pointe sorte du liquide pour  $r = r_0$ . Le courant traverse le fil de suspension, pénètre dans l'électrolyte par la pointe servant d'anode (charbon ou platine) et sort par la paroi métallique du vase.

Le poids moteur  $P$  est suffisant pour entretenir le pendule un peu au delà de  $r_0$ , quand le frein n'agit pas. Pendule et solénoïde sont en dérivation sur le secteur avec des résistances convenables. Si  $r < r_0$ , le courant traverse l'électrolyte, le frein n'agit pas,  $r$  croît; quand  $r > r_0$ , le courant traverse le solénoïde qui attire le frein,  $r$  décroît :  $r$  oscille autour de  $r_0$  et se fixe à quelques mm. près.

Mesurons  $T$  sur plusieurs séries de 50 périodes : les écarts de  $T$  atteignent 1 : 200. Pour une même valeur de  $r_0$ , je trouble la période moyenne de 1 : 100, si je change le régime des coups de frein, en modifiant la position du solénoïde, l'état physique de la surface du frein, la valeur des résistances électriques, etc.

De cette expérience résulte que  $T$  n'est pas une fonction uniforme de  $r$ . Quand  $r > r_0$ , le frein agit,  $\omega$  décroît,  $\theta$  aussi, mais la valeur instantanée de  $T = 2\pi : \omega$ , n'est plus liée à  $\theta$  par la relation  $T = T_0 \sqrt{\cos \theta}$ ; les variations de  $\theta$  suivent celles d' $\omega$  avec retard : d'où la mauvaise régulation, malgré la fixité apparente de  $\theta$ .

**61. Paresse du pendule dans son méridien.** — 1° Résolvons le problème suivant : le pendule étant en équilibre dans sa fourchette ( $\omega_0$ ,  $\theta_0$  sont liés par  $(1)g = \omega_0^2 l \cos \theta_0$ ), on donne brusquement à  $\omega_0$  la valeur  $\omega_1$ , que l'on maintient constante; quel temps faut-il au pendule pour atteindre sa nouvelle position d'équilibre?

Considérons le mouvement dans le méridien en ajoutant la force centrifuge  $M\omega_1^2 l \sin \theta$ , où, par hypothèse,  $\omega_1$  est constant. Projetons sur la tangente au mouvement toutes les forces, y compris la force d'inertie  $-M\theta''$  :

$$\begin{aligned} M\theta'' &= M\omega_1^2 l \sin \theta \cos \theta - Mg \sin \theta, \\ \theta'' &= (\omega_1^2 l \cos \theta - g) \sin \theta; \end{aligned}$$

$\theta''$  est nul pour la nouvelle position d'équilibre  $\theta_1$ , définie par  $g = \omega_1^2 l \cos \theta_1$ .

Remplaçons  $\theta$  par  $\theta_1 + \varphi$ ,  $2 \sin \theta \cos \theta$  par  $\sin 2\theta$ ,  $\sin \varphi$  par  $\varphi$ ,  $\cos \varphi$  par 1,  $g$  par  $\omega_1^2 l \cos \theta_1$ ; il vient :

$$\varphi'' = \varphi \omega_1^2 (\cos 2\theta_1 - \cos^2 \theta_1);$$

équation qui définit un mouvement oscillatoire autour de  $\theta = \theta_1$ .

La période est :

$$T_1 = 2\pi \sqrt{1 : \omega_1^2 (\cos^2 \theta_1 - \cos 2\theta_1)};$$

$\theta_1$  étant voisin de 0,1, négligeons  $\theta_1^4$  devant  $\theta_1^2$  :

$$\begin{aligned}\cos^2 \theta_1 - \cos 2\theta_1 &= 1 - \theta_1^2 - (1 - 2\theta_1^2) = \theta_1^2, \\ T_1 = 2\pi : \omega_1 \theta_1 &= T : \theta_1.\end{aligned}$$

Pour atteindre sa nouvelle position d'équilibre  $\theta_1$ , le pendule met  $T_1 : 4$  :

$$\begin{aligned}\text{si } T = 2'', \quad \theta_1 &= 1 : 20, \quad T_1 : 4 = 10''; \\ \text{si } T = 3'', \quad \theta_1 &= 1 : 10, \quad T_1 : 4 = 5'';\end{aligned}$$

le pendule est d'autant plus paresseux que  $\theta_1$  est plus petit.

2° A l'aide de ce résultat interprétons l'expérience, quand :

a) L'énergie cinétique du pendule est petite devant celle de l'ensemble manège-système d'entretien (pendule des §§ 59 et 60). Pour étudier le rôle des perturbations accidentelles (coups de frein, variation du frottement des engrenages, etc.), je diminue systématiquement  $\omega$ , en pinçant, pendant une fraction de seconde, le brin qui entre sur la poulie M : le pendule se rapproche lentement de la verticale, décrit une spirale, cède de l'énergie au manège dont la vitesse croît.

La masse du pendule étant petite devant celle du manège,  $\omega$  croît lentement, le calcul précédent s'applique, le pendule n'atteint sa nouvelle position d'équilibre qu'après plusieurs secondes, pendant lesquelles  $\omega$  n'est plus lié à  $\theta$  par la relation (1). Paresseux, le pendule agit comme un volant et régularise mal les brusques variations de vitesse, ce que vérifient les mesures successives de  $50 T$ .

b) L'énergie cinétique du pendule est grande devant celle de l'ensemble manège-système d'entretien (pendule entretenu par mon manège). Pour diminuer  $\omega$ , je pince le brin d'entrée ou bien j'applique un coup de baguette sur la fourchette : le pendule décrit des ellipses qui s'amortissent.

La masse du pendule étant grande devant celle du manège, le calcul précédent est en défaut; après le choc; la période reprend sa valeur : la masse du pendule domine celle du manège et lui impose sa période. Le pendule régularise les brusques variations de vitesse, la fixité de  $T$  correspond à celle de  $\theta$ , ce que vérifie l'expérience.

Des deux pendules, le plus régulier est celui qu'un coup de baguette trouble le plus.

**62. Emploi de mon manège, manège 1 bis.** — 1° CONSTRUCTION DE POULIES SENSIBLES. — Quand le couple résistant  $\gamma_0$  résulte simplement de l'action de l'air sur le pendule, le poids moteur P est de quelques grammes. Pour réduire les frottements du manège, il est alors possible d'employer des poulies plus sensibles que celles du manège 1 (§ 12), sans qu'elles risquent de se déformer sous l'action de P.

Pour être sensibles, les poulies doivent être légères, de grand rayon, d'axe fixe (§ 11). Je découpe une bande de clinquent, large de 0,3 cm., que je plie en forme de cornière sur l'arête d'une règle. Autour d'un disque de carton, j'incurve et je colle cette cornière, qui forme la gorge de la poulie. Au centre du disque, à travers l'empreinte laissée par le compas, j'enfonce une aiguille longue de 4 cm., affûtée aux deux bouts et qui sert d'axe. Pour contrôler que l'aiguille est normale au disque, je vérifie qu'en tournant autour de l'aiguille, le disque reste dans un plan. De chaque côté du disque, je soude des rayons de clinquent, qui relient l'aiguille à la gorge. Je retire le disque de carton, partagé d'un coup de ciseau.

Ces poulies sensiblement circulaires, de  $d = 6$  cm., pèsent 1,5 gr. Sous la chape en clinquent, je soude à la cire une paille longue de 20 cm., qui soutient un plateau de papier ou un pont léger. La poulie garnie pèse 2,3 gr.; son axe porte 20 gr. sans fléchir.

J'appelle manège 1 *bis*, le manège 1 muni de quatre de ces poulies (le rayon de la poulie motrice M vaut 1,07 cm.).

2° ENTRETIEN DU PENDULE. — J'étudie la régularité du manège 1 *bis*, vide (§ 13). Je détermine la courbe  $P(T)$ ; puis, laissant  $P = 0,5$  gr. invariable, je mesure un grand nombre de fois la période, qui oscille autour de  $T = 7''$ , avec un écart maximum  $\Delta T = 0'',2$ . J'évalue la variation des frottements du manège, sur la courbe  $P(T)$ , par la variation  $\Delta P = 0,01$  gr., qui correspond à  $\Delta T = 0'',2$ .

Sous le pendule, je supprime le vase et je place le manège, de façon que le bras, simple fil d'aluminium gradué, remplace la fourchette. Sous l'action de  $P_1$ , la pointe se fixe en  $r_1$ ; pour  $P_2 > P_1$ , elle atteint  $r_2 > r_1$ , d'autant moins vite que M est plus grand: pour une sphère en celluloïd de  $d = 10$  cm., ( $M = 26$  gr.), quand P croît de 4,5 à 7,5 gr.,  $r$  passe de 17,2 à 23,2 cm., après quelques tours du pendule (lignes 1 et 2 du tableau 7, § 77); pour une sphère de métal, remplie de plomb ( $M = 8.600$  gr.),  $r$  met 30' pour passer de 9 à 15 cm., la nouvelle position d'équilibre étant  $r_2 = 16$  cm. Cette durée qui résulte de la petitesse de l'excès d'énergie motrice devant l'accroissement de l'énergie cinétique du pendule, ne doit pas être confondue avec  $T_1 : 4$  (§ 61), qui caractérise la paresse du pendule.

3° RÉGULARITÉ DU PENDULE. — La variation maximum des frottements du manège étant mesurée par  $\Delta P = 0,01$  gr., calculons la fixité de  $r$  autour de  $r_2 = 20$  cm. Le taux de variation de la résistance de l'air sur la sphère de  $d = 10$  cm., étant mesuré par  $(P_2 - P_1) : (r_2 - r_1) = 0,5$ , la variation des frottements  $\Delta P = 0,01$ , est compensée par un déplacement de la pointe  $\Delta r = 0,02$  cm.

Pour vérifier ce résultat, je braque un viseur suivant une tangente au cercle de rayon  $r''$  que décrit le bout de la pointe, préalablement blanchie et fortement éclairée; j'amène le fil du réticule dans la position d'élongation maximum; pendant plusieurs heures, j'observe la variation de  $r''$ : pour la sphère remplie de plomb ( $M = 4.600$  gr.),  $\Delta r''$  reste inférieur à 0,02 cm., les variations relatives de la période,

mesurée par la méthode des coïncidences (§ 76), sont inférieures à  $10^{-3}$ ; pour la sphère de celluloid ( $M = 26$  gr.),  $r''$  se fixe à 0,2 cm. près,  $T$  à  $10^{-1}$  près.

En résumé, la régulation est bonne parce que :

- a) la masse du manège et des poulies, de l'ordre de quelques grammes, est négligeable devant celle du pendule;
- b) le terme  $\Delta\Gamma - \Delta\gamma$  (§ 58) est petit, le couple moteur  $\Gamma$  étant invariable et le couple résistant  $\gamma$ , introduit par le manège, étant faible et régulier.

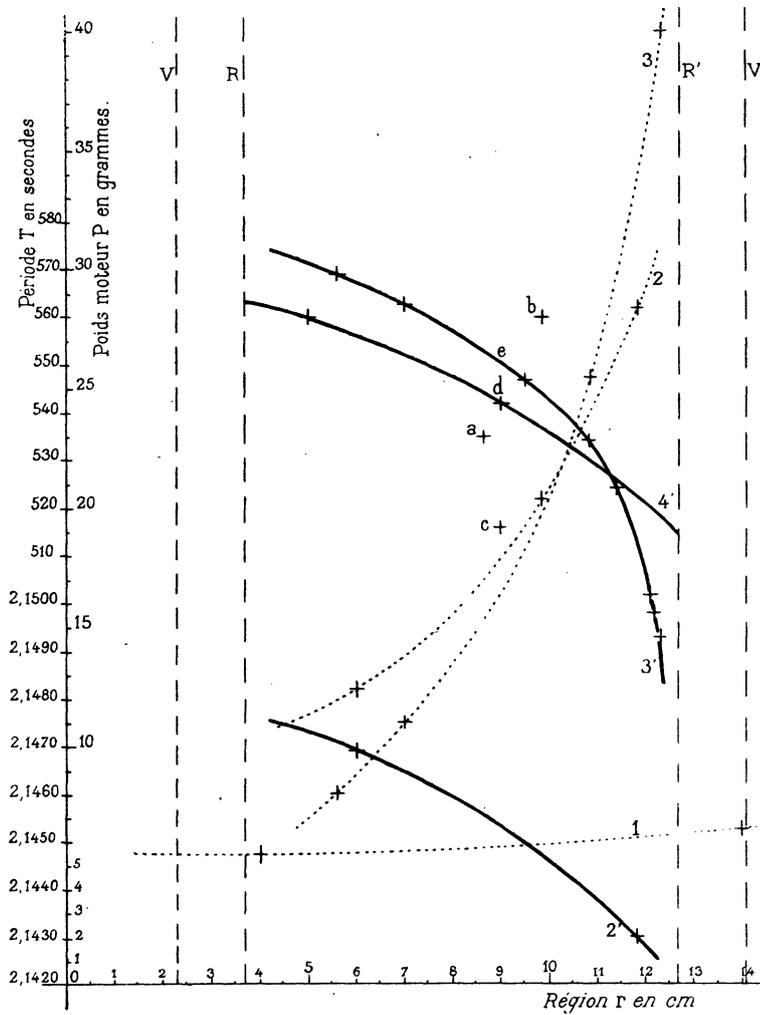


Fig. 34. — Sphère de  $d = 2,8$  cm., plongée dans l'huile du vase  $VV'$ .

**63. Addition d'une résistance d'absorption.** — Quand le pendule règle un appareil qui absorbe une énergie variable, celui-ci ajoute à  $\Delta\gamma$  un terme impossible à

réduire. Un manège très sensible devient inutile; j'emploie le manège 1, en ajoutant une résistance d'absorption par l'un des procédés suivants :

a) Sur la sphère je fixe un cylindre coaxial au pendule, de même diamètre que la sphère, 3 ou 4 fois plus haut : je quintuple  $\Delta\gamma_0 : \Delta\theta$ ;

b) dans le plan vertical du bras, sur celui-ci, je fixe un disque de carton du diamètre de la sphère, dans une position telle que le disque soit exactement devant la sphère pour une certaine amplitude  $\theta_1$  : quand  $\theta$  dépasse  $\theta_1$ ,  $\Delta\gamma_0 : \Delta\theta$  est environ le triple de sa valeur, le disque enlevé (§ 81);

c) je soude un cylindre large de 1 cm., haut de 3 cm., au bout de la pointe du pendule, sous lequel je replace le vase V. Je détermine  $P(r)$ , le vase vide (courbe 1, *fig. 34*), le vase plein d'huile (courbe 2) : autour de  $r = 10$  cm., quand j'ajoute l'huile,  $\Delta\gamma_0 : \Delta\theta$  est multiplié par 32.

Le vase plein, je détermine  $T(r)$  (courbe 2'), qui coïncide avec la courbe théorique ( $M = 5000$  gr.) : la répulsion de la paroi sur le cylindre est négligeable à une distance de l'ordre de son diamètre.

Si le laboratoire s'échauffe, la densité de l'huile décroît,  $\theta$  croît. Pour l'éviter, je remplace l'huile par de l'eau, ce qui exige d'augmenter les dimensions du plongeur et du vase; ou mieux, je conserve l'huile et j'utilise le pendule isochrone (§ 74).

**64. Réglage du pendule.** — 1° RÉGLAGE DE LA MASSE SUR LA TIGE. — Si le centre de gravité de la masse ne se trouve pas sur l'axe de la tige, le pendule, soumis à un couple de torsion sinusoïdal de période  $T$ , oscille autour de sa tige avec cette période  $T$ . Pour l'éviter :

a) j'enfonce la pointe dans la tige pour qu'elle affleure le sommet  $O$  de l'axe du manège; à la main, j'imprime au pendule une oscillation de torsion; si la pointe ne reste pas immobile, je ramène le centre de gravité sur l'axe, en collant sur la sphère des pastilles de plomb dans l'azimut convenable;

b) ce dernier réglage n'étant jamais parfait, je donne au fil de suspension  $AD$  une longueur telle que la période propre de l'oscillation de torsion soit très différente de  $T$ .

2° RÉGLAGE DU MANÈGE. — Pour vérifier que l'axe du manège est vertical, je contrôle que, dans tous les azimuts, le bras reste à la même distance du sol.

Pour vérifier que l'axe du manège est dans la verticale du point de suspension, je m'assure qu'au repos la pointe affleure exactement le sommet de l'axe. Quand ce réglage est mauvais, la pointe décrit un cercle excentré par rapport à l'axe :  $r$  passe par un maximum et un minimum pour des azimuts opposés.

3° SYMÉTRIE DES RÉACTIONS DU POINT D'ATTACHE. — Au-dessus de  $A$  (*fig. 32*), les réactions doivent admettre  $AO$  comme axe de symétrie. Si le fil est trop près de la poutre  $G$ , quand le pendule traverse l'azimut  $HM$ , le fil, s'incurvant au-dessus de  $A$ ,

touche la poutre et reçoit une impulsion axipète : le pendule décrit une ellipse stationnaire.

**65. Stabilité de la trajectoire circulaire.** — 1° Faisons décrire une ellipse au pendule, soit en le lançant à la main, soit en lui appliquant un choc radial quand sa trajectoire est circulaire. L'ellipse tourne lentement autour de son centre selon la théorie classique. D'après la loi des aires, quand  $r$  décroît,  $\omega$  croît : la pointe devance le bras. Celui-ci accélère, rattrape la pointe, la heurte, s'arrête, se relance, la heurte de nouveau, etc. Les chocs se produisent en majorité près du maximum d'amplitude ( $\omega$  minimum) : l'ellipse s'arrondit. Après un temps, qui croît avec l'aplatissement initial et la masse du pendule (plusieurs minutes si  $M = 600$  gr.), les chocs s'atténuent, la pointe ne quitte plus le bras, l'ellipse tend vers le cercle.

Quand la fourchette remplace le bras, les chocs sont supprimés ; près du minimum d'amplitude, le pendule fournit de l'énergie au manège ; près du maximum, le pendule absorbe plus d'énergie que ne le demande le simple entretien sur le parallèle : l'ellipse tend vers le cercle.

Pour vérifier que la trajectoire est un cercle, j'observe la pointe dans un viseur (§ 62, 3°). Si la trajectoire était une ellipse,  $r''$  subirait, avec une période deux fois plus petite que celle de la révolution de l'ellipse, une lente variation que je n'observe pas.

2° Puisqu'il décrit un cercle, le pendule règle la vitesse angulaire, non seulement *moyenne*, mais *instantanée* : pour des fractions de tour, le temps est proportionnel à l'angle.

Cette propriété permet la production de signaux lumineux périodiques. Sur le manège, je fixe un disque de carton percé de 12 ou 24 fentes radiales équidistantes. En défilant devant une fente fixe, fortement éclairée, ces fentes donnent passage à des signaux lumineux de période aisément calculable, si l'on connaît  $T$ .

**66. Répulsion des parois du vase.** — 1° Pour étudier la cause de la rapide décroissance de  $T$  ( $\text{tg } \theta$ ) (*fig. 33*), je reprends l'expérience du § 59, avec une huile moins visqueuse, la sphère de  $d = 2,8$  cm. au bout de la pointe. Je remplace le tournebroche par le manège 1, j'inscris  $100T$  sur la bande du chronographe : j'obtiens  $T$  à  $10^{-4}$  près.

Je détermine  $P(r)$  et  $T(r)$ , (courbes 3 et 3', *fig. 34*). Quand la sphère touche les parois verticales  $V, V'$  du vase, le centre de la sphère atteint les droites  $R, R'$ , distantes des droites  $V, V'$  du rayon de la sphère ( $d : 2 = 1,4$  cm.) : près de la paroi extérieure  $T(r)$  décroît rapidement.

Pour vérifier que cette décroissance résulte bien de l'action de la paroi, je place dans le vase un cylindre coaxial, de même hauteur et de  $r = 10,6$  cm. Pour entretenir le pendule sur le parallèle  $r = 8,7$  cm., le bord extérieur de la sphère à 0,5 cm.

de la nouvelle paroi, je place  $P = 19,1$  gr. dans le plateau; avant l'introduction du cylindre, pour le même rayon (courbe 3),  $P = 15,3$  gr. : d'où  $\Delta P = + 3,8$  gr. La période passe de  $2'',1553$  à  $2'',1535$  (point  $a$ ) : d'où  $\Delta T = - 0'',0018$ .

Je remplace le cylindre par un autre de  $r = 7,8$  cm. Pour entretenir le pendule sur le parallèle  $r = 9,8$  cm., le bord intérieur de la sphère à  $0,6$  cm. de la nouvelle paroi, je place  $P = 22,1$  gr. dans le plateau :  $\Delta P = + 2,3$  gr. La période devient  $T = 2'',1560$  (point  $b$ ) :  $\Delta T = + 0,0016$ .

2° Ces variations de période s'expliquent par une répulsion de la paroi. Décomposons la résistance de l'huile sur la sphère en :

$R_t$ , composante tangente au parallèle;

$R_r$ , composante radiale, normale au parallèle, comptée positivement dans la direction *centrifuge*.

Ajoutons  $R_r$  à la force centrifuge (§ 75) :

$$Mg \operatorname{tg} \theta_0 = M\omega_0^2 r'_0 = M\omega_1^2 r'_0 + R_r,$$

$$R_r = Mr'_0(\omega_0^2 - \omega_1^2) = 8\pi^2 Mr'_0 \Delta T : T_0^3;$$

en appelant  $\omega_0$  et  $\omega_1$ , les vitesses angulaires avant et après l'introduction du cylindre,  $r'$  gardant la valeur  $r'_0$ . En réalité,  $R_r$  est appliqué en P (*fig. 32*),  $r'_0$  est lu sur la fourchette en  $r_0$  (§ 75), alors :

$$R_r = (l^2 : ab) 8\pi^2 Mr_0 \Delta T : T_0^3.$$

Quand le cylindre est intérieur à la trajectoire de la sphère, l'expérience donne  $\Delta T > 0$ ,  $R_r$  est centrifuge; quand le cylindre est extérieur,  $\Delta T < 0$ ,  $R_r$  est centripète : dans les deux cas le cylindre repousse la sphère.

Calculons  $R_t$  sans le cylindre,  $\Delta R_t$  et  $R_r$  avec le cylindre, quand la sphère décrit le parallèle  $r = 8,7$  cm., le bord extérieur de la sphère à  $0,5$  du cylindre :

$$\begin{array}{llll} M = 4.800 \text{ gr.}, & l = 117 \text{ cm.}, & T = 2'',15, & P'(\text{air}) = 5,8 \text{ gr.}, \\ r_0 = 8,7 \text{ cm.}, & a = 127 \text{ cm.}, & T^3 = 9,93, & P(\text{huile}) = 15,3 \text{ gr.}, \\ r'(\text{poulie motrice}) = 6,5 \text{ cm.}, & b = 137 \text{ cm.}, & \Delta T = - 0'',0018, & \Delta P = 3,8 \text{ gr.}; \end{array}$$

d'où (§ 14) :

$$\begin{array}{l} R_t = r'(P - P') : 2r_0 = 3,54 \text{ gr.}, \\ \Delta R_t = r'\Delta P : 2r_0 = 1,41 \text{ gr.}, \\ R_r = (l^2 : ab) (8\pi^2 Mr_0 \Delta T : T_0^3) = 470 \text{ dynes} = 0,46 \text{ gr.}; \end{array}$$

la composante radiale  $R_r$  vaut le dixième de la composante tangentielle  $R_t + \Delta R_t$ .

**67. Composante centrifuge de la résistance de l'huile sur la sphère.** — 1° Pour déterminer si le voisinage du fond (ou de la surface libre), joue un rôle dans le

déplacement d'ensemble des courbes  $T(\operatorname{tg} \theta)$ , vers les  $T$  croissants (*fig. 33*), je déplace verticalement le vase sans toucher au pendule.

Je recourbe la fourchette pour qu'elle ne touche pas le haut des parois verticales  $V, V'$ ; dans le plateau je place des poids  $P$  convenables pour maintenir  $r = 9$  cm. invariable; je mesure  $T$ , le vase plein d'huile, calé dans un niveau tel que la sphère immergée soit :

- a) tangente à la surface libre :  $T = 2'',1550$ ;
- b) au milieu de la couche d'huile, haute de 8,4 cm. :  $T = 2'',1550$ ;
- c) à 0,5 cm. du fond :  $T = 2'',1552$ .

$T$  reste invariable : l'action verticale  $F$  du fond (ou de la surface libre) est négligeable, ce qui s'explique par la petitesse de la composante radiale  $F \operatorname{tg} \theta$ .

2° Pour vérifier que la poussée d'Archimède est la principale cause du déplacement d'ensemble des courbes  $T(\operatorname{tg} \theta)$ , je détermine  $T$ , le vase vide et plein, puis je compare la variation de  $T$  à celle que je calcule d'après la poussée.

Le vase vide,  $T = 2'',1516$  (point *c*); l'huile augmente  $T$  de  $\Delta T = ce = + 0'',0034$ .

Je mesure la poussée par double pesée : je suspends la sphère sous le plateau d'une balance, je tare, je plonge la sphère dans l'huile, je rétablis l'équilibre avec 10,10 gr. Cette poussée  $F = 10,10$  g dynes, augmente  $T$  (§ 75) de :

$$\Delta T = (b : l^3) (FT_0^3 : 8\pi^2 M) = + 0'',0026,$$

la période devrait être  $T = 2'',1516 + 0'',0026 = 2'',1542$  (point *d*). Par ce point je trace la courbe théorique  $T = T_0 \sqrt{\cos \theta}$  (courbe 4').

La courbe expérimentale 3' devrait couper 4' près du cylindre qui sépare l'huile en deux volumes égaux, sur lequel l'action des parois  $V, V'$  est négligeable. Sur ce cylindre ( $r = 10,1$  cm.), 3' est un peu au-dessus de 4'; à la poussée, principale cause du déplacement, s'ajoute une autre force : probablement la composante centrifuge de la résistance qu'éprouve un corps qui tourne dans un milieu indéfini, quand le diamètre de la trajectoire n'est pas grand devant celui du corps (§ 78).

## CHAPITRE VIII

### Isochronisme du pendule conique par une force centrale.

**68. Position du problème.** — Étudions si les forces centrales, jusqu'ici perturbatrices (§ 66), peuvent améliorer la régulation. Déterminons la force  $f$  qu'il faut appliquer au centre de gravité  $M$  du pendule pour que la courbe  $T(\theta)$  présente un extremum pour  $\theta = \theta_1$  ( $\Delta T : \Delta \theta = 0$ , isochronisme en  $\theta_1$ ), et mieux, devienne parallèle à l'axe des  $\theta$  ( $T \equiv T_0$ ,  $\omega \equiv \omega_0$ , isochronisme quel que soit  $\theta$ ).

L'équilibre des forces sur l'horizontale donne :

$$f + Mg \operatorname{tg} \theta = M\omega_0^2 l \sin \theta,$$

en comptant  $f$  positivement dans la direction *centripète*. Avant l'introduction de  $f$ , soit  $\theta_0$  l'amplitude d'équilibre pour la vitesse  $\omega_0$  :

$$Mg \operatorname{tg} \theta_0 = M\omega_0^2 l \sin \theta_0;$$

éliminons  $\omega_0^2$  entre ces deux équations :

$$f = Ml \sin \theta \cdot \frac{g \operatorname{tg} \theta_0}{l \sin \theta_0} - Mg \operatorname{tg} \theta = Mg \sin \theta \left( \frac{\cos \theta - \cos \theta_0}{\cos \theta \cos \theta_0} \right),$$

relation qui définit la famille de courbes  $f(\theta, \theta_0)$ , dépendant du paramètre  $\theta_0$ .

Pour déterminer la forme des courbes  $f(\theta, \theta_0)$ ,  $\theta$  et  $\theta_0$  étant petits, par approximation, je prends :

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \theta, & \cos \theta &= \cos \theta_0 = 1, \\ \cos \theta - \cos \theta_0 &= (1 - \theta^2 : 2) - (1 - \theta_0^2 : 2) = (\theta_0^2 - \theta^2) : 2; \end{aligned}$$

il vient :

$$f = Mg (\theta_0^2 \theta - \theta^3) : 2.$$

Je construis la courbe  $y_3 = \theta_0^2 \theta - \theta^3$ , en prenant  $\theta_0 = 0,1$  (courbe 3, *fig. 35*). L'ordonnée  $y_3$  est la différence de  $y_1 = 0,01 \cdot \theta$  (droite 1), et de  $y_2 = \theta^3$  (cubique 2). La courbe  $y_3(\theta)$  se confond avec la droite 1 près de l'origine, atteint son maximum

$y_2 = 0,00038$ , pour  $\theta = 0,057$ , coupe l'axe des  $\theta$  pour  $\theta = \theta_0$ , puis décroît rapidement.

L'isochronisme s'obtient par une force :

- a) centripète croissante, sur le fragment OM ;
- b) constante, autour de M ;
- c) centripète décroissante, sur le fragment MB ;
- d) centrifuge croissante, au delà de B.

**69. Isochronisme en un point.** — Le problème expérimental de l'isochronisme se ramène à la recherche des forces  $f_1(\theta)$ , dont les courbes représentatives se confondent avec celles de la famille précédente  $f(\theta, \theta_0)$ .

1° **RESSORT.** — Je fixe le bout d'un ressort à boudin au centre de la fourchette, l'autre bout porte un anneau qu'enfile la pointe du pendule : la force  $f_1 = a + b\theta$ , est centripète croissante.

Par exemple, pour assurer l'isochronisme près de  $\theta_1 = 0,03$ , au point P (fig. 35), je trace la tangente dont je mesure l'ordonnée à l'origine  $a'$ , le coefficient angulaire  $b'$ . Il est inutile que les constantes du ressort soient exactement  $a = Mg a' : 2$ ,  $b = Mg b' : 2$ ; quelles que soient  $a, b$ , la droite  $a + b\theta$  est tangente à l'une des courbes de la famille  $f(\theta, \theta_0)$ ; pour déterminer l'amplitude exacte d'isochronisme, il suffit de mesurer la période pour deux amplitudes voisines de  $\theta_1$  (§ 74).

*Pecqueur* obtient l'isochronisme du pendule conique par un ressort intercalé sur le fil de suspension. Quand  $\theta$  croît, la tension du fil augmente; si le ressort s'allonge de manière que  $l \cos \theta = C^2$ , la période  $T = 2\pi\sqrt{l \cos \theta : g}$  reste invariable, quel que soit  $\theta$ .

Dans cet appareil le pendule est porté par le ressort : ses déformations permanentes et sa réactivité modifient la période du pendule. Dans mon appareil, le ressort intervient non par sa longueur, mais par sa tension, et les variations précédentes sont négligeables parce qu'il s'agit d'une correction (§ 70).

2° **CONTREPOIDS.** — Pour obtenir une force constante, sur la fourchette je place la croix C ou la poulie P (fig. 36 — 1 et 2), en équilibre indifférent sur les pointes d'aiguilles  $i$ , avant l'addition du poids  $m$ . A l'anneau que traverse la pointe du pen-

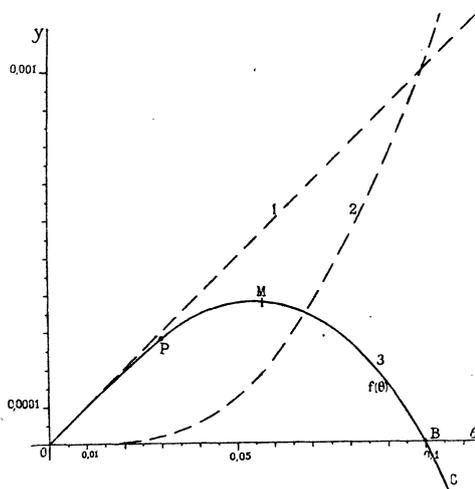


FIG. 35. — Courbe  $y = 0,01.\theta - \theta^2$ .

dule, s'attache un fil sans raideur qui se fixe au sommet  $a$  de la croix ou passe sur la poulie et porte  $m$ .

3° AIMANT. — Sur la fourchette je place un aimant qui attire la masse pendulaire en fer : la force est centripète décroissante (le pendule ne se colle pas sur l'aimant, § 75-3°). Pour éviter l'augmentation des frottements du manège qui porte l'aimant,

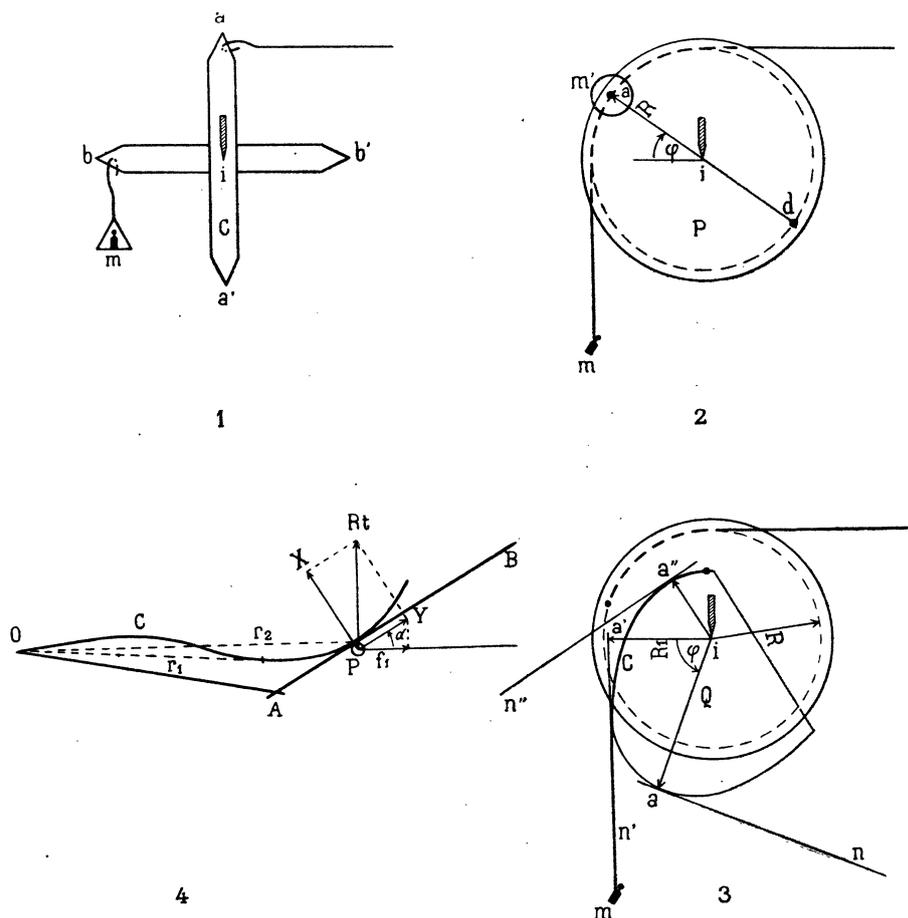


FIG. 36. — Dispositifs d'isochronisme.

comme masse pendulaire, on peut prendre un aimant cylindrique qui attire un tore de fer, coaxial au manège, extérieur au pendule : la force est centrifuge croissante.

**70. Isochronisme par une force constante.** — 1° Pour montrer directement qu'une force centripète  $mg$  constante (poulie  $P$ ,  $m'$  enlevé, *fig. 36*) donne un minimum à  $\omega(0)$ , j'écris l'équilibre des forces sur l'horizontale  $MH$  (§ 56), en supposant, pour simplifier les calculs, que la force est appliquée en  $M$  (*fig. 32*) :

$$mg + Mg \operatorname{tg} \theta = M\omega^2 l \sin \theta. \quad (1)$$

Dans cette équation, pour  $\theta$  grand,  $mg$  est négligeable; sur la courbe ordinaire  $\omega(\theta)$ , quand  $\theta$  *croît*,  $\omega$  *croît*. Pour  $\theta$  petit,  $mg$  devient prépondérant, quand  $\theta$  *décroit*,  $\omega$  *croît*: d'où l'existence d'un minimum d' $\omega$ .

2° Pour calculer la force  $mg$  nécessaire à l'isochronisme en  $\theta = \theta_1$ , je dérive l'équation précédente en considérant  $\omega$  comme fonction de  $\theta$ :

$$Mg : \cos^2 \theta = M\omega^2 l \cos \theta + 2Ml \sin \theta \cdot \omega d\omega : d\theta; \quad (2)$$

si  $\theta = \theta_1$ , dans (1) et (2):  $\omega = \omega_1$ ,  $d\omega : d\theta = 0$ ; je tire  $\omega_1$  de (2) et je le porte dans (1):

$$m = M \operatorname{tg}^3 \theta_1.$$

Pour déterminer la courbe corrigée  $\omega^2(\theta)$ , j'écris (1) sous la forme:

$$\omega^2 = \frac{g}{l \cos \theta} + \frac{g}{l \sin \theta} \frac{m}{M}; \quad (3)$$

avant l'application de  $mg$  (il faut écrire  $m = 0$ , dans [3]), la courbe était  $\omega^2 = g : l \cos \theta$  (courbe 1, *fig. 37*, en prenant  $g : l = 10$ , soit  $T = 2''$  environ). Aux ordonnées de cette courbe, la force  $mg$  ajoute le second terme de (3):

$$\text{si } \theta_1 = 6^\circ, 10'; \quad m : M = \operatorname{tg}^3 \theta_1 = 0,001 \cdot 262 \text{ (courbe corrigée 2);}$$

$$\text{si } \theta_1 = 10^\circ; \quad m : M = \operatorname{tg}^3 \theta_1 = 0,005 \cdot 482 \text{ (courbe corrigée 3).}$$

Quand  $\theta$  croît de  $5^\circ$  à  $8^\circ$ ,  $\omega^2$  varie de 0,060 sur la courbe 1, de 0,012 sur la courbe 2: les variations d' $\omega^2$  sont 5 fois plus petites, celles d' $\omega$  ou  $T$ , 10 fois plus petites.

3° Le poids  $m$ , proportionnel à  $M$ , décroît comme  $\theta_1^3$ ; la correction sur  $\omega^2$  (second terme de [3]), varie comme  $\theta_1^3$ : d'où l'intérêt de prendre petite l'amplitude  $\theta_1$  d'isochronisme. Par exemple, si  $\theta_1 = 6^\circ, 10'$ ,  $M = 10$  kilogr.,  $\operatorname{tg} \theta_1 = 0,001 \cdot 262$ , on a:  $m = 12,62$  gr. Sur la courbe 1,  $\omega^2 = 10,0583$ , la correction est 0,1175, soit environ 1:100 d' $\omega^2$  et 1:200 d' $\omega$  ou  $T$ .

Calculons les troubles de période qui résultent du frottement de la poulie sur ses pointes. La poulie est sensible à  $10^{-3}$  gr., la force  $mg = 12$  gr. est donc régulière à  $10^{-1}$  près; la correction définie à  $10^{-1}$  près, étant le  $10^{-2}$  d' $\omega^2$ , la variation relative d' $\omega^2$  est  $10^{-6}$ ; celle d' $\omega$  ou  $T$ , moitié, donc négligeable.

Le poids  $m$  est indépendant de la longueur  $l$  du pendule; comme la longueur du fil qui porte  $m$  n'intervient pas, le dispositif est indé réglable.

**71. Contact d'ordre supérieur au premier.** — 1° La droite  $f_1 = mg$ , parallèle à l'axe des  $\theta$  (*fig. 35*), est simplement tangente à la courbe  $f(\theta)$ . Utilisons une force  $f_1$  telle que son contact avec  $f$  soit du second ordre.

Sur la poulie P (fig. 36), je remplace  $m$  par  $m'$  et je colle le fil dans la gorge près de  $a$  : la force  $f_1 = mg \cos \varphi$  passe par un maximum pour  $\varphi = 0$ .

$\theta$  et  $\varphi$  sont liés par :

$$R\varphi = l(\sin \theta - \sin \theta_1),$$

$$Rd\varphi : d\theta = l \cos \theta,$$

en posant  $\theta = \theta_1$ , pour  $\varphi = 0$ , ce qui revient à faire coïncider les maximums de  $f_1$  et de  $f$ .

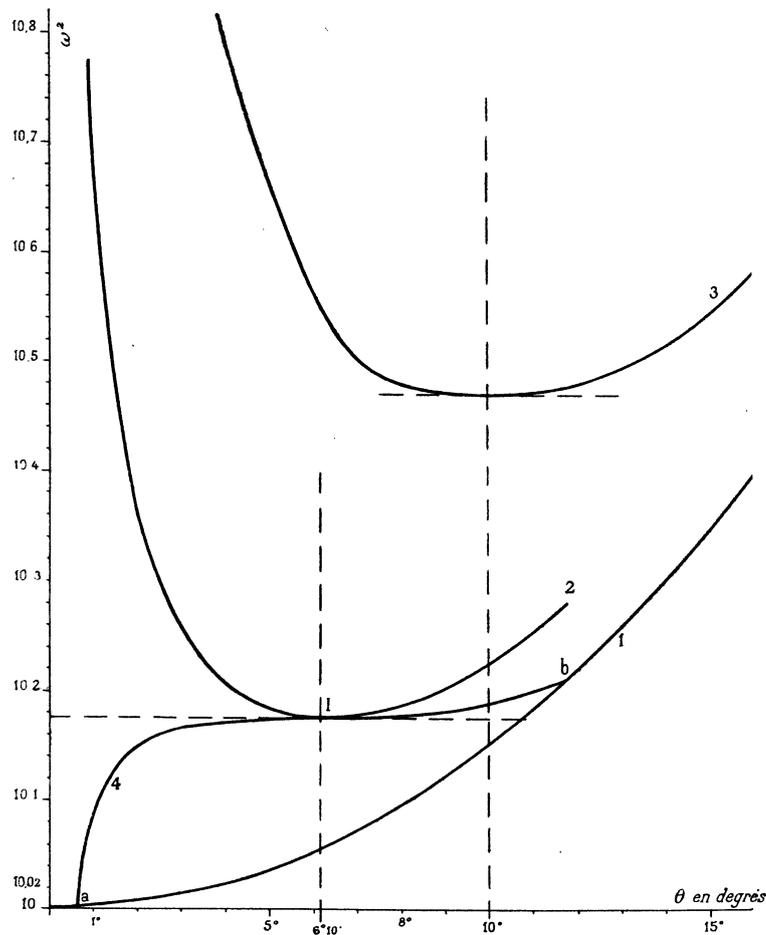


FIG. 37. — Contact du premier ordre (courbes 2 et 3), du second ordre (courbe 4).

Déterminons  $m'$  et  $R$  pour qu'en  $\theta = \theta_1$ , on ait :  $d\omega : d\theta = d^2\omega : d\theta^2 = 0$ . J'écris et je dérive deux fois l'équation d'équilibre sur l'horizontale :

$$\begin{aligned} (1) \quad & m'g \cos \varphi + Mg \operatorname{tg} \theta = M\omega^2 l \sin \theta, \\ & -m'g \sin \varphi \cdot d\varphi : d\theta + Mg : \cos^2 \theta = M\omega^2 l \cos \theta, \\ & -m'g \cos \varphi \left( \frac{d\varphi}{d\theta} \right)^2 - m'g \sin \varphi \left( \frac{d^2\varphi}{d\theta^2} \right) + 2Mg \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} = -M\omega^2 l \sin \theta; \end{aligned}$$

pour  $\theta = \theta_1$ ,  $\varphi = 0$ , je tire  $m$ ,  $R$ ; au-dessous de ces valeurs, j'ajoute l'équation (1), qui donne  $\omega^2$  :

$$\begin{aligned} m' &= M \operatorname{tg}^3 \theta_1, \\ R_2 \sqrt{3} &= l \sin 2\theta_1, \\ \omega^2 &= \frac{g}{l \cos \theta} + \frac{g}{l \sin \theta} \frac{m'}{M} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Le poids  $m'$  égale  $m$  (§ 70), ce qui est évident; le rayon  $R$  de la poulie, indépendant de  $M$ , est proportionnel à la longueur  $l$  du pendule et à  $\theta_1$ ; la correction sur  $\omega^2$  est multipliée par  $\cos \varphi$ . Par exemple, pour  $\theta_1 = 6^\circ, 10'$ ,  $\operatorname{tg} \theta_1 = 0,001262$ , on a :  $R = 0,0616 l$ ; si  $g : l = 10$ ,  $l = 98,1$  cm., la poulie de  $R = 6$  cm., est de dimension commode.

La courbe corrigée (courbe 4, *fig. 37*) traverse sa tangente en I; quand  $\theta$  croît de  $5^\circ$  à  $8^\circ$ ,  $\omega^2$  varie de 0,001 sur la courbe 4 : les variations d' $\omega^2$  sont 60 fois plus petites que sur la courbe 1; celles d' $\omega$  ou T, 120 fois plus petites.

2° Étudions le rôle de la force centrifuge, jusqu'ici négligée, sur  $m'$ ; montrons qu'elle permet d'obtenir un contact du troisième ordre.

Cette force :

$$m' \omega^2 r_1 \sin \varphi = K \sin \varphi,$$

où je considère constants  $\omega_1$  et  $r_1$  (distance de  $m'$  à l'axe du manège), s'annule en croissant pour  $\varphi = 0$ ; elle s'ajoute à la tension du fil. L'équation (1) s'écrit :

$$m'g \cos \varphi + K \sin \varphi + Mg \operatorname{tg} \theta = M\omega^2 l \sin \theta.$$

Le calcul montre qu'il est possible de déterminer  $m'$ ,  $R$ ,  $r_1$  pour que  $d\omega : d\theta = d^2\omega : d\theta^2 = d^3\omega : d\theta^3 = 0$ , quand  $\theta = \theta_1$ . Pour  $\theta_1 = 6^\circ, 10'$ , on trouve  $r_1 = 58$  cm.

Pour obtenir le contact du troisième ordre en plaçant la poulie moins loin de l'axe, il suffit d'augmenter l'action de la force centrifuge sur  $m'$  en ajoutant deux masses égales en  $a$  et  $d$  (*fig. 36-2*).

**72. Isochronisme quel que soit  $\theta$ .** — 1° Sur la plaque métallique C, soudée sur la poulie Q (*fig. 36-3*), s'enroule le fil qui porte  $m$ . La tension  $f_1$  du fil qui tire sur le pendule, est donnée par l'égalité des moments :

$$f_1 R = mg R_1.$$

Pour obtenir l'isochronisme je détermine le profil de C pour que (§ 68) :

$$f_1 \equiv f = Mg \sin \theta (\cos \theta - \cos \theta_0) : \cos \theta \cos \theta_0,$$

quel que soit  $\theta$  ou  $\varphi$ . Pour cela, je me donne  $M, \theta_0, m, R$  et je calcule  $R_t$  pour diverses valeurs de  $\varphi$ . A l'extrémité  $a$  de chaque rayon  $R_t = ia$ , j'élève la normale  $n$  : la courbe  $C$  est l'enveloppe de ces normales.

Pour obtenir l'isochronisme du pendule conique ( $l \cos \theta = C^{te}$ ), *Huyghens* enroule le fil de suspension sur une plaque métallique dont le profil est la développée d'une parabole. Le fil étant fixé au sommet de la plaque, celle-ci doit à la fois porter le pendule et tourner avec lui : difficile à réaliser mécaniquement, ce dispositif ne peut fonctionner à cause des frottements.

Dans mon dispositif, la plaque, entraînée par la fourchette, porte une charge petite devant le poids du pendule; d'autre part, pour obtenir la même précision, ma plaque peut être moins finement taillée, puisque son rayon n'intervient que dans une correction de l'ordre de 1 : 200 de  $T$ , pour  $\theta_1 = 6^\circ, 10'$  (§ 70).

2° Les dispositifs précédents (§ 71 et 72), supposent inextensible et sans raideur le fil qui tire le pendule : pour supprimer le fil, j'utilise la réaction d'un bras courbe  $C$ . (*fig. 36-4*). Soit  $P_t$  la pointe du pendule;  $R_t$  la composante tangentielle de la résistance de l'air sur le pendule;  $\alpha$  l'angle du méridien et de la tangente au bras. Décomposons  $R_t$  en  $X$  et  $Y$ , sur la normale et sur la tangente; la réaction du bras annule  $X, Y$  se projette sur le méridien en :

$$f_t = Y \cos \alpha = R_t \sin \alpha \cos \alpha.$$

Quand  $r$  est inférieur, égal, supérieur à  $r_1$ ,  $f_t$  est centripète, nulle, centrifuge : pour identifier  $f_t$  et  $f$  (§ 68), le point  $r = r_1$ , doit correspondre au point  $B$  (*fig. 35*). Le calcul montre que la seule action de l'air ne suffit que pour des pendules légers ( $M = 100$  gr.): pour des pendules plus lourds il faut augmenter  $R_t$  (§ 63).

Pour déterminer par une expérience directe la valeur d' $\alpha$  qui correspond à  $r_2$ , sur le bras  $OA$  (*fig. 36*), j'articule tige  $AB$ . Pour  $r = r_1$ ,  $AB$  étant placé dans le prolongement de  $OA$ , j'accorde un second pendule  $P_e$  (pendule étalon, § 74) sur le pendule  $P$ ; pour  $r = r_2$ , par des tâtonnements systématiques, je détermine  $\alpha$  pour que  $P$  reste synchrone de  $P_e$  : le profil  $C$  du bras se définit de proche en proche par l'angle  $\alpha$  de sa tangente.

**73. Vérification de l'isochronisme à l'aide de l'oscillateur liquide.** — A sa partie inférieure l'axe du manège, formé par un moyeu de bicyclette, porte une manivelle dont la bielle commande le bas d'un léger pendule circulaire  $P$  (*fig. 1*, § 2 et 4). Deux doigts calés à  $180^\circ$  sur le manège, renversent un léger levier (*fig. 3*), et produisent une étincelle à l'instant des maxima d'élongation de la baguette  $a$  (*fig. 1*).

Si  $T$  (période du pendule) =  $\tau$  (période propre de l'oscillateur),  $\varphi$  (retard en phase) =  $\pi : 2$  (§ 2); les étincelles éclatent quand le ménisque passe dans sa posi-

tion I d'équilibre. Dans le viseur L d'un cathétomètre j'observe les images I<sub>1</sub> (le ménisque monte), I<sub>2</sub> (le ménisque descend), qui se confondent en I.

Si le pendule est en avance (avance supérieure à  $\pi : 2$ ),  $\varphi > \pi : 2$ , on a :  $T < \tau$ . I<sub>1</sub> est au-dessous de I; I<sub>2</sub> au-dessus (fig. 38). Au cathétomètre je mesure  $II_1 = +x$ , ou mieux  $I_2I_1 = 2x$ , pour que n'interviennent pas les petits déplacements de I qui résultent de la dilatation du liquide (alcool méthylique).

Si le pendule est en retard (avance inférieure à  $\pi : 2$ ),  $\varphi < \pi : 2$ , on a  $T > \tau$ ; I<sub>1</sub> est au-dessus de I<sub>2</sub>,  $I_2I_1 = -2x$ .

Pour accorder l'oscillateur sur le pendule, j'enlève assez de liquide pour que la colonne soit un peu trop courte ( $T > \tau$ ,  $2x < 0$ ), puis je verse goutte à goutte du liquide dans le tube pour amener I<sub>1</sub> sur I<sub>2</sub> ( $2x = 0$ ).

2° Étudions le pendule non isochrone. La masse pendulaire est formée par un disque en fer de  $d = 20$  cm., pesant 10.500 gr.: AM (fig. 32) = 116 cm., AF = 127 cm.

La pointe du pendule étant fixée en  $r = 11,5$  cm., j'accorde l'oscillateur sur le pendule. Je laisse  $\tau$  invariable et je lui compare T, lorsque, modifiant le poids moteur du manège, je fixe la pointe sur un parallèle de rayon inférieur, puis supérieur à 11,5 cm.

Pour  $r < 11,5$ , le pendule est en retard ( $2x < 0$ ),  $T > \tau$ ; pour  $r > 11,5$ , le pendule est en avance ( $2x > 0$ ),  $T < \tau$  (ligne 3 du tableau 6) : T décroît régulièrement quand  $r$  croît.

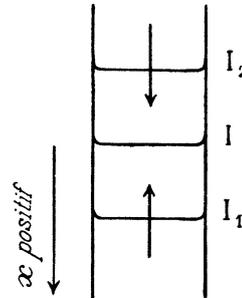


FIG. 38. — Pendule en avance :  $\varphi > \pi : 2$ ;  $x > 0$ ;  $T < \tau$ .

Tableau 6.

Rayon $r$ du parallèle en cm.	5,5	8,5	11,5	15	18,5
$\theta$ en degrés.....	2°, 32'	3°, 56'	5,20	6,56	8,34
$2x$ (pendule non isochrone) en mm.	- 1,0		0	+ 0,9	+ 2,1
$2x$ (avec aimant).....	+ 2,4	+ 0,4	0	0	+ 0,3
$2x$ (avec $m = 15$ gr.).....	+ 3,9	+ 1,1	0	0	+ 0,3

Quand  $r$  varie de 11,5 à 15 cm., le ménisque se déplace de  $2x = + 0,9$  mm. : étalonnons l'oscillateur en supposant  $x$  proportionnel à  $\Delta T$  (l'amplitude de l'oscil-

lateur égale 5,3 cm.). Sur la courbe théorique  $T = T_0 \sqrt{\cos \theta}$ , quand  $r$  croit de 11,5 à 15 cm.,  $\Delta T : T = 0,0016$  : d'où résulte qu'un déplacement  $x = 0,1$  mm., correspond à  $\Delta T : T = 0,0016$  ;  $g = 0,00017$ .

2° Pour rendre le pendule isochrone, au milieu de la fourchette, je place un gros aimant en fer à cheval : pour  $r = 11,5$ ,  $x = +2,5$ , ce qui correspond bien à une attraction ( $T < \tau$ , force radiale centripète § 75). J'accorde la colonne sur le pendule ( $2x = 0$ ), je recommence l'expérience précédente.

Pour  $r < 11,5$ , le pendule est en avance ( $2x > 0$ ),  $T < \tau$ ; pour  $r > 11,5$ , le pendule est en avance ( $2x > 0$ ),  $T < \tau$  (ligne 4) :  $T$  passe par un maximum près de  $r = 11,5$ .

3° Je retire l'aimant. Pour  $r = 11,5$ , j'accorde la colonne sur le pendule; sur la fourchette je place la poulie P (*fig. 36*,  $m'$  enlevé,  $m = 15$  gr.; la tension du fil coupe l'axe du pendule 8 cm. au-dessous du centre de gravité) : pour  $r = 11,5$ ,  $x = +4,8$  mm., déplacement dû à l'attraction de  $m$ . J'accorde la colonne sur le pendule ( $2x = 0$ ), je recommence l'expérience.

Pour  $r < 11,5$ ,  $T < \tau$ ; pour  $r > 11,5$ ,  $T < \tau$  (ligne 5) :  $T$  passe par un maximum près de  $r = 11,5$ , plus exactement pour  $\theta_0 = 6^\circ, 30'$ .

**74. Vérification de l'isochronisme par coïncidence de deux pendules.** — 1° PENDULE ÉTALON  $P_e$ . — Pour mesurer la période du pendule à  $10^{-3}$  près, la régularité de mon chronographe (balancier réglé par spiral) est insuffisante; je construis un second pendule conique  $P_e$ .

Au lieu d'accrocher le fil de suspension en E (*fig. 32*), je le fixe au bout d'une vis dont l'écrou est fixe : en agissant sur un volant solidaire de la vis, je modifie  $T_e$  de façon continue. La pointe P, terminée par un cylindre de  $d = 1$  cm., plonge dans l'huile (§ 63). Le pendule de masse  $M = 10,500$  gr., est isochrone pour  $r = 10$  cm., grâce à la poulie P (*fig. 36*,  $m'$  enlevé,  $m = 5$  gr.; la tension du fil coupe l'axe du pendule 8 cm. au-dessous du centre de gravité);  $AM$  (*fig. 32*) = 116 cm.,  $AF = 127$  cm.

Le doigt calé sur le manège, entraîne un compte-tour et renverse un levier interrupteur  $L_e$  (*fig. 3*), dont le socle, mobile autour du pendule, peut être fixé dans un méridien quelconque.

2° Pour vérifier le synchronisme des deux pendules, dans le circuit de chaque levier L,  $L_e$ , je place un électro; j'écoute le bruit B,  $B_e$  du choc de l'armature sur son buttoir. Je fixe  $L_e$  dans le méridien pour lequel les bruits coïncident : si les pendules sont synchrones cette coïncidence persiste; si P avance sur  $P_e$ , B devant distinct de  $B_e$ , le devance.

Pour accorder  $P_e$  sur P, avec le volant, je règle la longueur de  $P_e$ , pour que la coïncidence des bruits persiste.

3° J'étudie le pendule P (§ 73), non isochrone. Quand sa pointe est en  $r =$

11,5 cm., j'accorde  $P_e$  sur P, Je laisse  $T_e$  invariable et je lui compare T, quand je fixe la pointe de P sur un parallèle de rayon inférieur, puis supérieur à 11,5 cm. Pour  $r < 11,5$ , B retarde sur  $B_e$ ,  $T > T_e$ ; pour  $r > 11,5$ , B devance  $B_e$ ,  $T < T_e$ : la période T décroît régulièrement quand r croît.

Le pendule P étant rendu isochrone par l'aimant ou le contrepoids (§ 73), je recommence l'expérience. Pour  $r = 11,5$ , j'accorde  $P_e$  sur P. Pour  $r < 11,5$ , B devance  $B_e$ ,  $T < T_e$ ; pour  $r > 11,5$ , B devance  $B_e$ ,  $T < T_e$ : la période T passe par un maximum près de  $r = 11,5$ .

4° Dans le calcul du rayon  $r_0$  d'isochronisme, je néglige plusieurs forces radiales qui résultent de la raideur du fil de suspension, de la composante centrifuge de la résistance de l'air (§ 78), etc... Ces forces, insuffisantes pour modifier l'allure de la courbe  $T(r)$ , déplacent simplement son maximum.

Pour déterminer le rayon  $r_0$  d'isochronisme expérimental, le contact de la courbe  $T(r)$  et de sa tangente horizontale étant du premier ordre, j'assimile la courbe à la parabole :

$$T - T_0 = -K(r - r_0)^2.$$

Je place le pendule dans la position approchée  $r_1$ ; j'accorde  $P_e$  sur P; pour les rayons  $r'$ ,  $r''$ , qui encadrent  $r_1$ , je détermine  $T' : T_e$ ,  $T'' : T_e$ , par la méthode des coïncidences (§ 76).

Avec ces valeurs, j'élimine  $k$  :

$$\begin{aligned} T' - T_0 &= -K(r' - r_0)^2, & T'' - T_0 &= -K(r'' - r_0)^2; \\ \sqrt{(1 - T' : T_0) : (1 - T'' : T_0)} &= (r' - r_0) : (r'' - r_0), \end{aligned}$$

relation qui donne  $r_0$ , en prenant pour  $T_0$ , la valeur approchée  $T_e$ .

## QUATRIÈME PARTIE

### Application du pendule conique à la mesure des forces centrales.

#### CHAPITRE IX

##### Composante centrifuge de la résistance de l'air sur un corps qui tourne.

75. **Mesure de la force radiale par la variation de période.** — Je mesure la force radiale  $R_r$  par la différence  $\Delta T = T_1 - T_0$  des périodes avant et après l'application de  $R_r$ , comptée positivement dans la direction *centrifuge*.

1° D'abord, je suppose  $R_r$  appliquée au centre de gravité M du pendule (*fig. 32*). En ajoutant  $R_r$  à la force centrifuge, l'équilibre des forces sur l'horizontale MH (§ 56) donne :

$$\begin{aligned} Mg \operatorname{tg} \theta_0 &= M\omega_0^2 r'_0 = M\omega_1^2 r'_0 + R_r, \\ R_r &= Mr'_0(\omega_0^2 - \omega_1^2), \end{aligned}$$

en appelant  $\omega_0$ ,  $\omega_1$ , les vitesses angulaires avant et après l'application de  $R_r$ ,  $r'$  gardant la valeur  $r'_0$ .

Par approximation :

$$\omega_0^2 - \omega_1^2 = 4\pi^2 \left( \frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T_1^2} \right) = 4\pi^2 \frac{(T_0 + T_1)(T_1 - T_0)}{T_0^2 T_1^2} = 8\pi^2 \frac{\Delta T}{T_0^3},$$

$$R_r = 8\pi^2 Mr'_0 \Delta T : T_0^3.$$

Si  $T_1 > T_0$ ,  $\Delta T > 0$ ,  $R_r$  est positive donc centrifuge;

si  $T_1 < T_0$ ,  $\Delta T < 0$ ,  $R_r$  est négative donc centripète.

Il est évident que  $\Delta T$  a le signe de  $R_r$  : positive, cette composante s'ajoute à la force centrifuge qui doit diminuer pour que l'équilibre sur le parallèle se conserve;  $\omega$  décroît,  $T$  croît,  $\Delta T$  est positif.

Divers pendules définissant  $T$  à la même approximation, décèlent  $R_r$  d'autant

mieux que le trouble de période  $\Delta T$  est plus grand : il faut prendre  $M$  et  $r'_0$  petit, mais surtout  $T_0$  grand, en augmentant la longueur du pendule. Avec  $T_0 = 2''$ ,  $M = 10^3$  gr., si  $\Delta T : T$  se mesure à  $10^{-3}$  près, l'approximation sur  $R_r$  est de l'ordre de la dyne.

2° Si  $R_r$  est appliquée, non pas au centre de gravité, mais en un point P quelconque de l'axe (*fig. 32*), j'écris l'égalité des moments par rapport au point A :

$$\begin{aligned} Mgl \sin \theta_0 &= M\omega^2 r'_0 l \cos \theta_0 = M\omega^2 r'_0 l \cos \theta_0 + R_r b \cos \theta_0, \\ R_r &= (l^2 : ab) 8\pi^2 M r_0 \Delta T : T_0^3, \end{aligned}$$

en lisant  $r_0$  sur la fourchette graduée :  $r'_0 a = r_0 l$ .

Si la force est, non pas horizontale, mais verticale (poussée d'Archimède P), je la décompose sur la direction de la tige et sur l'horizontale ( $P \operatorname{tg} \theta$ ), l'équation devient :

$$R_r = P \operatorname{tg} \theta = (l^2 : ab) 8\pi^2 M r_0 \Delta T : T_0^3.$$

Par approximation  $\operatorname{tg} \theta = \sin \theta = r_0 : a$ , alors :

$$P = (l^2 : b) 8\pi^2 M \Delta T : T_0^3,$$

une force verticale constante P, trouble la période d'une quantité  $\Delta T$ , *indépendante du rayon  $r_0$  du parallèle.*

3° Montrons que l'application d'une force radiale [par exemple, l'addition d'un poids sur le plateau de la croix C (*fig. 36*)], ne modifie pas sensiblement l'amplitude  $\theta$  du pendule.

La composante tangentielle  $R_t$  et la composante radiale  $R_r$  de la résultante des forces appliquées au centre de gravité du pendule, sont des fonctions de  $\theta$ ,  $\omega$ . L'égalité des couples moteurs et résistants donne (§ 14,  $r'$  est le rayon de la poulie motrice) :

$$Pgr' = 2l \sin \theta \cdot R_t(\theta, \omega);$$

dans le méridien l'équilibre des forces sur l'horizontale s'écrit :

$$Mg \operatorname{tg} \theta = M\omega^2 l \sin \theta + R_r(\theta, \omega);$$

deux équations qui définissent  $\theta$ ,  $\omega$ . Si  $R_t$  ne contenait pas  $\omega$ ,  $\theta$  serait complètement défini par la première équation et cette valeur de  $\theta$  étant portée dans la seconde, celle-ci définirait  $\omega$ .

En réalité, la résistance de l'air ou de l'huile change avec la vitesse :  $R_t$  varie avec  $\omega$ . Quand  $R_r$  croît,  $T$  croît,  $\omega$  décroît,  $R_t$  décroît, le poids moteur étant invariable,  $\theta$  croît.

En résumé,  $R_p$  ne modifie  $\theta$  que par l'intermédiaire de  $R_l$ ; comme  $R_l$  varie vite avec  $\theta$  et que  $R_p$ , toujours petit, ne produit que de faibles variations de vitesse,  $R_p$  ne modifie pas sensiblement  $\theta$ , ce que vérifie l'expérience.

**76. Mesure de la période par la méthode des coïncidences.** — 1° Quand la période  $T$  du pendule d'étude  $P$ , varie dans un intervalle restreint et que le temps qui sépare deux coïncidences (observées au son) reste supérieur à  $2'$ , j'emploie la méthode classique des coïncidences. Supposons  $T_e > T$ , après  $\lambda$  coïncidences,  $n$  périodes de  $T_e$  valent  $n + \lambda$  périodes de  $T$  :

$$nT_e = (n + \lambda)T,$$

relation qui donne  $T : T_e$ , ou la valeur absolue de  $T$  en déterminant  $T_e$  avec un chronomètre, par la mesure d'un grand nombre de périodes.

2° Quand  $T$  varie dans un grand intervalle et que le temps qui sépare deux coïncidences devient inférieur à  $2'$  pour quelques expériences d'une même série, la précision de la méthode des coïncidences devient illusoire : j'emploie la méthode mixte suivante.

Je laisse invariable  $T_e$ ; une fois pour toutes, je mesure  $1\,000 T_e = 2144''{,}2$ ; je cherche le nombre de  $T$  que contient cette durée. L'observation grossière des coïncidences donne la partie entière  $N$  de ce nombre dont il reste à déterminer la partie fractionnaire.

Sur la bande du chronographe j'enregistre la rupture du circuit des leviers  $L_e, L$ ; je repère les crochets  $C_0$  et  $C_{1000}$  de  $P_e$ ; par interpolation graphique, en prenant comme unité de longueur le déroulement de la bande pendant  $T_e$ , je détermine la distance  $\varepsilon'$  de  $C_0$  au crochet suivant de  $P$ , la distance  $\varepsilon''$  de  $C_{1000}$  au crochet précédent de  $P$ . Alors :

$$1\,000 T_e = (N + \varepsilon' + \varepsilon'')T.$$

Par exemple, si le temps qui sépare deux coïncidences est en gros  $64''$ , avec  $T_e > T$  :

$$1\,000 T_e = \left(1\,000 + \frac{2144{,}2}{64}\right)T = (1\,033{,}50)T;$$

si de plus  $\varepsilon' + \varepsilon'' = 0{,}44$ , le nombre cherché sera  $1\,033{,}44$ .

La bande se déroulant de 5 cm. par période, l'erreur relative sur  $\varepsilon' + \varepsilon''$  est inférieure à  $10^{-3}$ ; sur  $T$ , inférieure à  $10^{-6}$ .

**77. Influence de la raideur du fil de suspension.** — En A (*fig. 32*), au lieu de présenter un point anguleux, le fil forme une courbe. L'axe MD du pendule, tangent

à cette courbe, coupe AO en A', au-dessous de A. La différence entre MA et la longueur utile MA' du fil croît avec  $r$  : la courbe  $T(r)$  doit être plus inclinée que la courbe théorique  $T = T_0 \sqrt{\cos \theta}$ .

Pour le vérifier, j'utilise un fil d'acier de  $d = 1$  mm. (corde de piano), qui porte une sphère assez lourde ( $M = 4.800$  gr.), pour que l'action de l'air soit négligeable (§ 78). Pour chaque poids moteur P, je lis  $r$  et je mesure  $T : T_e$  (colonnes 1, 2, 5 du tableau) :

Poids moteur P en gr.	Rayon $r$ du parallèle en cm.	$\lg \theta$ (AO = 133,9 cm)	$T : T_0 = \sqrt{\cos \theta}$ théorique	$T : T_e$ expérimental	$T : T_0$ expérimental	Diminution de $T : T_0$
1,5	3,6	0,026 86	1 - 0,000 18	1 + 0,001 56	1 - 0,000 18	0
3,1	19,8	0,147 77	1 - 0,005 39	1 - 0,003 87	1 - 0,005 64	0,000 25
11,3	35,5	0,264 92	1 - 0,016 82	1 - 0,015 76	1 - 0,017 53	0,000 71

L'expérience ne donne pas la période  $T_0$  à l'origine  $r = 0$ . Comme valeur de  $T_0$ , je prends la période à l'origine de la courbe théorique :

$$T : T_0 = \sqrt{\cos \theta} = 1 - 0,000 18,$$

qui coïncide, pour  $r = 3,6$  cm., avec la courbe expérimentale :

$$T : T_e = 1 + 0,001 56;$$

d'où :

$$T_e : T_0 = (1 - 0,000 18) : (1 + 0,001 56) = 1 - 0,000 18 - 0,001 56 = 1 - 0,001 74.$$

Pour calculer  $T : T_0$  expérimental (colonne 6), je multiplie  $T : T_e$  par  $T_e : T_0$ . Comparons  $T : T_0$  expérimental et théorique : le premier est plus petit d'une quantité qui croît avec  $r$  (colonne 7).

Pour contrôler que cette diminution vient de la raideur du fil ( $d = 1$  mm.), je le remplace par un fil d'acier plus fin ( $d = 0,3$  mm.) : la courbe expérimentale coïncide sensiblement avec la courbe théorique.

**78. Composante centrifuge de la résistance de l'air sur une sphère.** — Pour étudier la composante radiale de la résistance de l'air, j'utilise un pendule de faible

masse. Le fil de suspension (fil de fer de  $d = 0,2$  mm., rendu rectiligne par étirage), s'attache au bout d'un fil d'aluminium qui traverse diamétralement une sphère de celluloid de  $d = 10$  cm., et dessous forme pointe : l'ensemble pèse 26 gr. *Sous cette sphère* je place le manège 1 bis (§ 62), avec une poulie motrice de 1,07 cm. de rayon.

1° Sur des parallèles de rayons inférieurs à 10 cm., la période peu régulière dépend des frottements du manège et de l'élasticité de la fourchette. Pour  $r = 8$  cm., je mesure T :

a) le bras formé d'un fil d'aluminium de  $d = 2$  mm., long de 38 cm. Pour certains azimuts variables d'une expérience à l'autre, la pointe devance le bras qui la rattrape après une fraction de tour; la période voisine de  $2''$ , 2310, est peu régulière (*fig. 39*, point *a*), ce qui s'explique par la petitesse du couple résistant de la sphère ( $\Delta P = 0,2$  gr.) devant celui du manège ( $P = 2,5$  gr.);

b) un fil métallique fin soudé *devant* le bras précédent avec lequel il forme fourchette. Quand le jeu de la pointe est faible :  $T = 2''$ , 2150, (point *b*); quand le jeu augmente jusqu'à 5 mm., T croît de *b* en *a* : pour ce jeu, la pointe ne touche plus le fil élastique dont l'action s'annule;

c) la pointe placée *devant* le fil fin qui sert de bras flexible : la pointe ne quitte pas ce fil, la période voisine de  $2''$ , 2280, est peu régulière (point *c*);

d) Le bras coupé près de  $r = 10$  cm., après avoir retiré le fil fin. Les frottements du manège sont réduits ( $P = 0,5$  gr.), la pointe ne quitte plus le bras; la période plus régulière prend la valeur  $2''$ , 2280, que j'adopte pour tracer la courbe 1.

En résumé, par rapport à cette valeur de T, si l'on augmente les frottements du manège en allongeant le bras, la pointe le quitte pendant des fractions de tour, T augmente; si l'on place devant ce long bras un fil élastique qui forme fourchette avec lui, T diminue beaucoup :  $cb$  :  $T = 0,0060$ .

2° Pour  $r > 10$  cm., la période devient régulière. Pour  $r = 20$  cm., la pointe se fixe à 0,2 cm. près, la période à  $10^{-4}$  près.

Pour divers poids moteurs P, je détermine  $r$  et T :

P en gr.	14,5	9,5	7,5	5,5	3,5	2,7
$r$ en cm...	31,5	26,1	23,2	19,8	13,6	8
T.....	2,1897	2,2050	2,2104	2,2142	2,2224	2,2280

Je trace  $T(r)$  (*fig. 39*, courbe 1) : cette courbe est plus inclinée que la courbe théorique 2.

3° Pour étudier l'action de l'air sur la sphère, il faudrait déterminer  $T(r)$  dans

le vide et dans l'air. Plus simplement, j'enferme la sphère *placée sous le bras*, dans une boîte cylindrique de papier, d'axe parallèle au bras (*fig. 40*) : l'action de l'air sur la sphère se réduit à un couple, sans effet sur la période. Pour que la pointe se fixe, j'ajoute le cylindre C, assez loin de la sphère P, pour négliger l'action de C sur P : l'ensemble des deux corps pèse 44,2 gr.

Le couple résistant et les poids moteurs étant augmentés, je remplace les quatre

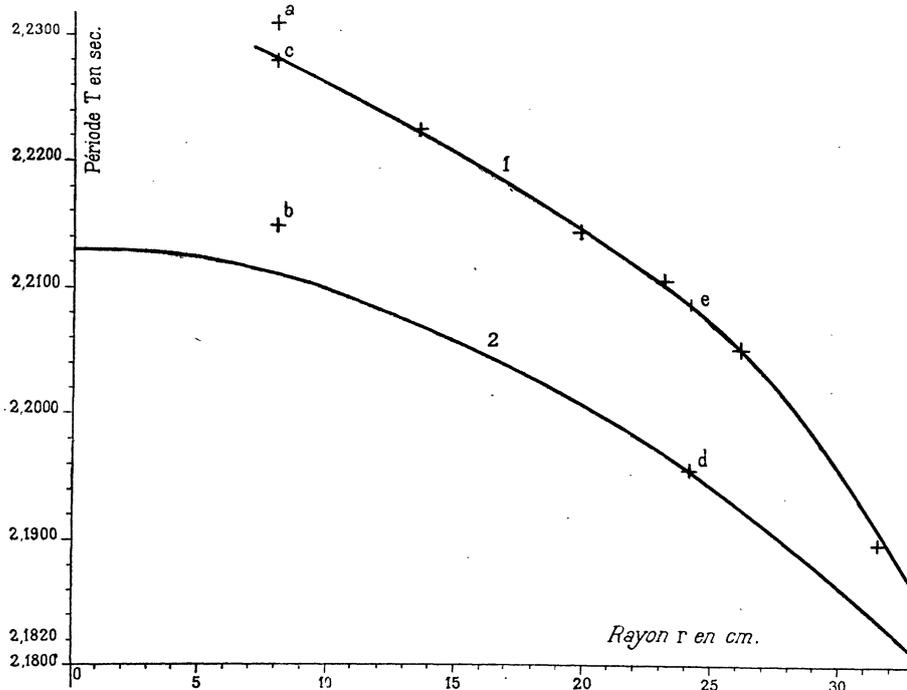


FIG. 39. —  $T(r)$  pour une sphère de celluloid.

poulies du manège 1 *bis* par celles du manège 1 (§ 12); je conserve la même poulie motrice. Pour  $r = 20$  cm., je mesure la période, la sphère dans la boîte ( $T = 2''{,}3180$ ); puis, d'un coup de ciseaux, je fends la boîte que je retire et je mesure la période, la sphère dans l'air ( $T = 2''{,}3290$ ) : l'action de l'air augmente  $T$  de  $\Delta T = 0''{,}0110$ . Calculons  $R_r$  :

$$\begin{array}{lll}
 M = 44,2 \text{ gr.} & l = T_0^2 g : 4\pi^2 = 133, & T_0 = 2''{,}3180, \\
 r_0 = 20 \text{ cm.}, & \Delta F = 136 \text{ cm.}, & T_0^2 = 12,42, \\
 r_0'' = 21,6, & \Delta P = 147, & \Delta T = 0''{,}0110,
 \end{array}$$

$$R_r = (F : ab) 8\pi^2 M r_0 \Delta T : T_0^2 = 54 \text{ dynes.}$$

Calculons  $R_t$ . Le centre de la sphère (de surface  $s = 75 \text{ cm}^2$ ), décrit un cercle (*fig. 32 et 40*), de rayon  $r''_0$  :

$$r''_0 = r \cdot AP : AF = 20 \times 147 : 136 = 21,6 \text{ cm.},$$

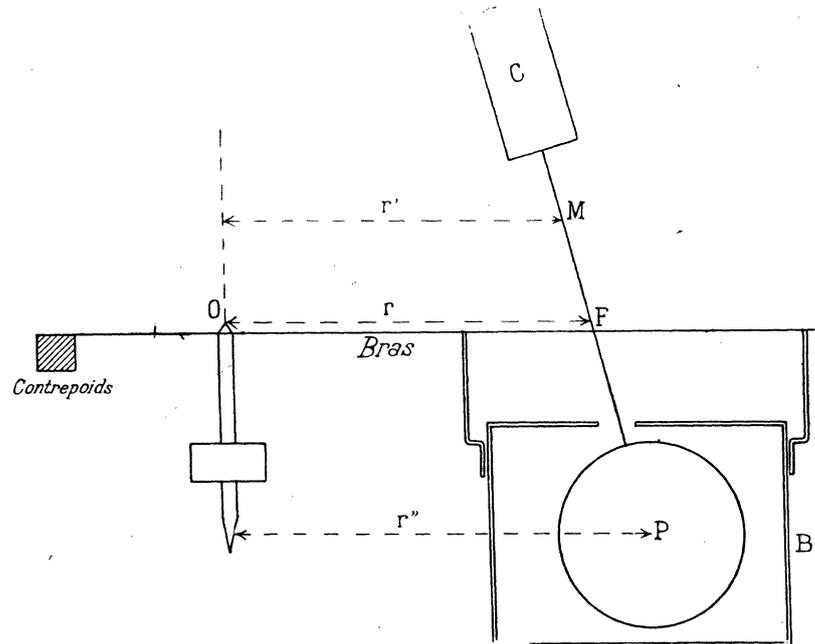


FIG. 40. — Sphère enfermée dans une boîte.

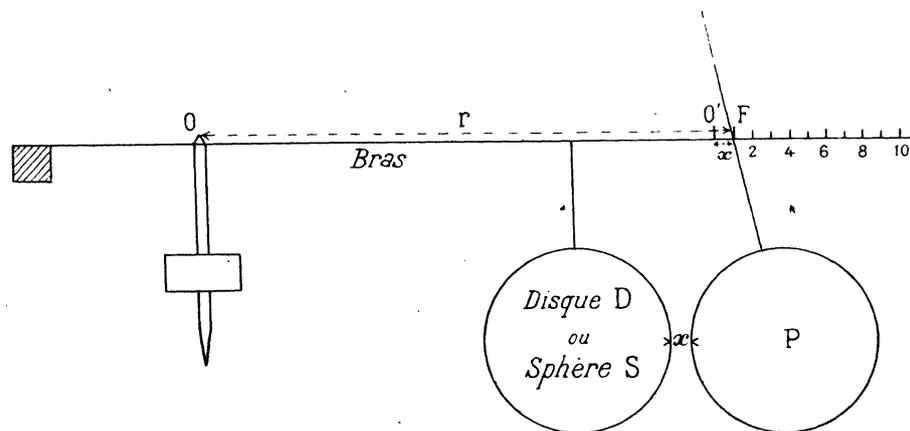


FIG. 41. — Action d'un disque (ou d'une sphère) sur une sphère.

avec la vitesse  $v = 2\pi r''_0 : T_0 = 59 \text{ cm. sec.}$  Pour ce rayon la résistance  $R_t$  vaut sensiblement le double (*fig. 8*) de la résistance de translation (§ 52) :

$$R_t = 2 \times 300 \times 10^{-6} sv^2 = 156 \text{ dynes};$$

la composante centrifuge est le tiers de la composante tangentielle (Cf. la déviation de la queue, *fig. 16*).

4° J'utilise ce résultat pour tracer la courbe théorique dans le vide, quand la

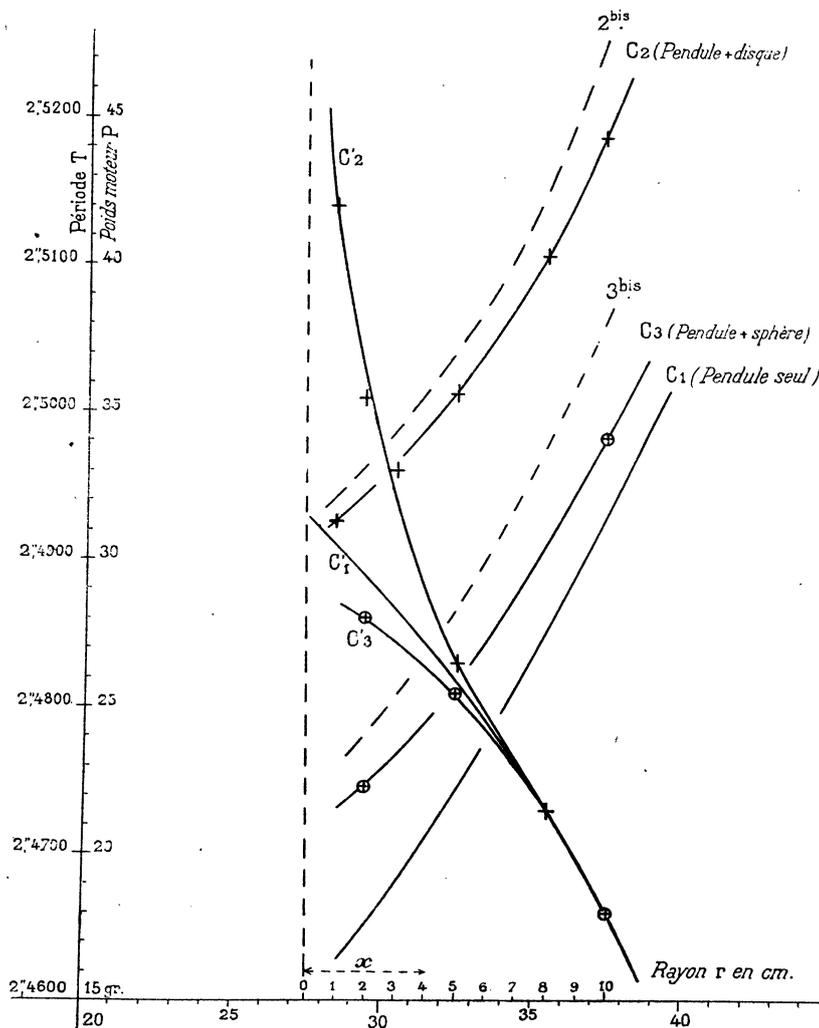


FIG. 42. — Action d'un disque (ou d'une sphère), sur une sphère.

sphère de masse  $M = 26$  gr. est au-dessus du bras. Lorsque le centre de la sphère (confondu avec le centre de gravité du pendule) est en  $r'_0 = 21,6$  cm., la période  $T_0$  est de  $2'',2085$  (*fig. 39*, point *e*). La composante  $R_r = 54$  dynes, augmente  $T$  de  $\Delta T$  (§ 75) :

$$\Delta T = R_r T_0^3 : 8\pi^2 M r'_0 = 0'',0130.$$

Dans le vide le point *e* serait en *d* ( $2'',2085 - 0'',0130 = 2'',1955$ ): par ce point

je trace la courbe théorique  $T = T_0 \sqrt{\cos \theta}$  (courbe 2). La distance  $\Delta T$  de ces courbes décroît lentement quand  $r$  croît;  $R_r$ , proportionnel à  $r \Delta T$ , croît un peu moins vite que  $r$ , alors que  $R_t$  croît comme  $r^2$ . A la limite de la figure, pour  $r = 35$  cm.,  $R_r$  est loin d'être négligeable.

**79. Action d'un disque (ou d'une sphère) sur une sphère.** — Dans l'appareil précédent (*fig. 40*), je retire la boîte B, le cylindre C; sous le bras je fixe le disque D, de  $d = 10$  cm., son centre à  $r = 20$  cm., dans le plan horizontal du centre de la sphère de celluloid P, de masse  $M = 26,6$  gr. (*fig. 41*).

Pour  $r = OO' = 27,5$  cm., P touche D; sur le bras je colle une bande de papier graduée dont le zéro coïncide avec  $O'$ ; sur cette bande je lis la distance  $x$  des corps.

Pour divers poids moteurs P, je détermine  $P(x)$ ,  $T(x)$  :

a) le disque D enlevé ( $P[x]$ , courbe  $C_1$ ;  $T[x]$ , courbe  $C'_1$ , *fig. 42*);

b) le disque D en place ( $C_2$ ,  $C'_2$ );

c) le disque D remplacé par une sphère S de celluloid identique à  $P(C_3, C'_3)$ .

Comparons les courbes des poids moteurs. Après avoir retiré le pendule, quand le manège tourne à la période  $2''{,}50$ , la résistance pour le disque seul correspond à  $P_1 = 15,5$  gr.; celle de la sphère seule à  $P_2 = 6,4$  gr. Aux ordonnées de 1, ajoutons  $P_1$  (courbe 2 bis),  $P_2$  (courbe 3 bis) :  $C_2$  et  $C_3$  sont au-dessous des courbes 2 bis et 3 bis, la résistance de l'ensemble des corps est inférieure à la somme des résistances. La diminution croît lorsque les corps s'écartent et passe évidemment par un maximum, puisqu'elle s'annule pour  $x$  assez grand.

Comparons les courbes des périodes. L'action du disque ou de la sphère sur le pendule est négligeable pour  $x > 8$  cm. Quand  $x$  décroît, la sphère du pendule est repoussée par le disque ( $C'_2$  au-dessus de  $C'_1$ ,  $\Delta T > 0$ ,  $R_r$  centrifuge), attirée par la sphère ( $C'_3$  au-dessous de  $C'_1$ ). En réalité, cette attraction (pour  $x = 1,5$  cm.,  $\Delta T = -0''{,}0034$ ), diminue simplement la composante centrifuge de la résistance de l'air : il n'est pas légitime de conclure à une attraction pour le cas de la translation.

**80. Stabilité de l'entraîné derrière son entraîneur.** — 1° Les expériences suivantes exigent que, si l'on change le poids moteur, le déplacement de la pointe dans le méridien soit lent : pour cela, j'augmente M en substituant à la sphère de celluloid une sphère de bois ( $d = 11$  cm.,  $M = 560$  gr.), sous laquelle je dispose le manège 1 dont le bras est remplacé par une fourchette ( $AO = 133,9$  cm.;  $AM = 116$  cm.; rayon de la poulie motrice du manège =  $3,8$  cm.).

Pour divers poids moteurs P, je détermine  $P(r)$  et  $T(r)$ , quand :

a) la fourchette ne porte pas d'écran [ $P(r)$ , courbe  $C_1$ , *fig. 43*;  $T(r)$ , courbe  $C_1$ , *fig. 44*];

b) la fourchette porte un disque du diamètre de la sphère, placé devant elle à

3 mm. (coupe horizontale, *fig. 19*), dans une position telle que la sphère soit exactement derrière le disque pour  $r = 21$  cm. ( $C_2$ , *fig. 43 et 44*).

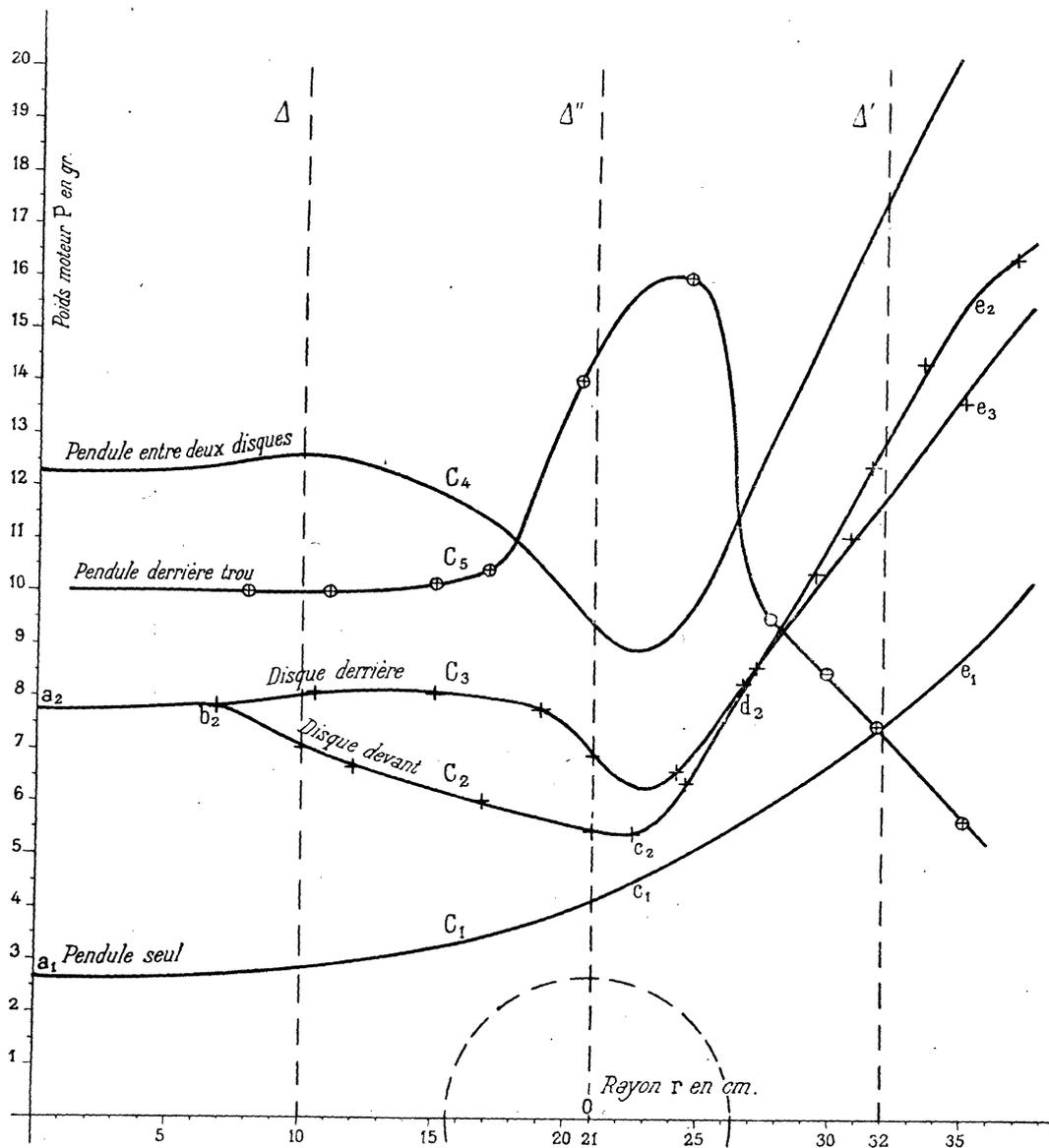


FIG. 43.

2° Pour  $r = 0$  (pendule enlevé), le disque augmente la résistance du manège de  $a_1 a_2$ . Quand  $r$  croît, la résistance croît lentement comme sur  $C_1$ , passe par un maximum  $b_2$ , puis décroît quand la sphère approche de l'écran (sur  $\Delta$ ,  $\Delta'$ , le disque est tangent extérieurement à la projection de la sphère sur son plan).

Sur la portion  $b_2c_2$ , on a :  $\Delta P : \Delta r < 0$ , le pendule est en équilibre instable par rapport à  $r$ . Par exemple, en  $r_0 = 10$  cm., le poids moteur d'entretien est  $P_0 = 7,1$  gr.; par suite d'une variation des frottements, si  $r$  décroît,  $P_0$  est insuffi-

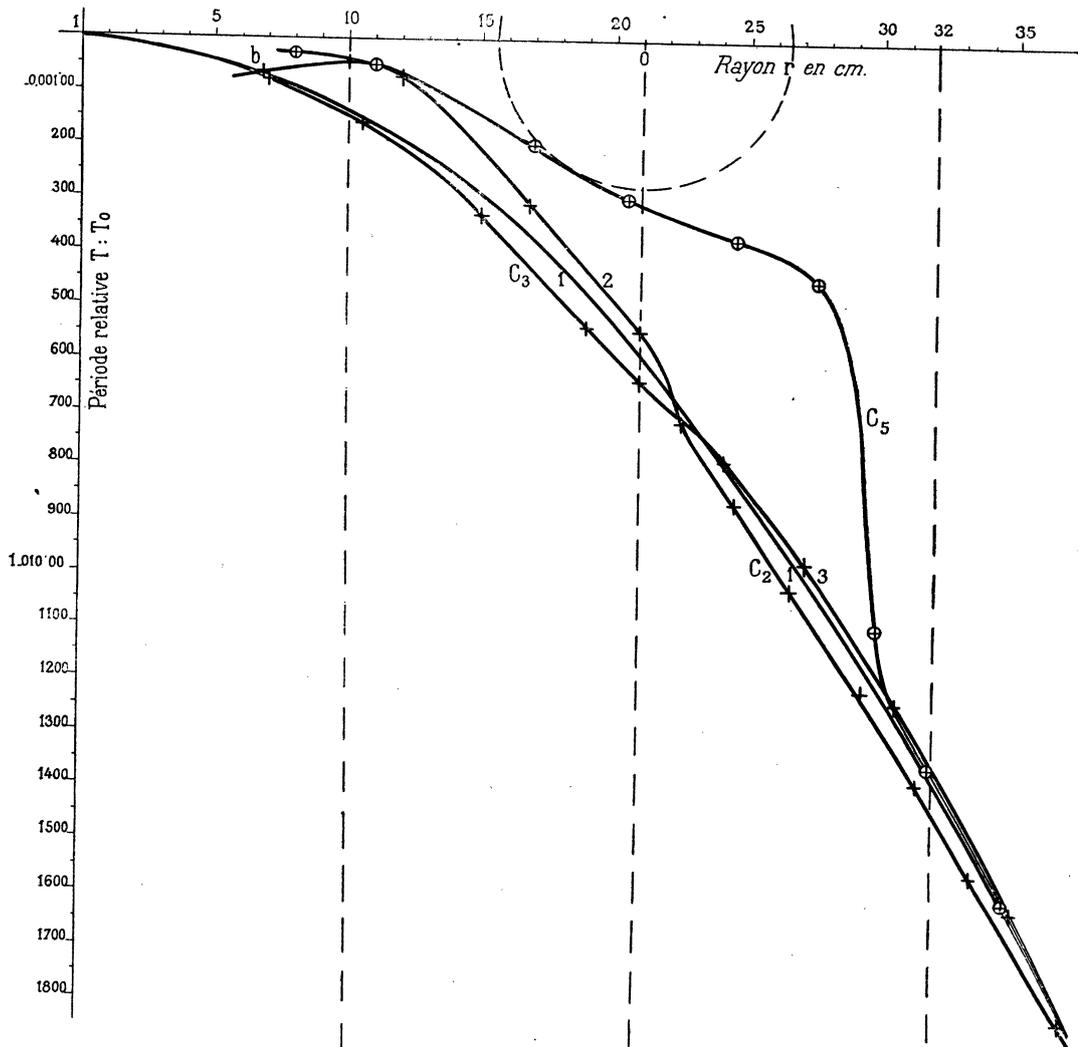


FIG. 44.

sant pour l'entretien : le pendule rejoint la verticale; si  $r$  croît,  $P_0$  est trop grand pour le simple entretien : le pendule s'écarte de la verticale, dépasse  $c_2$  et s'arrête au point  $r = 25,3$ , qui correspond au poids moteur  $P_0$ , sur la partie ascendante de la courbe  $c_2d_2$ .

La position  $r_0$  étant instable, la détermination de  $P_0$  est difficile. Le pendule étant lancé sur un parallèle de rayon supérieur à  $r_0$ , je freine le brin d'entrée du

manège pour amener la pointe en  $r_0$ . Dans le plateau je place  $P + \varepsilon$  : le rayon croît ; quand  $r$  dépasse  $r_0$ , j'enlève  $\varepsilon$  : le rayon décroît ; quand  $r$  devient inférieur à  $r_0$ , je replace  $\varepsilon$ , et ainsi de suite. Je stabilise le pendule d'autant mieux qu'il est plus lourd, qu' $\varepsilon$  est plus grand, que la courbe  $b_2 c_2$  est moins inclinée. Avec  $\varepsilon = 0,4$  gr., je maintiens facilement le pendule de masse  $M = 560$  gr., autour de  $r_0 = 10$  cm., à 2 mm. près. Comme valeur de  $P_0$ , je prends  $P + \varepsilon : 2$ .

La courbe  $C_2$  atteint son minimum  $c_2$  pour un rayon supérieur à  $r = 21$  cm. (sur  $\Delta''$ , la sphère est exactement derrière le disque). Pour vérifier que la résistance décroît encore au delà de  $r_0 = 21$  cm., je détermine le plus petit poids  $P_2$  qui donne au pendule une position d'équilibre stable au delà de  $r_2 = 22,5$ . En freinant le brin d'entrée, j'amène la pointe en  $r_1 = 21,5$  ; j'abandonne le pendule à lui-même : le rayon décroît. D'où résulte qu'en  $r_1$ , le poids  $P_1$  nécessaire à l'entretien est supérieur à  $P_2$  : le minimum  $c_2$  est au delà de 21 cm., ce qui s'explique par la forme de la queue derrière le disque (*fig. 13*).

Le minimum  $c_2$  est voisin de la courbe  $C_1$  : le disque n'augmente la résistance que de  $e_1 c_2$ . Au delà de  $c_2$ , la résistance croît rapidement pour devenir, en  $e_2$ , supérieure à la somme des résistances qu'éprouvent séparément le pendule et le disque ( $e_1 e_2 > a_1 a_2$ ).

3° L'expérience donne, non  $T : T_0$ , mais  $T : T_0'$ . Comme valeur de  $T_0$ , je prends la période à l'origine de la courbe théorique qui passe par le point  $r = 7,6$  cm., de la courbe 1 (§ 77). Le diamètre du fil de suspension étant petit ( $d = 0,3$  mm.),  $C_1$  se confond sensiblement avec la courbe théorique, non représentée sur la figure.

Pour  $r < 6,6$  cm.,  $C_2$  est au-dessous de  $C_1$  ( $\Delta T < 0$ ,  $R_r$  centripète) : le disque repousse la sphère, ce qui s'explique par la direction des filets qui s'écartent devant le disque et frappent le bord extérieur de la sphère. Pour  $r > 6,6$ ,  $R_r$  devient centrifuge : le disque attire la sphère.  $C_2$  passe par un maximum pour  $r = 10,5$  cm., point d'isochronisme inutilisable pour la régulation, parce que d'équilibre instable.  $C_2$  coupe de nouveau  $C_1$ , au delà de  $r = 21$  cm., pour  $r_2 = 22,2$  (rayon du minimum  $c_2$  de la résistance tangentielle, *fig. 43*). Pour  $r > 22,2$ , la courbe  $C_2$  passe au-dessous de  $C_1$  : le disque attire la sphère ; la force attractive passe par un maximum, puis décroît ; vraisemblablement, elle s'annule et devient répulsive pour  $r > 40$ , les filets déviés par le disque venant frapper le bord de la sphère comme pour  $r < 6,6$  cm.

La force est proportionnelle non pas à  $\Delta T$ , mais à  $r \Delta T$ . En deux points équidistants du centre O du disque :

$$\begin{array}{lll} \text{pour } r = 10 \text{ cm.}, & \Delta T = 90, & r \Delta T = 900, \\ \text{pour } r = 32 \text{ cm.}, & \Delta T = 60, & r \Delta T = 1920, \end{array}$$

la force est plus grande sur  $\Delta'$  que sur  $\Delta$ , ce qui résulte de la rotation.

En résumé, quand les corps sont éloignés, le disque repousse la sphère; quand la distance de leur bord atteint l'ordre de leur diamètre, le disque attire la sphère: celle-ci est en équilibre stable derrière le disque.

**81. Instabilité de l'entraîneur devant son entraîné.** — 1° Je conserve le dispositif précédent: je mesure  $P(r)$  et  $T(r)$ , quand:

c) le sens de rotation étant renversé, la sphère défile devant le disque ( $C_3$ , *fig. 43 et 44*);

d) la sphère défile entre deux disques, symétriques par rapport au méridien de la fourchette (courbe  $C_4$ );

e) les disques étant enlevés, je remplace celui qui était devant la sphère par une feuille de carton, percée d'un trou du diamètre de la sphère, le trou exactement à la place du disque (courbes  $C_5$ ). En coupant le bord du carton, je laisse une bande de 5,5 cm., autour de la surface battue par la projection de la sphère se déplaçant de  $r = 5$  à  $r = 32$  cm.

2° La courbe  $C_3$  (*fig. 43*), qui se confond avec  $C_2$  pour  $r$  petit, atteint son maximum après  $C_2$ . Pour le minimum, voisin de  $r = 23,2$ , la résistance est plus petite quand la sphère est derrière que lorsque elle est devant, ce qui prouve l'influence du fuselage arrière. Après le minimum,  $C_3$  croît plus vite que  $C_2$ , puis se confond évidemment avec  $C_2$ , quand  $r$  est assez grand pour que les résistances du disque et de la sphère s'additionnent.

La courbe  $C_4$  présente la même allure que  $C_2, C_3$ , ses extrema sont intermédiaires de ceux de  $C_2, C_3$ . Dans la translation, la résistance de deux disques circulaires distants d'un diamètre, est inférieure à celle d'un seul écran (Eiffel); dans la rotation, les ordonnées à l'origine de  $C_1, C_2, C_4$  (obtenues en retirant le pendule), sont:

Manège sans écran,	$P = 2,65$ gr.,	
Manège avec 1 écran,	$P = 7,75$ ,	$\Delta P = 5,10$ ,
Manège avec 2 écrans,	$P = 12,30$ ,	$\Delta P = 4,55$ ,

le second écran double presque la résistance du premier.

L'écran augmente le taux de variation de la résistance: quand  $r$  passe de 26 à 28 cm.,  $P$  augmente de 0,6 — 1,4 — 1,6 — 2,3 gr., suivant que le pendule est seul, devant l'écran, derrière l'écran, entre les écrans (Cf. § 63).

Dans l'expérience *e* l'écran augmente beaucoup le couple résistant; pour construire  $C_5$ , je retranche 60 gr. de tous les poids moteurs. Quand la sphère apparaît derrière le trou,  $C_5$  se relève, atteint son maximum pour un rayon très supérieur à 21 cm., puis décroît très rapidement jusqu'au-dessous de l'horizontale de départ: la sphère forme un fuselage derrière le bord extérieur de l'écran.

3° Comparons les courbes des périodes (*fig. 44*). Sur  $C_2$  et  $C_3$ , les forces sont

de signes contraires : la sphère est en équilibre instable devant l'écran.  $C_3$  coupe  $C_1$  au delà de  $r = 21$ , pour  $r = 23,2$  (rayon du minimum de la résistance tangentielle, *fig. 43*).

La courbe  $C_2$  reste au-dessus de  $C_1$ , quel que soit  $r$  : la force est constamment centrifuge, ce qui s'explique par le mouvement radial que l'écran imprime à l'air. Cette force croît jusqu'en  $r = 27$ , puis s'annule très vite quand la sphère débouche le trou, le jet d'air qui le traverse déviant les particules de leur mouvement centrifuge.

---

## CHAPITRE X

### Entraînement du pendule conique par un écran.

**82. Description.** — J'utilise le dispositif du § 80; je remplace la fourchette par un bras sur lequel je fixe le disque du diamètre de la sphère ( $d = 11$  cm.), dans une position telle qu'elle est exactement derrière lui, quand la pointe du pendule est en face de la graduation du bras  $r = 32$  cm.

Avec la main je lance le pendule sur un parallèle d'assez grand rayon pour que la sphère passe au delà du disque encore au repos. En disposant du poids moteur P, je donne au disque une vitesse angulaire  $\omega$  un peu inférieure à celle du pendule : dans ces conditions, il rattrape le disque, traverse son méridien, le dépasse sans troubler sa marche. Le mouvement du pendule s'amortissant, celui-ci se rapproche de la verticale; à chaque passage, se réduit la distance qui sépare les bords du disque et du pendule, lorsqu'il traverse son méridien. Quand cette distance devient inférieure à 2 cm., le disque ne se laisse plus dépasser : il accélère sa marche à l'approche du pendule et désormais le précède.

Après quelques instants, le pendule, cessant de se rapprocher de la verticale, prend une position d'équilibre stable définie par sa distance  $r$  à l'axe du manège et par l'angle  $\alpha$  des rayons passant par sa pointe et par le disque. D'où les deux problèmes techniques suivants : mesure de  $r$  et d' $\alpha$ .

#### **83. Mesure de $r$ et de la distance angulaire $\alpha$ de deux corps qui tournent.**

1° Sur la trajectoire de la pointe du pendule, je place un léger levier dont le bras vertical porte une bande horizontale de papier. La pointe encrée du pendule heurte cette bande, y marque une trace et renverse le levier. Je le relève après arrêt du pendule et je mesure  $r$  avec une règle.

2° Sur l'axe O du manège (*fig. 45*), je colle un miroir  $m$ , dont la normale N est dans le plan du disque D. A travers la lentille L et par réflexion sur  $m$ , la fente lumineuse F donne son image sur un cylindre horizontal, auquel est tangente en A la règle graduée R ( $AO = 120$  cm.). Sur cette règle l'observateur déplace un écran, percé de la fente F', derrière laquelle il place son œil. Au moment où le rayon réfléchi vient le frapper, l'œil, qui accommode sur le miroir, le voit brillant, traversé d'une raie sombre, si en ce moment le faisceau réfléchi rencontre la pointe P : comme elle tourne deux fois moins vite que lui, cette rencontre est certaine. L'observateur déplace la fente sur la règle, jusqu'à ce que la raie sombre bissecte le miroir : la lecture de la règle donne  $\text{tg } 2\alpha$ .

Pour faciliter la recherche de la pointe, j'utilise un large faisceau : le miroir, haut de 1 cm., mesure 5 cm. de large. Si le pendule est dans le faisceau incident quand le faisceau réfléchi passe sur  $F'$ , la pointe  $P'$  donne sur le miroir une raie sombre  $r'$ . Pour distinguer  $r'$  de la précédente raie  $r$ , je déplace  $F'$  vers la gauche afin d'observer le faisceau un instant plus tard : si  $P$  est dans le faisceau réfléchi, celui-ci tournant deux fois plus vite que  $P$ ,  $r$  est déplacé vers la droite; si  $P'$  est dans le faisceau incident,  $r'$  est déplacé vers la gauche. Pour  $\alpha$  petit, j'observe simultanément les deux raies : j'amène au milieu  $O$  du miroir celle qui se déplace en sens inverse de  $F'$ .

**84. Courbes de composante tangentielle nulle.** — 1° Quand le pendule est en équilibre derrière le disque, la résultante des actions de l'air sur la sphère a sa composante tangentielle  $R_t$  nulle (en négligeant l'action de l'air sur le fil de suspension); la composante radiale  $R_r$  n'est pas nécessairement nulle.

Le pendule est en équilibre stable par rapport à  $\alpha$ , parce que la résistance du disque dépend de la position du pendule derrière lui et croît avec  $\alpha$  : supposons une diminution des frottements solides du manège, le disque accélère,  $\alpha$  croît, la résistance du disque croît, sa vitesse diminue, le pendule le rattrape,  $\alpha$  décroît.

Le pendule en équilibre pour  $P_0 = 12,5$  gr. (courbe  $C_1$ , *fig. 46*, le centre du disque est en  $O_1$ ), j'ajoute  $\Delta P = 1$  gr. L'angle  $\alpha$  croît brusquement, sans que  $r$  varie : la pointe vient en  $a$ . Peu à peu,  $r$ ,  $\alpha$  décroissent, la pointe décrit lentement la courbe pointillée pour venir se fixer dans une nouvelle position d'équilibre stable  $P_1 = 13,5$ .

L'expérience montre que la vitesse angulaire  $\omega$  est plus petite en  $P_1$  qu'en  $P_0$  : le pendule traverse une région où  $R_t$  est opposé au mouvement. En effet, si  $R_t \equiv 0$ , les forces qui agissent sur le pendule sont dans le méridien; d'après la loi des aires, si  $r$  décroît,  $\omega$  croît, ce qui est contraire à l'expérience : donc  $R_t \neq 0$ ; puisque  $\omega$  décroît avec  $r$ , le travail de  $R_t$  est négatif.

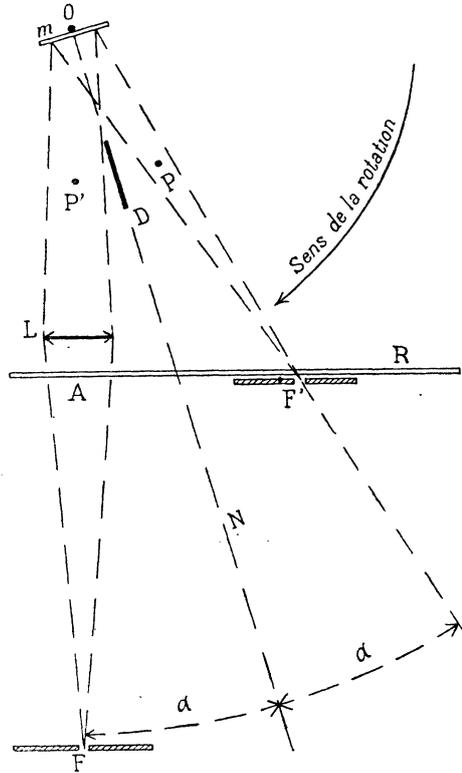


FIG. 45. — Mesure de la distance angulaire  $d$  de deux corps qui tournent.

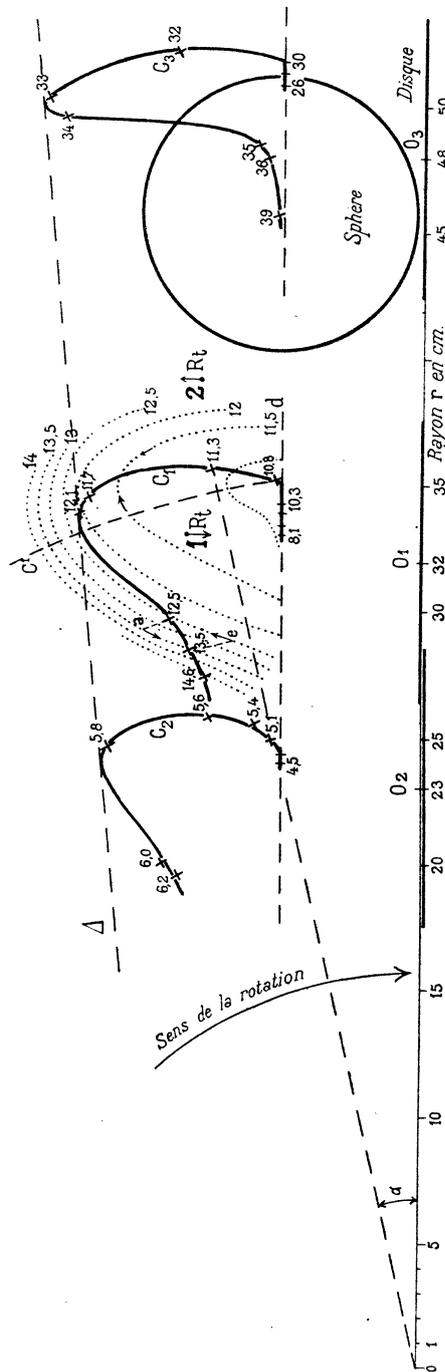


FIG. 46. — Entrainement du pendule par un disque.

La pointe en équilibre en  $P_1$ , j'enlève  $\Delta P$ . L'angle  $\alpha$  décroît brusquement, la pointe vient en  $e$ . Peu à peu,  $r$ ,  $\alpha$  croissent, la pointe décrit la courbe pointillée pour venir se fixer dans la première position d'équilibre stable  $P_0$ . De la croissance simultanée de  $r$ ,  $\omega$ , résulte que le pendule traverse une région où  $R_t$  a le sens du mouvement.

L'ensemble de ces positions d'équilibre forme la courbe  $C_1$ . A partir de  $P_0$ , décrivons  $C_1$  : quand  $P$  croît,  $r$  décroît; pour  $P = 14,7$  gr., le disque décolle (par accroissement de  $\alpha$ ). Pour atteindre le point  $P = 14,6$ , il faut augmenter la charge progressivement, sinon le disque décolle : par exemple, aux points  $P = 12,1$ ;  $13$ ;  $13,5$ , si la charge passe brusquement à  $14,5$  gr. Diminuons  $P$  : pour  $P = 10,3$ , la sphère frotte le disque, mais l'équilibre est encore stable; au-dessous de  $P = 8,1$ , le pendule se décroche (par décroissance de  $r$ ).

2° Pour étudier la déformation de  $C_1$ , lorsque varie la distance de l'axe de rotation au disque, je le place dans une position telle que la sphère soit exactement derrière lui, quand la pointe du pendule est en face de la graduation du bras  $r = 23$ , puis  $r = 48$  cm. (en réalité, le centre du disque figuré en  $O_1, O_2, O_3$  est à la distance de l'axe non pas  $r$ , mais  $r' = rAM$ ;  $AF = 1,16 r$ ; 136, fig. 32).

Quand le disque s'écarte de l'axe, la courbe  $C_1$  passe de la forme d'un

arc de cercle à celle d'une ellipse aplatie; le point de poids moteur maximum (au delà duquel l'écran décolle) se rapproche du disque. Comme première approxi-

mation, la distance maximum du pendule au disque croît linéairement en fonction du rayon du manège (droite  $\Delta$ ).

3° Je replace le disque en  $r = 32$  cm.; pour diverses valeurs de  $P$ , j'attends que la pointe soit en équilibre sur  $C_1$ , puis je mesure  $r$  et  $T$ .

Le poids moteur  $P(P[r]$ , courbe pointillée, *fig. 47*) croît avec  $r$  plus vite quand  $\alpha$  reste négligeable ( $P$  varie de 8,1 à 10,3), que lorsque  $\alpha$  devient notable ( $P \geq 10,8$ ). Quand  $P$  croît au delà de 11,7, le rayon décroît.

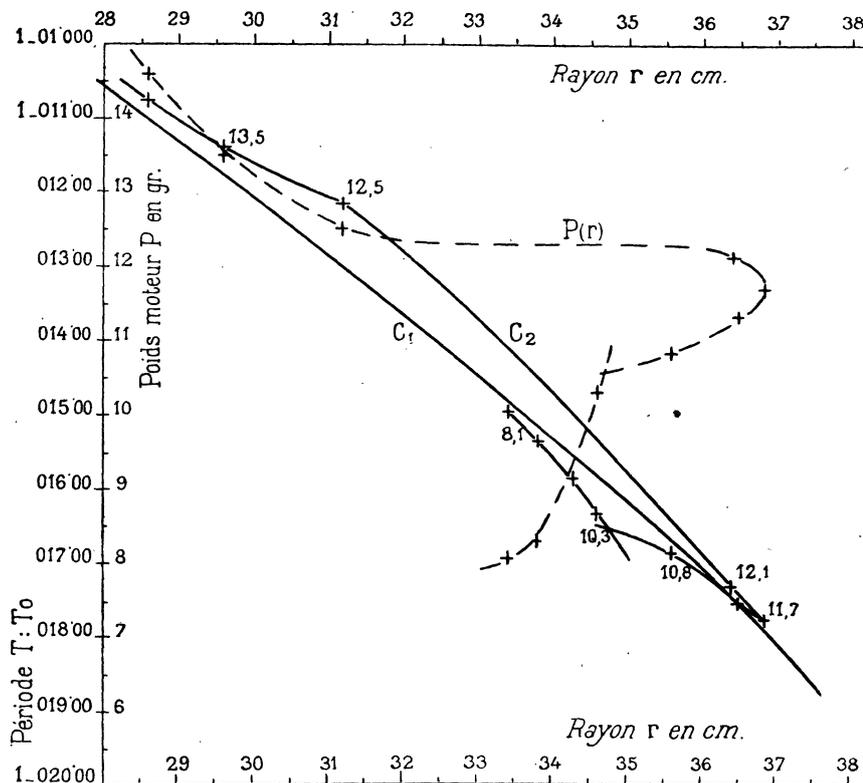


FIG. 47.

La courbe  $T(r)$ , ( $C_2$ , *fig. 47*), est au-dessous de la courbe théorique  $C_1$  (définie § 80), pour  $P < 11,3$ ; au-dessus, pour  $P > 12,5$ : le disque attire la sphère, comme dans le cas de la pointe guidée par la fourchette (courbes  $C_1$ ,  $C_2$ , *fig. 44*). Pour  $P$  voisin de 11,7, le pendule est dans la queue, loin du disque (*fig. 46*): la force est centrifuge.

Par la méthode du § 28, je détermine la forme des filets d'air, quand la sphère est près ou loin du disque (*fig. 19* et 20).

**85. Courbes d'égal charge.** — Sur chaque courbe pointillée  $a, e$  (*fig. 46*), le

frottement du manège et la résistance de l'air sur le disque donnent un couple résistant invariable, puisqu'il est équilibré par la même charge motrice  $P$ .

Quand j'augmente  $P$ , la masse du manège et du disque étant faible devant les forces en jeu, l'équilibre par rapport à  $z$  est vite atteint; la masse du pendule est assez grande ( $M = 560$  gr.), pour que les variations de  $r$  soient lentes: le pendule met plusieurs minutes pour rejoindre  $C_1$ .

J'utilise cette propriété pour déterminer point par point les courbes d'égale charge  $P_0$  (courbes pointillées). La pointe étant fixée sur  $C_1$  (en  $P = 10,8$ , par exemple), je porte brusquement la charge à  $P_0$ , la pointe décrit le cercle  $C'$  et se fixe sur la courbe  $P_0$ : la variation de  $r$  est négligeable pendant 2 à 3 tours, durant lesquels je mesure  $z$ .

Le pendule est en équilibre stable par rapport à  $z$ , sur  $P_0$  comme sur  $C_1$ , parce que la résistance du disque dépend d' $z$  et croît avec  $z$ . La stabilité d' $z$ , mesurée par  $\Delta P : \Delta z$ , est en raison inverse de la distance, comptée sur une parallèle à  $C'$ , des courbes d'égale charge, tracées de 0,5 en 0,5 gr. De la disposition de ces courbes résulte qu' $z$  est moins stable lorsque  $P$  varie de 10 à 12 gr., que lorsque  $P$  varie de 12,5 à 14,6 gr.: pour ces positions la raie sombre reste fixe au centre du miroir,  $z$  est défini à 1 : 100 près.

La courbe  $C_1$  se confond avec un fragment de la courbe  $P_0 = 12,3$ : pour cette valeur de  $P$ , la position de la pointe est indéterminée sur ce fragment; la moindre modification des frottements déplace notablement la pointe, quoique les variations de  $r$ ,  $z$  restent lentes.

La forme des courbes d'égale charge explique la possibilité de raccrocher le pendule. Décrivons  $C_1$  par charge décroissante; pour  $P = 8,0$ , le pendule se décroche et revient sur la verticale. Quand  $r = 31$  cm., si je place 11,5 gr. dans le plateau, le pendule s'écarte de l'écran, décrit la courbe  $P_0 = 11,5$  ( $r$  croît), et se fixe à l'intersection de cette courbe avec  $C_1$ . Le pendule est stable sur  $C_1$ , parce qu'il décrit les courbes d'égale charge dans le sens qui converge vers  $C_1$ .

**86. Bord de la fourchette touché par la pointe.** — La courbe  $C_1$ , sur laquelle  $R_t = 0$ , divise le plan en deux régions: dans la première, entre le disque et le pendule,  $R_t$  a le sens du mouvement; dans la seconde, le sens inverse. A 1 cm. derrière le disque (la pointe est alors à 1 cm. derrière la droite pointillée  $d$ ), rétablissons la fourchette: la pointe doit toucher successivement ses deux bords.

Pour vérifier ce résultat, je forme la fourchette par deux fils métalliques, isolés l'un de l'autre et réunis chacun à l'axe du manège par une petite lampe électrique. Le circuit d'une pile se ferme par le fil de suspension, la pointe, le bord touché antérieur ou postérieur, la lampe correspondante  $L_a$  ou  $L_p$ , l'axe du manège et la crapaudine.

Je place la pointe dans la région 2; je diminue progressivement  $P$ ; j'observe les lampes :

a) quand le pendule est sur la courbe  $P_0 = 11,5$ , avec  $P = 11,5$  gr. dans le plateau, la pointe tend à se déplacer sur  $P_0$ , vers l'arrière et touche le bord postérieur : la lampe  $L_p$  s'allume. L'équilibre du pendule est possible parce que son déplacement sur  $P_0$ , ayant le sens de  $R_t$ , cette composante est équilibrée par la réaction du bord de la fourchette. Quand je diminue  $P$ ,  $r$  décroît, la lampe  $L_p$  reste allumée;

b) lorsque la pointe traverse  $C_1$ , les lampes s'allument alternativement : la fourchette ne joue aucun rôle;

c) quand la pointe pénètre dans la région 1, les forces changent de sens :  $R_t$  est dans le sens du mouvement; près de  $C_1$ , les courbes  $P_0$  sont décrites vers l'avant; l'équilibre est stable parce que la réaction du bord antérieur équilibre  $R_t$ ; la lampe  $L_a$  reste seule allumée;

d) quand je diminue encore  $P$ , le pendule se décroche et revient sur la verticale, tandis que  $L_a$  reste allumée;

e) je ramène la pointe dans la région 1, sur la courbe  $P_0 = 12,5$ , avec 12,5 gr. dans le plateau. La pointe tend à se déplacer sur  $P_0$  vers l'arrière : la lampe  $L_p$  s'allume. La réaction du bord postérieur, dans le sens du mouvement comme la composante  $R_t$ , ne peut l'équilibrer :  $r$  croît, tandis que  $L_p$  reste allumée; la pointe se fixe au second point d'intersection de la fourchette avec  $P_0$ .

### 87. Entraînement par un disque de diamètre différent de celui de la sphère. —

1° Je conserve la sphère de  $d = 11$  cm.; je diminue le diamètre  $d'$  du disque.

Pour  $d' = 9$  cm., la courbe  $C_1$  est plus rapprochée du disque que sur la fig. 46; dès qu'il frotte le disque, le pendule se décroche; pour l'amener d'un bout à l'autre de  $C_1$ , la variation  $\Delta P$  du poids moteur est de 3 gr., contre 6,5 gr. précédemment.

Pour  $d' = 8$  cm., l'entretien n'est plus possible; la courbe  $C_1$  est si rapprochée du disque, qu'à la moindre variation des frottements solides, la sphère frotte le disque : le pendule se décroche.

Je remplace le disque de carton par le disque de tulle (§ 21) : le pendule n'est plus entraîné, ce qui s'explique par l'absence de queue derrière le disque.

2° Je conserve le disque de  $d' = 11$  cm.; je diminue le diamètre  $d$  de la sphère.

Pour  $d = 8$  et 3,5 cm., la courbe  $C_1$  a la forme de la fig. 46, mais le pendule se décroche dès qu'il touche le disque. La variation  $\Delta P$  décroît avec  $d$  : elle est de 0,8 gr., pour  $d = 3,5$  cm.

Pour  $d = 2,5$  cm., l'entretien n'est plus possible à cause de l'instabilité  $d\alpha$  : a variation  $\Delta P$  est si petite, qu'au moindre changement des frottements, l'écran décolle ou le pendule touche le disque et se décroche.

3° Je remplace la sphère par un cylindre de  $d = 8$  cm.,  $h = 16$  cm., puis par

un autre de diamètre moitié, suspendu par le bout de l'axe ou par le milieu d'une génératrice : l'entretien est impossible.

Une feuille de papier à cigarette, une bulle de savon ne sont pas entraînés.

**88. Entraînement du pendule par un tourbillon.** — 1° Dans le plan horizontal du moulinet (*fig. 48*, position 1,  $AB = 12,5$  cm.,  $BC = 10$  cm.), je lance la sphère de celluloïd de  $d = 10$  cm., sur un parallèle de  $r = 30$  cm., dans le sens direct (sens du moulinet). La distance  $x$ , d'abord décroissante, se fixe autour de 5 cm. : le tourbillon entraîne le pendule.

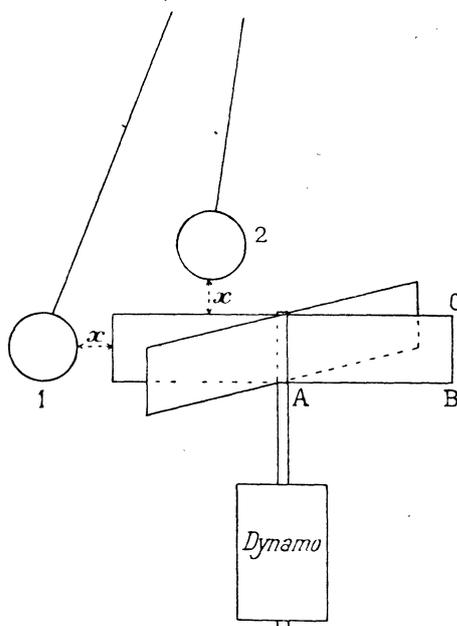


FIG. 48. — Pendule entraîné par un tourbillon.

La trajectoire ne reste pas circulaire. Comme les variations de vitesse angulaire ne sont plus amorties par l'inertie de la fourchette (§ 65), et que l'action tangentielle du moulinet croît très vite quand  $x$  décroît, la vitesse tangentielle augmente à chaque minimum d'amplitude : l'ellipse s'aplatit ; la sphère heurte le moulinet après une vingtaine de périodes.

Avant ce choc je mesure grossièrement la période. Elle passe de  $2^{\prime\prime},20$ , quand la fréquence  $N$  du moulinet est de 670 tours par minute, à  $2^{\prime\prime},40$ , quand j'enlève le moulinet :  $\Delta T = -0^{\prime\prime},20$ , le moulinet attire la sphère.

2° Quand le pendule est au repos sur le moulinet (position 2) et que je lance le courant dans la dynamo, la sphère tourne *en sens inverse* du moulinet. Lancée dans

le sens direct, elle rejoint la verticale, s'arrête, repart en sens inverse et se fixe sur un parallèle de rayon  $r$  bien défini.

Quand la vitesse du moulinet augmente,  $T$  décroît,  $r$  croît. Pour  $x = 1$  cm. :

$N = 0$	440	660	850
$T = 2''{,}27$	$1''{,}84$	$1''{,}61$	$1''{,}43$
$r =$	7 cm.		9 cm.

Quand je diminue  $x$  en élevant le moulinet,  $T$  reste sensiblement invariable,  $r$  croît. Pour  $N = 850$  :

$x = 3,5$ cm.	3,0	2,4	0,8	0,4,
$r = 0$ cm.	2	4	10	Ellipses;

pour  $x < 0,8$  cm., quand la sphère approche du bord BC du moulinet, violemment repoussée vers le centre, elle se met à décrire des ellipses.

3° Pour vérifier que près de l'axe la rotation de l'air est de sens inverse, je remplace la sphère par un rectangle de carton. Pour une hauteur de 10 cm., une largeur  $d = 25$  cm., le rectangle tourne lentement et alternativement dans les deux sens, mais la rotation de sens inverse l'emporte, comme le prouve la torsion du fil de suspension; lorsque  $d$  diminue, les changements de sens deviennent plus rares; la rotation de sens inverse est unique pour  $d \leq 5$  cm., rapide pour  $d = 3$  cm.

Les phénomènes sont les mêmes quand je diminue la hauteur du rectangle; j'entretiens une paille d'autant mieux qu'elle est plus courte. Une feuille de papier à cigarette ne prend pas un mouvement défini.

Weyher<sup>(1)</sup> n'a pas observé la rotation de sens inverse: un moulinet coaxial au premier, de même diamètre et de hauteur inférieure, étant entraîné dans le sens direct (et attiré), Weyher dessine les filets voisins de l'axe dans le sens direct.

---

(1) Weyher, *Tourbillons et propriétés des aimants*, Gauthier-Villars, 1889 et 1899.