

NICOLAS KRYLOFF

**Sur différents procédés d'intégration approchée en
physique mathématique**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3^e série, tome 19 (1927), p. 167-199

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1927_3_19_167_0

© Université Paul Sabatier, 1927, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR DIFFÉRENTS PROCÉDÉS D'INTÉGRATION APPROCHÉE

EN PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Par NICOLAS KRYLOFF

Membre de l'Académie des Sciences d'Ukraine (à Kieff).

CHAPITRE II

Sur la solution approchée des équations intégrales linéaires.

- § 1. Application de l'algorithme variationnel à l'équation intégrale linéaire non homogène du type de Fredholm. Étude de la convergence du procédé et appréciation de l'ordre de l'erreur commise en s'arrêtant à la n^{me} approximation.
- § 2. Étude du cas particulier, où le développement procède suivant les fonctions fondamentales correspondant au problème.
- § 3. Application de la méthode des moindres carrés aux équations intégrales. Convergence de la méthode et étude de l'ordre de petitesse de l'erreur.
- § 4. Étude de quelques cas plus généraux.
- § 5. Application aux équations intégrales de seconde espèce d'une méthode générale comprenant comme cas particuliers celle de l'algorithme variationnel (méthode de W. Ritz), ainsi que celle des moindres carrés. Étude de la convergence du procédé ainsi que de l'ordre de l'erreur commise.
- § 6. La méthode des déterminants infinis; son application à la recherche des valeurs singulières du paramètre et des fonctions fondamentales correspondant à l'équation intégrale considérée. Étude du cas général.
- § 7. Retour aux équations différentielles; mêmes problèmes traités pour elles à l'aide de la méthode des déterminants infinis.
- § 8. Sur les équations intégrales de la première espèce.

§ 1. Les méthodes exposées au chapitre premier de ce travail se prêtent à la recherche des solutions approchées des équations intégrales linéaires non homogènes du type de Fredholm, c'est-à-dire des équations intégrales, dites de seconde espèce

$$(64) \quad \varphi(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy = f(x).$$

Le problème posé a une connexion très étroite avec celui qui a fait l'objet des recherches précédentes, car la recherche des solutions des équations différentielles, certaines conditions frontières étant données, se ramène, comme on sait, par l'introduction de la notion des fonctions de Green, à la considération des équations intégrales du susdit type (64).

On aurait pu évidemment appliquer les méthodes du Chapitre I directement à l'équation différentielle donnée; or la voie qui semble détournée au premier abord et qui consiste dans l'étude du problème posé au moyen des équations intégrales présente des avantages incontestables vu que, de cette manière, se trouve étendu le champ d'application des méthodes susdites aux équations intégrales du type (64), qui ne proviennent pas dans le sens sus-indiqué d'équations différentielles. D'autre part, en utilisant convenablement la loi de réciprocité de Maxwell, les théorèmes de réciprocité de Betti-Boussinesq, etc., on peut former directement, dans bien des cas, l'équation intégrale d'après les données du problème sans passer préalablement par l'équation différentielle, et cette manière de procéder, présentant ses avantages sous bien des rapports, donne au problème de la résolution approchée des équations intégrales du type (64) une importance toute particulière.

La solution de (64) est donnée par E. Schmidt sous la forme d'une série procédant suivant les fonctions fondamentales $\varphi_i(x)$ relatives au noyau $K(x, y)$:

$$(65) \quad \varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \int_a^b f(y) \varphi_i(y) dy}{\lambda_i - \lambda}$$

et présente, remarquons ceci en passant, une simple conséquence de la méthode fondamentale de la Physique mathématique. Or, la solution sous la forme (65) ne se prête pas évidemment, dans le cas général, si facilement au calcul que celle, exposée plus loin, où le développement de la fonction cherchée procède suivant les fonctions aisément calculables, comme par exemple les fonctions trigonométriques.

Partons de l'équation intégrale (64) réécrite sous la forme suivante :

$$u(x) + \int_0^1 \lambda(x, X) U(X) dX - f(x) = \int_0^1 [u(x) + \lambda(x, X) U(X) - f(x)] dX = 0$$

et considérons-la comme l'équation d'Euler correspondant au problème de rendre « stationnaire » l'intégrale double suivante :

$$(66) \quad I = \int_0^1 \int_0^1 \{ u^2(x) + 2\lambda(x, X) u(x) U(X) + U^2(X) - 2f(x) u(x) - 2F(X) U(X) \} dx dX.$$

Conformément à l'idée générale des méthodes basées sur le principe de minimum, substituons, dans (66), au lieu de $u(x)$, $U(X)$, respectivement :

$$(67) \quad u_m(x) = \sum_{i=1}^m a_i^{(m)} \varphi_i(x); \quad U_m(X) = \sum_{i=1}^m a_i^{(m)} \Phi_i(X),$$

où $[\varphi_i(x)]_{i=1,2,\dots,\infty}$ est un système orthogonal fermé des fonctions aisément calculables pouvant servir à la représentation de la solution de l'équation intégrale donnée d'après la théorie bien connue du développement des fonctions dites « arbitraires » (par exemple les polynomes trigonométriques).

La détermination des coefficients inconnus $a_i^{(m)}$ se fait d'après le système des équations linéaires

$$(68) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial I_m}{\partial a_n} = \int_0^1 \int_0^1 \{ u_m \varphi_n + \lambda(x, X) [u_m \Phi_n + \varphi_n U_m] + U_m \Phi_n - f \varphi_n - F \Phi_n \} dx dX = 0; \quad n \leq m$$

où I_m est le résultat de la substitution de (67) dans (66). Or si l'on fait la supposition que le noyau $\lambda(x, X)$ est par exemple défini positif, d'après la terminologie de la théorie des équations intégrales, la partie quadratique de I_m est une forme quadratique définie positive et on voit que les équations linéaires (68) possèdent un système de solutions uniquement déterminé, si on démontre que I_m possède une borne inférieure.

Pour démontrer l'existence de la borne inférieure de I on peut procéder de bien des manières. La plus simple consiste à remarquer qu'au point de vue du problème de minimum l'intégrale I peut être réécrite sous la forme :

$$\int_0^1 \int_0^1 \{ [u(x) - f(x)]^2 + [U(X) - F(X)]^2 + 2\lambda(x, X) u(x) U(X) \} dx dX,$$

d'où la conclusion voulue, étant donné l'hypothèse faite à propos de $\lambda(x, X)$.

Pour établir la convergence du procédé on peut suivre aussi bien des voies; l'une des plus directes sera par exemple la suivante : on remarque que

$$(69) \quad I(u) - I(u_n) = [I(u) - I(U_n)] + [I(U_n) - I(u_n)],$$

où U_n sont par exemple les polynomes trigonométriques d'ordre n formés à l'aide des procédés de sommation connus (par exemple par le procédé de M. L. Féjèr ou par celui de M. D. Jackson) pour la solution $u(x)$, toujours existante, de l'équation intégrale donnée. Il est aisé de voir, que

$$|I(u) - I(U_n)| < \varepsilon_n,$$

où $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, même si $u(x)$ est continue⁽¹⁾, et de plus l'ordre de la petitesse de ε_n peut être fixé en correspondance avec les hypothèses restrictives imposées à $\lambda(x, X)$ et $f(x)$; par exemple si la condition de Lipschitz entre en jeu cet ordre sera $1 : n$.

En utilisant à présent le développement taylorien procédant suivant les puissances de $(u - u_n)$ et en remarquant que d'une part la solution $u(x)$ de l'équation intégrale donnée fait prendre à l'intégrale $I(u)$ sa valeur minimum comme il est facile de le prouver⁽²⁾ et que d'autre part d'après la définition même de minimum :

$$I(U_n) - I(u_n) \geq 0,$$

on tire de (6g) :

$$\int_0^1 \int_0^1 [u - u_n]^2 dx dX + \int_0^1 \int_0^1 \lambda(x, X) [u - u_n] [U - U_n] dx dX < \varepsilon_n$$

d'où au moyen de l'inégalité de Schwarz on obtient, vu la supposition faite à propos du noyau $\lambda(x, X)$:

$$\int_0^1 [u - u_n] dx < \sqrt{\varepsilon_n}.$$

C'est dire que $\int_0^1 u_n dx$ tend pour $n \rightarrow \infty$ vers une fonction dont la dérivée vérifie l'équation intégrale donnée.

Or, il ne serait pas dénué d'intérêt de démontrer que u_m pour $m \rightarrow \infty$ converge uniformément vers u dans tout intervalle compris dans $(0, 1)$, c'est-à-dire vers la solution de l'équation intégrale donnée.

Pour cela il suffit de remarquer que les conditions de minimum peuvent revêtir, comme il est facile de s'en assurer, la forme suivante :

$$\int_0^1 \varphi_n \left[u_m + \int_0^1 \lambda(x, X) U_m(X) dX - f(x) \right] dx = 0, \quad n \leq m$$

et que par conséquent on a immédiatement :

$$\int_0^1 \varphi_n \left\{ (u - u_m) + \int_0^1 \lambda(x, X) [U - U_m] dX \right\} dx = 0, \quad \text{si } n \leq m,$$

(1) Les conditions restrictives imposées à la solution $u(x)$ de l'équation intégrale donnée sont en correspondance avec celles qui sont imposées aux données du problème, c'est-à-dire à $\lambda(x, X)$ et $f(x)$.

(2) Il suffit pour cela de considérer la différence $I(v) - I(u)$, où v est quelconque et u vérifie l'équation intégrale pour s'assurer que cette différence est sûrement positive, si par exemple $\lambda(x, X)$ est définie positive.

le zéro du second membre devant être remplacé par

$$-\int_0^1 \varphi_n \left[\int_0^1 \lambda(x, X) U_m dX - f \right] dx, \quad \text{si } n > m.$$

De là on tire :

$$(70) \quad (u - u_m) + \int_0^1 \lambda(x, X) [U - U_m] dX \\ = - \sum_{m+1}^{\infty} \varphi_n \int_0^1 \varphi_n \left[\int_0^1 \lambda(x, X) U_m dX - f \right] dx.$$

Or

$$\sum_{m+1}^{\infty} \varphi_n \int_0^1 f \varphi_n dx = f - [f]_m = R_m,$$

où R_m est le reste du développement de f en série de φ_i . Par conséquent l'ordre de petitesse de R_m peut être fixé en correspondance avec les conditions restrictives imposées à $f(x)$.

D'autre part :

$$\sum_{m+1}^{\infty} \varphi_n(x) \int_0^1 U_m(X) \left[\int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_n(x) dx \right] dX \\ = \int_0^1 U_m(X) \left[\sum_{m+1}^{\infty} \varphi_n(x) \int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_n(x) dx \right] dX \\ = \int_0^1 [\lambda(x, X) - \lambda_m(x, X)] U_m(X) dX,$$

où $\lambda_m(x, X)$ est la somme de Fourier d'ordre m de $\lambda(x, X)$, de sorte que l'ordre de petitesse de $[\lambda(x, X) - \lambda_m(x, X)]$ peut être fixé en correspondance avec les conditions restrictives imposées à $\lambda(x, X)$ et cet ordre sera par exemple $1:n$, si $\lambda(x, X)$ vérifie la condition de Lipschitz par rapport à x et cela uniformément par rapport à X . Cela étant il suffit de remarquer que

$$\int_0^1 [U_m(X)]^2 dX$$

est bornée pour s'assurer, d'après (70) et moyennant l'inégalité de Bouniakowsky-Schwarz, que u_n tend vers u pour $n \rightarrow \infty$ et que de plus l'ordre de petitesse de

$[u - u_n]$ peut être fixé en correspondance avec les conditions restrictives imposées aux données du problème, c'est-à-dire à $f(x)$ et $\lambda(x, X)$.

Dans ce qui précède, le problème a été traité au point de vue de la recherche de la solution approchée, l'existence de la solution étant supposée préalablement démontrée; or en prenant en considération les différences $[u_{m+n} - u_m]$ au lieu de $[u - u_m]$ on peut, par des changements appropriés de l'analyse précédente, arriver à la démonstration de l'existence de la solution de (64) pour les valeurs du paramètre λ n'influant pas sur la condition relative à la positivité de la forme quadratique qu'on considère au cours de la démonstration.

§ 2. Conformément au résultat obtenu par l'auteur pour les équations différentielles et mentionné dans la Préface de ce Mémoire, la question, par analogie, se pose d'examiner le cas particulier, où les fonctions suivant lesquelles procède le développement seront les fonctions $\psi_i(x)$, dites « fondamentales » (ou « singulières ») de l'équation intégrale⁽¹⁾

$$u(x) + k \int_0^1 \lambda(x, X) u(X) dX = f(x),$$

c'est-à-dire les fonctions vérifiant l'équation intégrale homogène :

$$\psi_i(x) = k_i \int_0^1 \lambda(x, X) \psi_i(X) dX,$$

où k_i sont les valeurs, dites « singulières » du paramètre k .

Pour comparer la solution ainsi obtenue avec celle, donnée dans la théorie des équations intégrales

$$(71) \quad u(x) = f(x) - k \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i \psi_i(x)}{k_i + k}, \quad \text{où} \quad c_i = \int_0^1 f(x) \psi_i(x) dx,$$

il n'y a qu'à substituer au lieu de $u(x)$ dans l'intégrale (66) l'expression suivante

$$u(x) = f(x) + \sum_n^i a_i \psi_i(x),$$

ce qui donne d'après le calcul facile pour la détermination des coefficients inconnus a_i ,

(1) Il n'y a pas à craindre la confusion; on revient donc ici à la notation habituelle $u(X)$ au lieu de $U(X)$.

au moyen des conditions usuelles de minimum $\frac{\delta I}{\delta a_i} = 0$, les mêmes valeurs :

$$a_i = -\frac{kc_i}{k + k_i},$$

que celles qu'on peut tirer de la formule (71). Ce résultat permet de conclure que la convergence du procédé de W. Ritz se trouve établie dans ce cas particulier, si l'on suppose préalablement démontrée la formule (71) au moyen de la théorie des équations intégrales.

Inversement le même raisonnement donne la démonstration de la formule (71) d'une importance toute particulière dans la théorie des équations intégrales, par la simple application de la méthode de W. Ritz au cas actuel. Déjà, d'après le § 1, on s'assure que dans le cas où le noyau $\lambda(x, X)$ est défini, la formule (71) se trouve établie pour les valeurs de k , telles que

$$k \int_0^1 \int_0^1 \lambda(x, X) v(x) v(X) dx dX > 0,$$

pour toute fonction $v(x)$ de carré intégrable.

§ 3. Abordons à présent la méthode des moindres carrés déjà appliquée, au Chapitre premier, aux équations intégrales ainsi qu'aux équations différentielles de la Physique mathématique.

Le problème revient à rendre minimum le carré moyen de l'erreur, c'est-à-dire :

$$(72) \quad \int_0^1 [L(u) - f(x)]^2 dx,$$

où

$$L(u) = u(x) + k \int_0^1 \lambda(x, X) u(X) dX,$$

les suites minimantes

$$u_m = \sum_{i=1}^m a_i^{(m)} \varphi_i(x)$$

procédant comme d'ordinaire suivant les fonctions aisément calculables $\varphi_i(x)$, (par exemple les polynômes trigonométriques) formant un système orthogonal et normé, tel celui que l'on utilise en Physique mathématique pour la représentation des fonctions dites « arbitraires » d'une variable réelle. On pourrait aussi, bien entendu, utiliser les fonctions trigonométriques, si $\lambda(x, X)$ et $f(x)$ vérifient les conditions supplémentaires (périodicité).

Les conditions de minimum peuvent revêtir, comme il est facile de s'en assurer, la forme suivante :

$$(73) \quad \int_0^1 [L(u - u_m)] L(\varphi_n) dx = 0; \quad n \leq m,$$

d'où, par un raisonnement déjà employé dans le § 2 du chapitre précédent, l'on tire aisément :

$$(74) \quad \int_0^1 [L(u - u_m)]^2 dx = \int_0^1 [L(u - u_m)] [L(u - U_m)] dx,$$

où

$$U_m(x) = \sum_{i=1}^m A_i^{(m)} \varphi_i(x)$$

est la somme d'ordre m formée, pour la solution $u(x)$ de l'équation intégrale donnée, à l'aide d'un procédé quelconque de sommation des séries (par exemple le procédé de M. L. Fejér, ou celui de M. Jackson, ou de M. De la Vallée-Poussin) de sorte que :

$$|L(u - U_m)| < \varepsilon_m,$$

où $\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m = 0$; de plus l'ordre de ε_m peut être fixé en correspondance avec les conditions restrictives imposées aux $f(x)$ et $\lambda(x, X)$.

Cela étant on tire aisément de (74) au moyen de l'inégalité de Schwarz :

$$(75) \quad \int_0^1 [L(u - u_m)]^2 dx < \varepsilon_m.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [L(u - u_m)] (u - u_m) dx \\ &= \int_0^1 (u - u_m)^2 dx + k \int_0^1 \int_0^1 \lambda(x, X) [u(X) - u_m(X)] [u(x) - u_m(x)] dx dX; \end{aligned}$$

donc, si le noyau $\lambda(x, X)$ est défini et si le signe de k est tel que

$$(76) \quad k \int_0^1 \int_0^1 \lambda(x, X) [u(X) - u_m(X)] [u(x) - u_m(x)] dx dX > 0,$$

on tire de (75) et de (76)

$$\int_0^1 (u - u_m)^2 dx < \int_0^1 [L(u - u_m)]^2 dx < \varepsilon_m.$$

D'ici au moyen de l'inégalité de Bouniakowsky-Schwarz on conclut immédiatement, que $\int_0^x u_m dx$ tend, pour $m \rightarrow \infty$, vers une fonction dont la dérivée vérifie l'équation intégrale donnée.

Pour s'assurer, que les $u_m(x)$ eux-mêmes tendent pour $m \rightarrow \infty$ vers $u(x)$, il suffit de reprendre les conditions de minimum sous la forme :

$$\int_0^1 \left[\varphi_n(x) + k \int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_n(X) dX \right] \left[u_m(x) + k \int_0^1 \lambda(x, X) u_m(X) dX - f(x) \right] dx = 0;$$

$$n \leq m$$

d'où l'on tire :

$$(77) \quad \sum_1^m \varphi_n(x) \int_0^1 \varphi_n(x) u_m(x) dx + k \sum_1^m \varphi_n(x) \int_0^1 u_m(x) \left[\int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_n(X) dX \right] dx$$

$$+ k \sum_1^m \varphi_n(x) \int_0^1 \varphi_n(x) \left[\int_0^1 \lambda(x, X) u_m(X) dX \right] dx - [f]_m$$

$$- k \left[\int_0^1 \lambda(x, X) f(X) dX \right]_m$$

$$+ k^2 \sum_1^m \varphi_n(x) \int_0^1 \left[\int_0^1 \lambda(z, X) \varphi_n(X) dX \right] \left[\int_0^1 \lambda(z, X) u_m(X) dX \right] dz$$

$$= u_m(x) + k \int_0^1 [\lambda(x, X)]_m u_m(X) dX + k \int_0^1 [\lambda(\bar{X}, \bar{x})]_m u_m(X) dX - [f]_m$$

$$- k \int_0^1 [\lambda(\bar{X}, \bar{x})]_m f(X) dX + k^2 \int_0^1 \int_0^1 [\lambda(\bar{z}, \bar{x})]_m \lambda(z, X) u_m(X) dz dX = 0,$$

où par $[F(x, X)]_m$, $[F(\bar{x}, \bar{X})]_m$ on dénote les sommes de Fourier d'ordre m de $F(x, X)$ respectivement par rapport à x et X . D'autre part, on a toujours, quel que soit n :

$$\int_0^1 \left[\varphi_n(x) + k \int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_n(X) dX \right] \left[u(x) + k \int_0^1 \lambda(x, X) u(X) dX - f(x) \right] dx = 0,$$

car $u(x)$ est la solution de l'équation intégrale.

Donc en employant le même artifice, mais en faisant cette fois la somme de 1 à l'infini on obtient :

$$(78) \quad u(x) + 2k \int_0^1 \lambda(x, X) u(X) dX - f - k \int_0^1 \lambda(x, X) f(X) dX$$

$$+ k^2 \int_0^1 \int_0^1 \lambda(z, x) \lambda(z, X) u(X) dz dX = 0.$$

En faisant par conséquent la différence de (77) et (78) on aura :

$$\begin{aligned}
 [u(x) - u_m(x)] - [f - [f]_m] &= k \int_0^1 \lambda(x, X) f(X) dX + k \int_0^1 [\lambda(\bar{X}, x)]_m f(X) dX \\
 &+ k^2 \int_0^1 \int_0^1 \lambda(z, X) [\lambda(z, x) [u(X) - u_m(X)] + u_m(X) [\lambda(z, x)] - [\lambda(\bar{z}, x)]_m] dz dX \\
 &- k \int_0^1 [\lambda(x, X) - [\lambda(\bar{X}, x)]_m] u(X) dX + k \int_0^1 [\lambda(\bar{X}, x)]_m [u(X) - u_m(X)] dX \\
 &+ k \int_0^1 [\lambda(x, X) - [\lambda(x, X)]_m] u(X) dX + k \int_0^1 [\lambda(x, X)]_m [u(X) - u_m(X)] dX = 0
 \end{aligned}$$

d'où, en utilisant l'inégalité de Schwarz et en imposant les conditions restrictives convenables sur $f(x)$ et $\lambda(x, X)$ (par exemple la condition de Lipschitz), on s'assure, en se basant aussi sur le fait précédemment établi de la convergence en moyenne de $u_m(x)$ vers $u(x)$, que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_m(x) = u(x)$$

et que, de plus, l'ordre de la petitesse de $|u(x) - u_m(x)|$ peut être fixé en correspondance avec les hypothèses restrictives imposées aux données du problème, c'est-à-dire aux $f(x)$ et $\lambda(x, X)$.

§ 4. Les raisonnements précédents peuvent être dans une large mesure étendus, remarquons-le en passant, à certains noyaux non symétriques, dits *symétrisables*. En laissant ceci provisoirement de côté remarquons seulement que pour éviter les difficultés liées à la supposition exprimée par l'inégalité (76) il n'y a qu'à exprimer l'ordre de petitesse de

$$k \int_0^1 \int_0^1 \lambda(x, X) [u(x) - u_m(x)] [u(X) - u_m(X)] dx dX$$

pour $m \rightarrow \infty$. A cet effet partons de l'identité évidente valable pour toute valeur de n :

$$(80) \quad \int_0^1 [L(u - u_m)] \varphi_n dx = [k_n - k] \int_0^1 \int_0^1 \lambda(x, X) [u(X) - u_m(X)] \varphi_n(x) dx dX$$

où k_n et φ_n sont respectivement les valeurs singulières du paramètre et les fonctions fondamentales relatives au noyau symétrique $\lambda(x, X)$ de sorte que :

$$\varphi_n(x) = k_n \int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_n(X) dX.$$

Pour toute valeur fixée de m , $u - u_m$ se développe en série de $\varphi_n(x)$ pour $u(x)$ vérifiant la condition de Lipschitz : donc, de (80), on tire

$$\left| k \int_0^1 \int_0^1 \lambda(x, X) [u(X) - u_m(X)] [u(x) - u_m(x)] dx dX \right| \leq \frac{|k|}{|k_n - k|} \sqrt{\int_0^1 [L(u - u_m)]^2 dx \int_0^1 (u - u_m)^2 dx}.$$

D'ici, pour $k \neq k_n$, on tire immédiatement de (75) :

$$\int_0^1 (u - u_m)^2 dx < \left[\frac{|k|}{|k_n - k|} + 1 \right]^2 \int_0^1 [L(u - u_m)]^2 dx;$$

il suffit alors de répéter l'analyse du § 2 pour s'assurer que $u_m \rightarrow u$ pour $m \rightarrow \infty$ et que de plus l'ordre de $|u - u_m|$ peut être fixé en correspondance avec les hypothèses restrictives imposées aux données du problème.

§ 5. Les méthodes exposées au dernier paragraphe du Chapitre I^{er} peuvent être généralisées aussi pour les équations intégrales et conduisent pour la détermination de suites

$$u_m = \sum_{i=1}^m a_i^{(m)} \varphi_i(x)$$

approximant la solution de l'équation intégrale donnée

$$L(u) = u(x) + k \int_0^1 \lambda(x, z) u(z) dz = f(x)$$

au système suivant d'équations linéaires

$$(81) \quad \int_0^1 [L(u - u_m)] M(\varphi_n) dx = 0 \quad (n \leq m)$$

évidemment résolubles par rapport aux coefficients inconnus $a_i^{(m)}$ si l'intégrale

$$(82) \quad \int_0^1 L(y) M(y) dz$$

est essentiellement plus grande que zéro. L'opérateur M est, dans une certaine mesure, arbitraire, pourvu que la dernière condition à propos de (82) soit réalisée et que le procédé ainsi obtenu au moyen de (81) soit convergent et donne l'ordre de la petitesse de $|u - u_m|$.

Remarquons en passant que pour $M(u) = u$ et $M(u) = L(u)$ les conditions (81) deviennent respectivement les conditions de minimum dans la méthode de l'algorithme variationnel (la méthode de W. Ritz) et dans celle des moindres carrés. Donc en choisissant convenablement l'opérateur $M(u)$ on peut obtenir toute une série des méthodes pour la solution approchée des équations intégrales.

Prenons à titre d'exemple :

$$(83) \quad M(u) = u(x) + k_1 \int_0^1 \lambda_1(x, t) u(t) dt,$$

admettons que les noyaux $\lambda(x, z)$, $\lambda_1(x, t)$ et

$$\int_0^1 \lambda(x, z) \lambda_1(x, t) dx = \lambda_2(z, t)$$

soient définis et remarquons que les conditions (81) peuvent revêtir la forme suivante :

$$\int_0^1 L(u - u_m) M(u - u_m) dx = \int_0^1 L(u - u_m) M(u - U_m) dx,$$

c'est-à-dire dans le cas actuel :

$$(84) \quad \int_0^1 (u - u_m)^2 dx + k \int_0^1 \int_0^1 \lambda(x, z) [u(z) - u_m(z)] [u(x) - u_m(x)] dx dz \\ + k_1 \int_0^1 \int_0^1 \lambda_1(x, t) [u(x) - u_m(x)] [u(t) - u_m(t)] dx dt \\ + k k_1 \int_0^1 \int_0^1 \left[\int_0^1 \lambda(x, z) \lambda_1(x, t) dx \right] [u(z) - u_m(z)] [u(t) - u_m(t)] dz dt \\ = \int_0^1 [u - u_m] [u - U_m] dx + k \int_0^1 \int_0^1 \lambda(x, z) [u(z) - u_m(z)] [u(x) - U_m(x)] dx dz \\ + k_1 \int_0^1 \int_0^1 \lambda_1(x, t) [u(x) - u_m(x)] [u(t) - U_m(t)] dx dt \\ + k k_1 \int_0^1 \int_0^1 \left[\int_0^1 \lambda(x, z) \lambda_1(x, t) dx \right] [u(z) - u_m(z)] [u(t) - U_m(t)] dz dt,$$

où U_m est la somme d'ordre m formée (à l'aide d'un des procédés de sommation connus) pour la solution de l'équation intégrale donnée $L(u) - f = 0$.

Vu la supposition déjà faite à propos de $\lambda(x, z)$, $\lambda_1(x, t)$, $\lambda_2(x, t)$, il suffit de prendre les signes de k, k_1 , tels que les termes avec les intégrales doubles dans la partie gauche de (84) soient tous positifs pour tirer, de (84), à la manière habituelle, au moyen de l'inégalité de Schwartz, que les suites $u_m(x)$ convergent en moyenne vers $u(x)$, donc les $\int_0^x u_m dx$ convergent uniformément vers une fonction, dont la dérivée vérifie l'équation intégrale donnée. Cela étant du système (81) c'est-à-dire du système :

$$\int_0^1 \left[u_m(x) + k \int_0^1 \lambda(x, X) u_m(X) dX - f(x) \right] \left[\varphi_n(x) + k_1 \int_0^1 \lambda_1(x, X) \varphi_n(X) dX \right] dx = 0, \\ (n \leq m)$$

on tire :

$$\sum_1^m \varphi_n(x) \int_0^1 u_m(x) \varphi_n(x) dx + k \sum_1^m \varphi_n(x) \int_0^1 \left[\int_0^1 \lambda(x, X) u_m(X) dX \right] \varphi_n(x) dx \\ + k_1 \sum_1^m \varphi_n(x) \int_0^1 \left[\int_0^1 \lambda_1(x, X) \varphi_n(X) dX \right] u_m(x) dx - [f(x)]_m \\ - k_1 \sum_1^m \varphi_n(x) \int_0^1 \left[\int_0^1 \lambda_1(x, X) \varphi_n(X) dX \right] f(x) dx \\ + k k_1 \sum_1^m \varphi_n(x) \int_0^1 \left[\int_0^1 \lambda_1(x, X) \varphi_n(X) dX \right] \left[\int_0^1 \lambda(x, z) u_m(z) dz \right] dx \\ = u_m + k \int_0^1 [\lambda(x, X)]_m u_m(X) dX + k_1 \int_0^1 [\lambda_1(\bar{X}, x)]_m u_m(X) dX - [f]_m \\ - k_1 \int_0^1 [\lambda_1(\bar{X}, x)]_m f(X) dX + k k_1 \int_0^1 \int_0^1 [\lambda_1(\bar{X}, x)]_m \lambda(X, z) u_m(z) dz dX = 0$$

où $[\lambda_1(\bar{X}, x)]_m$, $[\lambda_1(x, X)]_m$ représentent les sommes de Fourier d'ordre m prises par rapport à x , ainsi que $[f(x)]_m$.

D'autre part quel que soit n , nous avons :

$$\int_0^1 \left[u(x) + k \int_0^1 \lambda(x, X) u(X) dX - f(x) \right] \left[\varphi_n(x) + k_1 \int_0^1 \lambda_1(x, X) \varphi_n(X) dX \right] dx = 0.$$

Donc, en utilisant le même procédé, mais sommant cette fois de 1 à ∞ , on obtient :

$$u(x) + k \int_0^1 \lambda(x, X) u(X) dX + k_1 \int_0^1 \lambda_1(X, x) u(X) dX - f(x) \\ - k_1 \int_0^1 \lambda_1(X, x) f(X) dX + k k_1 \int_0^1 \int_0^1 \lambda_1(X, x) \lambda(X, z) u(z) dX dz = 0;$$

par conséquent :

$$(85) \quad [u(x) - u_m(x)] - \{f(x) - [f(x)]_m\} - k_1 \int_0^1 \{\lambda_1(X, x) - [\lambda_1(\bar{X}, x)]_m\} f(X) dX \\ + k \int_0^1 \{\lambda(x, X) - [\lambda(x, X)]_m\} u_m(X) dX + k \int_0^1 \lambda(x, X) [u(X) - u_m(X)] dX \\ + k_1 \int_0^1 \{\lambda_1(X, x) - [\lambda_1(\bar{X}, x)]_m\} u_m(X) dx + k_1 \int_0^1 \lambda_1(X, x) [u(X) - u_m(X)] dX \\ + k k_1 \int_0^1 \int_0^1 \lambda(X, z) \{\lambda_1(X, x) - [\lambda_1(\bar{X}, x)]_m\} u_m(X) dX dz \\ + k k_1 \int_0^1 \int_0^1 \lambda_1(X, x) [u(X) - u_m(X)] \lambda(X, z) dX dz = 0.$$

En prenant, à présent, en considération les conditions restrictives imposées aux $f(x)$, $\lambda(x, X)$, $\lambda_1(x, X)$ en correspondance avec lesquelles on peut établir l'ordre de petitesse de

$$|f(x) - [f(x)]_m|, \quad \int_0^1 \{\lambda_1(X, x) - [\lambda_1(X, x)]_m\}^2 dx, \quad \int_0^1 \{\lambda(x, X) - [\lambda(x, X)]_m\}^2 dx$$

et en remarquant d'après ce qui précède que les intégrales $\int_0^1 u_m^2 dx$ sont bornées dans leur ensemble et que l'ordre de la petitesse de $\int_0^1 [u - u_m]^2 dx$ est fixé, on obtient au moyen de l'application de l'inégalité de Bouniakowsky-Schwartz non seulement : $\lim_{m \rightarrow \infty} u_m = u$, mais aussi l'ordre de petitesse de $|u - u_m|$ pour $m \rightarrow \infty$.

Donc le théorème suivant peut être énoncé : *pour l'intégration approchée de l'équation intégrale du type de Fredholm*

$$L(u) = u(x) + k \int_0^1 \lambda(x, y) u(y) dy = f(x)$$

on peut élaborer toute une série de méthodes en déterminant les coefficients $a_i^{(m)}$ de

$$u_m = \sum_{i=1}^m a_i^{(m)} \varphi_i(x),$$

(où $[\varphi_i]$ est un système orthogonal normé et fermé de fonctions, aisément calculables, suivant lesquelles peuvent être développées les fonctions dites « arbitraires » de la Physique mathématique) d'après le système des équations :

$$(86) \quad \int_0^1 [L(u_m) - f(x)] M(\varphi_n) dx = \int_0^1 L(u - u_m) M(\varphi_n) dx = 0 \quad (n \leq m)$$

où l'opérateur

$$M(z) = z(x) + k_1 \int_0^1 \lambda_1(x, y) z(y) dy.$$

Alors si les noyaux $\lambda(x, y)$, $\lambda_1(x, y)$,

$$\lambda_2(x, y) = \int_0^1 \lambda(t, x) \lambda_1(t, y) dt$$

sont définis et si les signes des valeurs de k et k_1 sont tels que les quantités

$$\begin{aligned} k \int_0^1 \int_0^1 \lambda(x, y) \varphi(x) \varphi(y) dx dy, \\ k_1 \int_0^1 \int_0^1 \lambda_1(x, y) \varphi(x) \varphi(y) dx dy, \\ k k_1 \int_0^1 \int_0^1 \lambda_2(x, y) \varphi(x) \varphi(y) dx dy \end{aligned}$$

sont toutes positives, quelles que soient les fonctions $\varphi(x)$ de carré intégrable, on peut affirmer que le système (85) sera résoluble par rapport à $a_i^{(m)}$ et

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 [u(x) - u_m(x)]^2 dx = 0,$$

où $u(x)$ est la solution de l'équation intégrale donnée. On peut affirmer de plus que l'ordre de $|u - u_m|$ peut être fixé en correspondance avec les hypothèses restrictives imposées aux données du problème. c'est-à-dire aux $\lambda(x, y)$, $f(x)$, $\lambda_1(x, y)$.

§ 6. La démonstration de la convergence de l'algorithme de W. Ritz exposée dans le § 1 reposait essentiellement sur le fait qu'une certaine forme quadratique est définie positive d'où il s'en suivait la résolubilité du système des équations linéaires servant à déterminer les coefficients inconnus des suites d'approximation. Ainsi, par exemple, pour les fonctions singulières correspondant au problème, la démonstration de la convergence du procédé de W. Ritz tombe en défaut, quoique les essais

du calcul des valeurs singulières du paramètre et des fonctions singulières au moyen de l'application « ex abrupto » de l'algorithme variationnel donnent des résultats satisfaisants; on pourrait s'en assurer en calculant les fonctions singulières d'avance connues, comme, par exemple, les sinus.

L'idée vient donc naturellement à l'esprit de justifier cette espèce de « méthode des réduites » que présente au fond l'algorithme de W. Ritz au moyen des raisonnements fondés sur quelques théorèmes sur la convergence des déterminants infinis appartenant à Helge von Koch et cités dans la suite. C'est pourquoi, à la méthode elle-même et à juste titre, on aurait pu donner le nom de « méthode des déterminants infinis ».

Vu la liaison étroite qui existe entre le premier lemme fondamental du Calcul des Variations⁽¹⁾ et la notion de fermeture d'un système des fonctions $[\psi_i(x)]$, orthogonal et normé, il est naturel de partir du système

$$\int_0^1 \left[u(x) + k \int_0^1 \lambda(x, X) u(X) dX \right] \psi_i(x) dx = 0, \\ i = 1, 2, \dots, n \dots \infty.$$

en appliquant à chaque équation de ce système l'équation de fermeture, de sorte qu'en introduisant la notation

$$a_i = \int_0^1 u(x) \psi_i(x) dx$$

on obtient, pour la détermination des coefficients inconnus, le système suivant d'une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues :

$$(87) \quad x_i + k \sum_{l=1}^{\infty} b_{il} x_l = 0$$

où

$$b_{il} = \int_0^1 \int_0^1 \lambda(x, X) \psi_i(x) \psi_l(X) dx dX.$$

Cela étant il n'est pas difficile de démontrer la convergence des séries suivantes :

$$(88) \quad \sum_{i,l} b_{i,l}^2,$$

$$(89) \quad \sum_i |b_{ii}|.$$

⁽¹⁾ Voir par exemple les recherches de M. Hobson. Proceedings of the London Math. Society, vol. II, sér. II.

En effet, les fonctions $\psi_i(x)$ forment, d'après la supposition, un système orthogonal et fermé, donc d'après les recherches de Hilbert⁽¹⁾ on a :

$$\sum_{i,l} b_{i,l}^2 = \sum_{i,l} \left[\int_0^1 \int_0^1 \lambda(x, X) \psi_i(x) \psi_l(X) dx dX \right]^2 = \int_0^1 \int_0^1 [\lambda(x, X)]^2 dx dX,$$

d'où il suit la convergence de la série (88).

En remarquant à présent que

$$b_{ii} = \int_0^1 \int_0^1 \lambda(x, X) \psi_i(x) \psi_i(X) dx dX$$

et en supposant que le noyau $\lambda(x, X)$ est le résultat de l'itération d'un noyau symétrique $K(x, X)$ de sorte que

$$(90) \quad \lambda(x, X) = \int_0^1 K(x, y) K(y, X) dy$$

on obtient :

$$\begin{aligned} b_{ii} &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 K(x, y) K(y, X) \psi_i(x) \psi_i(X) dx dy dX \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 K(x, y) \psi_i(x) dx \right]^2 dy = \sum c_{ij} \end{aligned}$$

où

$$c_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 K(x, y) \psi_i(x) \psi_j(y) dx dy$$

est évidemment le coefficient de Fourier de

$$\int_0^1 K(x, y) \psi_i(x) dx.$$

De la relation évidente

$$\sum_i |b_{i,i}| = \sum_{i,j} c_{i,j}^2$$

découle la convergence de la série (89), car il n'y a qu'à prendre dans le raisonnement se rapportant à la formule (88), pour le noyau, la fonction symétrique $K(x, X)$ au

(1) HILBERT, *Grundzüge einer allgem. Theorie der linearen Integralgleichungen*, Dritte Mitt., p. 445.

lieu de $\lambda(x, X)$. Il est aisé de voir que, par exemple, si $\lambda(x, y)$ est de la forme-

$$\sum_{h=1}^p \alpha_h(x) \beta_h(y)$$
, où les systèmes $\alpha_h(x)$, $\beta_h(x)$ sont biorthogonaux et normaux, la condition (90) est vérifiée, car en ce cas-là le noyau ne change pas d'après l'itération⁽¹⁾.

On remarquera aussi que le raisonnement reste valable, à des légers changements près, si :

$$\lambda(x, X) = \int_0^1 K_1(x, y) K_2(y, X) dy$$

où K_1 et K_2 sont les fonctions symétriques. En effet en appliquant l'équation de fermeture on a :

$$(91) \quad b_{ii} = \sum_j c_{ij}^{(1)} c_{ij}^{(2)}$$

où

$$c_{ij}^{(1)} = \int_0^1 \int_0^1 K_1(x, y) \psi_i(x) \psi_j(y) dx dy;$$

$$c_{ij}^{(2)} = \int_0^1 \int_0^1 K_2(x, y) \psi_i(x) \psi_j(y) dx dy;$$

en appliquant à (91) l'inégalité de Cauchy on obtient la convergence de $\sum_i |b_{ii}|$, car les séries

$$\sum_{i,j} c_{ij}^{(1)2}, \quad \sum_{i,j} c_{ij}^{(2)2}$$

sont convergentes, les fonctions K_1, K_2 étant symétriques. La convergence des séries (88) et (89) étant ainsi établie, on voit que le déterminant du système (87)

$$(92) \quad D(k) = \begin{vmatrix} kb_{11} + 1 & kb_{12} & kb_{13} & \dots & \dots \\ kb_{21} & kb_{22} + 1 & kb_{23} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ kb_{n1} & kb_{n2} & \dots & kb_{nn} + 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

appartient à la classe des déterminants infinis absolument convergents selon la ter-

(1) VIVANTI, *Elementi della teoria delle equazioni integrali lineari*, pp. 180-182.

minologie de H. von Koch, — c'est pourquoi le système des équations (87) est résolvable, comme on sait, par la méthode des déterminants infinis.

Rappelons en peu de mots les résultats, utiles pour la suite, des recherches du géomètre suédois.

I. Le déterminant infini :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & 1 + a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & 1 + a_{nn} & \dots \end{vmatrix}$$

est dit absolument convergent d'après H. von Koch, si le produit infini

$$M = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + a_{ii})$$

converge absolument, ainsi que la somme de tous les produits qu'on obtient de M au moyen de toutes les permutations possibles des seconds indices.

Pour que le déterminant Δ converge absolument, il suffit, comme H. von Koch l'a montré, de supposer la convergence des séries :

$$(I) \quad \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ii}|; \quad \sum_{i,k} a_{ik}^2,$$

ce que nous dénotons dans la suite sous le nom de « conditions (I) ».

Les règles du développement d'un déterminant fini sont aussi applicables au déterminant Δ et on a, sous la réserve des conditions (I) :

$$\Delta = \Delta_{ii} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \Delta_{ik} = \Delta_{kk} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} \Delta_{ik};$$

où Δ_{ik} est le mineur de Δ correspondant à la i^e ligne et à la k^e colonne; en outre on a :

$$\Delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n,$$

où

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 + a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 + a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1 + a_{nn} \end{vmatrix};$$

de plus, les conditions (I) étant remplies, tous les mineurs du déterminant Δ convergent absolument, ainsi que les sommes :

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\Delta_{ik})^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta_{ik})^2.$$

c'est-à-dire les sommes des carrés des mineurs du premier ordre correspondants à chaque ligne ou à chaque colonne.

Il suit aussi des recherches de H. von Koch que si les éléments du déterminant Δ sont les fonctions holomorphes d'un nombre fini des paramètres complexes et si la convergence uniforme des séries (I) a lieu dans un certain domaine fermé des valeurs de ces paramètres, alors le déterminant Δ , ainsi que tous ses mineurs des divers ordres, seront aussi les fonctions holomorphes des paramètres susdits et la convergence de Δ_n vers sa limite a lieu uniformément dans le domaine considéré⁽¹⁾.

II. Pour que le système des équations linéaires homogènes

$$(93) \quad x_i + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = 0$$

dont les coefficients vérifient les conditions (I) possède une telle solution, que la somme des carrés $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ est convergente et différente de zéro⁽²⁾, il faut et il suffit que le déterminant Δ soit égal à zéro.

Il se trouvera certainement un tel nombre r , que l'un des mineurs d'ordre r , par exemple :

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ k_1 & k_2 & \dots & k_r \end{pmatrix}$$

soit différent de zéro et tous les mineurs d'ordre moindre que r soient égaux à zéro.

⁽¹⁾ H. von Koch, *Sur un théorème de Hilbert*. Math. Ann. Bd. 59, 1910, pp. 266-283.

⁽²⁾ Dans la suite la convergence de $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$, avec somme différente de zéro, sera toujours sous-entendue quand on parlera de la solution.

La solution la plus générale du système (93) se présentera alors sous la forme :

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ k_1 & k_2 & \dots & k_r \end{pmatrix} x_k = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ k & k_2 & \dots & k_r \end{pmatrix} x_{k_1} + \dots + \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ k_1 & k_2 & \dots & k \end{pmatrix} x_{k_r}$$

($k = 1, 2, \dots$)

où les valeurs

$$x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_r}$$

sont arbitraires.

III. Pour que le système non homogène

$$(94) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = c_i$$

possède une solution unique et déterminée il faut et il suffit que la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$$

soit convergente et que le déterminant Δ diffère de zéro; la solution se présentera alors sous la forme

$$(95) \quad x_k \Delta = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \Delta_{ik}.$$

Les résultats ci-dessus rappelés et appartenant à H. von Koch s'appliquent immédiatement au système en question (87) et on constate la validité des affirmations suivantes : le déterminant $D(k)$ du système (87) converge absolument quel que soit k et représente aussi bien que tous ses mineurs d'ordre quelconque une certaine fonction transcendante et entière du paramètre k .

L'équation

$$D(k) = 0$$

possède alors un nombre infini de racines réelles et positives

$$k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$$

et si k coïncide avec un des nombres k_i de cette suite, alors au moins l'un des

mineurs $D_{ii}(k_s)$ est différent de zéro et le système (87) possède la solution unique déterminée à un facteur constant près :

$$x_1 : x_2 : x_3 : \dots : x_n : \dots = D_{i_1}(k_s) : D_{i_2}(k_s) : \dots ;$$

la fonction correspondante « singulière » $\varphi_s(x)$ se présentera alors sous la forme

$$\varphi_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_{i_n}(k_s) \psi_n(x),$$

où la valeur de l'indice i , tout en étant arbitraire, est soumise seulement à la condition qu'au moins l'un des mineurs $D_{ir}(k_s)$ soit différent de zéro.

Pour démontrer toutes ces assertions il suffit de remarquer, que le système de solutions de (87) étant, d'après H. Koch, tel que la série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ est convergente; on peut, en multipliant les équations (87) respectivement par d_i (où d_i — le coefficient de Fourier d'une fonction « arbitraire » s'annulant aux points frontières 0 et 1) appliquer ensuite l'équation de fermeture et ensuite le lemme du calcul des variations, d'où l'on tirera que la fonction $\varphi_s(x)$ est la fonction singulière et k_s la valeur singulière du paramètre, par conséquent réelle et positive, car dans le cas considéré le noyau $\lambda(x, X)$ est symétrique et positif d'après la supposition faite.

Cela étant pour démontrer la convergence de l'algorithme de W. Ritz dans le cas actuel il suffit d'observer que les conditions de minimum se présentent sous la forme suivante :

$$\int_0^1 \left[u_n(x) + k \int_0^1 \lambda(x, X) u_n(X) dX \right] \psi_i(x) dx = 0, \quad i \leq n$$

et par conséquent la détermination des coefficients inconnus dans le développement de W. Ritz se fait au moyen des systèmes d'équations linéaires, dont le déterminant sera

$$D^{(n)}(k) = \begin{vmatrix} kb_{11} + 1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & kb_{22} + 1 & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & kb_{nn} + 1 \end{vmatrix}.$$

Il suffit alors de se rapporter aux résultats de H. von Koch pour s'assurer de la convergence du procédé de W. Ritz (voir I) en ce qui concerne le calcul des valeurs singulières du paramètre⁽¹⁾.

(1) V. plus loin, p. 195.

Pour montrer, que les fonctions singulières c'est-à-dire les solutions de l'équation intégrale homogène

$$\varphi_s(x) + k_s \int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_s(X) dX = 0$$

peuvent être obtenues au moyen de l'algorithme variationnel avec une approximation indéfinie il suffit de remarquer qu'à côté de la relation évidente :

$$(96) \quad \int_0^1 \left[\varphi_s(x) + k_s \int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_s(X) dX \right] \psi_i(x) dx = 0$$

($i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots, \infty$)

il existe pour les approximations $\varphi_s^{(m)}$ les relations suivantes :

$$(97) \quad \int_0^1 \left[\varphi_s^{(m)}(x) + k_s^{(m)} \int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_s^{(m)}(X) dX \right] \psi_i(x) dx$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{si } i \leq n; \\ + k_s^{(m)} \int_0^1 \left[\int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_s^{(m)}(X) dX \right] \psi_i(x) dx, & \text{si } i > n. \end{cases}$$

En combinant les relations (96) et (97) on obtient :

$$(98) \quad \int_0^1 \left\{ [\varphi_s(x) - \varphi_s^{(m)}(x)] + k_s \int_0^1 \lambda(x, X) [\varphi_s(X) - \varphi_s^{(m)}(X)] dX \right\} \psi_i(x) dx$$

$$= \begin{cases} (k_s^{(m)} - k_s) \int_0^1 \left[\int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_s^{(m)}(X) dX \right] \psi_i(x) dx, & \text{si } i \leq n \\ - k_s \int_0^1 \left[\int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_n(X) dX \right] \psi_i(x) dx, & \text{si } i > n. \end{cases}$$

De (98) on tire immédiatement :

$$(99) \quad \varphi_s^{(m)}(x) - \varphi_s(x) + k_s \int_0^1 \lambda(x, X) [\varphi_s^{(m)}(X) - \varphi_s(X)] dX$$

$$= \varphi_s^{(m)}(x) + k_s \int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_s^{(m)}(X) dX = R_n(x),$$

où

$$(100) \quad R_n = \sum_{i=1}^n (k_s - k_s^{(m)}) \psi_i(x) \int_0^1 \left[\int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_s^{(m)}(X) dX \right] \psi_i(x) dx$$

$$+ \sum_{i=n}^{\infty} k_s \psi_i(x) \int_0^1 \left[\int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_n(X) dX \right] \psi_i(x) dx.$$

Or le reste du développement d'une fonction, vérifiant la condition de Lipschitz, (avec le coefficient λ) en série de polynômes trigonométriques peut être limité par une expression de la forme $\frac{A\lambda}{n}$, (où $A = \text{const.}$), d'après les recherches de M. D. Jackson⁽¹⁾ et quoique la fonction $\int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_n(X) dX$ dépende de n , son coefficient de Lipschitz sera sûrement limité indépendamment de n , si par exemple

$$\int_0^1 [\lambda'_x(x, X)]^2 dX$$

est borné dans $(0, 1)$ et si, comme nous le supposons toujours, les approximations $\varphi_s^{(n)}(x)$ sont normées, c'est-à-dire si

$$\int_0^1 [\varphi_s^{(n)}(x)]^2 dx = 1.$$

Cela étant on s'assure que la seconde somme de (100) tendra vers zéro pour $n \rightarrow \infty$ et que même son ordre de la petitesse sera $1 : n$.

La première somme de (100) peut être présentée sous la forme :

$$[k_s - k_s^{(n)}] \left\{ \int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_s^{(n)}(X) dX - r_n \right\}$$

où r_n est le reste de la série de Fourier de la fonction $\int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_s^{(n)}(X) dX$ et par conséquent, d'après une remarque de tout à l'heure, r_n sera de l'ordre de $1 : n$; d'autre part d'après un résultat précédent⁽²⁾

$$k_s = \lim_{n \rightarrow \infty} k_s^{(n)}, \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0.$$

Appliquons à présent la formule de M. E. Schmidt⁽³⁾ à l'équation intégrale (99), on aura :

$$(101) \quad \varphi_s^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (s) \frac{\varphi_i(x) \int_0^1 R_n(x) \varphi_i(x) dx}{k_i - k_s} + C \varphi_s(x),$$

⁽¹⁾ Transactions of the American Math. Society, 1912. — Voir aussi W. STEKLOFF. *Les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique*, t. I (en russe), 1922.

⁽²⁾ Et même on peut, semble-t-il, fixer l'ordre de $k_s - k_s^{(n)}$; nous nous proposons d'y revenir dans la suite.

⁽³⁾ GOURSAT, *Cours d'analyse*, t. III.

où $C = \text{const.}$; en déterminant la constante C d'après la condition

$$\int_0^1 [\varphi_s^{(n)}(x)]^2 dx = 1,$$

on obtient aisément $C = 1 - \tau_n$, où l'ordre de τ_n est égal à celui de R_n .

Cela étant on tire de (101), que l'ordre de

$$\int_0^1 [\varphi_s^{(n)}(x) - \varphi_s(x)]^2 dx$$

est égal à celui de R_n , vu que la série

$$\sum_{i \neq s}^{\infty} \frac{1}{[k_i - k_s]^2}$$

est sûrement convergente.

Il suffit alors de combiner (99) avec l'équation intégrale homogène, à laquelle satisfait $\varphi_s(x)$ pour s'assurer, moyennant l'inégalité de Schwarz, que $|\varphi_s(x) - \varphi_s^{(n)}(x)|$ non seulement tend vers zéro pour $n \rightarrow \infty$, mais qu'on peut aussi fixer son ordre de petitesse, si on connaît l'ordre de R_n .

Le cas général de l'équation intégrale non homogène :

$$u(x) + k \int_0^1 \lambda(x, X) u(X) dX = f(x)$$

peut être traité d'une manière analogue par la méthode des déterminants infinis; en omettant, pour la brièveté, l'exposition détaillée, remarquons seulement que dans le cas actuel il faut utiliser (III) parmi les résultats de H. von Koch et par conséquent la condition supplémentaire relative à la convergence de la série :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_0^1 f(x) \psi_i(x) dx \right]^2.$$

§ 7. Revenons à présent au problème du calcul des fonctions fondamentales relatives aux équations différentielles de la Physique mathématique.

Quand la forme quadratique sous le signe de l'intégrale à varier n'est pas définie positive le raisonnement de W. Ritz tombe en défaut. Néanmoins les résultats des calculs, basés sur l'emploi de l'algorithme variationnel et entrepris par nombre d'ingénieurs ainsi que par W. Ritz lui-même, confirmaient pratiquement la supposition

que le procédé est convergent. Nous l'aborderons ici à la lumière de la théorie des déterminants infinis en traitant⁽¹⁾, pour la brièveté de l'exposition, le cas simple du système différentiel

$$(102) \quad \begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda A(x) y = 0; \\ y(a) = y(b) = 0; \end{cases}$$

car le raisonnement, comme il est facile de s'en assurer, peut être aisément étendu aux systèmes de beaucoup plus généraux.

En traitant l'équation (102) comme l'équation d'Euler correspondant à l'intégrale

$$I(y) = \int_a^b \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - \lambda A(x) y^2 \right] dx$$

nous chercherons la fonction minimante sous la forme de limite des séries terminées :

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i^{(n)} \psi_i(x),$$

où

$$\int_a^b \frac{d\psi_i(x)}{dx} \cdot \frac{d\psi_k(x)}{dx} dx = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq k \\ 1, & \text{si } i = k \end{cases}$$

séries dont les coefficients $a_i^{(n)}$ se déterminent d'après les conditions usuelles de minimum en calcul différentiel, c'est-à-dire dans le cas actuel d'après le système suivant d'équations linéaires :

$$(103) \quad a_i^{(n)} - \lambda a_i^{(n)} \int_a^b A(x) \psi_i^2(x) dx - \lambda \sum_i a_k^{(n)} \int_a^b A(x) \psi_i(x) \psi_k(x) dx = 0;$$

$$\begin{pmatrix} i \leq n \\ i \neq k \end{pmatrix}.$$

Le système d'un nombre infini d'équations homogènes à une infinité d'inconnues, qui est le cas limite du système (103) s'obtient en remarquant que pour toute fonction $v(x)$, vérifiant (102) on a :

$$I(\tau, v) = \int_a^b \left[\frac{d\tau}{dx} \frac{dv}{dx} - A(x) \tau v \right] dx = 0,$$

⁽¹⁾ Comparer : *Sur la méthode de W. Ritz pour la solution approchée des problèmes de la Physique mathématique*, par N. KRYLOFF et I. TAMARKINE (Bull. de l'Académie des Sciences de Russie, 1918).

TAMARKINE. Complément à l'article précédent, *ibid.*, 1922, pp. 327-332.

où $\gamma_1(x)$ est une fonction arbitraire possédant la dérivée première continue et vérifiant les conditions frontières $\gamma_1(a) = \gamma_1(b) = 0$.

En remarquant à présent, que les conditions

$$(104) \quad \delta I(y) = 0,$$

$$(105) \quad I(\gamma_1, v) = 0$$

sont équivalentes, car l'une est la conséquence de l'autre, substituons dans (105) au lieu de $\gamma_1(x)$ successivement $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x), \dots$; on obtient ainsi le système cherché d'un nombre infini d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, dont le déterminant, sous forme explicite, s'écrit :

$$(106) \quad D(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda \int_a^b A(x) \psi_1^2(x) dx - 1 & \lambda \int_a^b A(x) \psi_1(x) \psi_2(x) dx & \dots & \lambda \int_a^b A(x) \psi_1(x) \psi_n(x) dx \\ \lambda \int_a^b A(x) \psi_2(x) \psi_1(x) dx & \lambda \int_a^b A(x) \psi_2^2(x) dx - 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda \int_a^b A(x) \psi_n(x) \psi_1(x) dx & \lambda \int_a^b A(x) \psi_n(x) \psi_2(x) dx & \dots & \lambda \int_a^b A(x) \psi_n^2(x) dx - 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Par l'application de l'inégalité de Bouniakowski-Schwartz et de la relation

$$\int_a^b [\psi_i'(x)]^2 dx = - \int_a^b \psi_i(x) \psi_i''(x) dx = \mu_i \int_a^b \psi_i^2(x) dx$$

obtenue au moyen de l'intégration par parties (à titre d'exemple on prend ici

$$\psi_i(x) = \frac{1}{i} \sin \frac{i\pi(x-a)}{(b-a)},$$

donc $\mu_i = i^2$) on s'assure aisément que les séries

$$\sum_{i,k} \left[\int_a^b A(x) \psi_i(x) \psi_k(x) dx \right]^2, \quad \sum_i \left| \int_a^b A(x) \psi_i^2(x) dx \right|$$

sont convergentes; donc le déterminant infini $D(\lambda)$ sera absolument convergent et représente par conséquent aussi bien que tous ses mineurs une fonction entière transcendante de λ , dont le genre ne surpasse pas deux, car ses racines, comme nous allons le voir, sont les valeurs singulières du paramètre pour (102). Les racines λ_i de $D(\lambda) = 0$ sont les valeurs du paramètre pour lesquelles le système infini d'équa-

tions linéaires possède la solution telle que la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ soit convergente et alors, en appliquant l'inégalité de Cauchy, on s'assure que $y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \psi_i(x)$ sera une fonction continue.

En dénotant alors par $\varphi_i(x)$ la fonction $y(x)$ construite d'après ce qui vient d'être dit pour la valeur $\lambda = \lambda_i$ d'une des racines de $D(\lambda) = 0$, on peut établir, en s'appuyant sur les équations dont le déterminant est $D(\lambda)$ et sur l'équation de fermeture, que :

$$(107) \quad \int_a^b \frac{d^2 y}{dx^2} \left[\varphi_i(x) + \lambda_i \int_a^x \int_a^x A(x) \varphi_i(x) dx^2 \right] dx = 0,$$

où $\tau_i(x)$ est une fonction continue possédant deux premières dérivées et vérifiant les conditions frontières :

$$\tau_i(a) = \tau_i(b) = \frac{d\tau_i}{dx_{x=a}} = \frac{d\tau_i}{dx_{x=b}} = 0.$$

En appliquant alors le raisonnement déjà précédemment utilisé, on peut tirer de (107) que $\varphi_i(x)$ vérifie l'équation différentielle (102) pour $\lambda = \lambda_i$, c'est-à-dire que $\lambda = \lambda_i (i = 1, 2, 3 \dots n \dots)$ et $y = \varphi_i(x)$ seront respectivement les valeurs singulières et les fonctions fondamentales relatives au système différentiel (102). Il s'ensuit que les racines λ_i de l'équation $D(\lambda) = 0$ sont réelles et même positives pour $A(x) > 0$, car, en ce cas-là, comme il est facile de s'en assurer par un raisonnement connu, les valeurs singulières du paramètre λ relatives au système différentiel (102) possèdent justement la propriété d'être réelles et positives.

Si $\lambda = \lambda_s$ est une racine de $D(\lambda) = 0$, alors d'après les résultats de H. von Koch au moins l'un des mineurs $D_{ik}(\lambda_s) \neq 0$ et le système d'un nombre infini d'équations linéaires par rapport aux inconnues a_i possède la solution unique, déterminée à un facteur constant près :

$$a_1 : a_2 : a_3 : \dots : a_n : \dots = D_{i_1}(\lambda_s) : D_{i_2}(\lambda_s) : \dots : D_{i_k}(\lambda_s) : \dots;$$

la fonction fondamentale correspondante $\varphi_s(x)$ se présentera alors sous la forme de la série :

$$\varphi_s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} D_{ik}(\lambda_s) \psi_k(x),$$

où la valeur de l'indice i , étant arbitraire, est soumise seulement à la condition qu'au moins l'un des mineurs $D_{ik}(\lambda_s) \neq 0$.

En revenant à présent aux approximations obtenues par l'application de l'algorithme variationnel on voit que pour le système (103) soit résoluble, — la valeur du paramètre λ doit coïncider avec l'une des racines de l'équation :

$$(108) \quad D^{(n)}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda \int_a^b A(x) \psi_1^2(x) dx - 1 & \lambda \int_a^b A(x) \psi_1(x) \psi_2(x) dx & \dots & \lambda \int_a^b A(x) \psi_1(x) \psi_n(x) dx \\ \lambda \int_a^b A(x) \psi_1(x) \psi_2(x) dx & \lambda \int_a^b A(x) \psi_2^2(x) dx - 1 & \dots & \lambda \int_a^b A(x) \psi_2(x) \psi_n(x) dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda \int_a^b A(x) \psi_n(x) \psi_1(x) dx & \dots & \dots & \lambda \int_a^b A(x) \psi_n^2(x) dx - 1 \end{vmatrix}$$

En dénotant par $\lambda_k^{(n)} (k = 1, 2, \dots, n)$ les racines de l'équation (108) on s'assure d'après les résultats mentionnés de H. von Koch, que dans tout domaine fini de la variable complexe λ , les polynômes $D^{(n)}(\lambda)$ tendent, avec l'augmentation de l'indice n , uniformément vers la fonction transcendante entière $D(\lambda)$. En appliquant alors le théorème fondamental de Cauchy, concernant le nombre des racines d'une équation contenues dans un contour donné, on constate sans peine qu'avec l'augmentation de n , la valeur de k étant fixée, chacun des nombres $\lambda_k^{(n)}$ tend vers la valeur déterminée λ_k , laquelle est une racine de $D(\lambda) = 0$ et inversement chaque racine de cette dernière équation est la limite d'une des suites $\lambda_k^{(n)}$.

Ceci démontre la convergence de l'algorithme variationnel en ce qui concerne le calcul des valeurs singulières du paramètre relatives au système différentiel (102).

Pour montrer que les solutions $\varphi_k(x)$ de ce dernier système peuvent être obtenues avec une approximation indéfinie et même d'avance assurée, il n'y a qu'à utiliser *mutatis mutandi* le raisonnement du § 6.

En effet on s'assure aisément que les approximations obtenues $\varphi_k^{(n)}(x)$ vérifient les relations suivantes :

$$(109) \quad \frac{d^2 \varphi_k^{(n)}(x)}{dx^2} + \lambda_k A(x) \varphi_k^{(n)}(x) = \varepsilon_n,$$

où non seulement $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, mais où on peut encore en correspondance avec les hypothèses restrictives imposées à $A(x)$, fixer l'ordre de ε_n , si on connaît l'ordre de $|\lambda_k - \lambda_k^{(n)}|$. Par l'application convenable de la formule de E. Schmidt à (109) on aboutit à l'évaluation de l'ordre de $|\varphi_k(x) - \varphi_k^{(n)}(x)|$; c. q. f. d.

Une même remarque qu'au § 6 peut être faite, au sujet de l'équation générale non homogène, en ce qui concerne son intégration approchée, les conditions frontières de (102) étant données.

§ 8. La résolution de l'équation intégrale, dite de première espèce :

$$(110) \quad f(x) = \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy$$

par rapport à la fonction inconnue $\varphi(t)$ intégrable et de carré intégrable nécessite certaines conditions supplémentaires imposées à $f(s)$ et explicitées par le remarquable théorème dû à M. Picard.

Or, si on se place au point de vue de l'algorithme variationnel, en considérant l'équation intégrale (110) comme l'équation d'Euler provenant du problème qui consiste à rendre stationnaire l'intégrale double :

$$I(\varphi) = \int_0^1 \int_0^1 [K(x, y) \varphi(x) \varphi(y) - f(x) \varphi(x) - f(y) \varphi(y)] dx dy$$

on s'assure aisément, que dans le cas où les développements des fonctions minimantes

$$\varphi_m(x) = \sum_{i=1}^m a_i \psi_i(x)$$

procèdent suivant les fonctions singulières relatives au noyau symétrique $K(x, y)$, de sorte que

$$\psi_i(x) = \lambda_i \int_0^1 K(x, y) \psi_i(y) dy,$$

on aura d'après les conditions de minimum

$$\frac{\partial I(\varphi_m)}{\partial a_i^{(m)}} = 0. \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m).$$

Les coefficients cherchés $a_i^{(m)}$ se déterminent individuellement :

$$(111) \quad a_n = \lambda_n \int_0^1 f(x) \psi_n(x) dx = \lambda_n f_n,$$

f_n étant le coefficient de Fourier de $f(x)$.

Cela étant remarquons que pour l'existence d'une fonction de carré sommable ayant ces valeurs (111) comme coefficients de Fourier il faut et il suffit de supposer, d'après le théorème bien connu de Riesz-Fischer, la convergence de la série

$$\sum_1^{\infty} a_n^2 = \sum_1^{\infty} \lambda_n^2 f_n^2,$$

ce qui représente la condition de E. Picard [nécessaire et suffisante, si le noyau $K(s, t)$ est fermé] pour que l'équation intégrale de première espèce (110) soit résoluble.

En supposant cette condition remplie dénotons par $\varphi(s)$ la fonction de carré sommable ayant a_i pour coefficients de Fourier; alors en vertu des conditions de minimum

$$\int_0^1 \psi_i(x) \left[f(x) - \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy \right] dx = f_i - \frac{a_i}{\lambda_i} = 0.$$

Donc, la fonction

$$f(x) - \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy$$

étant continue, [car $\varphi(y)$ est de carré sommable et $K(x, y)$ continue] on en tire que $\varphi(s)$ déterminée par ses coefficients de Fourier, obtenus par l'application des conditions de minimum, vérifie réellement l'équation intégrale de première espèce donnée, si le noyau $K(x, y)$ et par conséquent le système des fonctions $\psi_i(s)$ est fermé.

Remarquons aussi, en passant, qu'on peut aisément expliciter les conditions pour que la solution de l'équation intégrale de première espèce (110) vérifie certaines conditions supplémentaires, par exemple soit continue, dérivable, etc.

En effet on a :

$$\sum_1^{\infty} a_i \psi_i(x) = \sum_1^{\infty} a_i \lambda_i \int_0^1 K(x, y) \psi_i(y) dy = \sum_1^{\infty} \lambda_i^2 f_i \int_0^1 K(x, y) \psi_i(y) dy,$$

donc si on suppose la convergence de la série

$$(112) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 f_i^2$$

alors, d'après le théorème cité de Riesz-Fischer, on peut affirmer l'existence d'une fonction $F(x)$ de carré sommable ayant précisément $\lambda_i^2 f_i^2$ pour ses coefficients de Fourier; donc la solution de (110) se présente sous la forme d'une série uniformément convergente⁽¹⁾

$$\sum_1^{\infty} \int_0^1 F(x) \psi_i(x) dx \int_0^1 K(x, y) \psi_i(x) dx$$

(1) Voir E. SCHMIDT, *Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen*. Math. Ann., t. 65.

et sera par conséquent continue; pour la dérivabilité il suffit de supposer par exemple que

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial K(x, y)}{\partial y} \right]^2 dx < M = \text{const.}$$

Il n'est pas inutile aussi d'observer, que dans le cas ci-dessus considéré [c'est-à-dire quand les développements des fonctions de la suite minimante procèdent suivant les fonctions singulières relatives au noyau $K(x, y)$], on arrive aux mêmes expressions des coefficients a_i par l'application de la méthode des moindres carrés, où il s'agira de rendre stationnaire l'intégrale

$$(113) \quad \int_0^1 \left[f(x) - \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy \right]^2 dx = \int_0^1 [f(x) - L(\varphi)]^2 dx.$$

au moyen des séries terminées de la forme susdite

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i^{(n)} \psi_i(x).$$

Ces remarques préliminaires étant posées on pourrait, pour la solution approchée de l'équation intégrale de première espèce résoluble, élaborer toute une série de méthodes analogues à celles précédemment exposées pour les équations intégrales de seconde espèce.

Ainsi dans la méthode des moindres carrés les conditions de minimum donnent le système suivant d'équations linéaires résolubles par rapport aux a_i^n :

$$\int_0^1 [f(x) - L(\varphi_n)] L(\psi_i) dx = 0, \quad (\text{où } i \leq n).$$

De là on tire :

$$(114) \quad \int_0^1 [L(\varphi - \varphi_n)] L(\varphi_n - \Phi_n) dx = 0,$$

où φ de carré sommable est la solution de l'équation intégrale donnée supposée existante et Φ_n la somme de Fourier d'ordre n formée avec φ .

En appliquant l'analyse déjà maintes fois utilisée on tire de (114)

$$(115) \quad \int_0^1 [L(\varphi - \varphi_n)]^2 dx \leq \int_0^1 [L(\varphi - \Phi_n)]^2 dx.$$

Or au moyen de la théorie de fermeture on a

$$\int_0^1 \left\{ \int_0^1 K(x, y) [\varphi - \Phi_n] dy \right\}^2 dx < \varepsilon_n,$$

où $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, pour toute fonction $\varphi(x)$ de carré sommable. De plus l'ordre de ε_n peut être fixé⁽¹⁾, si $\varphi(x)$ vérifie certaines conditions complémentaires, comme par exemple être dérivable.

Cela étant, de l'inégalité

$$\int_0^1 [L(\varphi - \varphi_n)]^2 dx < \varepsilon_n$$

on tire au moyen de l'inégalité de Schwarz :

$$\left| \int_0^1 \int_0^1 K(x, y) [\varphi(y) - \varphi_n(y)] dy dx \right| < \varepsilon_n.$$

Alors on voit, que les approximations obtenues par la méthode des moindres carrés vérifient, en moyenne, l'équation intégrale donnée.

Une même remarque aurait pu être faite à propos des approximations obtenues par la méthode de l'algorithme variationnel (méthode de W. Ritz), où les conditions de minimum ont, comme il est aisé de le voir, la forme

$$\int_0^1 [f(x) - L(\varphi_n)] \psi_i dx = 0, \quad (i \leq n).$$

(1) Voir par ex. STEKLOFF, *Problèmes fondamentaux de la Physique mathématique*, t. I (en russe), 1922.

(à suivre.)