ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

G. PFEIFFER

Sur la permutation des intégrales d'une équation linéaire et homogène aux dérivées partielles du ordre

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 23 (1931), p. 139-181
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1931_3_23__139_0>

SUR LA PERMUTATION DES INTÉGRALES

D'UNE

ÉQUATION LINÉAIRE ET HOMOGÈNE

AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE

PAR M. G. PFEIFFER (Kiew).

INTRODUCTION

Dans le travail présent nous revenons au problème de M. A. Buhl(¹), qui nous a déjà amené à une série de résultats intéressants et importants(²). La littérature de la question se trouve dans notre Note initiale sur ce problème(³). Par la suite sont parus deux Mémoires, liés au même problème, l'un de M. A. Buhl(⁴) et l'autre de M. C. Popovici(⁵). La littérature a été aussi indiquée au *Mémorial des Sciences mathématiques*, par M. A. Buhl(⁶).

(¹) ED. GOURSAT, Leçons sur le Problème de Pfaff (Paris, 1922, p. 234).

(²) G. PFEIFFER, *Généralisation de la méthode de Jacobi pour l'intégration des systèmes complets d'équations linéaires et homogènes* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S., 1930, pp. 405-409); *Sur les opérateurs d'un système complet d'équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue* (C. R., 1930, t. 190, pp. 909-911); *Généralisation de la méthode de Jacobi-Mayer* (C. R., 1930, t. 191, p. 1107).

(³) G. PFEIFFER, *Sur la permutation des solutions d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premièr ordre* (Bull. des Sc. math., 1928, S. 2, t. LII, pp. 350-352).

(⁴) A. BUHL, *Sur les opérateurs différentiels permutables ou non* (Bull. des Sc. math., 1928, S. 2, t. LII, pp. 353-361).

(⁵) C. POPOVICI, *Autogroupes* (Bull. des Sc. math., 1929, S. 2, t. LIII, pp. 281-291).

(⁶) A. BUHL, *Aperçus modernes sur la Théorie des groupes continus et finis.* (Mém. des Sc. math., fasc. 33, Paris, 1928).

NOTE DU SECRÉTAIRE DE LA RÉDACTION. — Le présent travail, dû à M. G. Pfeiffer, développe considérablement et avec des notations dont le volume pourrait être réduit, un sujet qui fit, en effet, l'objet de ma Thèse de Doctorat soutenue, le 14 juin 1901, *Sur les Équations différentielles simultanées et la forme aux dérivées partielles adjointe.* Cette Thèse fut imprimée, non dans une publication périodique mais en une brochure devenue aujourd'hui introu-

Les raisonnements ci-après sont en relation avec les recherches de MM. A. Buhl, C. Popovici, Ed. Goursat; ils poursuivent ce but pratique : trouver les moyens simples de construire les opérateurs d'une équation linéaire, homogène, aux dérivées partielles du premier ordre, sous la forme la plus générale.

Le problème de M. A. Buhl consiste en ce qui suit : on demande de trouver toutes les transformations infinitésimales :

$$Y(f) = \eta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \eta_n \frac{\partial f}{\partial x_n}, \tag{1}$$

qui permutent les intégrales de l'équation :

$$X(f) = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0. \tag{2}$$

La transformation infinitésimale (1) est dite opérateur de l'équation (2); l'équation (2) admet le groupe monôme des transformations (1), ou, ce qui est la même chose, la transformation infinitésimale (1).

Les intégrales indépendantes de l'équation (2) seront

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-1}. \tag{3}$$

S. Lie[7] a montré que les opérateurs (1) se définissent par la relation ;

$$XY(f) - YX(f) = \lambda X(f), \tag{4}$$

où λ est une fonction arbitraire des variables indépendantes.

---

vable. Ledit sujet n'a rien perdu de son intérêt et pourrait même être rattaché à la Physique théorique actuelle. Ce qui peut aussi en augmenter l'importance ce sont divers contacts avec les recherches de M. Élie Cartan, maître incontesté des groupes à l'époque actuelle. Citons notammeat la Thèse de l'illustre savant *Sur la structure des Groupes de transformations finis et continus* (1894). Dans cette Thèse on trouve, par exemple, le Problème de Killing avec des équations telles que (120) et (166) du présent Mémoire de M. Pfeiffer. Alors p, q, λ, μ, sont des coefficients constants. Un autre Mémoire de M. E. Cartan *Sur la réduction à sa forme canonique de la structure d'un groupe fini et continu* (American Journal of Mathematics, t. 18, 1896) présente, pour les systèmes complets, des discussions analogues à celles faites ensuite pour une équation.

Ces discussions, on le voit, ont des racines dans un passé déjà quelque peu lointain. Avec les possibilités d'extension aux équations, dites *aux opérateurs* X, d'ordre quelconque, on est certainement en présence d'une grande théorie justifiant amplement l'analyse exposée ici par M. G. Pfeiffer. A. B.

(7) S. Lie und Fr. Engel, *Theorie der Transformationsgruppen* (Leipzig, B. I, 1888, pp. 138-143).

Si l'opérateur $Y(f)$, correspondant à un λ fixe, est construit, alors en désignant par w une intégrale de l'équation $Y(f)=0$, ne satisfaisant pas l'équation $X(f)=0$, nous aurons pour λ l'expression :

$$\lambda = Y(\log \tau), \tag{5}$$

$$\tau = \frac{1}{X(w)}. \tag{6}$$

Il est nécessaire de partager les opérateurs de l'équation (2) en deux classes :

a) Opérateurs, où ρ est fonction arbitraire des variables indépendantes,

$$X(f), \qquad \rho X(f), \tag{7}$$

qui, pour les intégrales (3), se réduisent à zéro, et :

b) Opérateurs :

$$Y(f), \tag{8}$$

qui pour des intégrales (3) peuvent être nuls, mais non pas pour toutes.

Par leurs propriétés les opérateurs (7) diffèrent essentiellement des opérateurs (8). S. Lie les dit à caractère *trivial*; néanmoins leur rôle dans la théorie des opérateurs est considérable.

L'opérateur :

$$Z(f) = X(f) \tag{9}$$

satisfait à l'identité :

$$XZ(f) - ZX(f) \equiv 0. \tag{10}$$

Si l'on multiplie $X(f)$ par une intégrale de l'équation (2), on a l'opérateur :

$$Z(f) = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) X(f), \tag{11}$$

possédant la même propriété (10). Φ est une fonction arbitraire des arguments.

En multipliant $X(f)$ par ρ, nous formons l'opérateur :

$$Z(f) = \rho X(f), \tag{12}$$

satisfaisant la relation (4) avec $\lambda = X(\rho)$:

$$XZ(f) - ZX(f) = X(\rho) X(f). \tag{13}$$

L'opérateur :

$$Z(f) = Y(f) \tag{14}$$

satisfait à l'identité :

$$XZ(f) - ZX(f) = \lambda X(f). \tag{15}$$

Si l'on multiplie $Y(f)$ par une intégrale de l'équation (2), on a l'opérateur :

$$Z(f) = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})\, Y(f) \tag{16}$$

possédant la propriété :

$$XZ(f) - ZX(f) = \lambda\Phi X(f). \tag{17}$$

En multipliant $Y(f)$ par ρ, nous construisons la transformation infinitésimale :

$$Z(f) = \rho Y(f), \tag{18}$$

pour laquelle a lieu l'identité :

$$XZ(f) - ZX(f) = \lambda\rho X(f) + X(\rho)\, Y(f) = \lambda\rho X(f) + X(\log \rho)\, Z(f). \tag{19}$$

Les opérateurs, qui diffèrent par des multiplicateurs, présentant les intégrales de l'équation (2), devront être tenus pour des opérateurs non essentiellement différents.

D'après les relations (13), (15) on voit, que si l'on prend $m + 1 \leqslant n$ opérateurs de l'équation (2) :

$$Y_1(f),\ Y_2(f),\ \ldots,\ Y_m(f),\ X(f), \tag{20}$$

$$XY_i(f) - Y_iX(f) \equiv \lambda_i X(f), \tag{21}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m,$$

qui sont indépendants entre eux, l'expression :

$$Z(f) = \sum_{i=1}^{m} \Phi_i(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})\, Y_i(f) + \rho X(f) \tag{22}$$

où ρ est une fonction arbitraire des variables indépendantes, est l'opérateur de l'équation (2), possédant la propriété :

$$\begin{aligned} XZ(f) - ZX(f) &= \sum_{i=1}^{m} \Phi_i \left\{ XY_i(f) - Y_iX(f) \right\} + X(\rho)\, X(f) \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Phi_i + X(\rho) \right\} X(f). \end{aligned} \tag{23}$$

Admettons que le nombre maximum des opérateurs indépendants de l'équation (2) est égal à m, et, qu'ils sont

$$Y_1(f),\quad Y_2(f),\quad \ldots,\quad Y_{m-1}(f),\quad Y_m(f), \tag{24}$$

$$XY_i(f) - Y_iX(f) = \lambda_i X(f), \tag{25}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

Alors les opérateurs :

$$Y_{m+1}(f), \tag{26}$$

$$XY_{m+1}(f) - Y_{m+1}X(f) = \lambda_{m+1}X(f) \tag{27}$$

et

$$X(f) \tag{28}$$

sont des fonctions linéaires des opérateurs (24) :

$$Y_{m+1}(f) = \sum_{j=1}^{m} \rho_j Y_j(f) = \rho_1 Y_1(f) + \ldots + \rho_{m-1} Y_{m-1}(f) + \rho_m Y_m(f), \tag{29}$$

$$X(f) = \sum_{j=1}^{m} \pi_j Y_j(f) = \pi_1 Y_1(f) + \ldots + \pi_{m-1} Y_{m-1}(f) + \pi_m Y_m(f). \tag{30}$$

En acceptant que

$$\pi_m \neq 0, \tag{31}$$

nous admettons que les opérateurs :

$$X(f), \quad Y_1(f), \quad \ldots, \quad Y_{m-2}(f), \quad Y_{m-1}(f) \tag{32}$$

sont indépendants.

Sur le fondement des identités (29), (30) on a :

$$\lambda_{m+1}X(f) = \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \rho_k\right) X(f) + \sum_{j=1}^{m} X(\rho_j)\, Y_j(f), \tag{33}$$

$$0 = \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \pi_k\right) X(f) + \sum_{j=1}^{m} X(\pi_j)\, Y_j(f); \tag{34}$$

$$\left(\lambda_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \rho_k\right) \sum_{j=1}^{m} \pi_j Y_j(f) = \sum_{j=1}^{m} X(\rho_j)\, Y_j(f), \tag{35}$$

$$-\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \pi_k\right) \sum_{j=1}^{m} \pi_j Y_j(f) = \sum_{j=1}^{m} X(\pi_j)\, Y_j(f); \tag{36}$$

$$\left(\lambda_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \rho_k\right) \pi_j = X(\rho_j), \tag{37}$$

$$j = 1, 2, \ldots, m,$$

$$X(\log \pi_j) = -\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \pi_k, \tag{38}$$

$$j = 1, 2, \ldots, m.$$

Les égalités (38) donnent les relations :

$$X(\log \pi_1) = \ldots = X(\log \pi_{m-1}) = X(\log \pi_m) = -\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \pi_k; \tag{39}$$

$$\begin{aligned} \rho_0 \pi_1 &= \Phi_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}), \\ \rho_0 \pi_2 &= \Phi_2(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \rho_0 \pi_{m-1} &= \Phi_{m-1}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}), \end{aligned} \tag{40}$$

où les Φ_i sont quelques fonctions des arguments définies par ce que l'opérateur $X(f)$ est défini.

De plus

$$\rho_0 = \frac{1}{\pi_m}, \tag{41}$$

$$X(\rho_0) = \sum_{\nu=1}^{m-1} \lambda_\nu \Phi_\nu + \lambda_m. \tag{42}$$

L'identité (30) prend la forme :

$$\rho_0 X(f) = \sum_{j=1}^{m-1} \Phi_j Y_j(f) + Y_m(f). \tag{43}$$

Attendu, que certains coefficients π_i de (30) peuvent être nuls, nous venons, en vertu de l'égalité (43), à la conclusion, qu'il existe non moins de deux et non plus de m multiplicateurs ρ_0, en général, fonctions des variables indépendantes, pour lesquels les opérateurs :

$$\rho_0 X(f) \tag{44}$$

sont des expressions linéaires des opérateurs (24) aux coefficients fonctions des intégrales (3) (un des coefficients est égal à l'unité); les rapports des multiplicateurs ρ_0 sont des fonctions des intégrales (3).

Avec un multiplicateur ρ quelconque l'opérateur :

$$\rho X(f) \tag{45}$$

ne possède pas la propriété indiquée.

Des égalités (37), (40), (41) proviennent les relations :

$$\frac{\rho_0 X(\rho_1)}{\Phi_1} = \ldots = \frac{\rho_0 X(\rho_{m-1})}{\Phi_{m-1}} = \frac{\rho_0 X(\rho_m)}{1} = \lambda_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \rho_k; \tag{46}$$

$$\begin{aligned} \rho_1 - \omega \Phi_1 &= \Psi_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}), \\ \rho_2 - \omega \Phi_2 &= \Psi_2(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \rho_{m-1} - \omega \Phi_{m-1} &= \Psi_{m-1}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}). \end{aligned} \tag{47}$$

Les Ψ_i sont toujours des fonctions des arguments arbitraires autant que l'opérateur $Y_{m+1}(f)$ est arbitraire.

De plus

$$\omega = \rho_m; \tag{48}$$

$$\lambda_{m+1} = \rho_0 X(\omega) + \omega X(\rho_0) + \sum_{\nu=1}^{m-1} \lambda_\nu \Psi_\nu,$$

$$\lambda_{m+1} = X(\rho_0 \omega) + \sum_{\nu=1}^{m-1} \lambda_\nu \Psi_\nu. \tag{49}$$

L'identité (29) prend les formes :

$$Y_{m+1}(f) = \sum_{j=1}^{m-1} (\omega \Phi_j + \Psi_j) Y_j(f) + \omega Y_m(f) \tag{50}$$

et, en vertu de (43) :

$$Y_{m+1}(f) = \sum_{j=1}^{m-1} \Psi_j Y_j + \omega \rho_0 X(f). \tag{51}$$

Le coefficient ω peut être nul.

Quand $\rho_m = \omega = 0$:

$$Y_{m+1}(f) = \sum_{j=1}^{m-1} \Psi_j Y_j(f). \tag{52}$$

Admettons ensuite, que le nombre maximum des opérateurs indépendants de l'équation (2) est le même m, et que les opérateurs indépendants sont

$$Y_1(f), \quad Y_2(f), \quad \ldots, \quad Y_{m-1}(f), \quad X(f). \tag{53}$$

$$X Y_i(f) - Y_i X(f) = \lambda_i X(f), \tag{54}$$

$$i = 1, 2, \ldots, (m-1),$$

alors les opérateurs :

$$Y_m(f), \qquad Y_{m+1}(f), \tag{55}$$

$$X Y_m(f) - Y_m X(f) = \lambda_m X(f), \qquad X Y_{m+1}(f) - Y_{m+1} X(f) = \lambda_{m+1} X(f) \tag{56}$$

sont des fonctions linéaires des opérateurs (53) :

$$Y_m(f) = \sum_{j=1}^{m-1} \sigma_j Y_j(f) + \sigma X(f), \tag{57}$$

$$Y_{m+1}(f) = \sum_{j=1}^{m-1} \tau_j Y_j(f) + \tau X(f). \tag{58}$$

En acceptant :

$$\sigma \neq 0, \tag{59}$$

nous admettons, que les opérateurs :

$$Y_1(f), \quad Y_2(f), \quad \ldots, \quad Y_{m-1}(f), \quad Y_m(f) \tag{60}$$

sont indépendants.

Sur le fondement des identités (57), (58) on a :

$$\lambda_m X(f) = \left\{ \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k \sigma_k + X(\sigma) \right\} X(f) + \sum_{j=1}^{m-1} X(\sigma_j)\, Y_j(f), \tag{61}$$

$$\lambda_{m+1} X(f) = \left\{ \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k \tau_k + X(\tau) \right\} X(f) + \sum_{j=1}^{m-1} X(\tau_j)\, Y_j(f); \tag{62}$$

$$X(\sigma_j) = 0, \qquad X(\tau_j) = 0, \tag{63}$$
$$j = 1, 2, \ldots, (m-1);$$

$$\sigma_j = \theta_j(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}), \qquad \tau_j = \vartheta_j(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}), \tag{64}$$
$$j = 1, 2, \ldots, (m-1);$$

$$Y_m(f) = \theta_1 Y_1(f) + \theta_2 Y_2(f) + \ldots + \theta_{m-1} Y_{m-1}(f) + \sigma X(f), \tag{65}$$

$$Y_{m+1}(f) = \vartheta_1 Y_1(f) + \vartheta_2 Y_2(f) + \ldots + \vartheta_{m-1} Y_{m-1}(f) + \tau X(f). \tag{66}$$

Dans les cas où

$$\theta_j = -\Phi_j, \qquad \vartheta_j = \Psi_j, \tag{67}$$
$$j = 1, 2, \ldots, (m-1);$$

$$\sigma = \rho_0 \neq 0, \qquad \frac{\tau}{\sigma} = \frac{\tau}{\rho_0} = \omega, \tag{68}$$

les connexions (65), (66) dégénèrent en relations :

$$\rho_0 X(f) = \sum_{j=1}^{m-1} \Phi_j Y_j(f) + Y_m(f), \tag{69}$$

$$Y_{m+1}(f) = \sum_{j=1}^{m-1} \Psi_j Y_j(f) + \omega \rho_0 X(f), \tag{70}$$

$$Y_{m+1}(f) = \sum_{j=1}^{m-1} (\omega \Phi_j + \Psi_j)\, Y_j(f) + \omega Y_m(f), \tag{71}$$

qui sont analogues aux relations (43), (51), (50).

Le coefficient ω peut être nul.

Ainsi se constituent les thèses suivantes.

Première thèse. — Posons, que les équations :

$$X(f) = 0, \qquad H(f) = 0 \tag{72}$$

aient le caractère

$$XH(f) - HX(f) \equiv \lambda X(f) + \mu H(f), \tag{73}$$
$$\lambda \neq 0, \qquad \mu \neq 0.$$

Ayant trouvé une solution de l'équation :

$$X(\log \sigma) = -\mu, \tag{74}$$

on peut écrire les équations :

$$X(f) = 0, \qquad Y(f) = \sigma H(f) = 0, \tag{75}$$

qui satisfont à l'identité :

$$XY(f) - YX(f) \equiv lX(f), \tag{76}$$
$$l = \sigma\lambda \neq 0. \text{ (}^8\text{)}$$

La transformation infinitésimale :

$$Y(f) = \sigma H(f) \tag{77}$$

sera l'opérateur de l'équation $X(f) = 0$.

En substituant dans la relation (73) une intégrale w de l'équation $X(f) = 0$, qui ne satisfait pas l'équation $H(f) = 0$, nous trouverons :

$$X\left[\log \frac{1}{H(w)}\right] = -\mu. \tag{78}$$

Il est clair qu'une solution particulière de l'équation (74) est l'expression :

$$\frac{1}{H(w)}; \tag{79}$$

sa solution générale est

$$\frac{\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})}{H(w)} \tag{80}$$

avec Φ fonction arbitraire des arguments.

Les transformations infinitésimales

$$\frac{H(f)}{H(w)} \tag{81}$$

et

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) \frac{H(f)}{H(w)} \tag{82}$$

sont des opérateurs de l'équation $X(f) = 0$.

([8]) G. PFEIFFER, Théorèmes expliquant une série de questions dans le problème de la permutation des solutions d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S.; 1929, pp. 177-182).

Seconde thèse. — Si, dans l'identité (73), $\mu = 0$:

$$XH(f) - HX(f) \equiv \lambda X(f), \tag{83}$$

alors :

$$H(f) \tag{84}$$

est l'opérateur de l'équation $X(f) = 0$; mais, en substituant w dans l'identité (83), nous remarquons que :

$$H(w) \tag{85}$$

est l'opérateur de l'équation $X(f) = 0$:

$$X\big(H(w)\big) \equiv 0. \tag{86}$$

La transformation infinitésimale :

$$\frac{H(f)}{H(w)} \tag{87}$$

avec la transformation infinitésimale (74) sont simultanément les opérateurs de l'équation $X(f) = 0$.

Pour éviter des cas exceptionnels nous voulons ultérieurement, suppléer toujours à l'opérateur (84) par l'opérateur (87).

Troisième thèse. — Posons qu'une série des équations :

$$H_i(f) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m-1, \qquad m - 1 \leqslant n, \tag{88}$$

qui sont indépendantes entre elles et par rapport à l'équation (2), chacune individuellement, a, avec l'équation (2), $n-2$ intégrales communes, indépendantes; autrement dit, que les équations (88) aient le caractère :

$$XH_i(f) - H_iX(f) \equiv \lambda_i X(f) + \mu_i H_i(f), \qquad i = 1, 2, \ldots, m-1. \tag{89}$$

On demande, pour quels multiplicateurs :

$$s_1, s_2, \ldots, s_{m-1} \tag{90}$$

la transformation infinitésimale :

$$Z(f) = \sum_{i=1}^{m-1} s_i H_i(f) \tag{91}$$

satisfait à l'identité :

$$XZ(f) - ZX(f) \equiv pX(f) + qX(f), \tag{92}$$

ou ce qui est la même chose, l'équation :

$$Z(f) = 0 \tag{93}$$

a, avec l'équation (2), $n - 2$ intégrales communes indépendantes?

En introduisant au lieu des expressions $H_i(f)$ les transformations infinitésimales :

$$U_i(f) = \sigma_i H_i(f) = \frac{\Phi_i(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})}{H_i(w_i)} H_i(f), \tag{94}$$

où les w_i sont des intégrales de l'équation (2), qui ne satisfont pas les équations $H_i(f) = 0$, et Φ_i sont des fonctions arbitraires des arguments, on obtiendra, au lieu des identités (89), les relations :

$$XU_i(f) - U_iX(f) = l_iX(f), \tag{95}$$

$$l_i = \lambda_i\sigma_i = \lambda_i \frac{\Phi_i(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})}{H_i(w_i)}, \tag{96}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m - 1.$$

Ceci donne la possibilité de formuler la thèse posée de la manière suivante.

Une série des équations :

$$U_i(f) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m - 1, \qquad m - 1 \leqslant n, \tag{97}$$

indépendantes entre elles et par rapport à l'équation (2), ayant le caractère (95), on demande, pour quels multiplicateurs :

$$\pi_i = s_i \frac{H_i(w_i)}{\Phi_i(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})}, \tag{98}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m - 1$$

l'expression :

$$Z(f) = \sum_{i=1}^{m-1} \pi_i U_i(f) \tag{99}$$

satisfait à l'identité :

$$XZ(f) - ZX(f) \equiv pX(f) + qZ(f)? \tag{100}$$

De la connexion :

$$XZ(f) - ZX(f) = \sum_{i=1}^{m-1} \{ X(\pi_i) U_i(f) + \pi_i [X U_i(f) - U_i X(f)] \}$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} \{ X(\pi_i) U_i(f) + \pi_i l_i X(f) \} \tag{101}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m-1} \pi_i l_i \right) X(f) + \sum_{i=1}^{m-1} X(\pi_i) U_i(f)$$

découle, que dans les conditions

$$X(\pi_i) = q \pi_i, \tag{102}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m-1,$$

$$X(\log \pi_1) = X(\log \pi_2) = \ldots = X(\log \pi_{m-1}) = q; \tag{103}$$

$$\begin{aligned} \pi_i &= \pi \Psi_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}), \\ \pi_2 &= \pi \Psi_2(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pi_{m-1} &= \pi \Psi_{m-1}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}), \end{aligned} \tag{104}$$

où Ψ_i sont fonctions arbitraires des arguments,
et π fonction arbitraire des variables indépendantes,

l'identité (100) donne

$$XZ(f) - ZX(f) \equiv \left(\sum_{i=1}^{m-1} \pi_i l_i \right) X(f) + q Z(f), \tag{105}$$

$$p = \pi \sum_{i=1}^{m-1} l_i \Psi_i, \qquad q = X(\log \pi). \tag{106}$$

Les multiplicateurs (90) et la transformation infinitésimale (91), (99) sont

$$s_i = \frac{\pi_i \Phi_i(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})}{H_i(w_i)} = \frac{\pi \Psi_i \Phi_i}{H_i(w_i)} = \frac{\pi \Theta_i}{H_i(w_i)} \tag{107}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m-1;$$

$$Z(f) = \pi \sum_{i=1}^{m-1} \Theta_i(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) \frac{H_i(f)}{H_i(w_i)}, \tag{108}$$

avec Θ_i fonctions arbitraires des arguments $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$.

La transformation infinitésimale (91), (99) est ainsi proportionnelle à la somme des produits des opérateurs :

$$\frac{H_i(f)}{H_i(w_i)} \tag{109}$$

de l'équation (2), liés aux équations (88), par des fonctions arbitraires des intégrales (3).

L'opérateur de l'équation (2), construit d'après l'équation (93), a l'aspect :

$$\frac{Z(f)}{Z(w)} = \frac{\sum_{i=1}^{m-1} \Theta_i(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) \dfrac{H_i(f)}{H_i(w_i)}}{\sum_{i=1}^{m-1} \Theta_i(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) \dfrac{H_i(w)}{H_i(w_i)}}, \tag{110}$$

où w est une intégrale de l'équation (2), qui ne satisfait pas l'équation (93); mais les expressions :

$$\frac{H_i(w)}{H_i(w_i)} \tag{111}$$

sont des intégrales de l'équation (2); c'est pourquoi :

$$\frac{Z(f)}{Z(w)} = \sum_{i=1}^{m-1} \vartheta_i(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) \frac{H_i(f)}{H_i(w_i)}, \tag{112}$$

avec ϑ_i fonctions arbitraires des arguments.

Si l'on prend, dans les formules (104), (108), π égal à l'unité, alors d'après (105), (106) l'expression :

$$Z(f) = \sum_{i=1}^{m-1} \Theta_i(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) \frac{H_i(f)}{H_i(w_i)}, \tag{113}$$

est l'opérateur de l'équation (2).

Dans ce cas $Z(w)$ est l'intégrale de l'équation (2).

En fin de compte, nous pouvons déclarer, qu'on ne peut construire, d'après les équations (88), d'autres opérateurs de l'équation (2), sauf les opérateurs (113).

La formule (113) est la formule (52), qui présente le cas particulier des formules (50), (51) avec $\omega = 0$.

Les opérateurs à caractère trivial (7) n'y sont pas compris. Ne sont écrits que les opérateurs du type (8), qui s'expriment par les $m - 1$ opérateurs (109), liés aux équations (88).

Quatrième thèse. — Les opérateurs à caractère trivial du type $\rho_0 X(f)$ seront pris en considération et tous les opérateurs (8) seront trouvés, si nous résolvons le problème suivant.

Soient m équations :

$$Y_1(f) = 0, \quad Y_2(f) = 0, \quad \ldots, \quad Y_{m-1}(f) = 0, \quad Y_m(f) = 0, \tag{114}$$

$$XY_i(f) - Y_i X(f) = \lambda_i X(f), \tag{115}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m,$$

indépendantes entre elles; on doit trouver les multiplicateurs

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m, \tag{116}$$

$$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m, \tag{117}$$

pour lesquels les transformations infinitésimales :

$$Z(f) = \sum_{i=1}^{m} \rho_i Y_i(f), \tag{118}$$

$$\Xi(f) = \sum_{i=1}^{m} \pi_i Y_i(f) \tag{119}$$

donnent des relations du type

$$XZ(f) - ZX(f) \equiv pX(f) + qZ(f), \tag{120}$$

$$X(f) \equiv \Xi(f). \tag{121}$$

Les équations (114) sont dépendantes par rapport à l'équation (2).

Conformément à (31), (34), (36), (38), (39), (40), (41), (43) nous finissons par conclure que :

$$\rho_0 X(f) = \sum_{j=1}^{m-1} \Phi_j Y_j(f) + Y_m(f), \tag{122}$$

$$\rho_0 = \frac{1}{\pi_m}, \tag{123}$$

$$\left.\begin{array}{l} \rho_0 \pi_1 = \Phi_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}), \\ \rho_0 \pi_2 = \Phi_2(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho_0 \pi_{m-1} = \Phi_{m-1}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}). \end{array}\right. \tag{124}$$

Les identités (118), (120) donnent

$$pX(f)+qZ(f)=\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\rho_k\right)X(f)+\sum_{j=1}^{m}X(\rho_j)\,Y_j(f), \tag{125}$$

$$\left(p-\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\rho_k\right)\sum_{j=1}^{m}\pi_j Y_j(f)=\sum_{i=1}^{m}[X(\rho_j)-q\rho_j]\,Y_j(f), \tag{126}$$

$$\left(p-\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\rho_k\right)\pi_j=X(\rho_j)-q\rho_j, \tag{127}$$

$$j=1,2,\ldots,m;$$

$$\rho_0\frac{X(\rho_1)-q\rho_1}{\Phi_1}=\ldots=\rho_0\frac{X(\rho_{m-1})-q\rho_{m-1}}{\Phi_{m-1}}=\rho_0\frac{X(\rho_m)-q\rho_m}{1}=p-\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\rho_k, \tag{128}$$

$$X[\log(\rho_1-\varpi\Phi_1)]=X[\log(\rho_2-\varpi\Phi_2)]=\ldots=X[\log(\rho_{m-1}-\varpi\Phi_{m-1})]=q, \tag{129}$$

$$\varpi=\rho_m; \tag{130}$$

$$\left.\begin{aligned}\rho_1&=\varpi\Phi_1=\varepsilon\Psi_1(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{n-1}),\\ \rho_2&=\varpi\Phi_2=\varepsilon\Psi_2(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{n-1}),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \rho_{m-1}&=\varpi\Phi_{m-1}=\varepsilon\Psi_{m-1}(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{n-1}),\end{aligned}\right. \tag{131}$$

ε étant une fonction arbitraire des variables indépendantes;

$$X(\log\varepsilon)=q. \tag{132}$$

De là :

$$Z(f)=\sum_{j=1}^{m-1}(\varpi\Phi_j+\varepsilon\Psi_j)\,Y_j(f)+\varpi Y_m(f). \tag{133}$$

En vertu de la première thèse, *cf.* (72), (73), (74), (75), (76),

$$\frac{1}{\varepsilon}Z(f)=\sum_{j=1}^{m-1}(\omega\Phi_j-\Psi_j)\,Y_j(f)+\omega Y_m(f), \tag{134}$$

$$\omega=\frac{\varpi}{\varepsilon} \tag{135}$$

est l'opérateur de l'équation (2).

La formule (134) est la formule (50), de laquelle, d'après (122), découle la formule (51) :

$$\frac{1}{\varepsilon}Z(f)=\sum_{j=1}^{m-1}\Psi_j Y_j(f)+\omega\rho_0 X(f). \tag{136}$$

Les fonctions Φ_j sont des fonctions définies des arguments; leur aspect dépend de l'opérateur $X(f)$. Les fonctions Ψ_j sont des fonctions arbitraires des arguments.

Puisque ω est une fonction arbitraire des variables indépendantes, il est clair, que dans les expressions (134), (136) sont renfermés tous les opérateurs à caractère trivial : non seulement $\rho_0 X(f)$, mais aussi $X(f)$, $\rho X(f)$.

La résolution du Problème de M. A. Buhl.

Les coefficients :

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \dots, \quad \eta_n \tag{137}$$

de la transformation infinitésimale :

$$Y(f) = \eta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \eta_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \tag{138}$$

doivent être déterminés de telle manière, que soient vérifiées l'identité :

$$XY(f) - YX(f) \equiv \lambda X(f), \tag{139}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \{ X(\eta_i) - Y(\xi_i) \} \frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv \lambda \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \tag{140}$$

ou, ce qui est la même chose, les identités

$$X(\eta_i) \equiv \lambda \xi_i + Y(\xi_i), \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{141}$$

Les dernières donnent pour la détermination des coefficients (137) le système de Jacobi des équations aux dérivées partielles du premier ordre avec plusieurs fonctions inconnues :

$$\begin{array}{l}
\xi_1 \dfrac{\partial \eta_1}{\partial x_1} + \dots + \xi_n \dfrac{\partial \eta_1}{\partial x_n} = \lambda \xi_1 + \left(\eta_1 \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \dots + \eta_n \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_n} \right), \\
\xi_1 \dfrac{\partial \eta_2}{\partial x_1} + \dots + \xi_n \dfrac{\partial \eta_2}{\partial x_n} = \lambda \xi_2 + \left(\eta_1 \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + \dots + \eta_n \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x_n} \right), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\xi_1 \dfrac{\partial \eta_n}{\partial x_1} + \dots + \xi_n \dfrac{\partial \eta_n}{\partial x_n} = \lambda \xi_n + \left(\eta_1 \dfrac{\partial \xi_n}{\partial x_1} + \dots + \eta_n \dfrac{\partial \xi_n}{\partial x_n} \right).
\end{array} \tag{142}$$

L'intégration du système (142) demande la recherche des intégrales du système ordinaire d'équations différentielles

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \ldots = \frac{dx_n}{\xi_n} = \frac{d\eta_1}{\lambda\xi_1 + \sum \eta_i \frac{\partial \xi_1}{\partial x_i}} = \ldots = \frac{d\eta_n}{\lambda\xi_n + \sum \eta_i \frac{\partial \xi_n}{\partial x_i}} \tag{143}$$

renfermant le système :

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \ldots = \frac{dx_n}{\xi_n} \tag{144}$$

avec les intégrales (3)

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-1}. \tag{145}$$

Désignons les intégrales restantes, outre les intégrales (145) du système (143), par :

$$\chi_1, \quad \chi_2, \quad \ldots, \quad \chi_n; \tag{146}$$

alors l'intégrale générale du système (142) aura la forme :

$$\left.\begin{aligned} &F_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \chi_1, \ldots, \chi_n) = 0, \\ &F_2(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \chi_1, \ldots, \chi_n) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F_n(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \chi_1, \ldots, \chi_n) = 0 \end{aligned}\right. \tag{147}$$

si $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont fonctions arbitraires des arguments.

Cela peut s'écrire

$$\left.\begin{aligned} &\chi_1 = \Psi_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}), \\ &\chi_2 = \Psi_2(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\chi_n = \Psi_n(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}), \end{aligned}\right. \tag{148}$$

si $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ sont fonctions arbitraires des arguments.

Les coefficients (137) s ront définis par les équations (147), (148).

L'intégration du système (143) se partage en deux parties : l'intégration du système (144) et l'intégration du système des équations linéaires ordinaires

$$\left.\begin{aligned} &[\xi_n]\frac{d[\eta_1]}{dx_n} = [\eta_1]\left[\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\right] + \ldots + [\eta_n]\left[\frac{\partial \xi_1}{\partial x_n}\right] + [\lambda\xi_1], \\ &[\xi_n]\frac{d[\eta_2]}{dx_n} = [\eta_1]\left[\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}\right] + \ldots + [\eta_n]\left[\frac{\partial \xi_2}{\partial x_n}\right] + [\lambda\xi_2], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &[\xi_n]\frac{d[\eta_n]}{dx_n} = [\eta_1]\left[\frac{\partial \xi_n}{\partial x_1}\right] + \ldots + [\eta_n]\left[\frac{\partial \xi_n}{\partial x_n}\right] + [\lambda\xi_n], \end{aligned}\right. \tag{149}$$

où les crochets indiquent, que les variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sont remplacées par leurs expressions tirées des équations :

$$\varphi_1 = c_1, \quad \varphi_2 = c_2, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-1} = c_{n-1}. \tag{150}$$

La circonstance, que le système (149) est linéaire, fait que les intégrales (146) ont des propriétés particulières(⁹).

Convenons de dire que la relation (4), (139) est complète, quand $\lambda \neq 0$, et homogène, quand $\lambda = 0$.

La relation complète possède la solution particulière :

$$Y(f) = rX(f), \tag{151}$$

où r est la fonction arbitraire des variables indépendantes, liée à la fonction arbitraire λ par :

$$X(r) = \lambda. \tag{152}$$

Au moyen de la substitution :

$$Y(f) = Z(f) + rX(f) \tag{153}$$

on passe de la relation complète (4), (139) à la relation homogène :

$$XZ(f) - ZX(f) = 0. \tag{154}$$

La solution particulière de la relation homogène (154) est l'expression :

$$Z(f) = X(f). \tag{155}$$

Le fait, que l'opérateur trivial $rX(f)$ satisfait la relation complète (4), (139) et l'opérateur trivial $X(f)$, la relation (154) entraîne une particularité correspondante dans la structure de l'opérateur général de l'équation (2).

Les constantes d'intégration du système (149) étant :

$$K_1, \quad K_2, \quad \ldots, \quad K_n, \tag{156}$$

elles sont des fonctions des constantes :

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_{n-1}. \tag{157}$$

Pour déduire l'intégrale générale du système (142) de l'intégrale générale du système (149) il faut, dans la dernière, remplacer les constantes (156) par les expressions (148).

(⁹) Voir les recherches de M. A. Buhl.

Prenant en considération, que pour n'importe quelle fonction W des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on a l'identité :

$$[\xi_n]\frac{d[\mathrm{W}]}{dx_n} = [\xi_1]\left[\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x_1}\right] + \ldots + [\xi_{n-1}]\left[\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x_{n-1}}\right] + [\xi_n]\left[\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x_n}\right]. \tag{158}$$

on conclut, que le système complet (149) possède la solution :

$$[\eta_1] = [r\xi_1], \quad [\eta_2] = [r\xi_2], \quad \ldots, \quad [\eta_n] = [r\xi_n] \tag{159}$$

et, le système homogène (149), la solution :

$$[\eta_1] = [\xi_1], \quad [\eta_2] = [\xi_2], \quad \ldots, \quad [\eta_n] = [\xi_n]. \tag{160}$$

Posons, que le système de n solutions particulières indépendantes du système homogène (149), qui contient la solution (160), est tel que

$$\begin{array}{l} [\xi_1], \quad [\xi_2], \quad \ldots, \quad [\xi_n], \\ [\eta^1_1], \quad [\eta^1_2], \quad \ldots, \quad [\eta^1_n], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [\eta^{n-1}_1], [\eta^{n-1}_2], \ldots, [\eta^{n-1}_n]. \end{array} \tag{161}$$

Alors l'intégrale générale du système (149) et l'intégrale générale du système (142) ont les aspects :

$$\begin{array}{l} [\eta_1] = \sum_{j=1}^{n-1} \mathrm{K}_j[\eta^j_1] + \mathrm{K}[\xi_1] + [r\xi_1], \\ [\eta_2] = \sum_{j=1}^{n-1} \mathrm{K}_j[\eta^j_2] + \mathrm{K}[\xi_2] + [r\xi_2], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [\eta_n] = \sum_{j=1}^{n-1} \mathrm{K}_j[\eta^j_n] + \mathrm{K}[\xi_n] + [r\xi_n] \end{array} \tag{162}$$

et

$$\begin{array}{l} \eta_1 = \sum_{j=1}^{n-1} \Psi_j\eta^j_1 + \Psi_n\xi_1 + r\xi_1, \\ \eta_2 = \sum_{j=1}^{n-1} \Psi_j\eta^j_2 + \Psi_n\xi_2 + r\xi_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_n = \sum_{j=1}^{n-1} \Psi_j\eta^j_n + \Psi_n\xi_n + r\xi_n. \end{array} \tag{163}$$

De là on trouve la forme de l'opérateur général de l'équation (2) :

$$\begin{aligned} Y(f) &= \sum_{j=1}^{n-1} \Psi_j Y_j(f) + \Psi_n X(f) + r X(f) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \Psi_j Y_j(f) + \rho X(f), \end{aligned} \tag{164}$$

où Ψ_j, Ψ_n sont des fonctions arbitraires des intégrales (3), ρ étant une fonction arbitraire des variables indépendantes, $Y_j(f)$ étant des opérateurs particuliers de l'équation (2), qui avec l'opérateur trivial $X(f)$ constituent un système de n opérateurs indépendants de l'équation (2).

La question de la forme de l'opérateur général de l'équation (2) a été étudiée par M. C. Popovici(10). Il nous semble que nous avons résolu un problème plus général, que celui de M. C. Popovici. Les résultats de M. C. Popovici et les nôtres ne sont pas identiques.

Chez S. Lie(11) on remarque, que les transformations infinitésimales (138) ne peuvent, en général, être trouvées que lorsque l'équation (2) est intégrée, c'est-à-dire jusqu'à ce que les intégrales (3), (145) soient trouvées. C'est pourquoi ultérieurement nous supposerons, que les intégrales (3), (145) sont connues.

Nous avons l'intention de montrer, que la nature des opérateurs de l'équation (2), étudiée par nous, et les propriétés des équations (114) donnent la possibilité, en profitant des intégrales (3), (145) de l'équation (2), de construire, sans intégration du système (149), tous les opérateurs de l'équation (2).

Nous construirons nos raisonnements sur le schème suivant.

D'abord nous chercherons toutes les équations linéaires :

$$V(f) = \delta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \delta_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \delta_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \tag{165}$$

qui ont chacune, avec l'équation (2), $(n-2)$ intégrales communes indépendantes, autrement dit, les équations (165), qui satisfont l'identité :

$$XV(f) - VX(f) \equiv \lambda X(f) + \mu V(f). \tag{166}$$

Plus de n équations indépendantes (165), comme on sait, ne peuvent exister.

---

(10) C. Popovici, *Sur les fonctions adjointes de M. A. Buhl* (Comptes rendus, t. 145, 1907, p. 749).

(11) S. Lie und Fr. Engel, *Theorie der Transformationsgruppen* (Leipzig, 1888, B. I, S. 143).

Celles des équations trouvées (165), qui dépendent visiblement des autres, seront d'abord laissées de côté. Des équations restantes nous détacherons des groupes de n équations indépendantes :

$$V_1(f) = 0, \quad V_2(f) = 0, \quad \ldots, \quad V_{n-1}(f) = 0, \quad V_n(f) = 0, \tag{167}$$
$$XV_i(f) - V_iX(f) = \lambda_i X(f) + \mu_i V_i(f), \tag{168}$$
$$i = 1, 2, \ldots, n$$

et

$$V_1(f) = 0, \quad V_2(f) = 0, \quad \ldots, \quad V_{n-1}(f) = 0, \quad X(f) = 0, \tag{169}$$
$$XV_i(f) - V_iX(f) = \lambda_i X(f) + \mu_i V_i(f), \tag{170}$$
$$i = 1, 2, \ldots, (n-1),$$

conduisant aux groupes des opérateurs indépendants :

$$Y_1(f) = \frac{V_1(f)}{V_1(w_1)}, \quad \ldots, \quad Y_{n-1}(f) = \frac{V_{n-1}(f)}{V_{n-1}(w_{n-1})}, \quad Y_n(f) = \frac{V_n(f)}{V_n(w_n)}. \tag{171}$$

Les w_i sont les intégrales de l'équation (2), qui ne satisfont pas les équations $V_i(f) = 0$, ni

$$Y_1(f) = \frac{V_1(f)}{V_1(w_1)}, \quad Y_2(f) = \frac{V_2(f)}{V_2(w_2)}, \quad \ldots, \quad Y_{n-1}(f) = \frac{V_{n-1}(f)}{V_{n-1}(w_{n-1})}, \quad X(f), \tag{172}$$

w_i étant les intégrales de l'équation (2), qui ne satisfont pas les équations $V_i(f) = 0$.

En appliquant les formules (122), (134), (136) ou, ce qui est la même chose, (43), (50), (51) aux opérateurs (171), nous construisons tous les opérateurs du type (8) de l'équation (2) et les opérateurs à caractère trivial, non seulement $\rho_0 X(f)$, mais aussi $X(f)$, $\rho X(f)$.

Le groupe des équations :

$$V_1(f) = 0, \quad V_2(f) = 0, \quad \ldots, \quad V_{n-1}(f) = 0, \tag{173}$$

indépendantes entre elles et par rapport à l'équation (2), amène aux $n-1$ opérateurs :

$$Y_1(f) = \frac{V_1(f)}{V_1(w_1)}, \quad Y_2(f) = \frac{V_2(f)}{V_2(w_2)}, \quad \ldots, \quad Y_{n-1}(f) = \frac{V_{n-1}(f)}{V_{n-1}(w_{n-1})}, \tag{174}$$

si les w_i sont les intégrales de l'équation (2), qui ne satisfont pas les équations $V_i(f) = 0$, indépendants entre eux et par rapport à l'opérateur trivial $X(f)$.

En appliquant la formule (113) ou, ce qui est la même chose, (52) aux opérateurs (174), nous construisons tous les opérateurs du type (8) de l'équation (2), qui peuvent être exprimés par les $n-1$ opérateurs (174).

L'existence des systèmes (167), (169), (173) sera démontrée.

Il est clair, que d'après l'opérateur général de l'équation (2) on peut écrire immédiatement l'intégrale générale du système jacobien (142).

Au lieu des équations (167), (169), (173) on pourrait considérer les opérateurs correspondants, mais il est plus facile d'avoir à faire avec les équations qu'avec les opérateurs : premièrement, on n'a pas besoin de prendre égard aux multiplicateurs des équations; secondement, les coefficients des connexions, qui lient une équation avec les autres, sont des fonctions des variables indépendantes, tandis que dans les connexions équivalentes, qui expriment un opérateur par des autres, beaucoup des coefficients sont des fonctions des intégrales (3).

Considérons les équations linéaires homogènes aux dérivées partielles du premier ordre :

$$K(f) = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

ou

$$K(f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}, & \frac{\partial f}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u}{\partial x_1}, & \frac{\partial u}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial u}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0 \tag{175}$$

ou encore

$$K(f) = \frac{D(f, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2}, u)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)} = 0,$$

avec

$$\alpha_j = (-1)^{j-1} \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2}, u)}{D(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)}. \tag{176}$$

$$j = 1, 2, \ldots, n.$$

Considérons aussi

$$L(f) \equiv L_{n-1}(f) = \beta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \beta_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \beta_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

$$L(f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}, & \frac{\partial f}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial v}{\partial x_1}, & \frac{\partial v}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial v}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0, \tag{177}$$

$$L(f) = \frac{D(f, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2}, v)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)} = 0,$$

$$\beta_j = (-1)^{j-1} \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2}, v)}{D(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)}, \tag{178}$$

$$j = 1, 2, \ldots, n,$$

qui ont les intégrales communes :

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-2} \tag{179}$$

et, en sus, une intégrale :

$$u = \varphi_{n-1}, \quad v \tag{180}$$

pour chaque.

Les intégrales :

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-2}, \quad \varphi_{n-1} = u \tag{181}$$

sont considérées comme données. L'intégrale v est une fonction arbitraire des variables indépendantes, mais telle, qu'on ne puisse l'exprimer par les intégrales (181) :

$$v \mp \theta(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2}, u). \tag{182}$$

Les transformations infinitésimales $K(f)$, $L(f)$ satisfont l'identité :

$$KL(f) - LK(f) \equiv \lambda K(f) + \mu L(f), \tag{183}$$

$$KL(u) \equiv \mu L(u), \quad LK(v) \equiv -\lambda K(v). \tag{184}$$

En introduisant la notation

$$\omega \equiv \omega_{n-1} = \frac{D(u, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2}, v)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)}, \tag{185}$$

nous aurons :

$$K(v) = \frac{D(v, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}, u)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)} = -\omega, \quad L(u) \equiv L_{n-1}(u) = \frac{D(u, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}, v)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)} = \omega, \quad (186)$$

$$K(v) + L(u) \equiv 0; \quad (187)$$

$$K(\omega) = \mu\omega, \qquad L(\omega) = -\lambda\omega; \quad (188)$$

$$\lambda = -L(\log \omega), \qquad \mu = K(\log \omega); \quad (189)$$

$$KL(f) - LK(f) \equiv L(\log \varpi)\, K(f) - K(\log \varpi)\, L(f), \quad (190)$$

$$\varpi = \frac{1}{\omega}\text{ (12)}. \quad (191)$$

---

(12) *Première remarque.* — En disposant des relations (189), d'après le premier théorème de notre Mémoire, marqué au renvoi (8), nous venons à la conclusion, que le système :

$$G(f) = \frac{1}{\omega} K(f) = 0, \qquad H(f) = \frac{1}{\omega} L(f) = 0$$

est en involution. Ce résultat est une conséquence immédiate de l'identité (183) et des relations (188) :

$$\sum_{h=1}^{n} [K(\beta_h) - L(\alpha_h)] \frac{\partial f}{\partial x_h} \equiv \sum_{h=1}^{n} (\lambda \alpha_h + \mu \beta_h) \frac{\partial f}{\partial x_h},$$

$$\omega[K(\beta_h) - L(\alpha_h)] \equiv \beta_h K(\omega) - \alpha_h L(\omega),$$

$$h = 1, 2, \ldots, n;$$

$$K\left(\frac{\beta_h}{\omega}\right) \equiv L\left(\frac{\alpha_h}{\omega}\right),$$

$$h = 1, 2, \ldots, n.$$

Seconde remarque. — Si v est tel qu'ait lieu la relation :

$$\mu = K(\log \omega) = 0, \qquad K(\omega) = 0, \qquad \omega = \pi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2}, u),$$

alors, comme on voit d'après la première identité (186), v est une solution de l'équation :

$$K(v) = -\pi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2}, u),$$

et le coefficient :

$$\lambda = -L(\log \omega)$$

de la relation :

$$KL(f) - LK(f) \equiv \lambda K(f)$$

est l'intégrale de l'équation (175).

En effet, ayant substitué dans l'identité précédente $f = \log \omega$, on trouve :

$$K(L \log \omega) = 0, \qquad K(\lambda) = 0.$$

Avec l'équation (175) nous avons construit l'équation (177), ayant mis au lieu de l'intégrale φ_{n-1} la fonction arbitraire v. En remplaçant, dans l'équation (175), les intégrales :

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1} \tag{192}$$

par la fonction arbitraire v, nous obtiendrons les $(n-1)$ équations :

$$\begin{aligned} L_1(f) &= \frac{D(f, v, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)} = 0, \\ L_2(f) &= \frac{D(f, \varphi_1, v, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_{n-1}(f) &= \frac{D(f, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-2}, v)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)} = 0, \end{aligned} \tag{193}$$

auxquelles sont attachées les fonctions :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{D(\varphi_1, v, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)} = \omega, \\ \omega_2 &= \frac{D(\varphi_2, \varphi_1, v, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)} = \omega, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega_{n-1} &= \frac{D(\varphi_{n-1}, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-2}, v)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)} = \omega\text{[13]}. \end{aligned} \tag{194}$$

Par le multiplicateur de Jacobi M :

$$M = \frac{(-1)^{j-1}}{\xi_j} \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})}{D(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)} = \frac{\alpha_j}{\xi_j}, \tag{195}$$
$$j = 1, 2, \ldots, n$$

l'équation (2) :

$$X(f) = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \tag{196}$$

se réduit à la forme (175)

$$X(f) \equiv \frac{1}{M} K(f); \tag{197}$$

---

[13] Les systèmes :

$$G(f) = \frac{1}{\omega} K(f) = 0, \qquad H_i(f) = \frac{1}{\omega} L_i(f) = 0,$$

si i est un des nombres $1, 2, \ldots, n-1$, sont en involution.

par un autre multiplicateur de Jacobi N elle se réduira à

$$E(f) = \gamma_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \gamma_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \gamma_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

$$E(f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}, & \frac{\partial f}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \psi_{n-2}}{\partial x_1}, & \frac{\partial \psi_{n-2}}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial \psi_{n-2}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial t}{\partial x_1}, & \frac{\partial t}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial t}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0 \qquad (198)$$

$$E(f) = \frac{D(f, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-2}, t)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)} = 0;$$

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \Phi_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2}, u), \\ \psi_2 &= \Phi_2(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2}, u), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_{n-2} &= \Phi_{n-2}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2}, u), \\ t = \psi_{n-1} &= \Phi_{n-1}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2}, u); \end{aligned} \qquad (199)$$

$$Q = \frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1})}{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})} \not\equiv 0. \qquad (200)$$

Il est clair que :

$$E(f) \equiv QK(f), \qquad (201)$$

$$N = \frac{(-1)^{j-1}}{\xi_j} \frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})}{D(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)} = \frac{\gamma_j}{\xi_j} = QM, \qquad (202)$$

$$j = 1, 2, \ldots, n$$

$$X(f) = \frac{1}{N} E(f) \equiv \frac{1}{MQ} E(f) \equiv \frac{1}{M} K(f). \qquad (203)$$

Pour former le système, analogue au système (175), (177) renfermant l'équation (198), il faut joindre à la dernière l'équation :

$$F(f) = \delta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \delta_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \delta_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

$$F(f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}, & \frac{\partial f}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \psi_{n-2}}{\partial x_1}, & \frac{\partial \psi_{n-2}}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial \psi_{n-2}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial v}{\partial x_1}, & \frac{\partial v}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial v}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0 \tag{204}$$

$$F(f) = \frac{D(f, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-2}, v)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)} = 0;$$

$$F(f) = \sum_{\lambda_1=1}^{n-1} \sum_{\lambda_2=1}^{n-1} \cdots \sum_{\lambda_{n-2}=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \lambda_2} \cdots \frac{\partial \Phi_{n-2}}{\partial \lambda_{n-2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}, & \frac{\partial f}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \varphi_{\lambda_{n-2}}}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi_{\lambda_{n-2}}}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_{\lambda_{n-2}}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial v}{\partial x_1}, & \frac{\partial v}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial v}{\partial x_n} \end{vmatrix} \tag{205}$$

$$= (-1)^{n-2} \frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-2})}{D(\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-1})} L_1(f) + (-1)^{n-3} \frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-2})}{D(\varphi_1, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-1})} L_2(f) + \ldots + \frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-2})}{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2})} L_{n-1}(f) = 0.$$

Le système d'équations :

$$E(f) = 0, \qquad F(f) = 0 \tag{206}$$

possède le caractère :

$$EF(f) - FE(f) \equiv F(\log \varpi_1) E(f) - E(\log \varpi_1) F(f), \tag{207}$$

$$\varpi_1 = \frac{1}{\omega_1}, \tag{208}$$

$$\omega_1 = \omega_{1,n-1} = F(f) = -E(v) = \frac{D(t, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-2}, v)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)} = Q\omega. \tag{209}$$

Les équations, analogues aux équations (193), sont

$$
\begin{aligned}
F_1(f) &= \frac{D(f, v, \psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)}, \\
F_2(f) &= \frac{D(f, \psi_1, v, \psi_3, \ldots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
F_{n-1}(f) &= \frac{D(f, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-2}, v)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)},
\end{aligned}
\tag{210}
$$

c'est-à-dire

$$
\begin{aligned}
&\frac{D(\Phi_2, \Phi_3, \ldots, \Phi_{n-1})}{D(\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-1})} L_1(f) - \frac{D(\Phi_2, \Phi_3, \ldots, \Phi_{n-1})}{D(\varphi_1, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-1})} L_2(f) + \ldots + (-1)^{n-2} \frac{D(\Phi_2, \Phi_3, \ldots, \Phi_{n-1})}{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2})} L_{n-1}(f) = 0, \\
&-\frac{D(\Phi_1, \Phi_3, \ldots, \Phi_{n-1})}{D(\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-1})} L_1(f) + \frac{D(\Phi_1, \Phi_3, \ldots, \Phi_{n-1})}{D(\varphi_1, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-1})} L_2(f) + \ldots + (-1)^{n-3} \frac{D(\Phi_1, \Phi_3, \ldots, \Phi_{n-1})}{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2})} L_{n-1}(f) = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&(-1)^{n-2} \frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-2})}{D(\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-1})} L_1(f) + (-1)^{n-3} \frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-2})}{D(\varphi_1, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-1})} L_2(f) + \ldots + \frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-2})}{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2})} L_{n-1}(f) = 0.
\end{aligned}
$$

Attendu, que les coefficients de $L_1(f)$, $L_2(f)$, $\ldots$, $L_{n-1}(f)$ dans les relations (210) donnent un déterminant différent de zéro, parce qu'il est réciproque par rapport au déterminant (200), les systèmes :

$$
F_1(f) = 0, \quad F_2(f) = 0, \quad \ldots, \quad F_{n-1}(f) = 0 \tag{211}
$$

et

$$
L_1(f) = 0, \quad L_2(f) = 0, \quad \ldots, \quad L_{n-1}(f) = 0 \tag{212}
$$

sont équivalents.

De là suit que les équations (211) et tous les multiplicateurs de Jacobi, sauf M, peuvent être laissés de côté.

Considérons le système :

$$
X(f) = \rho K(f) = 0, \qquad Y(f) = L(f) = 0, \tag{213}
$$

en entendant par $L(f)$ l'un des

$$
L_1(f), \quad L_2(f), \quad \ldots, \quad L_{n-1}(f). \tag{214}
$$

En vertu de l'identité (190), qui est juste pour tous les $L(f)$, le système (213) possède la propriété :

$$
\begin{aligned}
XY(f) - YX(f) &\equiv L\left(\log\frac{\varpi}{\rho}\right) X(f) - \rho K(\log \varpi)\, Y(f) \\
&\equiv L\left(\log\frac{M}{\omega}\right) X(f) + \frac{1}{M} K(\log \omega)\, Y(f) \\
&\equiv L\left(\log\frac{M}{\omega}\right) X(f) + X(\log \omega)\, L(f).
\end{aligned}
\tag{215}
$$

Quand v est tel que :

$$K(\log \omega) \not\equiv 0, \qquad K(\omega) \not\equiv 0, \qquad X(\omega) \not\equiv 0, \tag{216}$$

comme opérateur de l'équation (2) on peut employer l'expression :

$$\frac{Y(f)}{Y[\theta(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}, u)]} = \frac{L(f)}{L[\theta(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}, u)]} = \frac{L(f)}{\frac{\partial\theta}{\partial u}\omega}, \tag{217}$$

où $\theta(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}, u)$ est une fonction arbitraire des intégrales (3) de l'équation (2), qui dépend de u :

$$\frac{\partial\theta}{\partial u} \neq 0. \tag{218}$$

Si

$$K(\log \omega) \equiv 0, \qquad K(\omega) \equiv 0, \qquad X(\omega) = 0, \tag{219}$$

l'expression :

$$Y(f) = L(f), \tag{220}$$

est l'opérateur de l'équation (2); en même temps

$$Y[\theta(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}, u)] = L[\theta(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}, u)] = \frac{\partial u}{\partial\theta}\omega \tag{221}$$

est l'intégrale de l'équation (2).

Les opérateurs de l'équation (2), étant multipliés ou divisés par des intégrales de l'équation (2), restent opérateurs, c'est pourquoi au lieu des opérateurs (217), (220) nous prenons l'opérateur :

$$\frac{L(f)}{\omega}. \tag{222}$$

Les équations (212) donnent les opérateurs :

$$\frac{L_1(f)}{\omega}, \quad \frac{L_2(f)}{\omega}, \quad \ldots, \quad \frac{L_{n-1}(f)}{\omega}. \tag{223}$$

Nous n'avons plus qu'à résoudre cette dernière question : Quel est le nombre des équations indépendantes dans le groupe, constitué par l'équation (2) et les équations telles que (212), où v, en chaque équation, prend toutes les valeurs possibles.

Ayant d'abord accepté dans une des équations (212), pour être précis, dans la dernière :

$$L_{n-1}(f) = L(f) = 0, \tag{224}$$

v égal à :

$$v_1,\quad v_2,\quad \ldots,\quad v_n, \tag{225}$$

$$\frac{D(v_1, v_2, \ldots, v_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \not\equiv 0, \tag{226}$$

nous présentons la question, en indiquant les équations correspondantes par :

$$L^{(1)}(f) = 0, \quad L^{(2)}(f) = 0, \quad \ldots, \quad L^{(n)}(f) = 0, \tag{227}$$

s'il existe des fonctions (225), dont les équations (227) sont indépendantes?

Pour cela on devra examiner le déterminant R

$$\begin{vmatrix} \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2}, v_1)}{D(x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n)}, & \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2}, v_1)}{D(x_1, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n)}, & \ldots, & \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2}, v_1)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1})} \\ \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2}, v_2)}{D(x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n)}, & \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2}, v_2)}{D(x_1, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n)}, & \ldots, & \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2}, v_2)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1})} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2}, v_n)}{D(x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n)}, & \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2}, v_n)}{D(x_1, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n)}, & \ldots, & \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2}, v_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1})} \end{vmatrix}$$

ou

$$R = \begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \ldots, & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \ldots, & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1}, & \alpha_{n2}, & \ldots, & \alpha_{nn} \end{vmatrix}. \tag{228}$$

En décomposant chaque élément :

$$\alpha_{\rho j} = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2}, v_\rho)}{D(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)}, \tag{229}$$
$$\rho = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n$$

d'après les dérivées de la fonction v_ρ,

$$\alpha_{\rho j} = (-1)^n \left[A_{1j}\frac{\partial v_\rho}{\partial x_1} + (-1)^1 A_{2j}\frac{\partial v_\rho}{\partial x_2} + \ldots + (-1)^{j-2} A_{j-1,j}\frac{\partial v_\rho}{\partial x_{j-1}} + (-1)^j C_{j,j+1}\frac{\partial v_\rho}{\partial x_{j+1}} + \ldots + (-1)^{n-1} C_{jn}\frac{\partial v_\rho}{\partial x_n} \right] \tag{230}$$

avec un coefficient évidemment nul pour la dérivée de v_ρ par rapport à x_j.

De plus

$$A_{\sigma\tau} \text{ et } -C_{\sigma\tau}, \qquad \sigma \neq \tau, \tag{231}$$

sont les déterminants de la matrice :

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{j-1}}, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{j+1}}, & \ldots, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\
\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_{j-1}}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_j}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_{j+1}}, & \ldots, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{\partial\varphi_{n-2}}{\partial x_1}, & \frac{\partial\varphi_{n-2}}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial\varphi_{n-2}}{\partial x_{j-1}}, & \frac{\partial\varphi_{n-2}}{\partial x_j}, & \frac{\partial\varphi_{n-2}}{\partial x_{j+1}}, & \ldots, & \frac{\partial\varphi_{n-2}}{\partial x_n},
\end{array} \tag{232}$$

que l'on obtient en barrant les colonnes σ, τ, nous remarquons, que :

$$R = (-1)^{\frac{(3n-1)n}{2}} \cdot \frac{D(v_1, v_2, \ldots, v_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \cdot S, \tag{233}$$

$$S = \begin{vmatrix}
0, & C_{12}, & C_{13}, & \ldots, & C_{1,n-1}, & C_{1n} \\
A_{12}, & 0, & C_{23}, & \ldots, & C_{2,n-1}, & C_{2n} \\
A_{13}, & A_{23}, & 0, & \ldots, & C_{3,n-1}, & C_{3n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
A_{1n}, & A_{2n}, & A_{3n}, & \ldots, & A_{n-1,n}, & 0
\end{vmatrix}. \tag{234}$$

Le déterminant S est un déterminant symétrique gauche, c'est pourquoi on ne peut fort souvent disposer les fonctions (225), (226), par rapport auxquelles les équations (227) soient indépendantes.

Essayons de prendre les équations :

$$\begin{aligned}
L_1^{(1)}(f) &= \frac{D(f, v_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)} = 0, \\
L_2^{(2)}(f) &= \frac{D(f, \varphi_1, v_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)} = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
L_{n-1}^{(n-1)}(f) &= \frac{D(f, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-2}, v_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)} = 0, \\
L_{n-1}^{(n)}(f) &= \frac{D(f, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-2}, v_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)} = 0,
\end{aligned} \tag{235}$$

$$\frac{D(v_1, v_2, \ldots v_{n-1}, v_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_n)} \not\equiv 0, \tag{236}$$

$$v_n \neq \theta(v_{n-1}, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}), \tag{237}$$

qui donnent les opérateurs ;

$$Y_1(f) \equiv \frac{L_1^{(1)}(f)}{\omega^{(1)}}, \quad Y_2(f) = \frac{L_2^{(2)}(f)}{\omega^{(2)}}, \quad \ldots, \quad Y_{n-1}(f) = \frac{L_{n-1}^{(n-1)}(f)}{\omega^{(n-1)}}, \quad Y_n = \frac{L_{n-1}^{(n)}(f)}{\omega^{(n)}}, \tag{238}$$

$$\omega^{(i)} = \frac{D(\varphi_{n-1}, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2}, v_i)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)}, \tag{239}$$

possédant les propriétés

$$\begin{array}{llll}
Y_1(\varphi_1) = \dfrac{L_1^{(1)}(\varphi_1)}{\omega^{(1)}} = 1, & Y_1(\varphi_2) = \dfrac{L_1^{(1)}(\varphi_2)}{\omega^{(1)}} = 0, & \ldots, & Y_1(\varphi_{n-1}) = \dfrac{L_1^{1}(\varphi_{n-1})}{\omega^{(1)}} = 0, \\
Y_2(\varphi_1) = \dfrac{L_2^{(2)}(\varphi_1)}{\omega^{(2)}} = 0, & Y_2(\varphi_2) = \dfrac{L_2^{2}(\varphi_2)}{\omega^{(2)}} = 1, & \ldots, & Y_2(\varphi_{n-1}) = \dfrac{L_2^{(2)}(\varphi_{n-1})}{\omega^{(2)}} = 0, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
Y_{n-1}(\varphi_1) = \dfrac{L_{n-1}^{(n-1)}(\varphi_1)}{\omega^{(n-1)}} = 0, & Y_{n-1}(\varphi_2) = \dfrac{L_{n-1}^{(n-1)}(\varphi_2)}{\omega^{(n-1)}} = 0, & \ldots, & Y_{n-1}(\varphi_{n-1}) = \dfrac{L_{n-1}^{(n-1)}(\varphi_{n-1})}{\omega^{(n-1)}} = 1, \\
Y_n(\varphi_1) = \dfrac{L_{n-1}^{(n)}(\varphi_1)}{\omega^{(n)}} = 0, & Y_n(\varphi_2) = \dfrac{L_{n-1}^{(n)}(\varphi_2)}{\omega^{(n)}} = 0, & \ldots, & Y_n(\varphi_{n-1}) = \dfrac{L_{n-1}^{(n)}(\varphi_{n-1})}{\omega^{(n)}} = 1.
\end{array} \tag{240}$$

Il est facile de voir, que les équations (235) et les opérateurs (238) sont indépendants.

En effet, si l'on avait l'identité :

$$Q_1 L_1^{(1)}(f) + Q_2 L_2^{(2)}(f) + \ldots + Q_{n-1} L_{n-1}^{(n-1)}(f) + Q_n L_{n-1}^{(n)}(f) \equiv 0, \tag{241}$$

alors, en substituant à la place de f :

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-2}, \tag{242}$$

on verrait, que :

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad \ldots, \quad Q_{n-2} = 0; \tag{243}$$

en substituant à la place de f :

$$\varphi_{n-1}, \tag{244}$$

on obtiendrait :

$$Q_{n-1}\omega^{(n-1)} + Q_n\omega^{(n)} = 0. \tag{245}$$

L'identité (241) se réduit à l'identité :

$$\frac{L_{n-1}^{(n-1)}(f)}{\omega^{(n-1)}} = \frac{L_{n-1}^{(n)}(f)}{\omega^{(n)}}, \tag{246}$$

qui n'est possible qu'avec la relation :

$$v_n = \theta(v_{n-1}, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2}), \tag{247}$$

mais cela contredit l'hypothèse (237).

Les équations (235) et les opérateurs (238), construits par elles, sont donc indépendants.

Considérons les équations :

$$L_1^{(1)}(f) = 0, \quad L_2^{(2)}(f) = 0, \quad \ldots, \quad L_{n-1}^{(n-1)}(f) = 0 \quad X(f) = 0. \tag{248}$$

Elles-mêmes et les opérateurs correspondants :

$$Y_1(f) = \frac{L_1^{(1)}(f)}{\omega^{(1)}}, \quad Y_2(f) = \frac{L_2^{(2)}(f)}{\omega^{(2)}}, \quad \ldots, \quad Y_{n-1}(f) = \frac{L_{n-1}^{(n-1)}(f)}{\omega^{(n-1)}}, \quad X(f) \tag{249}$$

sont aussi indépendants.

En substituant, dans l'identité :

$$R_1 Y_1(f) + R_2 Y_2(f) + \ldots + R_{n-1} Y_{n-1}(f) + RX(f) \equiv 0, \tag{250}$$

au lieu de f, les $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$, nous nous convaincrons, qu'elle n'est possible que, quand les coefficients

$$R_1 = R_2 = \ldots = R_{n-1} = R = 0. \tag{251}$$

Ainsi donc, les opérateurs :

$$Y_1(f), \quad Y_2(f), \quad \ldots, \quad Y_{n-1}(f), \quad Y_n(f), \quad X(f) \tag{252}$$

satisfont aux conditions des opérateurs (24), (32) et (53), (60), les équations

$$L_1^{(1)}(f) = 0, \quad L_2^{(2)}(f) = 0, \quad \ldots, \quad L_{n-1}^{(n-1)}(f) = 0, \quad L_{n-1}^{(n)}(f) = 0 \tag{253}$$

aux conditions des équations (114).

Les opérateurs :

$$Y_1(f), \quad Y_2(f), \quad \ldots, \quad Y_{n-1}(f) \tag{254}$$

possèdent les propriétés des opérateurs (174) et les équations :

$$L_1^{(1)}(f) = 0, \quad L_2^{(2)}(f) = 0, \quad \ldots, \quad L_{n-1}^{(n-1)}(f) = 0 \tag{255}$$

les propriétés des équations (173).

Nous avons le droit de mettre à profit les formules (122), (134), (136), ou ce qui est la même chose, (43), (50), (51) et la formule (113) qui est la même que (52).

Mais, avant tout, déterminons les valeurs de ρ_0 :

$$\rho_0 = \frac{1}{\pi_i}, \qquad \pi_i \neq 0, \tag{256}$$

$$i = \text{un des nombres } 1, 2, \ldots, n,$$

d'après la relation :

$$X(f) = \pi_1 Y_1(f) + \pi_2 Y_2(f) + \ldots + \pi_{n-1} Y_{n-1}(f) + \pi_n Y_n(f). \tag{257}$$

Ayant substitué dans l'identité (257) à la place de f, les $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2}$ et φ_{n-1}, nous viendrons à la conclusion :

$$\pi_1 = \pi_2 = \ldots = \pi_{n-2} = 0, \tag{258}$$

$$\pi_n = -\pi_{n-1} = \pi, \tag{259}$$

$$X(f) = \pi \{ Y_n(f) - Y_{n-1}(f) \}. \tag{260}$$

Donc ρ_0 a deux significations

$$\rho_0 = \frac{1}{\pi} \quad \text{et} \quad \rho_0 = -\frac{1}{\pi}. \tag{261}$$

Ayant substitué dans (260) à la place de f, les v_{n-1}, v_n, nous obtiendrons pour π deux expressions identiques

$$\pi = \frac{X(v_{n-1})}{Y_n(v_{n-1})} \quad \text{et} \quad \pi = -\frac{X(v_n)}{Y_{n-1}(v_n)}. \tag{262}$$

Les multiplicateurs π et $\rho\pi$, dans les expressions (260), et

$$\rho X(f) = \rho\pi \{ Y_n(f) - Y_{n-1}(f) \}, \tag{263}$$

ne sont pas, en général, des fonctions des intégrales (3).

Les relations (122), (43) :

$$\rho_0 X(f) = \sum_{j=1}^{n-2} \Phi_j Y_j(f) + \Phi_{n-1} Y_{n-1}(f) + Y_n(f) \tag{264}$$

sont équivalentes à (260)

$$\rho_0 X(f) = \frac{1}{\pi} X(f) = -Y_{n-1}(f) + Y_n(f). \tag{265}$$

De là résulte, que :

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \ldots = \Phi_{n-2} = 0, \quad \Phi_{n-1} = -1. \tag{266}$$

Les opérateurs $Z(f)$, construits d'après les formules (134), (50) et les formules (136), (51) qui en proviennent, sont tels que

$$Z(f) = \sum_{j=1}^{n-1} \Psi_j Y_j(f) + \omega \{ Y_n(f) - Y_{n-1}(f) \}, \tag{267}$$

$$Z(f) = \sum_{j=1}^{n-1} \Psi_j Y_j(f) + \omega \rho_0 X(f). \tag{268}$$

Les formules (113), (52) donnent les opérateurs

$$Z(f) = \sum_{j=1}^{n-1} \Psi_j Y_j(f). \tag{269}$$

Appelons le multiplicateur λ de la relation (4) *multiplicateur affectant* de l'opérateur (1) par rapport à l'équation (2); les opérateurs (1) avec *multiplicateur affectant* $\lambda = 0$ seront nommés *opérateurs définis*.

Ayant trouvé la solution de l'équation

$$X(r) = \lambda, \tag{270}$$

c'est-à-dire la solution particulière :

$$r = r_0 \tag{271}$$

et la solution générale :

$$r = r_0 + \theta(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}), \tag{272}$$

avec θ fonction arbitraire des arguments, nous tirerons des opérateurs (1), satisfaisant la relation (4), les opérateurs définis par la formule :

$$Z(f) = Y(f) + rX(f), \tag{273}$$

$$XZ(f) - ZX(f) = \{ \lambda - X(r) \} X(f) = 0. \tag{274}$$

Les opérateurs définis (273) donnent la possibilité de construire des opérateurs (1) de chaque *multiplicateur affectant* λ à l'aide des formules :

$$Y(f) = Z(f) + rX(f), \tag{275}$$

$$X(r) = \lambda, \tag{276}$$

$$XY(f) - YX(f) = \lambda X(f). \tag{277}$$

De ce qui est dit, suit, qu'entre les problèmes de M. A. Buhl et de S. Lie, desquels nous avons parlé au Congrès international des Mathématiciens à Bologne([14]), existe un rapport réciproque simple.

Problème de M. A. Buhl. — Trouver les transformations infinitésimales :

$$Z(f), \tag{278}$$

qui satisfont à l'identité :

$$XZ(f) - ZX(f) \equiv 0. \tag{279}$$

Problème de S. Lie. — Trouver les transformations infinitésimales :

$$Y(f), \tag{280}$$

définies par la relation :

$$XY(f) - YX(f) = \lambda X(f), \tag{281}$$

avec λ fonction arbitraire des variables indépendantes.

Il est clair, que :

$$Z(f) = Y(f) - rX(f), \tag{282}$$

$$X(r) = \lambda. \tag{283}$$

L'intégration du système (142) de Jacobi peut être simplifiée, si l'on scinde son intégration non pas en deux, mais en trois parties et de la manière suivante.

Ayant recherché la solution particulière (271) de l'équation (270), effectuons dans la relation (139) la transformation :

$$Y(f) = Z(f) + rX(f). \tag{284}$$

La relation (139) ira vers l'identité :

$$XZ(f) - ZX(f) \equiv 0, \tag{285}$$

$$Z(f) = z_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + z_n \frac{\partial f}{\partial x_n}, \tag{286}$$

$$z_j = \eta_j - r\xi_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n \tag{287}$$

([14]) G. Pfeiffer, Quelques additions au problème de M. A. Buhl (Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna, 1928, t. III, pp. 45-46).

et le système de Jacobi (142) sera remplacé par le système de Jacobi plus simple :

$$\begin{aligned}
\xi_1 \frac{\partial z_1}{\partial x_1} + \ldots + \xi_n \frac{\partial z_1}{\partial x_n} &= z_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \ldots + z_n \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n}, \\
\xi_1 \frac{\partial z_2}{\partial x_1} + \ldots + \xi_n \frac{\partial z_2}{\partial x_n} &= z_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + \ldots + z_n \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\xi_1 \frac{\partial z_n}{\partial x_1} + \ldots + \xi_n \frac{\partial z_n}{\partial x_n} &= z_1 \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} + \ldots + z_n \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n},
\end{aligned} \tag{288}$$

dont l'intégration exige la recherche des intégrales du système :

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \ldots = \frac{dx_n}{\xi_n} \tag{289}$$

et du système :

$$\begin{aligned}
[\xi_n] \frac{dz_1}{dx_n} &= z_1 \left[\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\right] + z_2 \left[\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\right] + \ldots + z_n \left[\frac{\partial \xi_1}{\partial x_n}\right], \\
[\xi_n] \frac{dz_2}{dx_n} &= z_1 \left[\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}\right] + z_2 \left[\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}\right] + \ldots + z_n \left[\frac{\partial \xi_2}{\partial x_n}\right], \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[\xi_n] \frac{dz_n}{dx_n} &= z_1 \left[\frac{\partial \xi_n}{\partial x_1}\right] + z_2 \left[\frac{\partial \xi_n}{\partial x_2}\right] + \ldots + z_n \left[\frac{\partial \xi_n}{\partial x_n}\right],
\end{aligned} \tag{290}$$

où le crochet $\left[\quad\right]$ indique, que $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sont tirés des équations[15]

$$\varphi_1 = c_1, \quad \varphi_2 = c_2, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-1} = c_{n-1}. \tag{291}$$

---

[15] *Remarque.* — Une solution particulière de la relation (285) est l'expression :

$$Z(f) = X(f);$$

c'est pourquoi le système (290) possède la solution :

$$z_1 = [\xi_1], \quad z_2 = [\xi_2], \quad \ldots, \quad z_n = [\xi_n],$$

laquelle permet de réduire l'intégration du système (290) à l'intégration du système des $n - 1$ équations linéaires et à une quadrature.

Une telle transformation s'effectuera de la manière suivante.

L'intégration du système de Jacobi (288) est équivalenle à l'intégration du système des équations différentielles ordinaires :

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \ldots = \frac{dx_n}{\xi_n} = \frac{dz_1}{\sum z_i \frac{\partial \xi_1}{\partial x_i}} = \ldots = \frac{dz_n}{\sum z_i \frac{\partial \xi_n}{\partial x_i}}. \tag{α}$$

Le but principal de nos recherches était de construire le plus général opérateur de l'équation linéaire homogène (2) aux dérivées partielles du premier ordre, d'après

---

D'après le système (289), à l'aide des proportions dérivées, composons le système :

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \ldots = \frac{dx_n}{\xi_n} = \frac{d\xi_1}{\sum \xi_i \frac{\partial \xi_1}{\partial x_i}} = \ldots = \frac{d\xi_n}{\sum \xi_i \frac{\partial \xi_n}{\partial x_i}}. \qquad (\beta)$$

Les systèmes (α), (β), si l'on fait la transformation :

$$\begin{array}{ll} z_1 = \xi_1 u + \eta'_1, & dz_1 - u\,d\xi_1 = \xi_1 du + d\eta'_1, \\ z_2 = \xi_2 u + \eta'_2, & dz_2 - u\,d\xi_2 = \xi_2 du + d\eta'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{n-1} = \xi_{n-1} u + \eta'_{n-1}, & dz_{n-1} - u\,d\xi_{n-1} = \xi_{n-1} du + d\eta'_{n-1}, \\ z_n = \xi_n u; & dz_n - u\,d\xi_n = \xi_n du, \end{array}$$

où :

$$\eta'_1, \quad \eta'_2, \quad \ldots, \quad \eta'_{n-1}, \quad u$$

sont des fonctions nouvelles, donneront le système

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \ldots = \frac{dx_{n-1}}{\xi_{n-1}} = \frac{dx_n}{\xi_n} = \frac{\xi_1 du + d\eta'_1}{\sum \eta'_i \frac{\partial \xi_1}{\partial x_i}} = \ldots = \frac{\xi_{n-1} du + d\eta'_{n-1}}{\sum \eta'_i \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_i}} = \frac{\xi_n du}{\sum \eta'_i \frac{\partial \xi_n}{\partial x_i}},$$

où l'indice de sommation i varie de 1 à $n-1$.

Ce système, moyennant

$$\frac{\xi_1}{\xi_n} = \xi'_1, \quad \frac{\xi_2}{\xi_n} = \xi'_2, \quad \ldots, \quad \frac{\xi_{n-1}}{\xi_n} = \xi'_{n-1}, \quad -\frac{1}{\xi_n} = v,$$

est équivalent au système :

$$\frac{dx_1}{\xi'_1} = \ldots = \frac{dx_{n-1}}{\xi'_{n-1}} = \frac{dx_n}{1} = \frac{d\eta'_1}{\sum \eta'_i \frac{\partial \xi'_1}{\partial x_i}} = \ldots = \frac{d\eta'_{n-1}}{\sum \eta'_i \frac{\partial \xi'_{n-1}}{\partial x_i}} = \frac{du}{\sum \eta'_i \frac{\partial v}{\partial x_i}}.$$

Le dernier se divise en système (289), système :

$$\begin{array}{l} \frac{d\eta'_1}{dx_n} = \left[\frac{\partial \xi'_1}{\partial x_1}\right]\eta'_1 + \ldots + \left[\frac{\partial \xi'_1}{\partial x_{n-1}}\right]\eta'_{n-1}, \\ \frac{d\eta'_2}{dx_n} = \left[\frac{\partial \xi'_2}{\partial x_1}\right]\eta'_1 + \ldots + \left[\frac{\partial \xi'_2}{\partial x_{n-1}}\right]\eta'_{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d\eta'_{n-1}}{dx_n} = \left[\frac{\partial \xi'_{n-1}}{\partial x_1}\right]\eta'_1 + \ldots + \left[\frac{\partial \xi'_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right]\eta'_{n-1} \end{array}$$

et en la quadrature :

$$\frac{du}{dx_n} = \left[\frac{\partial v}{\partial x_1}\right][\eta'_1] + \left[\frac{\partial v}{\partial x_2}\right][\eta'_2] + \ldots + \left[\frac{\partial v}{\partial x_{n-1}}\right][\eta'_{n-1}].$$

les intégrales de l'équation (2). Cette tâche est remplie. Nous ne croyons pas superflu de résoudre la seconde tâche, dont nous avons déjà fait mention([16]) : former d'après l'opérateur (268) les expressions des coefficients de l'opérateur le plus général (1). Par cela même sera trouvée l'intégrale générale du système jacobien (142).

Puisque :

$$Y_1(f) = \frac{L_1^{(1)}(f)}{\omega^{(1)}} = \frac{1}{\omega^{(1)}} \sum_{j=1}^{n} \beta_{1j}^{(1)} \frac{\partial f}{\partial x_j}, \qquad \beta_{1j}^{(1)} = (-1)^{j-1} \frac{D(v_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)},$$

$$Y_2(f) = \frac{L_2^{(2)}(f)}{\omega^{(2)}} = \frac{1}{\omega^{(2)}} \sum_{j=1}^{n} \beta_{2j}^{(2)} \frac{\partial f}{\partial x_j}, \qquad \beta_{2j}^{(2)} = (-1)^{j-1} \frac{D(\varphi_1, v_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (292)$$

$$Y_{n-1}(f) = \frac{L_{n-1}^{(n-1)}(f)}{\omega^{(n-1)}} = \frac{1}{\omega^{(n-1)}} \sum_{j=1}^{n} \beta_{n-1,j}^{(n-1)} \frac{\partial f}{\partial x_j}, \qquad \beta_{n-1,j}^{(n-1)} = (-1)^{j-1} \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-2}, v_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)},$$

$$Y_n(f) = \frac{L_{n-1}^{(n)}(f)}{\omega^{(n)}} = \frac{1}{\omega^{(n)}} \sum_{j=1}^{n} \beta_{n-1,j}^{(n)} \frac{\partial f}{\partial x_j}, \qquad \beta_{n-1,j}^{(n)} = (-1)^{j-1} \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-2}, v_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)},$$

$$\omega^{(i)} = \frac{D(\varphi_{n-1}, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2}, v_i)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)} \qquad (293)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

alors

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Psi_k}{\omega^{(k)}} \sum_{j=1}^{n} \beta_{kj}^{(k)} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \rho \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \qquad (294)$$

et, par conséquent, les coefficients de l'opérateur le plus général (1) sont

$$\eta_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Psi_k}{\omega^{(k)}} \beta_{k1}^{(k)} + \rho \xi_1,$$

$$\eta_2 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Psi_k}{\omega^{(k)}} \beta_{k2}^{(k)} + \rho \xi_2, \qquad (295)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Psi_k}{\omega^{(k)}} \beta_{kn}^{(k)} + \rho \xi_n.$$

Les expressions (295) représentent l'intégrale générale du système jacobien (142).

([16]) Pages 158-159.

Calculons le *multiplicateur affectant* λ de l'opérateur (268) :

$$Z(f) = \sum_{j=1}^{n-1} \Psi_j Y_j(f) + \rho X(f), \tag{296}$$

$$XZ(f) - ZX(f) = \lambda X(f) \tag{297}$$

de l'équation (2).

De l'identité (215) résulte, que, pour les opérateurs

$$Z_i(f) = \frac{L_i(f)}{\omega}, \tag{298}$$

$$i = 1, 2, \ldots, (n-1),$$

ont lieu les relations :

$$XZ_i(f) - Z_i X(f) = Z_i\left(\log \frac{M}{\omega}\right) X(f), \tag{299}$$

$$i = 1, 2, \ldots, (n-1).$$

C'est pourquoi les *multiplicateurs affectants* λ_j des opérateurs :

$$Y_j(f) = \frac{L_j^j(f)}{\omega^{(j)}}, \tag{300}$$

$$XY_j(f) - Y_j X(f) = \lambda_j X(f), \tag{301}$$

$$j = 1, 2, \ldots, (n-1),$$

en vertu des identités :

$$XY_j(f) - Y_j X(f) = Y_j\left(\log \frac{M}{\omega^{(j)}}\right) X(f), \tag{302}$$

$$j = 1, 2, \ldots, (n-1)$$

sont tels que

$$\lambda_j = Y_j\left(\log \frac{M}{\omega^{(j)}}\right), \tag{303}$$

$$j = 1, 2, \ldots, (n-1).$$

Le *multiplicateur affectant* de l'opérateur (296) est égal à :

$$\lambda = \sum_{j=1}^{n-1} \Psi_j \lambda_j + X(\rho) = \sum_{j=1}^{n-1} \Psi_j Y_j\left(\log \frac{M}{\omega^{(j)}}\right) + X(\rho). \tag{304}$$

EXEMPLE.

Prenons l'équation :

$$X(f) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \tag{305}$$

dont les intégrales indépendantes sont :

$$\varphi_1 = \frac{x_1}{x_n}, \quad \varphi_2 = \frac{x_2}{x_n}, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{x_n}. \tag{306}$$

Le système de Jacobi (142) devient

$$\begin{aligned}
&x_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial \eta_1}{\partial x_n} = \lambda x_1 + \eta_1, \\
&x_1 \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial \eta_2}{\partial x_n} = \lambda x_2 + \eta_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&x_1 \frac{\partial \eta_n}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \eta_n}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial \eta_n}{\partial x_n} = \lambda x_n + \eta_n,
\end{aligned} \tag{307}$$

$$\lambda \equiv \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{308}$$

Son intégration exige, sauf les intégrales (306), la recherche des intégrales du système d'équations linéaires :

$$\begin{aligned}
&x_n \frac{d\eta_1}{dx_n} = \eta_1 + c_1 x_n \lambda(c_1 x_n, c_2 x_n, \ldots, c_{n-1} x_n, x_n), \\
&x_n \frac{d\eta_2}{dx_n} = \eta_2 + c_2 x_n \lambda(c_1 x_n, c_2 x_n, \ldots, c_{n-1} x_n, x_n), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&x_n \frac{d\eta_{n-1}}{dx_n} = \eta_{n-1} + c_{n-1} x_n \lambda(c_1 x_n, c_2 x_n, \ldots, c_{r-1} x_n, x_n), \\
&x_n \frac{d\eta_n}{dx_n} = \eta_n + x_n \lambda(c_1 x_n, c_2 x_n, \ldots, c_{n-1} x_n, x_n);
\end{aligned} \tag{309}$$

$$\frac{\eta_1}{x_n} = \frac{x_1}{x_n} W = \gamma_1, \quad \frac{\eta_2}{x_n} - \frac{x_2}{x_n} W = \gamma_2, \quad \ldots, \quad \frac{\eta_{n-1}}{x_n} - \frac{x_{n-1}}{x_n} W = \gamma_{n-1}, \quad \frac{\eta_n}{x_n} - W = \gamma_n, \tag{310}$$

$$W = \int^{x_n} \lambda\left(\frac{x_1}{x_n} t, \frac{x_2}{x_n} t, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n} t, t\right) \frac{dt}{t}. \text{ (17)} \tag{311}$$

---

(17) L'intégration doit être faite par rapport à t, et alors il faut remplacer t par x_n.

En vertu des relations (148) les intégrales (310) sont des fonctions arbitraires des intégrales (306)

$$\eta_1 = x_1 W + x_n \omega_1, \quad \ldots, \quad \eta_{n-1} = x_{n-1} W + x_n \omega_{n-1}, \quad \eta_n = x_n W + x_n \omega_n, \quad (312)$$

$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ étant des fonctions arbitraires homogènes de dimension nulle.

L'opérateur (1) de l'équation (305) est

$$Y(f) = x_n\left(\omega_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \omega_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \omega_{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} + \omega_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) + WX(f). \quad (313)$$

Le système de Jacobi (288) se distingue du système de Jacobi (142) seulement par ce que $\lambda = 0$; de là résulte, que l'opérateur (286) se déduit de l'opérateur (313), lorsque $W = 0$,

$$Z(f) = x_n\left(\omega_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \omega_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \omega_{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} + \omega_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right); \quad (314)$$

$$Y(f) = Z(f) + WX(f). \quad (315)$$

D'après (284), comme on le voit facilement,

$$X(W) = \lambda. \quad (316)$$

L'opérateur (313) peut être écrit

$$Z(f) = x_n\left(\varpi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \varpi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \varpi_{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\right) + \rho X(f), \quad (317)$$

où :

$$\varpi_j = \omega_j - \frac{x_j}{x_n}\omega_n, \quad (318)$$

$$j = 1, 2, \ldots, (n-1),$$

$$\rho = W + \omega_n. \quad (319)$$

En posant :

$$v_1 = x_1, \quad v_2 = x_2, \quad \ldots, \quad v_{n-1} = x_{n-1}, \quad v_n = x_n, \quad (320)$$

occupons-nous de la construction, pour l'équation (305), des équations (235), des opérateurs (238) et des opérateurs (267), (268).

D'après (235), (239), (238), (265) on trouve immédiatement

$$
\begin{aligned}
L_1^{(1)}(f) &= \frac{(-1)^{n+1}}{x_n^{n-1}}\left\{ 0\,\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_{n-1}\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\right\},\\
L_2^{(2)}(f) &= \frac{(-1)^{n+1}}{x_n^{n-1}}\left\{ x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + 0\,\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_{n-1}\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\right\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (321)\\
L_{n-1}^{(n-1)}(f) &= \frac{(-1)^{n+1}}{x_n^{n-1}}\left\{ x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + 0\,\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\right\},\\
L_{n-1}^{(n)}(f) &= \frac{(-1)^{n}}{x_n^{n-2}}\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}};
\end{aligned}
$$

$$\omega^{(1)} = (-1)^n\frac{x_1}{x_n^n},\quad \omega^{(2)} = (-1)^n\frac{x_2}{x_n^n},\quad \ldots,\quad \omega^{(n-1)} = (-1)^n\frac{x_{n-1}}{x_n^n},\quad \omega^{(n)} = (-1)^n\frac{1}{x_n^{n-1}}; \qquad (322)$$

$$
\begin{aligned}
Y_1(f) &= -\frac{x_n}{x_1}\left\{X(f) - x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\right\},\\
Y_2(f) &= -\frac{x_n}{x_2}\left\{X(f) - x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (323)\\
Y_{n-1}(f) &= -\frac{x_n}{x_{n-1}}\left\{X(f) - x_{n-1}\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\right\},\\
Y_n(f) &= x_n\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}};
\end{aligned}
$$

$$\rho_0 = \frac{x_n}{x_{n-1}}, \qquad (324)$$

Avec :

$$\Psi_j = \varpi_j, \qquad (325)$$
$$j = 1, 2, \ldots, (n-1),$$

les formules (267), (268) donnent l'opérateur :

$$Z(f) = \left(\varpi_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \varpi_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \varpi_{n-1}\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\right) + \rho X(f), \qquad (326)$$

$$\rho = x_n\left(\frac{\omega}{x_{n-1}} - \frac{\varpi_1}{x_1} - \frac{\varpi_2}{x_2} - \ldots - \frac{\varpi_{n-1}}{x_{n-1}}\right). \qquad (327)$$