

A. BUHL

**Tourbillons corpuscules, ondes avec quelques préliminaires sur  
le rôle des opérateurs en physique théorique**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3<sup>e</sup> série*, tome 24 (1932), p. 1-48

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1932\\_3\\_24\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1932_3_24_1_0)

© Université Paul Sabatier, 1932, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ANNALES  
DE LA  
FACULTÉ DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,  
POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES.

---

TOURBILLONS, CORPUSCULES, ONDES

AVEC QUELQUES PRÉLIMINAIRES

SUR LE RÔLE DES OPÉRATEURS EN PHYSIQUE THÉORIQUE

Par M. A. BUHL.



Je conserve toujours les vues fondamentales caractérisant tous mes travaux de Physique théorique. Les identités de base sont de la forme

$$(a) \quad \int_c X dY = \int_A dX dY$$

et donnent des formules *stokiennes* dont la principale, dans ce Mémoire, est la formule (4) du Chapitre second. Cette formule a lieu dans un espace partagé en *canaux* par deux familles de surfaces. Avec une troisième famille nous n'aurions rien d'autre que le mode de repérage correspondant à l'emploi de coordonnées curvilignes quelconques; mais je tiens aux canaux dans lesquels l'analyse stokienne fait glisser, de manière particulièrement simple, des aires, des masses, des charges, ... invariants ou dépendant du temps d'une certaine manière.

Voilà déjà de la propagation corpusculaire.

Les corpuscules peuvent se ranger sur des fronts d'ondes et tout cela, provenant de formules stokiennes, provient analytiquement de la notion de tourbillon. On voit que le titre : *Tourbillons, Corpuscules, Ondes* est rapidement justifié. Bien entendu, il ne s'agit que de schèmes logiques développant, d'une nouvelle manière, l'identité

(a); je n'examine en rien, pour l'instant, comment ces schèmes s'allient aux nombreuses expériences faites, dans ces dernières années, à propos d'ondes et de corpuscules, mais ils sont suffisamment plastiques, surtout de par la *variation des canaux*, pour montrer un aspect possible des liens typiques réunissant les propagations ondulatoires et corpusculaires.

Quant au rôle des opérateurs différentiels de la Physique théorique, on l'aperçoit, à propos des considérations précédentes, dans le Chapitre second et, d'une manière plus abstraite, dans le Chapitre premier.

Les principaux résultats de cet exposé ont été résumés en cinq Notes insérées aux *Comptes rendus*. J'en donne, ci-après, le titre et la date de publication :

1. *La Géométrie ondulatoire. Ondes et invariants intégraux propagés* (t. 191, p. 545; 6 octobre 1930).
2. *La Géométrie ondulatoire. Développements explicites* (t. 191, p. 693; 27 octobre 1930).
3. *Considérations dynamiques adjointes à la Géométrie ondulatoire* (t. 191, p. 1429; 29 décembre 1930).
4. *Propagations conoïdales en Géométrie ondulatoire. Ondes dérivées de l'ellipsoïde* (t. 192, p. 323; 9 février 1931).
5. *La propagation curviligne d'intégrales invariantes. Cas des intégrales doubles. Propagation corpusculaire* (t. 192, p. 1006; 27 avril 1931).

En outre, depuis que le manuscrit du Mémoire est terminé, j'ai publié, toujours aux *Comptes rendus*, trois autres Notes :

6. *Sur une invariance d'intégrales doubles attachée à toute équation différentielle ordinaire du premier ordre* (t. 194, p. 822; 7 mars 1932).
7. *Nouvelles invariances intégrales attachées aux équations différentielles contenant plusieurs paramètres* (t. 194, p. 1114; 29 mars 1932).
8. *Mouvements multiponctuels attachés à l'équation de Jacobi écrite pour le cas d'un seul point* (t. 194; 2 mai 1932).

Les Notes 6 et 7 sont des Notes d'Analyse et de Géométrie pures qui seront développées dans un autre Recueil.

La Note 8 revient, avec plus de précision, sur les considérations du paragraphe 10 du Chapitre II ci-après.

## CHAPITRE I

### Permutations d'intégrales de systèmes différentiels.

J'ai été amené à écrire le présent Chapitre au moins pour trois raisons différentes.

Premièrement, il m'est agréable de revenir au sujet principal de ma Thèse de Doctorat : *Sur les Équations différentielles simultanées et la forme aux dérivées partielles adjointe*, Thèse soutenue le 14 juin 1901. Ce sujet a intéressé de nombreux géomètres, comme peut en faire foi la bibliographie que j'ai donnée, dans le *Mémorial des Sciences mathématiques* (fasc. XXXIII, p. 23); il intéressera sans doute encore et cependant je suis hors d'état d'offrir un exemplaire de ce commencement de mes travaux à d'aimables correspondants qui m'en font la demande. Ma Thèse n'a pas été publiée dans un périodique et les exemplaires d'auteur dont je disposais sont épuisés depuis longtemps. Mes correspondants trouveront, dans ce Chapitre, à la fois une condensation et un perfectionnement de mes idées de jeunesse.

Deuxièmement, parmi les géomètres inspirés récemment par le sujet, il me faut citer, en toute première ligne, M. G. Pfeiffer, de Kiew. M. Pfeiffer m'a communiqué un très important travail que j'ai été fort heureux de pouvoir publier, l'an dernier, dans les présentes *Annales*. Je crois seulement que l'analyse du mathématicien ukrainien pourrait être simplifiée et symétrisée; mais, telle qu'elle est, elle m'a précisément donné le goût de revenir sur mon propre exposé où tout n'était pas non plus aussi simple et aussi symétrique que possible.

Troisièmement, ces permutations d'intégrales sont d'abord des permutations tout court. Et les permutations sont des cas particuliers de systèmes linéaires. Ces systèmes, avec leurs *déterminants* et leurs *matrices*, sont aisés à lier à la question et dirigent celle-ci vers l'appareil actuel de la Physique théorique. Les variables opératrices  $x_i$  et les opérateurs de dérivation partielle en  $x_i$ , s'associent aisément, ne serait-ce que par le théorème d'Euler qui est une autre façon d'avoir recours à l'homogénéité mise généralement d'abord dans les systèmes d'équations algébriques et linéaires.

On verra jouer cette homogénéité, dans le Chapitre second, à propos de considérations physiques.

Enfin je crois que rien de tout ceci ne saurait être développé sans croiser quelque part les savants travaux de M. Élie Cartan, travaux qu'on ne peut guère s'imaginer

dominer de manière à faire, à propos, toutes les comparaisons et toutes les citations qui devraient être faites. Je me borne à citer le Mémoire *Sur la réduction à sa forme canonique de la structure d'un groupe fini et continu* (American Journal of Mathematics, t. 18, 1896), citation déjà faite l'an dernier (p. 140) en tête du travail de M. Pfeiffer. Ce Mémoire réunit, de manière particulièrement profonde, les considérations algébriques et l'emploi d'opérateurs différentiels.

**1. Intégrales. Multiplicateur de Jacobi.** — Pour ce qui suit, il faut avoir constamment présente à l'esprit la *définition* de l'intégrale d'un système différentiel

$$(1) \quad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

Une *intégrale* du système (1) est une fonction, des variables  $x_i$ , qui reste constante en vertu de ce système. Si  $\varphi$  est une telle fonction, on conclut immédiatement de là, d'après  $d\varphi = 0$ , que

$$(2) \quad X(\varphi) = X_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = 0.$$

Il ne peut y avoir que  $n - 1$  intégrales *distinctes*, soient

$$(3) \quad \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}.$$

Toutes les autres sont des fonctions de celles-ci.

Soit  $\varphi_n$  une fonction telle que

$$(4) \quad X(\varphi_n) = 1.$$

Posons

$$(5) \quad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Ce  $D$  est le *multiplicateur de Jacobi*; il permet d'écrire

$$(6) \quad X(f) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$



d'où immédiatement

$$(14) \quad Y(f) = -\frac{1}{D} \left| \begin{array}{c|c} D & \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_n \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{array} & 0 \end{array} \right|.$$

Telle est l'expression de l'opérateur (8), le plus général, permutable avec l'opérateur  $X$  primitivement défini en (2). Le résultat, indépendamment de toute application, a déjà et indéniablement une grande valeur esthétique. Il est, en tout cas, remarquablement lié au multiplicateur de Jacobi.

**3. Permutations d'intégrales.** — Les présentes recherches doivent leur début à l'idée de construire un opérateur  $Y$ , du type (8), qui permuterait les intégrales du système (1) ou de l'équation (2). On voit immédiatement que, lorsque l'égalité (10) est réduite à

$$(15) \quad XY(f) - YX(f) = 0,$$

il suffit que l'on ait  $X(f) = 0$  pour que l'on ait aussi  $X[Y(f)] = 0$ . De plus les intégrales de l'équation  $Y(f) = 0$  sont permutes par l'opérateur  $X$ .

Ces permutations d'intégrales ne conduisent jamais, en pratique, à la découverte d'intégrales nouvelles en partant, par exemple, d'intégrales prises dans la liste (3) et en nombre inférieur à  $n - 1$ . Il est même manifeste que tout ce qui précède suppose que toutes les intégrales de (1) soient connues. Cependant il doit y avoir un très grand intérêt à étudier l'opérateur (14); si les intégrales tendent à former des cycles desquels il est impossible de sortir, il y a, de ce fait, des propriétés cycliques du système (1) ou de l'équation (2) qui, même si elles ne devaient jamais aider à l'intégration proprement dite, n'en seraient pas moins des propriétés fort remarquables. C'est ainsi que la théorie de Galois, relative aux équations algébriques, a pour objet principal la construction d'un opérateur qui permute les racines mais ne donne point obligatoirement des racines inconnues en partant de racines connues.

D'ailleurs nous verrons plus loin cette analogie se préciser, les permutations d'intégrales pouvant se réduire, en certains cas, aux groupes de permutations utilisés en Algèbre.

Revenons à (14) et à (15). Si, dans (14),  $f$  est remplacé par une véritable intégrale de  $X(f) = 0$ , le choix de  $F_n$  n'a aucune influence sur  $Y(f)$ . Car alors  $F_n$  a pour coefficient  $X(f)$  qui est nul, ce que l'on voit immédiatement en remplaçant,



Ici  $D'$  n'est autre chose que  $D$  avec changement des lignes en colonnes et des colonnes en lignes.

D'après (18), si  $f$  est une intégrale, c'est-à-dire une fonction de  $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ , l'expression  $Y(f)$  sera une intégrale aussi, si

$$Y(\varphi_i) = F_i(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Comme  $\frac{\partial f}{\partial \varphi_n}$  est un coefficient nul, on retrouve pour  $Y(\varphi_n)$  ou  $F_n$  la petite discussion du paragraphe précédent et, de toutes façons, l'équation (19) redonne (14).

Cette seconde méthode, comparée à la première, montre qu'il y a, dans la question, une double symétrie. Les termes qui entrent *horizontalement* dans (12) et (8) se retrouvent *verticalement* en (17) et (18).

**5. L'un des aspects de l'opérateur  $Y(f)$ .** — Partant de l'opérateur  $Y(f)$  sous la forme (14), proposons-nous de le développer linéairement par rapport aux fonctions  $F_i$ .

Le résultat est évidemment de la forme

$$Y(f) = U_1(f) F_1 + U_2(f) F_2 + \dots + U_n(f) F_n$$

avec

$$\begin{array}{lll} U_1(\varphi_1) = 1, & U_1(\varphi_2) = 0, \dots, & U_1(\varphi_n) = 0, \\ U_2(\varphi_1) = 0, & U_2(\varphi_2) = 1, \dots, & U_2(\varphi_n) = 0, \\ \dots & \dots & \dots \\ U_n(\varphi_1) = 0, & U_n(\varphi_2) = 0, \dots, & U_n(\varphi_n) = 1. \end{array}$$

Ces  $n^2$  équations ont une existence manifestement assurée par le tableau symbolique

$$-\frac{1}{D} \left| \begin{array}{ccc} & & \\ & D & \\ & & \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{array} \right| \begin{array}{l} U_1(f) \\ U_2(f) \\ \dots \\ U_n(f) \end{array}$$

où chaque  $U_i$  doit être égalé à ce qui serait son mineur *algébrique* si la colonne des  $U_i$  était la dernière colonne d'un déterminant formé, par ailleurs, du  $D$  encadré et de la ligne de dérivées partielles placée sous ce  $D$ . Évidemment, les  $n^2$  équations précédentes peuvent être résumées en

$$U_i(\varphi_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

On voit que ce qu'il y a d'essentiel dans la construction de  $Y(f)$ , c'est la construction préliminaire d'opérateurs  $U_i(f)$  qui sont, en somme, des intégrales du système (1) lorsque  $f$  en est une, mais des intégrales réduites *identiquement* à 1 ou à zéro.

Pour plus de développements, au sujet de ces considérations, on se reportera encore au Mémoire de M. G. Pfeiffer.

Ici, ajoutons seulement que si  $f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$  est une intégrale quelconque de (1),

$$U_i(f) = U_i(\varphi_k) \frac{\partial f}{\partial \varphi_k}$$

en est une aussi. Par suite, quelle que soit la fonction  $\Psi$ ,

$$\Psi[U_1(f), \dots, U_n(f); \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}]$$

en est encore une. Il n'y a pas que des opérateurs différentiels *linéaires*, tels que (8), qui peuvent permuter, d'une manière intéressante, les intégrales d'un système différentiel. Mais les opérateurs linéaires sont les plus maniables et les plus riches en considérations synthétiques.

**6. Nouvelle non-permutabilité.** — Dorénavant, pour abréger l'écriture, nous poserons

$$n - 1 = \nu.$$

D'autre part, pour plus de précision, le symbole (14) sera écrit  $Y_F(f)$  pour indiquer qu'il est formé avec les fonctions

$$(20) \quad F_1(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\nu), \quad F_2(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\nu), \quad \dots, \quad F_\nu(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\nu).$$

Dans  $Y_F(f)$  ainsi constitué, nous pouvons mettre, à la place de  $f$ , l'une quelconque des intégrales

$$(21) \quad G_1(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\nu), \quad G_2(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\nu), \quad \dots, \quad G_\nu(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\nu)$$

d'où l'obtention d'expressions

$$(22) \quad Y_F(G_l)$$

qui devront, bien entendu, être des intégrales de (1).

Imaginons maintenant que, dans les expressions (22), on permute les rôles des  $F$  de (20) et des  $G$  de (21). En d'autres termes, on forme

$$(23) \quad Y_G(F_l).$$

Les expressions (23) seront bien encore des intégrales du système (1) mais, en général, ce ne seront pas les mêmes qu'en (22). En d'autres termes, on a

$$(24) \quad Y_f(G_l) - Y_g(F_l) \neq 0.$$

C'est cette nouvelle non-permutabilité que nous nous proposons d'étudier. Elle est fort importante ne serait-ce que parce qu'elle comprend comme cas particulier la *non-commutativité* des facteurs dans la multiplication algébrique *matricielle*. Mais revenons à l'inégalité (24) qu'il s'agit d'abord d'établir rigoureusement.

En variables  $\varphi$ , en vertu de (9) et (11) et avec  $k$  indice de sommation variant de 1 à  $\nu$ , on a

$$(25) \quad Y_f = F_k \frac{\partial}{\partial \varphi_k}, \quad Y_g = G_k \frac{\partial}{\partial \varphi_k}$$

d'où

$$Y_f Y_g - Y_g Y_f = \left( F_k \frac{\partial G_l}{\partial \varphi_k} - G_k \frac{\partial F_l}{\partial \varphi_k} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi_l} = [Y_f(G_l) - Y_g(F_l)] \frac{\partial}{\partial \varphi_l}.$$

Or les opérateurs (25) sont des opérateurs quelconques à  $\nu$  variables; ils ne sont certainement pas permutables en général et le premier membre de la triple égalité finalement obtenue n'est pas nul. Par suite le crochet du dernier membre n'est pas nul non plus, en général, et ceci démontre (24).

**7. Permutabilité des opérateurs  $Y_f$  et  $Y_g$ .** — Bien que ce ne puisse être le cas général, on peut cependant se proposer d'étudier celui où les opérateurs (25) sont permutables. Il est clair qu'on peut leur donner cette propriété en les construisant, l'un à partir de l'autre, comme on a construit  $Y(f)$  en (14) à partir de  $X(f)$ , la nouvelle construction ne mettant plus en jeu  $n$  variables mais seulement  $\nu = n - 1$ .

**8. Transformations linéaires.** — Revenons maintenant à l'étude de l'expression (22), à partir des systèmes de fonctions (20) et (21) quand ces  $2\nu$  fonctions deviennent linéaires. On aurait, par exemple,

$$(26) \quad F_k = b_{km} \varphi_m, \quad G_l = a_{lp} \varphi_p$$

les indices, tels que  $m$  et  $p$ , répétés deux fois dans un terme monome, étant indices de sommation. On conclut immédiatement

$$(27) \quad Y_f(G_l) = F_k \frac{\partial G_l}{\partial \varphi_k} = a_{lk} b_{km} \varphi_m.$$

C'est le même résultat que si l'on posait

$$\psi_l = a_{lk} \theta_k, \quad \theta_k = b_{km} \varphi_m \quad \text{d'où} \quad \psi_l = a_{lk} b_{km} \varphi_m.$$

Donc introduire, en (14), les intégrales  $F_k$  et  $G_l$ , à forme *linéaire* (26), c'est transformer une forme linéaire, telle que  $b_{km} \varphi_m$ , de manière à n'en modifier que les coefficients. C'est obtenir un résultat évident. Mais l'intérêt redevient très grand si l'on revient ensuite à l'opérateur général (14). *Cet opérateur contient, avec les hypothèses (26), une théorie des transformations linéaires; il contient une généralisation, à physionomie différentielle, de ces transformations, lorsqu'on restitue aux  $F_k$  et aux  $G_l$  leur signification générale (20) et (21).* Avant d'insister plus à fond sur ce rapprochement, développons plus explicitement la comparaison de (26) et (27).

Les relations (26) et (27) nous livrent les tableaux de coefficients

$$(A) \quad \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\nu} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\nu} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2\nu} \\ \dots & \dots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\nu} & b_{\nu 1} & b_{\nu 2} & \dots & b_{\nu\nu} \end{array}$$

ou *matrices* dont le produit est une autre matrice, à  $\nu$  lignes et à  $\nu$  colonnes, dont le terme général est  $a_{lk} b_{km}$ . Les facteurs de ce produit ne sont pas *commutatifs*; comme nous l'avons annoncé plus haut, cette non-commutativité est un cas très particulier de la non-permutabilité exprimée en (24).

**9. Matrices et déterminants.** — Les expressions (26) de  $F_k$  et  $G_l$  sont construites avec les *lignes* des tableaux (A). Imaginons maintenant que  $F_k$ , par exemple, soit construit avec les *lignes* du second tableau (A) alors que  $G_l$  serait construit avec les *colonnes* du premier. On aurait ainsi

$$F_k = b_{km} \varphi_m, \quad G_l = a_{pl} \varphi_p.$$

Alors

$$Y_F(G_l) = F_k \frac{\partial G_l}{\partial \varphi_k} = a_{kl} b_{km} \varphi_m.$$

Cette fois le tableau des coefficients  $a_{kl} b_{km}$  est le produit des tableaux (A) considérés comme déterminants. Si l'on intervertit les rôles des  $a$  et des  $b$ , on arrive au tableau des coefficients

$$b_{kl} a_{km} \quad \text{ou} \quad a_{km} b_{kl}.$$

En général

$$a_{kl} b_{km} \neq a_{km} b_{kl}$$

mais les déterminants ayant pour termes généraux ces membres inégaux sont cependant égaux parce que l'on passe de l'un à l'autre en changeant les lignes en colonnes et réciproquement. Ceci fait ressortir que la véritable multiplication, celle qui a la plus grande généralité, est ici la multiplication matricielle à facteurs non commutatifs; la commutativité n'apparaît, lorsque les facteurs sont des déterminants, que parce que le déterminant est une matrice à propriétés spéciales. On pourrait trouver d'autres exemples de commutativité dans la théorie des matrices. Ainsi, si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux matrices ayant pour produit la matrice unité  $\mathbf{1}$ , on a, à la fois  $\alpha\beta = \mathbf{1}$  et  $\beta\alpha = \mathbf{1}$ .

On voit qu'il y a une théorie de la transformation, par opérateurs différentiels  $Y$ , de formes linéaires d'intégrales  $\varphi$  d'une équation  $X = 0$ , théorie qui peut utiliser, à la fois, des facteurs non commutatifs et des facteurs commutatifs. Le tout a cependant son origine dans le déterminant bordé de (14) qui généralise encore les deux sortes de multiplications quand les formes en  $\varphi$  ne sont plus linéaires.

**10. Homogénéité et non-commutativité.** — La *non-commutativité* des produits matriciels résultant immédiatement de la combinaison des équations *homogènes*

$$y_l = a_{lk}x_k, \quad z_l = b_{lk}y_k = b_{lk}a_{km}x_m,$$

on voit qu'il y a là deux notions qui sont liées d'extrêmement près, ce qu'il faut s'attendre à retrouver par des voies diverses. Il faut remarquer aussi que les variables  $x_i$ , réelles ou imaginaires, sont à multiplication commutative et qu'elles sont à rapprocher, à cet égard, de la dérivation partielle en  $x_i$ . Mais si l'on construit des opérateurs contenant à la fois des  $x_i$  et des dérivées partielles en  $x_i$ , la commutativité disparaît en général. L'exemple le plus élémentaire que l'on donne à cet égard est

$$(28) \quad \frac{d}{dx}(xf) - x \frac{d}{dx}f = f$$

ou symboliquement

$$\frac{d}{dx}x - x \frac{d}{dx} = \mathbf{1}.$$

Ce sont ces considérations que le présent chapitre permet de généraliser de différentes manières. Reprenons l'opérateur différentiel

$$Y = Z + rX \quad \text{avec} \quad XZ = ZX$$

d'où (16)

$$XY - YX = X(r)X.$$

En prenant, par exemple,  $r = \varphi_n$ , on aura  $X(r) = 1$  mais l'égalité

$$XY - YX = X$$

ne sera vraiment comparable avec (28) que si,  $k$  étant une constante,

$$(29) \quad X(f) = kf.$$

Alors on aura

$$XY(f) - YX(f) = kf.$$

Le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes réalise (29) en prenant

$$(30) \quad X = x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

et  $f$  fonction homogène d'ordre  $k$  ce qui, si les  $x_i$  sont en nombre  $n$ , laisse à  $f$  l'indétermination d'une fonction arbitraire de  $n - 1$  variables. On voit encore ici qu'une construction d'opérateurs différentiels non commutatifs est réalisée grâce à des notions d'homogénéité.

D'une manière plus immédiate, on a aussi

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (x_i f) - x_i \frac{\partial}{\partial x_j} f = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ nf & \text{si } i = j \end{cases}$$

Quant à l'étude de l'opérateur  $Y$  finalement adjoint à l'opérateur  $X$  de (30), elle a été entreprise par M. Pfeiffer à la fin de son Mémoire de l'an dernier.

Il est à remarquer que nous retrouvons aussi, en ce qui précède, la réponse que fait M. Weyl à la question de savoir quels sont les opérateurs les plus importants après ceux de la dérivation partielle en  $x_i$ . Ce sont, dit le savant géomètre<sup>(1)</sup>, les facteurs  $x_i$ . L'assertion de M. Weyl est justifiée par des considérations probabilitaires; on voit qu'on pourrait la justifier aussi par des considérations d'homogénéité, le théorème d'Euler étant le lien principal entre les deux sortes d'opérateurs. Avec les deux sortes on peut écrire les transformations infinitésimales de nombreux groupes, notamment des groupes linéaires. Avec les opérateurs de dérivation seuls, on peut former les équations aux dérivées partielles linéaires, à coefficients constants, écrites depuis longtemps en Physique mathématique. Avec les  $x_i$  seuls on peut former des systèmes algébriques, linéaires et homogènes d'où déterminants et matrices. Les dérivations partielles et toutes leurs combinaisons, les déterminants et les matrices sont donc les instruments fondamentaux d'une même Physique théorique en laquelle les considérations d'homogénéité sont généralement respectées d'une manière ou d'une autre.

---

(1) HERMANN WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*. Première édition, 1928, p. 47. Deuxième édition, 1931, p. 49.

## CHAPITRE II

### Les Espaces à canaux.

**1. La formule de Stokes pour espaces à canaux.** — Tous nos travaux sur les formules stokiennes reposent sur des transformations et des combinaisons linéaires de transformations de l'identité

$$(1) \quad \int_c \mathbf{X} d\mathbf{Y} = \int \int_A d\mathbf{X} d\mathbf{Y}$$

et d'identités analogues relatives aux espaces à un nombre quelconque de dimensions. Sans aller plus loin, il reste encore bien des choses à tirer de (1).

D'abord, au plan OXY, faisons correspondre un autre plan OPQ, par les formules

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}), \quad \mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}).$$

On aura

$$\int_{c'} \mathbf{X} \left( \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{P}} d\mathbf{P} + \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{Q}} d\mathbf{Q} \right) = \int \int_{A'} \begin{vmatrix} \mathbf{X}_p & \mathbf{X}_q \\ \mathbf{Y}_p & \mathbf{Y}_q \end{vmatrix} d\mathbf{P} d\mathbf{Q}.$$

On voit que nous employons, pour les dérivées partielles, soit les  $\partial$ , soit simplement l'indice indiquant la variable de dérivation. En posant

$$\mathbf{U} = \mathbf{X}\mathbf{Y}_p, \quad \mathbf{V} = \mathbf{X}\mathbf{Y}_q$$

on obtient la formule de Riemann

$$(2) \quad \int_{c'} \mathbf{U} d\mathbf{P} + \mathbf{V} d\mathbf{Q} = \int \int_{A'} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}} \\ \mathbf{U} & \mathbf{V} \end{vmatrix} d\mathbf{P} d\mathbf{Q}.$$

Faisons maintenant la nouvelle transformation

$$(3) \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}(x, y, z), \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(x, y, z)$$

qui n'est bien qu'un changement de variables si  $z$  appartient à une surface d'équa-

tion  $z = z(x, y)$ . Dans ces conditions, on introduit dans l'intégrale double de (2), le nouveau déterminant

$$\begin{vmatrix} P_x + P_z p & P_y + P_z q \\ Q_x + Q_z p & Q_y + Q_z q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -p & -q & 1 \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

qui sera multiplié par  $dx dy$ . Comme

$$-p dx dy = \alpha d\sigma, \quad -q dx dy = \beta d\sigma, \quad dx dy = \gamma d\sigma,$$

la formule de Riemann (2) devient définitivement

$$(4) \quad \int_{\Sigma} U dP + V dQ = \iint_{\sigma} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial P} & \frac{\partial}{\partial Q} \\ U & V \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} d\sigma.$$

Évidemment P et Q, dans cette formule, ont la forme (3). Le premier déterminant, sous l'intégrale double, est une fonction  $\Lambda(P, Q)$ .

On peut vérifier directement que l'intégrale double de (4) est stokienne. Il faut, pour cela, que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \Lambda P_x & \Lambda P_y & \Lambda P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Lambda}{\partial x} & \frac{\partial \Lambda}{\partial y} & \frac{\partial \Lambda}{\partial z} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = 0.$$

Or ceci est bien réalisé puisque  $\Lambda$  est une fonction de P et Q seulement. On peut vérifier aussi que (4) n'est que la formule de Stokes ordinaire

$$\int_{\Sigma} F dx + G dy + H dz = \iint_{\sigma} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F & G & H \end{vmatrix} d\sigma$$

dans laquelle on fait

$$\begin{aligned} F &= U \frac{\partial P}{\partial x} + V \frac{\partial Q}{\partial x}, \\ G &= U \frac{\partial P}{\partial y} + V \frac{\partial Q}{\partial y}, \\ H &= U \frac{\partial P}{\partial z} + V \frac{\partial Q}{\partial z}. \end{aligned}$$

Comme ces trois relations se résument en

$$Fdx + Gdy + Hdz = UdP + VdQ,$$

tout ce qui précède se rattache aussi très simplement au problème de la réduction des formes de Pfaff.

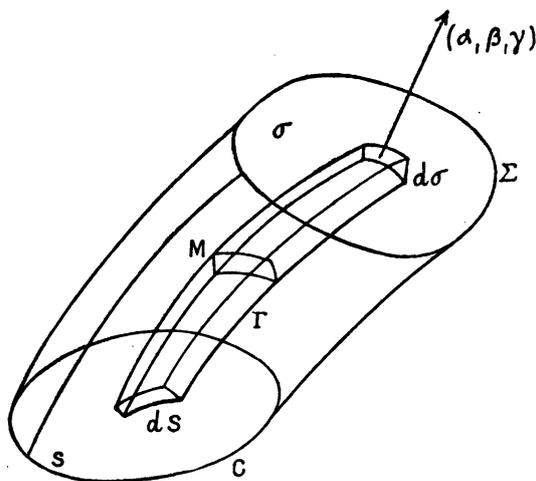


FIG. 1.

Considérons maintenant le canal  $\Gamma$ , infiniment délié, à section quadrangulaire, formé par les quatre surfaces sur lesquelles

$$P, P + dP, Q, Q + dQ$$

ont des valeurs provisoirement constantes (\*). Ce canal découpe, sur la cloison déformable  $\sigma$ , de contour invariable  $\Sigma$ , un élément  $d\sigma$  de coordonnées  $x, y, z$ . Sur une surface  $S$ , d'équation

$$(5) \quad \Phi(X, Y, Z) = 0,$$

il découpe l'élément  $dS$ , élément de coordonnées  $X, Y, Z$ . Le long du canal  $\Gamma$ , aussi bien en  $dS$  qu'en  $d\sigma$ , on doit considérer, par définition du canal, que  $dP$  et  $dQ$  sont constants. Donc (\*)

$$(6) \quad \Lambda(P, Q) dP dQ = \Lambda(P, Q) \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} d\sigma = \begin{vmatrix} \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \frac{\Lambda(P, Q) dS}{\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2}}.$$

Dans le second membre de cette double égalité, il faut évidemment, en  $\Lambda(P, Q)$ , lire  $P(x, y, z)$  et  $Q(x, y, z)$  ce qu'indique d'ailleurs le déterminant accolé. Dans le

(\*) A. BUHL, *La propagation curviligne d'intégrales invariantes. Cas des intégrales doubles. Propagation corpusculaire* (Comptes rendus, t. 192, p. 1006, 27 avril 1931). Par « valeurs provisoirement constantes » il faut naturellement entendre que  $P$  et  $Q$  changent quand on passe d'un canal à un autre. On pourrait mieux préciser la définition des canaux. Si, sur une face, on a  $P(x, y, z) = \lambda$ , on a, sur la face opposée,

$$P(x + dx, y + dy, z + dz) = \lambda + d\lambda$$

d'où  $d\lambda = dP$ . C'est ce qui est résumé en disant que, sur ces faces,  $P$  et  $P + dP$  sont constants.

(\*) G. HUMBERT, *Œuvres publiées par P. Humbert et G. Julia*, t. I, 1929, p. 442.

troisième membre, il faut, en  $\Lambda(P, Q)$ , lire  $P(X, Y, Z)$  et  $Q(X, Y, Z)$ . Écrivons maintenant

$$\frac{1}{\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2}} \begin{vmatrix} \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = \Delta(X, Y, Z).$$

Dans ce  $\Delta(X, Y, Z)$  on peut exprimer  $X, Y, Z$  en  $\Phi, P, Q$  et comme le point  $(X, Y, Z)$  appartient à la surface  $S$  d'équation (5), on aura finalement

$$\Delta(X, Y, Z) = \Delta_1(o, P, Q).$$

On tire alors de (6)

$$(7) \quad \Lambda(P, Q) \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} d\sigma = \Delta_1(o, P, Q) \Lambda(P, Q) dS.$$

Comme  $\Lambda(P, Q)$  n'a pas été déterminé jusqu'ici, on peut profiter de cette indétermination pour poser

$$\Lambda(P, Q) = \frac{1}{\Delta_1(o, P, Q)}$$

d'où

$$(8) \quad dS = \frac{1}{\Delta_1(o, P, Q)} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} d\sigma.$$

On a enfin, pour l'évaluation de l'aire gauche  $S$ , l'intégrale *stokienne*

$$(9) \quad S = \int \int_{\sigma} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \frac{d\sigma}{\Delta_1(o, P, Q)}.$$

Le caractère stokien de cette intégrale est d'ailleurs obligé pour raison purement géométrique. La cloison  $S$  (*fig. 1*) est déterminée par le contour  $\Sigma$  et le canal, de section finie, qui passe par  $\Sigma$  et est formé d'un faisceau d'une infinité de canaux  $\Gamma$ . De même que  $dS$  peut être dit projection *canale* de  $d\sigma$ , le contour  $C$  est une projection *canale* de  $\Sigma$ . Ainsi  $C$  et  $S$  sont déterminés par le contour  $\Sigma$  et non par la cloison  $\sigma$  qui pourrait être remplacée par toute autre cloison *de même contour*  $\Sigma$ . Donc  $S$ , en (9), ne dépend que du contour  $\Sigma$ .

Si l'on voulait exprimer effectivement  $S$ , de (9), par une intégrale de ligne attachée à  $\Sigma$ , il suffirait de poser

$$(10) \quad \frac{\partial V}{\partial P} - \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{1}{\Delta_1(o, P, Q)}$$

et de déterminer  $U$  et  $V$  conformément à cette équation (10), ce qui est possible d'une infinité de manières. L'intégrale de ligne serait ensuite immédiatement donnée par la formule (4). On voit que cette formule (4) mérite bien le nom de *formule de Stokes pour espaces à canaux*. D'ailleurs tous les raisonnements de ce paragraphe s'étendraient facilement aux intégrales doubles quelconques attachées aux aires  $S$ . De telles intégrales doubles pourraient donc représenter non seulement des aires, mais des masses, des charges, . . . , bref prendre des significations physiques diverses.

**2. Aires à propagation curviligne invariante.** — Proposons-nous maintenant d'étudier des surfaces sur lesquelles le canal fini  $C\Sigma$  découpe des aires égales à  $S$ . L'existence de telles surfaces peut être considérée comme intuitivement assurée mais, dans ces préliminaires, nous préférons tout examiner analytiquement et aussi rigoureusement que possible.

Soit maintenant, en  $M$  (*fig. 1*), un élément qui, par définition, devra être égal à  $dS$ , tout en appartenant à une surface

$$\Psi(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Alors, l'expression

$$\begin{vmatrix} \Psi_\xi & \Psi_\eta & \Psi_\zeta \\ P_\xi & P_\eta & P_\zeta \\ Q_\xi & Q_\eta & Q_\zeta \end{vmatrix} \frac{\Lambda(P, Q) dS}{\sqrt{\Psi_\xi^2 + \Psi_\eta^2 + \Psi_\zeta^2}}$$

est à évaluer à l'un quelconque des membres de (6). Dans le facteur  $\Lambda(P, Q)$ , il faut évidemment lire  $P(\xi, \eta, \zeta)$  et  $Q(\xi, \eta, \zeta)$  pour  $P$  et  $Q$ . Écrivons maintenant cette expression

$$\Delta^*(\xi, \eta, \zeta) \Lambda(P, Q) dS$$

puis, en raisonnant comme précédemment,

$$\Delta_1^*(o, P, Q) \Lambda(P, Q) dS$$

et nous aurons, au lieu de (7),

$$\Lambda(P, Q) \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} d\sigma = \Delta_1^*(o, P, Q) \Lambda(P, Q) dS.$$

En donnant à  $\Lambda(P, Q)$  la forme

$$\Lambda(P, Q) = \frac{1}{\Delta_1^*(o, P, Q)}$$

nous aurons, au lieu de (8),

$$(11) \quad dS = \frac{1}{\Delta_1^*(o, P, Q)} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} d\sigma$$

ce qui, comparé avec (8), donne

$$\Delta_1 = \Delta_1^*.$$

L'équation

$$(12) \quad \begin{vmatrix} \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2}} = \Delta_1(o, P, Q)$$

subsiste donc pour les fonctions  $\Phi$  autres que celles de l'équation (5), ou  $\Phi = 0$ , de la surface  $S$  primitivement considérée. Et l'intégration de (12), avec  $\Phi$  fonction inconnue, donnera d'autres surfaces  $S^*$  sur lesquelles les canaux  $\Gamma$  découpent des éléments d'aire équivalents, l'équivalence s'entendant évidemment pour les éléments situés dans un même canal.

Il n'est d'ailleurs pas certain que l'on obtienne ainsi *toutes* les surfaces  $S^*$ . On aurait encore l'expression (9) de  $S$  avec des surfaces d'équation  $\Phi = 0$  pour lesquelles  $\Phi$  satisfairait à l'équation

$$(12a) \quad \begin{vmatrix} \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2}} = \Gamma_1(\Phi, P, Q)$$

sous la seule restriction que

$$\Gamma_1(o, P, Q) = \Delta_1(o, P, Q).$$

Mais (12a) contient *explicitement* la fonction inconnue  $\Phi$  ce qui n'est pas le cas de (12). Il s'ensuit que, s'il y a moins de généralité, il y a, en revanche, plus de maniabilité du côté de (12). Aussi, dans la suite, utiliserons-nous cette dernière équation, en vue de l'obtention *effective* de résultats géométriques particulièrement simples.

Comme les surfaces  $S^*$  peuvent dépendre, d'une infinité de manières, d'un paramètre auxiliaire  $t$ , que nous appellerons *temps*, nous pouvons dire qu'il y a dans les canaux  $\Gamma$ , ou dans les faisceaux de canaux  $\Gamma$ , une *propagation* d'aires invariantes.

Emplissons maintenant l'espace de la figure 1 avec des faisceaux contigus de canaux  $\Gamma$ . Dans chaque faisceau peut se mouvoir une cloison à aire invariante, ces cloisons appartenant à des surfaces  $S^*$  différentes quand on passe d'un faisceau au faisceau contigu, ceci d'après l'indétermination des surfaces  $S^*$  tirées de l'intégrale générale de l'équation (12). Les cloisons se propageant ainsi ne sont donc pas *raccor-dées* quand on passe d'un faisceau au faisceau voisin et, si ces faisceaux sont de faible section, on a l'image d'un bombardement *corpusculaire*, les trajectoires des projectiles dépendant jusqu'ici du choix des canaux  $\Gamma$  et ces projectiles ayant figure de petites cloisons à *aire* invariante.

Cette géométrie peut immédiatement prendre un aspect physique; au lieu de faire transporter aux corpuscules des aires invariantes, on pourrait aussi bien, comme nous l'avons déjà remarqué, par extension très simple de la théorie précédente, leur faire transporter des masses, des charges, bref des intégrales de natures diverses qui seraient invariantes où dépendraient du temps d'une certaine manière pendant la propagation. Pour l'instant nous nous en tiendrons aux aires à cause des résultats très élégants associés à ce cas.

Enfin, l'équation (12) étant réalisée avec des canaux  $\Gamma$  imposés, c'est-à-dire avec des fonctions  $P$  et  $Q$  données, il est clair encore que ces fonctions  $P$  et  $Q$  ne sont pas les plus générales qui satisfont à (12). Ainsi on pourra maintenir l'équation (12) en prenant  $Q$  arbitrairement et en déterminant  $P$  par intégration d'une équation aux dérivées partielles *linéaire* du premier ordre. Nous laisserons, pour l'instant, ces questions d'intégration car il est, peut-être, plus remarquable encore que l'on puisse transformer les canaux  $\Gamma$ , en d'autres plus généraux  $\Gamma^*$ , sans effectuer aucune intégration, ce qui va arriver au moins dans les exemples que nous allons traiter maintenant. Nous reprendrons ultérieurement les généralités méthodiques.

**3. Propagations archimédiennes.** — Les canaux infiniment déliés  $\Gamma$  les plus simples sont évidemment rectilignes et, parmi ceux-ci, nous allons considérer plus particulièrement ceux qui sont faits de rayons issus de l'axe  $Oz$  normalement à celui-ci. Chaque canal est alors un pinceau *conoïdal* droit infiniment délié.

Il correspond à

$$(13) \quad P = \text{arc tang } \frac{Y}{X}, \quad Q = Z.$$

Pour surface  $S$  nous prendrons, en premier lieu, le cylindre circulaire correspondant à

$$(14) \quad \Phi = X^2 + Y^2 - R^2 = 0.$$

Dans ces conditions, l'équation (12) prend la forme

$$(15) \quad \frac{1}{\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2}} \begin{vmatrix} \Phi_x & \Phi_y \\ P_x & P_y \end{vmatrix} = \frac{1}{R}.$$

On remarquera qu'ici le second membre est une simple constante complètement indépendante de P et de Q. Cherchons maintenant s'il y a des surfaces  $S^*$ , plus générales que le cylindre S d'équation (14), pour lesquelles on aurait

$$\Phi = Z - f(X, Y) = 0$$

avec conservation de l'équation (15) pour cette forme de  $\Phi$ . L'équation (15) ainsi conservée est

$$(16) \quad -\frac{px + qy}{(x^2 + y^2)\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} = \frac{1}{R},$$

les variables majuscules étant remplacées maintenant par des minuscules de manière à avoir la notation ordinaire des équations aux dérivées partielles en  $x, y, z, p, q$ . L'équation (16) est susceptible d'une vérification directe et immédiate ce qui tient à l'extrême simplicité de ce premier exemple. Représentons-nous, sur le cylindre circulaire S, un élément  $dS$ , le pinceau conoïdal correspondant et, dans ce pinceau, le  $dS^*$  d'une surface quelconque,  $dS^*$  ayant des coordonnées  $x, y, z$  et une normale, de coefficients directeurs  $-p, -q, 1$ , faisant un angle  $\lambda$  avec la direction du pinceau. On aura

$$\frac{\cos \lambda dS^*}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{dS}{R}, \quad \cos \lambda = -\frac{px + qy}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1} \sqrt{x^2 + y^2}}$$

et, comme l'on veut avoir  $dS^* = dS$ , ceci redonne bien l'équation (16).

Il y a différentes manières de conduire de tels calculs; la plasticité de ceux-ci est d'ailleurs évidente dans les généralités du paragraphe précédent. Ainsi, au lieu de (13), on aurait pu prendre

$$P = \frac{Y}{X}, \quad Q = Z,$$

d'où, au lieu de (15),

$$(17) \quad \frac{1}{\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2}} \begin{vmatrix} \Phi_x & \Phi_y \\ P_x & P_y \end{vmatrix} = \frac{1}{R} (1 + P^2).$$

Cette équation se rapproche davantage de la forme générale de (12) mais elle incite à diviser les deux membres par  $1 + P^2$  et à remplacer ainsi P par  $\text{arc tang } P$ . Et, même conservée sous la forme (17), elle ramène immédiatement à (16).

Proposons-nous maintenant d'étudier les surfaces  $S^*$  les plus générales définies par l'équation (16). Cette équation traduit d'abord une propriété géométrique très simple. Soit  $M$  un point d'une surface  $S^*$ .

Projetons  $M$  en  $m$  sur  $Oz$ , et menons, par  $Oz$ , le plan  $\Pi$  perpendiculaire à  $Mm$ . Si la normale en  $M$  à  $S^*$  perce le plan  $\Pi$  en  $N$ , le segment de normale  $MN$  est constant et égal à  $R$ .

En effet, la figure donne  $R \cos \lambda = r$  ce qui n'est autre chose que (16). Cette propriété permet d'apercevoir *sans calculs* des familles importantes de surfaces  $S^*$ .

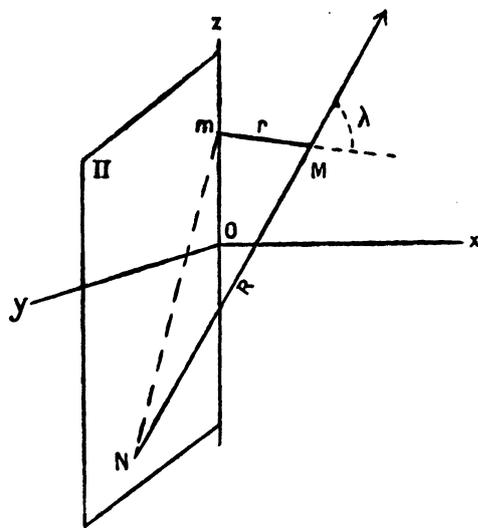


FIG. 2.

D'abord, la propriété  $R \cos \lambda = r$  appartient manifestement au cylindre  $S$  d'équation (14); le triangle  $MNm$  dégénère alors en le segment  $Mm$ .

Elle appartient aussi aux cylindres circulaires  $C$ , de diamètre  $R$ , dont  $Oz$  est une génératrice. Ces cylindres sont tous tangents intérieurement au cylindre  $S$ . Ici  $MNm$  est un véritable triangle mais le plan de celui-ci est toujours normal à  $Oz$ . Enfin la même propriété appartient aux sphères, de rayon  $R$ , centrées sur  $Oz$ , donc inscrites dans le cylindre  $S$ ; alors le point  $N$  est sur  $Oz$ . Sur l'une de ces sphères  $\Sigma$  et sur le cylindre circonscrit  $S$ , un conoïde droit, de directrice  $Oz$ , découpe des

aires équivalentes. C'est cette propriété, qui enthousiasma Archimède<sup>(1)</sup> et donne lieu à la figure qui fut gravée sur le tombeau du célèbre géomètre, que nous rééduquons ici considérablement généralisée. Avec ses généralisations, elle donne différents modes théoriques de propagations corpusculaires que nous réunirons sous le nom de *propagations archimédiennes*.

Même en s'en tenant au cas élémentaire, au cas archimédien proprement dit, on peut déjà apercevoir comment une propagation corpusculaire, par canaux  $\Gamma$  conoïdaux droits issus de  $Oz$ , peut correspondre à un mouvement ponctuel beaucoup plus simple.

Il suffit d'imaginer des sphères  $\Sigma$  dont les centres décriront  $Oz$  (mouvement ponctuel rectiligne); les surfaces de ces sphères donneront, dans un assemblage de canaux  $\Gamma$  suffisamment déliés, une propagation corpusculaire d'aires sphériques invariantes.

<sup>(1)</sup> G. LORIA, *Histoire des Sciences mathématiques dans l'Antiquité hellénique* (p. 57). Gauthier-Villars et C<sup>e</sup>, 1929.

Un autre type de propagation pourrait être obtenu, dans les mêmes canaux, en faisant tourner des cylindres  $C$  autour de  $Oz$ .

On pourrait aussi associer les deux types. Une sphère  $\Sigma$  et un cylindre  $C$  se coupent suivant une courbe de Viviani  $V$ . Quand la courbe  $V$  tourne autour de  $Oz$ , elle engendre une sphère  $\Sigma$ ; quand la courbe  $V$  subit une translation parallèlement à  $Oz$ , elle engendre un cylindre  $C$ . On peut imaginer que  $V$  subisse l'une de ces rotations, puis l'une de ces translations, puis à nouveau l'une des rotations et ainsi de suite. Le lieu de  $V$  sera une surface *continue*  $V^*$  mais à lignes singulières  $V$ . La surface  $V^*$  n'en est pas moins propre, par mouvement autour et le long de  $Oz$ , à engendrer dans les canaux conoïdaux  $\Gamma$  une propagation corpusculaire d'aires invariantes. Mais nous allons laisser ces images géométriques particulières pour aborder l'intégration, aussi générale que possible, de l'équation (16) ou

$$(18) \quad (x^2 + y^2)^2 (p^2 + q^2 + 1) - R^2 (px + qy)^2 = 0.$$

Ici nous prenons le mot *intégration* au sens classique habituel qu'il a dans la théorie des équations en  $x, y, z, p, q$ .

Tandis que les surfaces  $V^*$ , à lignes singulières  $V$ , montrent qu'en abandonnant des continuités de plan tangent, le mot peut prendre des significations très différentes et qui sont de la nature de l'intégration *contingente* de M. G. Bouligand. Pour l'instant, nous ne nous arrêterons pas davantage sur la comparaison des deux concepts. Signalons simplement, dans le même ordre d'idées, la belle Thèse de M. G. Rabaté publiée encore l'an dernier (comme le Mémoire de M. Pfeiffer) dans les présentes *Annales* et celle, non moins intéressante de M. G. Durand (*Journal de Mathématiques*, dirigé par Henri Villat, t. 10, 1931, p. 335). M. Durand, dès la seconde page de son exposé, revient sur des courbes planes, étudiées par M. Bouligand, pour lesquelles  $s = f(y)$ . En ces lignes, la pente, continue avec les hypothèses classiques, peut cependant présenter autant de discontinuités qu'on veut. L'exemple des surfaces  $V^*$  est étroitement solidaire de ces considérations.

Revenons à l'équation (18) considérée comme à l'ordinaire.

Si l'on prend des coordonnées semi-polaires  $r, \theta, z$ , on a

$$p^2 + q^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2, \quad px + qy = r \frac{\partial z}{\partial r}, \quad x^2 + y^2 = r^2$$

et (18) devient

$$(R^2 - r^2) \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 - r^2 = 0.$$

Il est indiqué de poser  $z = a\theta + f(r)$ , d'où

$$(19) \quad \frac{df}{dr} = \sqrt{\frac{a^2 + r^2}{R^2 - r^2}},$$

$$(20) \quad z = a\theta + b + \int \sqrt{\frac{a^2 + r^2}{R^2 - r^2}} dr.$$

Comme  $b$  est une constante d'intégration adjointe à l'intégrale en  $r$ , nous avons ainsi une solution de l'équation (18) avec deux constantes arbitraires  $a$  et  $b$ . C'est l'intégrale *complète*. Pour avoir l'intégrale *générale*, il faudrait faire de  $b$  une fonction arbitraire de  $a$ , soit  $b(a)$  et déterminer alors l'enveloppe, à un paramètre  $a$ , de la famille d'hélicoïdes (20). Cette enveloppe ne paraît pas pouvoir être déterminée de manière complètement explicite; aussi nous bornerons-nous, pour l'instant, à l'étude des hélicoïdes (20).

Ces hélicoïdes se simplifient beaucoup pour  $a = 0$ . L'équation (20) devient alors

$$r^2 + (z - b)^2 = R^2.$$

C'est celle des sphères  $\Sigma$ . On voit que ces sphères, mises en évidence plus haut par une méthode géométrique, auraient, de toutes manières, été révélées par l'Analyse.

Quant à une étude générale des hélicoïdes (20), on peut commencer par l'étude de leur courbe plane génératrice toujours située dans un plan passant par  $Oz$ . Cette courbe admet l'équation différentielle (19). En un point quelconque, soit  $\rho$  le rayon de courbure et  $v$  le segment de normale limité à  $Oz$ . On a

$$\rho = \frac{1}{r} \sqrt{(R^2 + a^2)(r^2 + a^2)}, \quad v = r \sqrt{\frac{a^2 + R^2}{a^2 + r^2}}$$

$$\rho v = R^2 + a^2.$$

Donc le produit  $\rho v$  est *constant*, ce qui indique que la courbe plane en litige, mise en rotation autour de  $Oz$ , engendre une *surface de révolution à courbure totale constante*. On arriverait au même résultat en partant de

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} = \frac{1}{R^2 + a^2}$$

et en cherchant à vérifier cette équation de Monge-Ampère par une solution de la forme  $z = f(r)$ .

Construisons celle de ces courbes qui passe par l'origine. Elle a une forme sinus-soidale oscillant de part et d'autre de  $Oz$  entre deux parallèles à cet axe ayant pour abscisses  $\pm R$ .

L'arc OM est

$$s = \sqrt{R^2 + a^2} \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \sqrt{R^2 + a^2} \operatorname{arc} \sin \frac{r}{R}.$$

Or l'arc circulaire CD, si DM est parallèle à Oz, est

$$s_1 = R \operatorname{arc} \sin \frac{r}{R}.$$

Donc

$$\frac{s}{s_1} = \frac{\sqrt{R^2 + a^2}}{R}.$$

Si  $a$  est nul, OM devient un arc de cercle manifestement égal à CD.

Dans le cas général, la proportionnalité des arcs OM et CD est très remarquable car cette proportionnalité relève évidemment du même ordre d'idées que les équivalences d'aires qui sont au fond de la question.

Remarquons encore que la courbe OAB a pour équation intrinsèque

$$\frac{\rho^2}{k^2} - \frac{a^2}{R^2 \sin^2 \frac{s}{k}} = 1, \quad k^2 = R^2 + a^2.$$

On voit, par ces quelques développements, quelle riche moisson de propriétés géométriques on peut atteindre au delà de la célèbre figure archimédienne constituée par la sphère et par le cylindre circonscrit. Il y a notamment des surfaces  $S^*$  hélicoïdales (20), et leurs enveloppes en  $a$  quand  $b$  est remplacé par  $b(a)$ , qui sont en relation très simple avec les surfaces de révolution à courbure totale constante. Toutes ces surfaces  $S^*$ , mises en mouvement autour et le long de Oz, donnent, dans les canaux  $\Gamma$  définis au début de ce paragraphe, des propagations d'aires invariantes. Parmi les nombreux cas qui resteraient à étudier en détail, il nous faut revenir sur celui des cylindres C pour lesquels le plan du triangle MNm est toujours normal à Oz. Ici la simplicité et la symétrie du cas montrent immédiatement que la propagation d'aires invariantes provient de la propagation d'arcs circulaires invariants entre deux rayons vecteurs issus d'un même point de Oz.

Fixons donc notre attention sur ces propagations à deux dimensions concernant des arcs invariants.

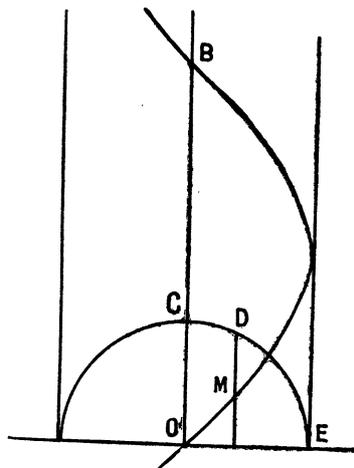


FIG. 3.

**4. Propagations d'arcs. Cas archimédien.** — Ce cas, auquel nous sommes amenés par la force des choses, est plus simple que le cas spatial de la figure 1. On aurait pu le traiter en premier lieu. Peu importe.

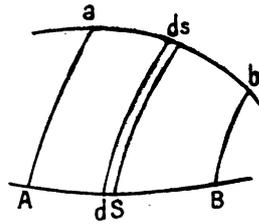


FIG. 4.

La figure 4 est plane. AB donne  $ab$  par projection *canale* et, de même,  $dS$  donne  $ds$ . Le système des canaux projecteurs est imposé par la donnée d'une fonction  $P$ , à deux variables, qui est constante, ainsi que  $dP$ , le long d'un même canal. On a

$$\Lambda(P) dP = \Lambda(P) \left( P_x \frac{dx}{ds} + P_y \frac{dy}{ds} \right) ds = \Lambda(P) \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ P_x & P_y \end{vmatrix} ds$$

si  $\alpha$  et  $\beta$  sont cosinus directeurs de la normale à l'arc  $ab$ , en  $ds$ .

Alors les relations (6) sont à remplacer par

$$\Lambda(P) dP = \Lambda(P) \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ P_x & P_y \end{vmatrix} ds = \begin{vmatrix} \Phi_x & \Phi_y \\ P_x & P_y \end{vmatrix} \frac{\Lambda(P) dS}{\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2}}.$$

Par des raisonnements absolument analogues à ceux qui accompagnent la figure 1, on écrira

$$\frac{1}{\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2}} \begin{vmatrix} \Phi_x & \Phi_y \\ P_x & P_y \end{vmatrix} = \Delta(X, Y) = \Delta_1(\Phi, P) = \Delta_1(o, P).$$

Si maintenant l'on pose

$$\Lambda(P) = \frac{1}{\Delta_1(o, P)},$$

on aura  $S$ , c'est-à-dire l'arc  $AB$ , par une intégrale de différentielle exacte étendue à  $ab$ , intégrale qui ne dépend pas de l'arc  $ab$  mais seulement de ses extrémités  $a$  et  $b$ . L'équation

$$(21) \quad \frac{1}{\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2}} \begin{vmatrix} \Phi_x & \Phi_y \\ P_x & P_y \end{vmatrix} = \Delta_1(o, P)$$

peut servir à déterminer d'autres courbes  $\Phi = 0$ , plus générales, pouvant donner une propagation d'arcs invariants dans les canaux attachés à la fonction  $P$ .

Fixons maintenant surtout notre attention sur le problème de la *variation des canaux*. Supposons que l'équation (21) soit établie avec  $\Phi$  ayant tel degré de généralité que l'on voudra. Ceci n'empêche pas que  $P$  est imposé dès le début de la ques-

tion ; jusqu'ici les canaux sont donnés. Or P peut être généralisé à son tour, en P\* de telle sorte que

$$(22) \quad \frac{1}{\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2}} \begin{vmatrix} \Phi_x & \Phi_y \\ P_x^* & P_y^* \end{vmatrix} = \Delta_1(o, P^*).$$

Le premier membre de cette équation aurait pu s'exprimer par

$$\Delta^*(X, Y) = \Delta_1^*(\Phi, P^*) = \Delta_1^*(o, P^*).$$

ce qui ne peut être que  $\Delta_1(o, P^*)$ .

On voit que cette généralisation des canaux les fera dépendre d'une fonction arbitraire, ce qu'il est bien simple d'expliquer géométriquement. Dans une famille de courbes AB, un canal, infiniment délié  $dS, ds$ , ou non AaBb, découpe, dans la famille, des arcs équivalents (*fig. 4*). Mais, à partir d'une courbe *arbitraire*  $\gamma$  transversale des AB, on peut, *sur ces* AB, prendre des arcs égaux. Le lieu des extrémités de ces arcs sera une courbe  $\gamma'$  formant, avec  $\gamma$ , un canal propagateur d'arcs équivalents.

Prenons un exemple. Soit d'abord le cercle de centre O et de rayon R, considéré avec l'ensemble de ses rayons, le tout pouvant être représenté par

$$\Phi = \frac{r}{R} - 1 = 0, \quad P = \theta$$

avec

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \text{arc tang } \frac{y}{x}.$$

L'équation (21) donne

$$(22^*) \quad \Delta_1(o, P) = \frac{1}{R}$$

ce qui est indépendant de P. Même résultat avec

$$(23) \quad \Phi = \frac{x^2 + y^2}{R(x \cos C + y \sin C)} - 1 = \frac{r}{R \cos(\theta - C)} - 1 = 0$$

et toujours  $P = \theta$ . Les calculs sont simples. On voit que pour être mieux d'accord avec des notations habituelles, nous remplaçons X et Y, dans (21), par  $x$  et  $y$ . C'est ce que nous avons fait, dans le cas spatial, en passant de (15) à (16).

Pour fonction P\*, satisfaisant à (22), il est tout indiqué de prendre

$$P^* = P + f(\Phi)$$

avec  $\Phi$  ayant la forme (23) et  $f$  étant une fonction arbitraire.

Ce résultat peut d'ailleurs s'expliquer aisément de manière géométrique. Pour évaluer les nouveaux arcs circulaires compris dans les nouveaux canaux, il faudra préciser les limites de ces arcs, c'est-à-dire chercher des points d'intersection définis par les équations

$$\Phi = 0, \quad P + f(\Phi) = k.$$

Ce système peut se remplacer par

$$\Phi = 0, \quad P + f(0) = k.$$

Or  $f(0)$  est une constante comme  $k$ ; tout se passe comme avec les canaux rectilignes  $P = \theta = k$ , la constante  $k$  changeant simplement de valeur. L'équation des nouveaux canaux

$$\theta + f\left[\frac{r}{R \cos(\theta - C)} - 1\right] = k$$

peut évidemment se mettre sous des formes plus maniables telles, par exemple, que

$$r = R \cos(\theta - C) \varphi(\theta - k).$$

On pourrait tirer de là de nombreuses courbes *algébriques* partageant, avec les droites  $\theta = k$ , la propriété de donner des canaux propageant des arcs égaux des cercles de la famille (23).

**5. Propagations coniques ou centrales. Surfaces de Buhl-Vincensini.** — Après la propagation conoïdale, issue normalement de  $Oz$ , la plus simple et la plus élégante à étudier est vraisemblablement la propagation qui se fait dans des canaux rectilignes ou coniques de sommet  $O$ . Nous commencerons, pour définir ces canaux, par poser

$$P = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad Q = \text{arc tang} \frac{y}{x}.$$

Un canal infiniment délié est alors compris, d'une part, entre deux cônes de révolution infiniment voisins de sommet  $O$  et d'axe  $Oz$ , d'autre part entre deux plans infiniment voisins passant par  $Oz$ .

La surface la plus simple sur laquelle on peut prendre des aires, à conserver par propagation conique, est vraisemblablement la sphère de centre  $O$  et de rayon constant  $R$ . Nous la représenterons par

$$\Phi = \frac{1}{R} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1 = 0.$$

Dans ces conditions, avec les formes ainsi indiquées pour  $\Phi$ , P, Q, on a

$$(24) \quad \frac{1}{\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2}} \begin{vmatrix} \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = -\frac{1}{R^2} (1 + P^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Dans ce second membre, on tient compte, bien entendu, de  $\Phi = 0$ .

Soit maintenant, en conservant P et Q, c'est-à-dire les canaux précédents, à déterminer des surfaces d'équation

$$\Phi = z - z(x, y) = 0$$

pour lesquelles la relation (24) serait encore valable. On arrive ainsi, toujours par des calculs très simples, à l'équation aux dérivées partielles

$$(25) \quad R^2 \frac{z - px - qy}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Celle-ci, bien entendu, peut être formée directement à l'aide de

$$\frac{d\sigma \cos \lambda}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{d\sigma_1}{R^2}, \quad d\sigma_1 = d\sigma, \quad \cos \lambda = \frac{z - px - qy}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Elle a été étudiée récemment, de manière méthodique, par M. Vincensini<sup>(1)</sup>.

Rappelons brièvement les premières considérations géométriques qui nous conduisirent à la propagation conique d'aires invariantes équivalentes à des aires sphériques<sup>(2)</sup>.

Soit la famille de lemniscates de Bernouilli

$$r^2 = R^2 \cos 2(\theta - C).$$

Le paramètre C est l'angle AOB et  $\theta$  est  $M_1OB$ . Le rayon  $OM_1$  et le rayon infiniment voisin découpent  $ds$  sur la lemniscate et  $ds_1$  sur le cercle circonscrit.

On a, sans peine,

$$r ds = R^2 d\theta, \quad r \sin \theta ds = R^2 \sin \theta d\theta, \quad y ds = y_1 ds_1.$$

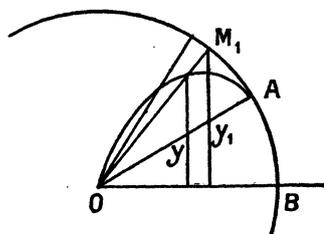


FIG. 5.

En multipliant par  $2\pi$  les deux membres de cette dernière équation on voit qu'il y a ici, entre deux rayons vecteurs infiniment voisins, une propagation d'arcs de

(1) P. VINCENSINI, *Aires courbes en perspective*, § 4 (Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse, 1931).

(2) A. BUHL, *Sur la formule de Stokes* (Ibid., 1914, p. 309).

lemniscate donnant toujours *même aire de révolution* quand la révolution a lieu autour de OB. Et cette aire de révolution commune est égale à l'aire de la zone sphérique engendrée par  $ds_1$ . Les deux rubans circulaires, engendrés par  $ds$  et  $ds_1$ , peuvent être divisés en une infinité d'éléments par des plans passant par OB d'où, comme dit M. Vincensini, une *perspective* d'éléments d'aire conservés quand on passe de la surface de révolution  $\Sigma$ , engendrée par la lemniscate tournant autour de OB, à la sphère circonscrite.

Tout ceci s'étend immédiatement à des cônes quelconques issus de O. Quant aux surfaces *de révolution*  $\Sigma$ , elles sont évidemment en nombre infini, de par le caractère arbitraire de la constante C; on peut les remplacer par des surfaces de Monge  $\Sigma'$  obtenues en faisant rouler le plan de la figure sur un cône quelconque de sommet O. Ces surfaces  $\Sigma'$  dépendent maintenant d'une fonction *arbitraire* (correspondant au cône *quelconque* base du roulement); elles intègrent donc généralement l'équation (25).

Ce résultat est extrêmement remarquable. On sait, en effet, qu'en matière d'équations en  $x, y, z, p, q$ , on se considère, le plus souvent, comme satisfait, dès que l'on peut obtenir une intégrale *complète*, c'est-à-dire une intégrale dépendant de deux constantes arbitraires. Quant à l'intégrale générale, enveloppe à un paramètre de cette intégrale complète, elle peut rarement être explicitée. Or, ici, elle l'est et la question n'a nullement été préparée pour cela.

Dans le cas des propagations archimédiennes, nous sommes moins avancés; l'équation (16) n'a pas été intégrée *généralement* d'une manière purement géométrique. Il a fallu s'en tenir, en somme, à l'intégrale complète (20).

Cette comparaison porte évidemment à se demander si l'intégration de (16), déjà riche en remarques géométriques élégantes, ne pourrait pas cependant être perfectionnée encore *au point de vue purement géométrique*. Toutefois c'est une question que nous laisserons de côté pour l'instant.

Reprenons l'équation (24). On peut évidemment l'écrire

$$(26) \quad \frac{1}{\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2}} \begin{vmatrix} \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \\ \Pi_x & \Pi_y & \Pi_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = -\frac{1}{R^2}$$

en posant

$$\Pi = \frac{P}{\sqrt{1 + P^2}} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

L'équation (26) tout en conservant la forme (12) a cependant maintenant quelque chose de particulièrement remarquable. C'est que le second membre  $\Delta_1(0, P, Q)$  ne dépend plus ni de P ni de Q; c'est une simple constante, comme il est déjà arrivé

en (15) et en (22\*). Cette substitution de  $\Pi$  à  $P$  ne change rien aux canaux coniques employés; le long de tels canaux,  $\Pi$  et  $P$  sont constants ensemble puisque  $\Pi$  est fonction de  $P$ .

Mais la réduction de (24) à (26) simplifie grandement le problème de la *variation des canaux*, déjà rencontré, dans un cas plus simple, au paragraphe précédent.

On peut généraliser les fonctions  $\Pi$  et  $Q$  de l'équation (26) en

$$\Pi^* = \Pi + \varphi(\Phi), \quad Q^* = Q + \psi(\Phi).$$

On pourrait aussi conserver l'une des fonctions  $\Pi$  ou  $Q$ , soit  $\Pi$ , et généraliser  $Q$  en

$$Q^* = Q + \chi(\Phi, \Pi).$$

On voit qu'il y a une infinité de manières d'obtenir des systèmes de canaux *curvilignes* dans lesquels les surfaces  $\Sigma'$ , de Buhl-Vincensini, animées d'un mouvement quelconque autour de  $O$ , propagent des aires invariantes.

Remarquons qu'on ne change rien, aux canaux *rectilignes* d'abord envisagés, si, à la place de  $Q$ , on prend

$$Q^* = Q + \omega(\Pi)$$

car  $Q$  et  $\Pi$  sont homogènes d'ordre zéro. Il en est de même de  $Q^*$  qui, égalé à une constante redonne encore un cône, c'est-à-dire des génératrices rectilignes issues de  $O$ .

**6. L'équation, aux dérivées partielles en  $\Phi$ , à forme unitaire.** — Le remplacement de l'équation (24) par l'équation (26) et quelques résultats, de même nature, obtenus précédemment portent à se demander si l'équation

$$(12) \quad \begin{vmatrix} \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2}} = \Delta_1(o, P, Q)$$

ne pourrait pas, d'une manière générale, prendre la forme

$$(27) \quad \begin{vmatrix} \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \\ M_x & M_y & M_z \\ N_x & N_y & N_z \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2}} = 1$$

avec

$$(28) \quad M = M(P, Q), \quad N = N(P, Q).$$

C'est cette forme (27) qui, lorsque son existence sera justifiée, sera qualifiée de *forme unitaire* de l'équation (12).

En (12) et en (27), les canaux sont les mêmes car si P et Q sont constants le long d'un canal, il en sera de même, le long du même canal, de M et N.

Ceci d'après (28). Mais la forme (27) se prête, beaucoup mieux que (12), au problème de la *variation des canaux*.

Lorsqu'on dit qu'en (12) et (27) les canaux sont les mêmes cela ne veut pas dire qu'ils coïncident absolument. Deux *mêmes* canaux peuvent être comparés, par exemple, à deux cylindres infiniment déliés, parallèles à Oz, comprenant tous deux, à leur intérieur un même point p du plan Oxy mais pouvant avoir, autour de p, des sections quadrilatérales infiniment petites différentes.

Remplacer (12) par (27) revient à remplacer la double égalité (6) par

$$dM dN = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ M_x & M_y & M_z \\ N_x & N_y & N_z \end{vmatrix} d\sigma = \begin{vmatrix} \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \\ M_x & M_y & M_z \\ N_x & N_y & N_z \end{vmatrix} \frac{dS}{\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2}}$$

d'où, d'après (27),  $dS = dM dN$  et l'aire S par une intégrale de ligne en  $M dN$ .

Quant à la marche exposée d'abord, au paragraphe 1, elle conduit à écrire (10) et à terminer, d'après (4), avec une intégrale de ligne en  $U dP + V dQ$ .

Les deux procédés pourront être ramenés l'un à l'autre si l'on peut avoir

$$(29) \quad U dP + V dQ = M dN.$$

Or la réduction du premier membre de (29) au second est toujours possible.

C'est le cas le plus simple du problème de Pfaff, c'est la question du facteur intégrant pour l'équation différentielle du premier ordre

$$(30) \quad U dP + V dQ = 0.$$

En résumé, pour mettre l'équation (12) sous la forme (27), il faut d'abord poser, conformément à l'équation (10)

$$(10) \quad \frac{\partial V}{\partial P} - \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{1}{\Delta_1(o, P, Q)}.$$

Ceci fournira une infinité de formes pour U et V. On intégrera ensuite l'équation différentielle du premier ordre (30), d'où M et N d'après (29).

On peut vérifier, après coup, que

$$\left( \frac{\partial V}{\partial P} - \frac{\partial U}{\partial Q} \right) \left\| \begin{vmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \right\| = \left\| \begin{vmatrix} M_x & M_y & M_z \\ N_x & N_y & N_z \end{vmatrix} \right\|$$

si, d'après (29),

$$U = M \frac{\partial N}{\partial P}, \quad V = M \frac{\partial N}{\partial Q}$$

et si

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{\partial M}{\partial P} P_x + \frac{\partial M}{\partial Q} Q_x, & M_y &= \frac{\partial M}{\partial P} P_y + \frac{\partial M}{\partial Q} Q_y, \\ N_x &= \frac{\partial N}{\partial P} P_x + \frac{\partial N}{\partial Q} Q_x, & N_y &= \frac{\partial N}{\partial P} P_y + \frac{\partial N}{\partial Q} Q_y. \end{aligned}$$

Les calculs sont sans difficulté.

Pour en revenir à la réduction pratique de (12) à la forme unitaire (27) on voit qu'en (10) elle exigera au moins une quadrature. Ensuite il faudra intégrer (30) ce qui est, de beaucoup, la plus grande difficulté, d'autant plus qu'on a besoin de résultats explicites. Mais si l'on peut aboutir à ceux-ci, la variation des canaux se fait, avec (27), sans intégration nouvelle, tout comme il a été indiqué à la fin du paragraphe précédent.

Il est évident qu'on ne change pas l'équation (27) si l'on y remplace M et N par

$$M^* = M + \varphi(\Phi), \quad N^* = N + \psi(\Phi)$$

ou M par

$$M^* = M + \mu(\Phi, N)$$

ou N par

$$N^* = N + \nu(\Phi, M).$$

Bornons-nous ici à ces résultats très simples. Par ailleurs il est évident que le présent paragraphe pourrait soulever bien des questions et engendrer des recherches étendues notamment celles de cas où des équations (12) peuvent être réduites *explicitement* à la forme unitaire.

**7. Homogénéité et opérateurs  $x, y, z$ .** — Nous allons maintenant venir à des considérations d'homogénéité qui ont déjà joué implicitement dans ce qui précède mais qu'il importe de mettre en évidence explicitement. Nous trouverons là matière à application des considérations du Chapitre précédent.

D'abord, étant donnée l'équation d'une surface quelconque

$$(31) \quad \Phi(x, y, z) = 0,$$

on peut toujours la mettre sous la forme

$$(32) \quad f(x, y, z) = 1,$$

la fonction  $f$  étant homogène d'ordre  $un$ .

En effet, il suffit d'écrire (31)

$$(33) \quad \Phi \left( \frac{x}{\tau}, \frac{y}{\tau}, \frac{z}{\tau} \right) = 0$$

et d'imaginer que l'on résolve par rapport à  $\tau$ , d'où

$$(34) \quad f(x, y, z) = \tau.$$

Cette dernière équation ne doit pas changer si l'on y remplace  $x, y, z, \tau$  par  $kx, ky, kz, k\tau$  puisque ce n'est que l'équation (33) écrite autrement. Donc

$$f(kx, ky, kz) = k\tau = kf(x, y, z)$$

et  $f$  est homogène d'ordre  $un$ . Si maintenant on fait  $\tau = 1$ , l'équation (33) redevient (31) et (34) devient (32).

Cette transformation, de (31) en (32), va nous donner ici des résultats indéniablement intéressants mais elle semble aussi devoir être grosse de conséquences en d'autres domaines, notamment dans la Théorie des surfaces algébriques et des intégrales y attachées.

Il est à peine besoin de dire que le résultat établi avec trois variables s'étend, de lui-même, au cas d'un nombre quelconque de variables.

Revenons à la formule stokienne (4), pour espaces à canaux, et à la double égalité (6). Nous avons là des déterminants du troisième ordre qui se simplifieraient manifestement si l'on avait

$$(35) \quad \begin{aligned} P_y Q_z - P_z Q_y &= x \Psi(x, y, z), \\ P_z Q_x - P_x Q_z &= y \Psi(x, y, z), \\ P_x Q_y - P_y Q_x &= z \Psi(x, y, z). \end{aligned}$$

Le dernier déterminant de (6), avec  $\Phi$  remplacé par  $f - 1$ , deviendrait

$$\Psi(X, Y, Z) (Xf_x + Yf_y + Zf_z) \quad \text{ou} \quad \Psi f.$$

On conçoit que de telles simplifications doivent attirer l'attention.

Si les relations (35) ont lieu, on a aussi

$$\begin{aligned} xP_x + yP_y + zP_z &= 0, \\ xQ_x + yQ_y + zQ_z &= 0, \\ x\Psi_x + y\Psi_y + z\Psi_z &= -3\Psi. \end{aligned}$$

Donc  $P$  et  $Q$  sont homogènes d'ordre zéro et  $\Psi$  est homogène d'ordre  $-3$ .

Dans ces conditions  $P$  et  $Q$ , égalés à des constantes, représentent des cônes de

sommet O ne pouvant jamais se couper autrement que suivant des génératrices communes.

Sauf variation ultérieure des canaux, ceux-ci sont d'abord rectilignes et issus de O.

L'intégrale double de (4) prend la forme

$$\iint_{\sigma} \left( \frac{\partial V}{\partial P} - \frac{\partial U}{\partial Q} \right) \Psi(x, y, z) (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma.$$

Comme la première parenthèse est une fonction de P et de Q, elle est homogène d'ordre zéro et tout le coefficient de  $(\alpha x + \beta y + \gamma z)$  est homogène d'ordre  $-3$ . Cette intégrale double est donc toujours identifiable avec celle de la formule

$$(36) \quad \iint_{\sigma} \left( \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \right) (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ L & M & N \end{vmatrix}$$

en laquelle L, M, N sont fonctions homogènes d'ordre  $-2$ .

C'est là, en (36), la formule de Stokes *réduite*, donnée il y longtemps<sup>(1)</sup>, et de laquelle nous avons déjà fait de très nombreuses applications géométriques. Il est maintenant intéressant de remarquer qu'entre la formule de Stokes générale, de l'espace à trois dimensions, et la forme réduite (36), on peut intercaler une forme intermédiaire qui est précisément la forme à canaux (4).

On voit que les considérations d'homogénéité associent ici les opérateurs  $x, y, z$  aux opérateurs de dérivation partielle en  $x, y, z$ , la première association de ce type étant représentée par le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes. La formule (36) est la formule *intégrale* fondamentale qui réalise une association de même nature.

**8. Aires à propagation conique et Formule de Stokes réduite.** — Avec toutes les dispositions d'homogénéité du paragraphe précédent, la double égalité (6) s'écrit

$$\Lambda(P, Q) dP dQ = \Lambda(P, Q) \Psi(x, y, z) (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma = \frac{\Lambda(P, Q) \Psi(X, Y, Z) f^3(X, Y, Z) dS}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}.$$

On remarquera que, dans le dernier membre, tout se rapporte à la surface S d'équation

$$f(X, Y, Z) = 1$$

---

<sup>(1)</sup> Voir, par exemple, A. BUHL. *Géométrie et Analyse des Intégrales doubles* (Collect. *Scientia*, 1920, p. 8).

avec  $f$  homogène d'ordre un. Comme, sur cette surface,  $f$  est égal à un, on a pu écrire  $f^3$  au lieu de  $f$ , ce qui rend le coefficient de  $dS$  homogène d'ordre zéro. D'autre part il s'agit maintenant obligatoirement d'une propagation conique issue de  $O$ ; les points  $(X, Y, Z)$  et  $(x, y, z)$  sont en ligne droite avec  $O$ , d'où

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}.$$

On peut donc, dans le coefficient de  $dS$ , remplacer  $X, Y, Z$  respectivement par  $x, y, z$ . On a ainsi

$$\Lambda(P, Q) \Psi(x, y, z) (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma = \frac{\Lambda(P, Q) \Psi(x, y, z) f^3(x, y, z) dS}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}.$$

Le facteur  $\Lambda(P, Q)$  du second membre devient, dans ces conditions, identique à celui du premier et l'on peut supprimer les facteurs communs  $\Lambda$  et  $\Psi$ . Toutefois, il ne faut pas oublier qu'il y a, de part et d'autre, des intégrales doubles sous-entendues et, dans ces conditions, il est plus rigoureux d'isoler  $dS$  en raisonnant comme au

paragraphe 1, c'est-à-dire en posant, grâce à l'indétermination de  $\Lambda$ ,

$$\Lambda(P, Q) = \frac{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}{\Psi(x, y, z) f^3(x, y, z)},$$

ce qui est toujours possible car le second membre, étant homogène d'ordre zéro, est une fonction de deux variables seulement.

Dans ces conditions on a  $dS$  et

$$(37) \quad S = \int \int_{\sigma} f^{-3} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2} (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma.$$

Cette formule (37) peut être établie par des considérations géométriques directes. Avec  $x, y, z$  sur la surface  $\sigma$ , puis  $X, Y, Z$  sur  $S$ , et les notations habituelles, on a

$$\frac{(\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(X f_x + Y f_y + Z f_z) dS}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2} (X^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Avec

$$X f_x + Y f_y + Z f_z = f$$

et cet  $f(X, Y, Z)$ , égal à un, remplacé par  $f^3$ , le coefficient de  $dS$  peut être écrit avec

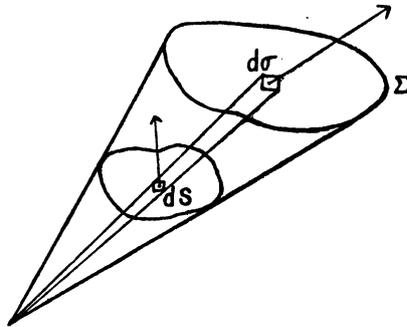


FIG. 6.

X, Y, Z remplacés respectivement par  $x, y, z$  d'où le  $dS$  précédent et la formule (37).

L'intégrale double de (37) est stokienne; on peut la transformer par la formule réduite (36) en y posant  $L = 0, M = 0,$

$$\frac{\partial N}{\partial z} = f^{-3} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}$$

d'où N par une quadrature. Alors

$$S = \int_{\Sigma} N(y dx - x dy)$$

et, si le contour  $\Sigma$  est tracé sur une surface  $(\sigma)$  d'équation

$$N = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad 2N + 1 = 0$$

L'aire S, appartenant originairement à une surface quelconque, est planifiée par un procédé géométrique fort remarquable; il suffit de la projeter de O sur  $(\sigma)$  puis de projeter la cloison, ainsi obtenue sur  $(\sigma)$ , parallèlement à Oz, sur le plan Oxy. Cette dernière projection plane est égale à S.

Nous n'insisterons pas davantage, pour l'instant, sur ces résultats déjà longuement développés en de précédents travaux, mais leur indéniable importance et précisément les grands développements qu'on peut en tirer portent à se demander si cette géométrie de l'homogène n'est pas supérieure à celle exposée d'abord sans considérations explicites d'homogénéité. Mais la supériorité n'existe pas partout. Une formule terminale, telle que (37), ne contient plus trace des fonctions P et Q ni de  $\Psi$  qui, d'après (35), provenait de P et Q. Le canal O,  $dS, d\sigma$ , de la figure 6, n'est plus le canal à section quadrilatérale bien définie; c'est un cône infiniment délié quelconque qui, de O, projette  $dS$  en  $d\sigma$  et réciproquement, quelle que soit l'idée qu'on se fasse de ces éléments d'aire. Dans ces conditions, le problème de la *variation des canaux* ne peut plus être posé et résolu comme il l'a été précédemment.

Si partant d'une surface S, bien définie par une équation  $f = 1$ , nous formons, d'après (37),

$$(38) \quad f^{-3} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2} = \lambda(x, y, z),$$

avec  $\lambda(x, y, z)$  évidemment homogène d'ordre  $-3$ , nous pouvons nous proposer, après coup, en conservant  $\lambda$ , de chercher la solution  $f^*$ , homogène d'ordre un, la plus générale qui vérifie (38). Évidemment les surfaces  $f^* = 1$  propageront l'aire S dans le cône O $\Sigma$ .

Ainsi soit la sphère

$$f = \frac{1}{R} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1.$$

L'équation (38) est

$$(39) \quad f^{-3} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2} = R^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

C'est l'équation des surfaces de Buhl-Vincensini c'est-à-dire l'équation qui donne la forme la plus générale de  $f$  quand on attribue aux dites surfaces une équation de la forme  $f = 1$ , avec  $f$  homogène d'ordre un. On comparera aisément avec (25). Mais il est indéniable que la véritable généralité est en (24) ou en (26) car, de là, on peut descendre, encore très aisément, vers (25) ou vers (39). Et, avec (26), on résout immédiatement le problème de la variation des canaux.

**9. Extensions. Propagation d'intégrales d'aires.** — Pour terminer ce Mémoire avec toute la généralité désirable il nous faut envisager le cas où ce ne sont plus seulement des aires  $S$  qui se propagent dans de certains canaux, ou dans des déformations de ceux-ci, mais des intégrales de la forme

$$\iint_S \Theta(X, Y, Z) dS,$$

ces intégrales redonnant évidemment les aires  $S$  quand la fonction  $\Theta$  se réduit identiquement à l'unité.

Il faut alors modifier légèrement la double égalité (6) et les raisonnements qui la suivent, le tout ne comportant d'ailleurs aucune difficulté.

Au lieu des deux derniers membres de (6), on posera

$$\Lambda(P, Q) \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} d\sigma = \frac{1}{\Theta} \begin{vmatrix} \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \frac{\Lambda(P, Q) \Theta dS}{\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2}}$$

avec  $\Theta$  écrit évidemment pour  $\Theta(X, Y, Z)$ . Pour le dernier membre, écrivons

$$\Delta(X, Y, Z) \Lambda(P, Q) \Theta dS \quad \text{ou} \quad \Delta_1(o, P, Q) \Lambda(P, Q) \Theta dS.$$

On profitera de l'indétermination de  $\Lambda$  pour poser  $\Delta_1 \Lambda = 1$  et l'on aura

$$(9^*) \quad \iint_S \Theta(X, Y, Z) dS = \iint_\sigma \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \frac{d\sigma}{\Delta_1(o, P, Q)}.$$

C'est là l'extension de la formule (9). Le  $\Delta_1$  de (9\*) ne coïncide avec celui de (9) que pour  $\Theta = 1$ . On voit qu'ici, on a posé

$$(12^*) \quad \frac{1}{\Theta} \frac{1}{\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2}} \begin{vmatrix} \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = \Delta_1(o, P, Q)$$

et ceci est la généralisation de l'équation (12).

On pourrait encore introduire ici des considérations analogues à celles concernant l'équation (12 a) du paragraphe 2, Mais elles seraient inutiles pour la suite.

Le problème de la variation des canaux aura exactement la même physionomie qu'au paragraphe 6.

Venons maintenant à la théorie homogène. Les considérations géométriques directes qui suivent la formule (37) se modifient encore de façon immédiate et montrent que cette formule (37) doit être remplacée par

$$\int \int_s \Theta(X, Y, Z) dS = \int \int_\sigma \Theta\left(\frac{x}{f}, \frac{y}{f}, \frac{z}{f}\right) f^{-3} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2} (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma.$$

Pour une surface initialement donnée,  $f = 1$ , on aura évidemment, comme on l'a indiqué en (38),

$$f^{-3} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2} = \lambda(x, y, z)$$

avec  $\lambda$  homogène d'ordre  $-3$ . Ceci entraîne que les formes de  $f$ , les plus générales, pour lesquelles les surfaces  $f = 1$  propagent, dans des canaux coniques, issus de O, des  $\Theta dS$  ou des intégrales de  $\Theta dS$ , sont assujetties à vérifier des équations de la forme

$$(40) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = \Omega\left(\frac{x}{f}, \frac{y}{f}, \frac{z}{f}\right).$$

Sur une surface  $f = 1$ , on peut évidemment prétendre que l'on a

$$(41) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = \Omega(x, y, z),$$

la fonction  $\Omega$  ayant, en (41), l'apparence d'une fonction quelconque de trois variables.

**10. Tourbillons. Corpuscules. Ondes.** — Réciproquement, toute équation (41), née de considérations n'imposant aucune condition à  $\Omega$ , peut être *homogénéisée*,

c'est-à-dire remplacée par l'équation (40) à laquelle on fera correspondre une propagation corpusculaire par canaux coniques issus de O. On pourra ensuite faire une théorie plus générale de cette propagation à l'aide de canaux à section quadrilatérale définie (introduction des fonctions P et Q) ce qui permettra de faire varier ces canaux et de montrer finalement que les propagations corpusculaires les plus générales associées à (41) sont aussi bien curvilignes que rectilignes.

Quant aux considérations générales donnant naissance à une équation (41) et pouvant se rapprocher d'une théorie de la propagation corpusculaire, elles sont, au moins, de deux sortes.

*En premier lieu*, l'équation (41) peut être considérée comme une équation de Jacobi relative au mouvement d'un point, au sens de la Mécanique classique. Il est déjà fort important de remarquer qu'une équation de Jacobi écrite, par la Mécanique classique, pour le mouvement d'un seul point, puisse régir aussi toute une propagation corpusculaire comprenant un nombre de particules aussi grand qu'on voudra.

*En second lieu*, l'équation (41) régit la propagation d'un front d'onde, si bien que les considérations stokiennes, donc *tourbillonnaires*, de ce Mémoire, se résolvent aussi bien en un mouvement ponctuel ordinaire, une propagation corpusculaire ou une propagation ondulatoire.

Chercher ce qu'il y a au fond des phénomènes, lesquels seraient *tourbillons*, *corpuscules* ou *ondes* est une question indéterminée et probablement dépourvue de sens.

La formule de Stokes, génératrice de tant de théories, notamment de celles d'Einstein, est un début *tourbillonnaire*. Elle devient *corpusculaire* quand elle devient la *formule pour espaces à canaux*; elle devient *ondulatoire* quand elle engendre des équations telles que (40) ou (41).

Pour préciser ces assertions, empruntons quelques formules à M. Eugène Bloch; l'exposé de l'éminent auteur peut d'ailleurs être légèrement simplifié et débarrassé de toute notation vectorielle<sup>(1)</sup>.

Reprenons d'abord le mouvement ordinaire d'un point avec les expressions élémentaires des énergies cinétique et potentielle

$$T = \frac{m}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2), \quad U = U(x, y, z).$$

En posant

$$p_x = mx', \quad p_y = my', \quad p_z = mz'$$

---

(1) E. BLOCH, *L'ancienne et la nouvelle Théorie des Quanta* (pp. 267-268). Hermann et C<sup>ie</sup>, Paris, 1930.

la fonction d'Hamilton a pour expression

$$H = T + U = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z) = \text{const.} = E.$$

L'équation de Jacobi est alors

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] + U(x, y, z) = E.$$

On introduit explicitement le temps en posant

$$(42) \quad V = S - Et$$

d'où, pour S, l'équation

$$(43) \quad \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 = 2m(E - U)$$

qui peut être comparée à (41).

Quant à la propagation du front d'onde, il s'agit d'une fonction  $V(x, y, z, t)$  qui doit rester constante sur ce front. On a donc d'abord, sur celui-ci,

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz + \frac{\partial V}{\partial t} dt = 0.$$

Soit, sur ce même front, le point  $M(x, y, z)$  au temps  $t$ . Dans le temps  $dt$ , le point  $M$  subit un déplacement, de composantes  $dx, dy, dz$ , normal au front et ce avec une certaine vitesse  $u$ . Donc

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = u dt \sqrt{\left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2}.$$

Cette équation, comparée avec la précédente, donne

$$\left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 = \frac{1}{u^2} \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)^2.$$

Si maintenant on prend, pour  $V$ , la fonction (42), on a

$$(44) \quad \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 = \frac{E^2}{u^2}$$

et la comparaison avec (43) donne

$$u = \frac{E}{\sqrt{2m(E - U)}}.$$

Telle est la vitesse de propagation des fronts d'onde correspondant au mouvement ponctuel d'abord envisagé. Ici l'intéressant est que les équations (43) et (44) sont, aussi bien l'une que l'autre, du type (41). Au mouvement ponctuel élémentaire et à la propagation ondulatoire associée correspondent encore de certaines propagations corpusculaires.

**11. Retour sur la propagation conoïdale.** — Les simplifications que nous venons d'indiquer, pour la formule stokienne (4) et la double égalité (6), ne sont certainement pas les seules que l'on puisse obtenir. Reprenons la question au paragraphe 7 et d'une manière légèrement différente.

D'abord l'équation d'une surface quelconque

$$(31) \quad \Phi(x, y, z) = 0$$

peut toujours se mettre sous la forme

$$(45) \quad f(x, y, z) = 1$$

avec  $f$  homogène d'ordre un *en  $x$  et  $y$  seulement*. Le raisonnement est le même, en commençant seulement par écrire

$$\Phi\left(\frac{x}{\tau}, \frac{y}{\tau}, z\right) = 0.$$

Quant aux déterminants du troisième ordre, de (4) et de (6), ils se simplifient encore beaucoup et même plus que la première fois, si l'on a, au lieu de (35)

$$Q = z, \quad P_x = -y\Psi(x, y, z), \quad P_y = x\Psi(x, y, z).$$

Ceci donne

$$xP_x + yP_y = 0, \quad x\Psi_x + y\Psi_y = -2\Psi.$$

Donc  $P$  est homogène d'ordre zéro,  $\Psi$  est homogène d'ordre  $-2$ , *en  $x$  et  $y$  seulement*. Les canaux le long desquels  $P$  et  $Q$  sont constants sont des conoïdes droits issus de  $Oz$ .

L'intégrale double de (4) prend la forme

$$\int \int_{\sigma} \left( \frac{\partial V}{\partial P} - \frac{\partial U}{\partial Q} \right) \Psi(x, y, z) (\alpha x + \beta y) d\sigma.$$

Tout le coefficient de  $(\alpha x + \beta y)$  est homogène d'ordre  $-2$ , *en  $x$  et  $y$  seulement*, si bien que cette intégrale double est toujours identifiable avec celle de la formule

$$(46) \quad \int \int_{\sigma} \frac{\partial N}{\partial z} (\alpha x + \beta y) d\sigma = \int_{\Sigma} N (y dx - x dy)$$

où  $N(x, y, z)$  est homogène d'ordre  $-2$ , en  $x$  et  $y$  seulement. Ceci est un nouveau type de formule stokienne réduite comportant encore de nombreuses applications géométriques.

Avec toutes ces dispositions d'homogénéité la double égalité (6) s'écrit

$$\Lambda(P, Q) dP dQ = \Lambda(P, Q) \Psi(x, y, z) (\alpha x + \beta y) d\sigma = \frac{\Lambda(P, Q) \Psi(X, Y, Z) f^2(X, Y, Z) dS}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f^{-2} f_z^2}}.$$

Dans le dernier membre, tout se rapporte à la surface  $S$  d'équation

$$f(X, Y, Z) = 1$$

avec  $f$  homogène, d'ordre un, en  $X$  et  $Y$  seulement. Nous avons pu ainsi, dans ce dernier membre, introduire des facteurs  $f$ , égaux à un, qui rendent le coefficient de  $dS$  homogène d'ordre zéro, en  $X$  et  $Y$  seulement. Comme on a

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y}, \quad Z = z.$$

on peut, dans le coefficient de  $dS$ , remplacer  $X, Y, Z$  respectivement par  $x, y, z$ .

Il vient ainsi

$$\Lambda(P, Q) \Psi(x, y, z) (\alpha x + \beta y) d\sigma = \frac{\Lambda(P, Q) \Psi(x, y, z) f^2(x, y, z) dS}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f^{-2} f_z^2}}.$$

Par suppression des facteurs communs,  $\Lambda$  et  $\Psi$ , ou par le raisonnement, plus rigoureux, du paragraphe 1, on peut isoler  $dS$ , d'où

$$(47) \quad S = \int \int_{\sigma} f^{-2} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f^{-2} f_z^2} (\alpha x + \beta y) d\sigma.$$

Là encore les applications géométriques sont nombreuses. D'ailleurs cette formule (47) peut être établie par des considérations directes.

Avec  $x, y, z$  en  $d\sigma$  puis  $X, Y, Z$  en  $dS$  et les notations habituelles,

$$\frac{\alpha x + \beta y}{x^2 + y^2} d\sigma = \frac{X f_x + Y f_y}{(X^2 + Y^2) \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}} dS.$$

Avec

$$X f_x + Y f_y = f$$

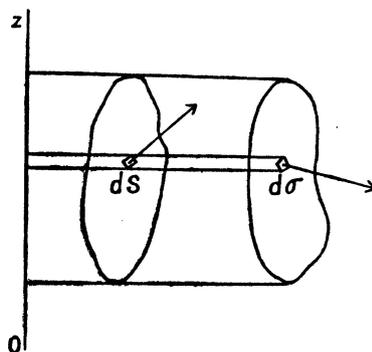


FIG. 7.

et de tels facteurs  $f$  égaux à l'unité, on peut rendre le coefficient de  $dS$  homogène, d'ordre zéro, en  $X$  et  $Y$  seulement. On peut alors y remplacer  $X, Y, Z$  par  $x, y, z$  d'où  $dS$  et  $S$  concordant avec l'expression (47).

L'intégrale (47) est stokienne. On peut la transformer par la formule stokienne réduite (46) en posant

$$\frac{\partial N}{\partial z} = f^{-1} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f^{-1} f_z^2}$$

d'où N par une quadrature et

$$S = \int_{\Sigma} N(y dx - x dy).$$

Si le contour  $\Sigma$  est tracé sur une surface ( $\sigma$ ) d'équation

$$2N + 1 = 0$$

la planification de S est encore fort remarquable; S projetée conoïdalement sur ( $\sigma$ ), à partir de Oz, donne, sur ( $\sigma$ ), une cloison dont la projection sur Oxy, parallèlement à Oz, contient S.

S'il s'agit non pas de l'aire S mais d'une intégrale quelconque attachée à cette aire, on voit facilement que la formule (47) doit être remplacée par

$$\int \int_s \Theta(X, Y, Z) dS = \int \int_{\sigma} \Theta\left(\frac{x}{f}, \frac{y}{f}, z\right) f^{-1} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f^{-1} f_z^2} (x x + \beta y) dS.$$

Tout a été disposé, on le voit, pour que le coefficient de  $(x x + \beta y)$  soit homogène, d'ordre  $-2$ , en  $x$  et  $y$  seulement. Pour une surface S donnée, ce coefficient aura une certaine expression correspondant aussi à une fonction  $f^*$ , plus générale que  $f$  et solution d'une équation de la forme

$$(48) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{f^2} \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = \Omega\left(\frac{x}{f}, \frac{y}{f}, z\right).$$

La solution  $f^*$  la plus générale, homogène d'ordre un en  $x$  et  $y$  seulement, satisfaisant à l'équation (48), est destinée à être égale à un. D'où, en somme, des surfaces  $f = 1$  sur lesquelles on a

$$(41) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = \Omega(x, y, z).$$

On retrouve ainsi l'équation (41) avec ses significations dynamique et ondulatoire.

Au mouvement d'un point, à une propagation de front d'onde, on peut faire correspondre maintenant une propagation corpusculaire de nature conoïdale.

Avec la manière primitivement étudiée d'homogénéiser (41) on avait une propagation conique. La variation des canaux permet de transformer encore beaucoup ces propagations qui pourraient, peut-être, être mieux déterminées par l'étude des con-

ditions initiales d'émission. L'analyse et la géométrie ici développées montrent simplement comment des fronts d'onde peuvent s'émettre en corpuscules et comment des troupes corpusculaires peuvent se ranger sur des fronts d'onde. Il reste certainement, au fond de ces questions, une indétermination qui rappelle les incertitudes de Heisenberg.

**12. Sur l'équation de Schrödinger.** — Voici maintenant l'occasion de raccorder cette fin de Chapitre avec la fin du chapitre précédent. Il est également intéressant d'emprunter quelques lignes à M. Weyl (1). Pour un corpuscule libre, nous avons, en Mécanique newtonienne

$$(49) \quad H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2).$$

La correspondance

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{cccc} H, & p_x, & p_y, & p_z \\ -\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial t}, & \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x}, & \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial y}, & \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right.$$

adjoint à (49) l'équation ondulatoire

$$(51) \quad \frac{h}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{h^2}{2m} \Delta \psi = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

En Mécanique relativiste, (49) est à remplacer par

$$\frac{H^2}{c^2} - (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = m^2 c^2.$$

En multipliant (à droite) tous les termes de cette équation par  $\psi$  et faisant agir la correspondance (50), on a, cette fois, au lieu de (51),

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \Delta \psi = \frac{m^2 c^2}{h^2} \psi.$$

Lorsqu'il s'agit d'un corpuscule dans un champ de force, on a

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z)$$

---

(1) HERMANN WEYL. *Gruppentheorie und Quantenmechanik*. Seconde édition, Leipzig, 1931. Cf. pp. 45-49. Quant à la génération des équations ondulatoires du second ordre par jeux d'opérateurs tels ceux du tableau (50), on peut se reporter aussi à l'ouvrage déjà cité, de M. EUGÈNE BLOCH, *L'ancienne et la nouvelle Théorie des Quanta*. Voir particulièrement le Chapitre XIV sur l'équation de Schrödinger.

avec  $V$  désignant l'énergie potentielle représentée plus haut par  $U$ . Ici, à l'introduction des variables  $x, y, z$ , ne correspond plus aucun opérateur qui soit permutable avec ceux de la seconde ligne du tableau (50). Cette constatation faite, M. Weyl (*loc. cit.*, p. 49) écrit : Trotz der oben hervorgehobenen Unvertauschbarkeit wagen es wir mit *Schrödinger*, die Regel zur Gewinnung der Wellengleichung auch auf diesen Fall anzuwenden. So erhalten wir die *Schrödingersche Differentialgleichung*

$$\frac{h}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{h^2}{2m} \Delta \psi + V(x, y, z) \psi = 0.$$

Ainsi, comme l'indique le premier mot de cette citation, c'est *malgré* de certaines non-permutabilités que l'équation de Schrödinger existe.

Dans ces conditions, il semble intéressant de remarquer que notre théorie de l'équation de Jacobi *homogénéisée* n'est pas faite *malgré* les non-permutabilités et les combinaisons (telles le théorème d'Euler) qui s'observent d'une ligne à l'autre du tableau

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{array}$$

mais, au contraire, en plein accord avec ces non-permutabilités ou combinaisons.

Homogénéiser l'équation de Jacobi ou déduire, de cette équation, celle de Schrödinger sont, à coup sûr, des choses distinctes, encore imparfaitement liées, sans doute, dans le présent Mémoire; mais toutes deux semblent avoir des importances comparables, des rôles physiques qui, quoique différents, doivent pouvoir être associés.

**13. Ondes dérivées de l'ellipsoïde.** — Le présent Mémoire touchant beaucoup plus à la Physique théorique qu'à la Géométrie pure, nous n'y avons mis jusqu'ici que les développements géométriques nécessaires à la présentation des schèmes physiques. Au point de vue purement géométrique, les résultats peuvent devenir extrêmement nombreux et être transformés d'une foule de manières; il n'y a pas lieu d'abuser de ces possibilités. Voici cependant, touchant les aires ellipsoïdales et leur propagation, des résultats fort intéressants déjà brièvement signalés dans les *Comptes rendus* (9 février 1931) et qui d'ailleurs peuvent encore se réclamer de Georges Humbert, l'excellent et regretté géomètre ayant consacré beaucoup d'efforts aux aires ellipsoïdales, la question semblant, d'ailleurs, plutôt difficile. Ce qui suit paraît la simplifier beaucoup et rendre les aires ellipsoïdales plus maniables, peut-être, que les arcs d'ellipse.

Soit l'ellipsoïde d'équation

$$(52) \quad AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1.$$

A celle-ci, on peut faire correspondre l'équation (45)

$$(53) \quad f = \sqrt{\frac{Ax^2 + By^2}{1 - Cz^2}} = 1$$

où  $f$ , on le voit, est homogène d'ordre un en  $x$  et  $y$  seulement.

Alors la formule (47) donne

$$(54) \quad S = \int \int_{\sigma} \frac{1}{Ax^2 + By^2} \sqrt{(1 - Cz^2)U + C^2 z^2 (\alpha x + \beta y)} d\sigma$$

en posant

$$(55) \quad U = \frac{Ax^2 + By^2}{Ax^2 + By^2}.$$

La recherche de ce qu'on peut appeler la *surface planifiante* de l'ellipsoïde conduit à écrire, toujours suivant les considérations du paragraphe 11,

$$\frac{\partial N}{\partial z} = \frac{1}{Ax^2 + By^2} \sqrt{U - C(U - C)z^2}.$$

On voit qu'on va avoir  $N$  par une simple quadrature circulaire. D'une manière plus précise, en s'appuyant sur

$$\int \sqrt{a^2 - b^2 u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - b^2 u^2} + \frac{a^2}{2b} \arcsin \frac{bu}{a},$$

on obtient

$$N = \frac{z \sqrt{U - C(U - C)z^2} + \frac{U}{\sqrt{C(U - C)}} \arcsin \sqrt{\frac{C(U - C)}{U}} z}{2(Ax^2 + By^2)} + \frac{1}{x^2} \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

avec  $\varphi$  fonction arbitraire.

L'équation de la surface planifiante  $2N + 1 = 0$  peut finalement s'écrire

$$(56) \quad C(U - C)z^2 = U \sin^2 V$$

avec  $U$  ayant toujours la valeur indiquée en (55) et en posant, de plus,

$$\frac{UV}{\sqrt{C(U - C)}} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - Ax^2 - By^2 - z \sqrt{U - C(U - C)z^2}.$$

Ainsi la surface planifiante ( $\sigma$ ) d'équation (56) rapprochée de l'ellipsoïde scalaène  $E$  d'équation (52) conduit à cette assertion : *Si un conoïde droit, de directrice  $Oz$ , détache sur l'ellipsoïde  $E$  une certaine cloison d'aire  $S$  et découpe un contour  $\Sigma$  sur la surface planifiante ( $\sigma$ ), la projection  $\Sigma'$  de  $\Sigma$  sur le plan  $Oxy$  enferme une aire équivalente à  $S$ .*

Comparons maintenant les formules (47) et (54). On a bien

$$(57) \quad f^{-2} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f^{-2} f_z^2} = \frac{1}{Ax^2 + By^2} \sqrt{(1 - Cz^2)U + C^2 z^2}$$

pour la forme de  $f$  indiquée en (53) mais il est clair qu'il y a d'autres fonctions  $f(x, y, z)$  homogènes d'ordre  $un$  en  $x$  et  $y$  qui satisfont à (57). Avec ces nouvelles fonctions  $f$  les surfaces d'équation  $f=1$  donneront, dans les conoïdes de l'assertion soulignée, des cloisons équivalentes en aire qui pourront propager, dans un même conoïde, l'aire  $S$  découpée par celui-ci sur l'ellipsoïde  $E$  d'équation (52).

Évidemment toutes les cloisons contenues dans un même conoïde sont planifiables à l'aide de la surface planifiante  $(\sigma)$  par la construction qui ne concernait d'abord que l'aire ellipsoïdale  $S$ .

Ces derniers résultats ne sauraient guère être explicités davantage car l'équation (57), quoique du premier ordre, est suffisamment compliquée pour défier une intégration explicite.

Tout redevient simple dans le cas de la sphère avec

$$A = B = C = U = \frac{1}{R^2}.$$

L'équation (57) se réduit à

$$(58) \quad f^{-2} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f^{-2} f_z^2} = \frac{R}{x^2 + y^2}$$

et l'on aperçoit immédiatement que l'on peut, pour cette dernière équation, chercher une solution  $f(x, y)$  ne contenant que  $x$  et  $y$ . C'est là une grande cause de simplification qui ne paraît pas avoir d'équivalent dans le cas de l'équation (57).

Pour (58) on a

$$f = \frac{1}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$$

et ceci redonne les considérations archimédiennes du cylindre circonscrit. On voit qu'Archimède s'est enthousiasmé, à juste titre, pour une proposition dont les extensions devaient dépasser de beaucoup le cas de la figure gravée sur son tombeau.

---