

BERTRAND GAMBIER

Congruences de cercles ; points focaux

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3^e série, tome 25 (1933), p. 69-114

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1933_3_25__69_0

© Université Paul Sabatier, 1933, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONGRUENCES DE CERCLES; POINTS FOCaux

Par M. BERTRAND GAMBIER.

1. — INTRODUCTION.

Dans les premières pages du tome II de la *Théorie des Surfaces*, Darboux donne quelques indications rapides sur le problème général de la distribution des points focaux dans une congruence de courbes algébriques. Je me propose de faire ici l'étude complète pour une congruence de cercles, en me bornant au cas de cercles réels (accidentellement imaginaires, mais représentés par deux équations à coefficients réels). Chaque cercle de la congruence porte *six points focaux*, dont deux sont les points à l'infini du cercle. En général ces deux points focaux à l'infini sont simples : il peut arriver que l'un des points focaux à distance finie aille rejoindre l'un des points à l'infini (auquel cas, un autre point focal, imaginaire conjugué du précédent, va aussi à l'infini) et il ne reste plus que deux points focaux à distance finie ; la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que la congruence des axes des cercles soit isotrope ; on peut même obtenir certaines congruences de cercles où chaque point focal à l'infini est triple, de sorte qu'il ne reste plus de foyer à distance finie ; M. Vincensini, après échange de vues entre nous, s'est chargé du cas où il ne reste à distance finie que deux (ou zéro) foyers ; c'est l'objet du Mémoire qu'il fait imprimer dans ces *Annales* à la suite de celui-ci. Je me borne donc ici au cas où la congruence des axes des cercles est non isotrope et où, par suite, il y a effectivement quatre foyers à distance finie. La question à résoudre est de savoir si les points focaux sont chacun d'ordre un ou supérieur à un, la somme des ordres étant égale à quatre ; chaque point focal, simple ou non, résulte de l'intersection du cercle qui lui a donné naissance avec un cercle infiniment voisin convenablement choisi : il s'agit de savoir si ces deux cercles se coupent en un point unique, ou en deux points (qui sont alors tous deux foyers), points qui peuvent d'ailleurs être distincts ou non. Il faut bien se garder de croire que si un foyer est double, à titre de foyer, il est double dans l'intersection du cercle, qui lui donne naissance, et du cercle infiniment voisin correspondant : traçons, sur une surface

S arbitraire, ∞^1 courbes γ ; en un point M d'une courbe γ coupons S par un plan contenant la tangente en M à γ , mais *distinct du plan osculateur* et traçons le cercle C osculateur à la section : sur chaque cercle C le point M est double comme foyer, mais simple comme point commun à C et au cercle relatif au point infiniment voisin M' de M sur γ ; *si le plan choisi est osculateur* à γ , cette fois M est double comme point commun aux deux cercles. On a des résultats analogues pour les foyers triples ou quadruples. D'autre part nous verrons qu'un foyer f du cercle général C d'une congruence quelconque détermine un cercle C_1 infiniment voisin de C et un seul coupant C en f . Les divers cas à étudier sont donc représentés dans le tableau schématique

1°)	$f_1 f_2 f_3 f_4$ $C_1 C_2 C_3 C_4$	$\underbrace{f_1 f_2 f_3 f_4}$ $C_1 C_3 C_4$	$\underbrace{f_1 f_2} \quad \underbrace{f_3 f_4}$ $C_1 C_3$		
2°)	$f_1 f_1 f_2 f_3$ $C_1 C_1 C_2 C_3$	$\underbrace{f_1 f_1} f_2 f_3$ $C_1 C_2 C_3$	$\underbrace{f_1 f_2} f_3 f_3$ $C_1 C_3 C_3$	$\underbrace{f_1 f_2} \quad \underbrace{f_3 f_3}$ $C_1 C_3$	$f_1 \underbrace{f_1 f_2} f_3$ $C_1 C_1 C_3$
3°)	$f_1 f_1 f_2 f_2$ $C_1 C_1 C_2 C_2$	$\underbrace{f_1 f_2} \quad \underbrace{f_1 f_2}$ $C_1 C_1$	$\underbrace{f_1 f_1} f_2 f_2$ $C_1 C_2 C_2$	$\underbrace{f_1 f_1} \quad \underbrace{f_2 f_2}$ $C_1 C_2$	
4°)	$f_1 f_1 f_1 f_2$ $C_1 C_1 C_1 C_2$	$\underbrace{f_1 f_1} f_1 f_2$ $C_1 C_1 C_2$	$f_1 f_1 \underbrace{f_1 f_2}$ $C_1 C_1 C_1$		
5°)	$f_1 f_1 f_1 f_1$ $C_1 C_1 C_1 C_1$	$\underbrace{f_1 f_1} \quad \underbrace{f_1 f_1}$ $C_1 C_1$			

Pour le cas n° 2, il a deux foyers simples, un foyer double : la première des cinq hypothèses signifie que le foyer double f_1 donne lieu au cercle infiniment voisin C_1 qui ne recoupe C qu'en l'unique point f_1 , tandis que pour la seconde hypothèse C_1 est tangent à C en f_1 (c'est ce qui a été expliqué à l'instant par voie géométrique intuitive); même explication pour les différents autres schémas.

Grâce à une aide précieuse que MM. Drach et Finikoff m'ont apportée, j'ai pu exposer complètement la recherche des congruences de cercles osculateurs aux lignes de courbure (d'un système) de deux surfaces différentes ou, ce qui revient au même, la recherche des congruences rectilignes telles que les courbes de contact sur les deux nappes focales soient géodésiques (paragraphe 12 de ce Mémoire). J'en exprime ma reconnaissance à MM. Drach et Finikoff.

2. — Rappel de résultats classiques.

Il n'est peut être pas inutile de rappeler quelques résultats classiques : considérons une famille ∞^1 de cercles définis par les deux équations

$$(1) \quad \begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - \rho^2 = 0, \\ u(x - x_1) + v(y - y_1) + w(z - z_1) - \mu = 0, \end{cases}$$

où $x_1, y_1, z_1, \rho, u, v, w, \mu$ sont huit fonctions d'un paramètre t . On peut déplacer le centre x_1, y_1, z_1 de la sphère Σ sur l'axe du cercle C , en changeant convenablement ρ et μ . Pour que le cercle C rencontre le cercle infiniment voisin, les équations (1) doivent être compatibles avec les deux suivantes :

$$(2) \quad \begin{cases} (x - x_1) dx_1 + (y - y_1) dy_1 + (z - z_1) dz_1 + \rho d\rho = 0, \\ (x - x_1) du + (y - y_1) dv + (z - z_1) dw - u dx_1 - v dy_1 - w dz_1 - d\mu = 0. \end{cases}$$

Or les trois dernières équations de ce système correspondent chacune à un plan : si donc ces trois plans n'ont qu'un point commun les deux cercles n'ont qu'un point commun possible ; si les trois plans ont une droite commune, il y a deux points communs possibles ; dans ce dernier cas, on a

$$(3) \quad \begin{vmatrix} u & v & w \\ du & dv & dw \\ dx_1 & dy_1 & dz_1 \end{vmatrix} = 0$$

et l'axe du cercle engendre une développable : la condition est nécessaire, mais non suffisante : si elle est remplie, il y a deux ou zéro point commun aux deux cercles (mais jamais un seul). En tous cas si l'axe engendre une développable, nous pouvons mettre le point (x_1, y_1, z_1) centre de la sphère, au point où l'axe touche l'arête de rebroussement ; on peut écrire

$$(4) \quad u = \frac{dx_1}{dt}, \quad v = \frac{dy_1}{dt}, \quad w = \frac{dz_1}{dt}$$

et alors, la condition nécessaire et suffisante pour obtenir deux points est $\mu = -\rho \frac{d\rho}{dt}$, de sorte que le cercle est représenté par deux équations

$$(5) \quad \Sigma = 0, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial t} = 0.$$

Le cercle engendre une surface enveloppe de sphères; il touche l'arête de rebroussement de cette surface enveloppe aux deux points définis par les trois équations

$$(6) \quad \Sigma = 0, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial t^2} = 0$$

et ces deux points se confondent en un seul si le cercle est le cercle osculateur d'une courbe gauche Γ .

D'autre part pour les congruences très spéciales de courbes représentées par des équations

$$(7) \quad F(x, y, z, u, v) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u}(x, y, z, u, v) = 0,$$

les points focaux s'obtiennent en adjoignant à ces deux équations les deux suivantes :

$$(8) \quad \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} du + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} dv = 0.$$

La première équation (8) se réduit, en vertu de (7), à $\frac{\partial F}{\partial v} dv = 0$; le facteur $dv = 0$ donne le système

$$(9) \quad F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 0, \quad dv = 0.$$

de points où la courbe $F(x, y, z, u, v_0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial u}(x, y, z, u, v_0) = 0$ touche l'arête de rebroussement Γ_0 de la surface enveloppe de la surface mobile $F(x, y, z, u, v_0) = 0$; le lieu de Γ_0 quand v_0 varie est la surface focale relative à cette première série de foyers : la courbe (u, v_0) de la congruence admet donc une série de foyers tous situés sur la courbe infiniment voisine $(u + du, v_0)$. Le second facteur $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 0$ donne le système

$$(10) \quad F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = 0, \quad du : dv = -\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} : \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\right)$$

qui donne les points où la surface mobile à deux paramètres $F = 0$ touche son enveloppe; il n'y a aucune raison pour que la valeur du quotient $du : dv$ relative à chaque foyer de cette série soit la même que pour un autre foyer : donc, en général, il y aura autant de courbes infiniment voisines distinctes que de foyers distincts.

Pour la congruence de cercles $\Sigma = 0$, $\Pi = 0$, où Σ et Π sont une sphère et un plan nous pouvons supposer que les cercles ne sont pas tous de rayon nul, sinon nous aurions en réalité à étudier deux congruences rectilignes de rayons isotropes; chaque point focal donne lieu à un cercle infiniment voisin unique bien déterminé, car le rapport $du : dv$ est donné par les deux équations

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial u} du + \frac{\partial \Sigma}{\partial v} dv = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u} du + \frac{\partial \Pi}{\partial v} dv = 0,$$

compatibles par suite du choix du foyer; les quatre dérivées partielles

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial u}, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial v}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial v}$$

ne sont pas nulles ensemble, sinon le foyer se trouverait à la fois sur l'enveloppe de Σ et sur celle de Π ; le plan Π serait toujours tangent à Σ et le cercle aurait son rayon nul, ce que nous écartons.

Enfin nous nous rappellerons que l'ordre d'un foyer (nombre de foyers venus se confondre en un seul) est égal à l'ordre de contact de la courbe variable avec la surface focale (avec règle un peu plus compliquée si la surface est dégénérée en courbe).

3. — Étude du cas où les quatre foyers sont distincts.

Le cas

f_1	f_2	f_3	f_4
C_1	C_2	C_3	C_4

est le cas normal, obtenu sans précaution; il n'a donc rien de particulièrement intéressant.

Étudions donc le cas

f_1	f_2	f_3	f_4
⏟		C_3	C_4
C_1			

Quand le cercle initial C est suivi par C_1 , lequel est suivi par le cercle infiniment voisin correspondant et ainsi de suite, l'axe du cercle C engendre une développable; nous pouvons supposer que $v = \text{constante}$ donne ces développables d'axes ou ces familles de cercles consécutifs bi-sécants et les équations du cercle C sont

$$(1) \quad \Sigma(x, y, z, u, v) = 0, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial u}(x, y, z, u, v) = 0$$

où

$$\Sigma \equiv (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - \rho_1^2;$$

x_1, y_1, z_1, ρ_1 sont quatre fonctions arbitraires de u et v ; nous avons expliqué que f_1 et f_2 donnent

$$(2) \quad \Sigma = \frac{\partial \Sigma}{\partial u} = \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial u^2} = 0, \quad dv = 0$$

tandis que f_3, f_4 correspondent au système

$$(3) \quad \Sigma = \frac{\partial \Sigma}{\partial u} = \frac{\partial \Sigma}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial u^2} du + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial u \partial v} dv = 0.$$

Les valeurs de $du : dv$ relatives à f_3 ou f_4 sont en général distinctes et le seul cas qui nous reste à étudier est :

$$\boxed{\begin{array}{cc} \underbrace{f_1 \quad f_2}_{C_1} & \underbrace{f_3 \quad f_4}_{C_3} \end{array}}$$

et ce cas est obtenu précisément en s'arrangeant pour que ces deux valeurs de $du : dv$ deviennent égales : on peut supposer que la seconde variable u est celle qui reste constante quand on suit la série des cercles consécutifs relatifs à ces nouveaux foyers, de sorte que les points focaux f_3, f_4 correspondent au système

$$(4) \quad \Sigma = \frac{\partial \Sigma}{\partial u} = \frac{\partial \Sigma}{\partial v} = \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial u \partial v} = 0, \quad du = 0.$$

Mais alors si l'on pose

$$2\sigma_1 = \rho_1^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2$$

les trois dernières équations (4) doivent représenter trois plans ayant une droite

commune : on voit aussitôt que x_1, y_1, z_1 et σ_1 doivent être solutions d'une même équation de Laplace

$$(5) \quad \xi(\theta) \equiv \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - A \frac{\partial \theta}{\partial u} - B \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0$$

et l'on a ainsi retrouvé les résultats que Darboux a exposés au tome II de la *Théorie des Surfaces* (p. 314-345 et, en particulier, p. 323). Pour trouver les coordonnées de f_1 ou f_1 , on peut⁽¹⁾ poser

$$(6) \quad x - x_1 = l \frac{\partial x_1}{\partial u} + m \frac{\partial x_1}{\partial v} + n \xi, \quad y - y_1 = \dots \quad z - z_1 = \dots$$

où ξ, η, ζ sont les mineurs de la matrice

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial y_1}{\partial v} & \frac{\partial z_1}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

En substituant dans les équations $\Sigma = 0, \frac{\partial \Sigma}{\partial u} = 0, \frac{\partial \Sigma}{\partial v} = 0$ on a aisément, en appelant $E = S\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2, F = S \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v}$ et $G = S\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2$, les équations

$$(7) \quad \begin{cases} l^2 E + m^2 G + 2lm F + n^2 (EG - F^2) = \rho_1^2, \\ l E + m F + \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial u} = 0, \\ l F + m G + \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

Les deux dernières fournissent l, m ; on a la combinaison évidente

$$(8) \quad n^2 (EG - F^2) - l \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial u} - m \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial v} = \rho_1^2$$

qui fournit n^2

$$(9) \quad n^2 = \frac{\rho_1^2 [1 - \Delta(\rho_1)]}{EG - F^2}$$

(1) Ce calcul est valable même pour le cas précédent.

où Δ est le paramètre différentiel bien connu

$$\Delta(\theta) = \frac{E\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2}.$$

Avec la notation $\mathcal{E}(\theta)$ employée plus haut on trouve aisément le résultat utile pour la suite

$$0 = \mathcal{E}(\sigma_1) \equiv \rho_1 \mathcal{E}(\rho_1) + \frac{\partial \rho_1}{\partial u} \frac{\partial \rho_1}{\partial v} - F.$$

4. — Étude des transformations de Laplace relatives au cas

$$\boxed{\begin{array}{cc} \underbrace{f_1 \ f_2}_{C_1} & \underbrace{f_3 \ f_4}_{C_3} \end{array}}$$

Nous venons d'étudier ce cas en rompant la symétrie qui existe entre les variables u , v ; le cercle variable a été défini par les équations

$$(1) \quad \Sigma_1 = 0, \quad \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0.$$

(x_1, y_1, z_1) est l'un des points focaux de l'axe du cercle, correspondant aux développables $v = \text{const}$ de la congruence des axes; l'équation de Laplace obtenue, $E(\theta) = 0$, montre que la seconde famille de développables correspond à u constant; x_2, y_2, z_2 désignant les coordonnées du second point focal de l'axe, le même cercle aurait pu être obtenu par les équations

$$(2) \quad \Sigma_2 = 0, \quad \frac{\partial \Sigma_2}{\partial v} = 0$$

de façon à rétablir la symétrie en u et v ; on a posé

$$2\sigma_1 = \rho_1^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2, \quad 2\sigma_2 = \rho_2^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2$$

et l'on constate sans peine que la transformation de Laplace appliquée à l'équation

$E(\theta) = 0$ remplace les solutions x_1, y_1, z_1, σ_1 par x_2, y_2, z_2, σ_2 ⁽¹⁾. Faisons une figure représentant le cercle C , son axe tangent en $m_1(x_1, y_1, z_1)$ à l'arête de rebroussement (v_0), en $m_2(x_2, y_2, z_2)$ à l'arête de rebroussement (u_0) et les points focaux M_1, M'_1, μ_1, μ'_1 (en changeant légèrement les notations, pour mieux suivre le raisonnement) (fig. 1). Les points M_1, M'_1 , correspondent aux équations

$$(M_1, M'_1) \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_1 = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u^2} = 0, \\ dv = 0, \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_2 = \frac{\partial \Sigma_2}{\partial v} = \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial v^2} = 0, \\ dv = 0, \end{array} \right.$$

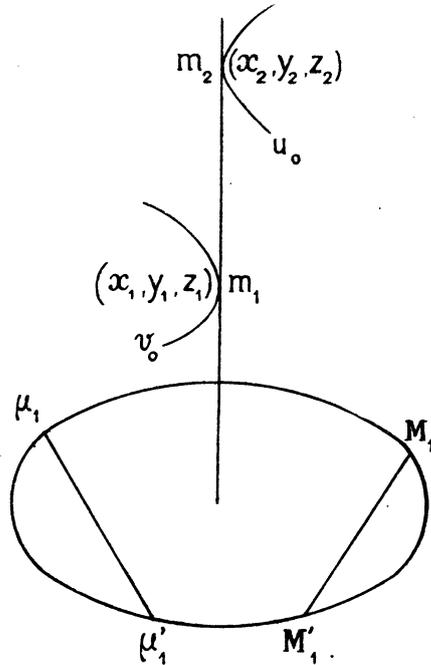


FIG. 1.

tandis que (μ_1, μ'_1) correspondent aux équations

$$(\mu_1, \mu'_1) \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_2 = \frac{\partial \Sigma_2}{\partial v} = \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial v^2} = 0, \\ du = 0, \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_1 = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u^2} = 0, \\ du = 0. \end{array} \right.$$

⁽¹⁾ On a

$$x_2 = x_1 - \frac{1}{B} \frac{\partial x_1}{\partial u}, \quad y_2 = \dots, \quad z_2 = \dots, \quad \text{puis} \quad \rho_2^2 = \left(\rho_1 - \frac{1}{B} \frac{\partial \rho_1}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{B^2} \left[E - \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial u} \right)^2 \right]$$

d'où l'on conclut sans peine

$$\sigma_2 = \sigma_1 - \frac{1}{B} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}.$$

La droite $M_1M'_1$ est parallèle à la binormale de la courbe $m_1(v_0)$ ou à la normale de la surface focale lieu de m_1 . Quand on effectue la transformation de Laplace en passant de la surface focale lieu de m_1 à celle lieu de m_2 , il est tout indiqué de remplacer le cercle $\left(\Sigma_1, \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u}\right)$ par le cercle $\left(\Sigma_2, \frac{\partial \Sigma_2}{\partial u}\right)$ et ainsi de suite; le cercle $\left(\Sigma_2, \frac{\partial \Sigma_2}{\partial u}\right)$ a en commun avec le cercle $\left(\Sigma_2, \frac{\partial \Sigma_2}{\partial v}\right)$, qui n'est autre que le cercle initial, les deux points focaux (M_1, M'_1) ; nous avons ainsi une seule série illimitée dans les deux sens de sphères découlant les unes des autres par l'opération de Laplace appliquée aux quatre solutions $(x_1, y_1, z_1, 2\sigma_1)$

$$\dots \Sigma_{-1}, \Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3 \dots$$

Chaque sphère donne deux cercles dont chacun appartient à l'une ou l'autre des sphères contiguës; le cercle $\left(\Sigma_2, \frac{\partial \Sigma_2}{\partial v}\right)$ est le même que le cercle $\left(\Sigma_1, \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u}\right)$, nous l'appellerons (Σ_1, Σ_2) ; le cercle $\left(\Sigma_2, \frac{\partial \Sigma_2}{\partial u}\right)$ est le même que le cercle $\left(\Sigma_3, \frac{\partial \Sigma_3}{\partial v}\right)$, nous l'appellerons (Σ_2, Σ_3) ; de sorte que nous avons notre suite de cercles

$$\dots (\Sigma_0, \Sigma_1), (\Sigma_1, \Sigma_2), (\Sigma_2, \Sigma_3) \dots$$

Sur les quatre points focaux de chaque cercle, deux appartiennent au suivant, les deux autres au précédent (les rôles d'un couple s'échangeant en passant de l'un à l'autre cercle qui le contiennent).

Le point μ d'intersection des deux droites $(M_1M'_1)$ et $(\mu_1\mu'_1)$ décrit la surface enveloppe du plan de ces deux droites; ce plan a en effet pour équation $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0$ et le point où il touche son enveloppe est défini par le système

$$(3) \quad \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u \partial v} = 0.$$

Or nous avons constaté que les deux équations $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0, \frac{\partial \Sigma_1}{\partial v} = 0$ qui représentent $\mu_1\mu'_1$ sont équivalentes aux deux équations $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0, \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u \partial v} = 0$; d'autre part les deux équations $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0, \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u^2} = 0$, représentent $M_1M'_1$; cela justifie la proposition.

Nous allons montrer que les deux tangentes $M_1M'_1$ et $\mu_1\mu'_1$ à la surface lieu du point μ sont conjuguées; en nous déplaçant sur la courbe $v = \text{const.}$ qui passe en μ , les paramètres dx, dy, dz de la tangente à cette courbe et la différentielle du

satisfont aux équations obtenues en différentiant le système équivalent à (3), à savoir

$$(3') \quad \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \Sigma_1}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u^2} = 0.$$

En désignant par $d_1\theta$ l'expression $\frac{\partial \theta}{\partial x} dx + \frac{\partial \theta}{\partial y} dy + \frac{\partial \theta}{\partial z} dz$, on a ainsi, v restant constant,

$$(4) \quad d_1 \left(\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} \right) + \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u^2} du = 0, \quad d_1 \left(\frac{\partial \Sigma_1}{\partial v} \right) + \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u \partial v} du = 0, \quad d_1 \left(\frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u^2} \right) + \frac{\partial^3 \Sigma_1}{\partial u^3} du = 0$$

et puisque en μ on a $\frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u^2} = 0$, $\frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u \partial v} = 0$ il reste

$$d_1 \left(\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} \right) = 0, \quad d_1 \left(\frac{\partial \Sigma_1}{\partial v} \right) = 0.$$

Cela prouve que la direction cherchée est celle de la tangente à la courbe $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial v} = 0$ qui est μ, μ'_1 ; d'autre part l'intersection du plan $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0$ avec le plan infiniment voisin $(u + du, v)$ est fournie par le système $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u^2} = 0$ qui correspond à $M_1 M'_1$: la proposition est donc établie.

Ce dernier résultat peut encore être obtenu de la façon suivante: la droite (μ, μ'_1) est représentée par les équations $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial v} = 0$; la droite infiniment voisine $(u + du, v)$ donne lieu pour son intersection avec μ, μ'_1 au système compatible

$$\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial v} = \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u \partial v} = 0$$

qui donne le point μ ; de même la droite consécutive à μ, μ'_1 correspondant à $(u, v + dv)$ fournit le foyer défini par les équations compatibles

$$\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial v} = \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial v^2} = 0$$

on obtient ainsi le second foyer ν de μ, μ'_1 et cette génération de μ et ν prouve que

le réseau (u, v) est conjugué sur chacune des surfaces lieu de μ ou ν ; la comparaison des équations fournissant μ ou ν .

$$\begin{aligned} \mu) \quad & \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial v} = \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \Sigma_2}{\partial u} = \frac{\partial \Sigma_2}{\partial v} = \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial v^2} = 0 \\ \nu) \quad & \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial v} = \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial v^2} = 0 \end{aligned}$$

prouve que *la transformation de Laplace suivie dans le sens*

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3 \dots$$

transforme en même temps les cercles

$$(\Sigma_1, \Sigma_2), (\Sigma_2, \Sigma_3) \dots$$

et aussi les surfaces enveloppes des plans de ces cercles. Sur chaque cercle un couple $(M_1 M'_1)$ ou $(\mu_1 \mu'_1)$ joue respectivement le rôle de l'un ou l'autre foyer sur une congruence rectiligne, chaque sphère Σ_1 ou Σ_2 jouant le rôle de l'un ou l'autre plan focal. Nous avons ainsi complété les résultats de Darboux, qui n'avait pas songé à la suite illimitée de sphères; il avait simplement signalé que les plans focaux de la corde $\mu_1 \mu'_1$ sont respectivement $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0$ et $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial v} = 0$ sans signaler que l'un des points focaux de cette corde est le point μ .

On constate aisément que si le point m_2 décrit une courbe, au lieu d'une surface, $\frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial y_2}{\partial v}, \frac{\partial z_2}{\partial v}$ et $\frac{\partial \rho_2}{\partial v}$ sont nulles de sorte que le cercle C est représenté par les équations $\Sigma_1 = 0, \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0$ tandis que sur les deux équations $\Sigma_2 = 0, \frac{\partial \Sigma_2}{\partial v} = 0$ la dernière devient illusoire: il y a ∞^1 cercles C situés sur une même sphère Σ_2 , ou $u = \text{constante}$.

*Connaissant la surface m_1 et un réseau conjugué tracé sur elle, il suffit de trouver une quatrième solution de l'équation de Laplace ponctuelle relative à ce réseau pour en déduire la surface μ . Inversement, connaissant la surface μ et un réseau conjugué sur elle, pour obtenir une congruence de cercles associée, on doit d'abord construire une congruence rectiligne formée de droites parallèles aux normales de μ et dont les développables correspondent au réseau conjugué sur la surface μ . Ce problème revient à trouver une solution de l'équation de Laplace adjointe à l'équation de Laplace tangentielle relative au réseau conjugué tracé sur μ (voir BIANCHI, *Leçons de Géométrie différentielle*, t. I, 3^e édition, p. 483-485). Nous reviendrons plus bas sur ce point, en nous préoccupant du parallélisme de Peterson; nous voyons aussi l'intérêt de rapporter la congruence des axes à ses développables et à son image sphérique.*

Nous avons remarqué que les cordes $M_1 M'_1$ et $\mu_1 \mu'_1$ sont respectivement perpendiculaires aux plans focaux de l'axe $m_1 m_2$: donc pour que le réseau (u, v) soit réseau de courbure pour la surface μ , il faut et suffit que la congruence des axes des cercles C soit une congruence de normales⁽¹⁾. On remarquera d'ailleurs que si cette propriété a lieu pour la congruence (Σ_1, Σ_2) , elle n'a pas lieu pour les autres cercles. Si S est une surface normale aux axes $(m_1 m_2)$, les surfaces S et μ sont parallèles, au sens de Peterson, suivant leur réseau de courbure.

Ajoutons encore quelques résultats que nous confronterons avec ceux de Darboux, relatifs au cas spécial où, en outre des conditions déjà écrites, on a

$F = \frac{\partial \rho_1}{\partial u} \frac{\partial \rho_1}{\partial v}$ et où par suite ρ_1 est lui aussi solution de l'équation de Laplace qui

admet déjà pour solutions x_1, y_1, z_1, σ_1 . [Nous supposons $\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial u}\right)^2 \neq E$ pour

écarter le cas de cercles tous de rayon nul]. Nous savons que, dans ce cas, le cercle normal Γ à la sphère Σ_1 aux points μ_1, μ'_1 engendre une congruence cyclique, c'est-à-dire une nouvelle congruence de cercles où chaque cercle Γ : 1° est rencontré en deux points par deux cercles infiniment voisins, ce qui est le cas étudié ici pour la congruence C , 2° est orthogonal à ∞^1 surfaces L dont les lignes de courbure se correspondent entre elles en même temps qu'au réseau u, v conjugué tracé sur les surfaces m_1, m_2 ; ces ∞^1 surfaces appartiennent à un système triple orthogonal.

Le point μ_1 engendre une des surfaces L_0 annoncée; on constate sans peine, en dérivant en v les équations $\Sigma_1 = 0, \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0$, vérifiées par le point μ_1 , que $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ pour le point μ_1 vérifient les équations $S(x-x_1) \frac{\partial x}{\partial v} = 0, S \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0$ de sorte que la tangente principale de L_0 relative à μ_1 et à $u = \text{const}$, est précisément la tangente en μ_1 au cercle C ; le point φ où la tangente en m_1 à la courbe u , de la surface (m_1) coupe le plan du cercle C a pour coordonnées

$$(\varphi) \quad x_1 - \rho_1 \frac{\frac{\partial x_1}{\partial v}}{\frac{\partial \rho_1}{\partial v}}, \quad y_1 - \rho_1 \frac{\frac{\partial y_1}{\partial v}}{\frac{\partial \rho_1}{\partial v}}, \quad z_1 - \rho_1 \frac{\frac{\partial z_1}{\partial v}}{\frac{\partial \rho_1}{\partial v}}$$

et l'on constate que ce point est sur la tangente en μ_1 au cercle C ; ceci revient en effet à écrire en μ_1

$$\frac{\partial x}{\partial v} : \frac{\partial y}{\partial v} : \frac{\partial z}{\partial v} :: x_1 - x - \rho_1 \frac{\frac{\partial x_1}{\partial v}}{\frac{\partial \rho_1}{\partial v}} : y_1 - y - \rho_1 \frac{\frac{\partial y_1}{\partial v}}{\frac{\partial \rho_1}{\partial v}} : z_1 - z - \rho_1 \frac{\frac{\partial z_1}{\partial v}}{\frac{\partial \rho_1}{\partial v}}$$

(1) Cela signifie que la courbe (v_0) est géodésique sur le lieu du point m_1 et que la courbe (u_0) est géodésique sur la surface lieu de m_2 .

et il suffit de tenir compte des équations $S(x - x_1) \frac{\partial x}{\partial v} = 0$, $S \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0$ pour le vérifier; or, dans le cas étudié ici, φ est l'un des points focaux de la droite d'intersection des plans tangents en μ_1 et μ'_1 à Σ_1 , l'autre point focal étant sur l'axe du cercle C (tangent à la courbe v_0 de la surface m_1) et sur la tangente principale ($v = \text{const}$) de la surface μ_1 , (résultats donnés par Darboux).

On remarquera ici que ces résultats ne s'appliquent pas aux sphères Σ_2 et Σ_0 contiguës à Σ_1 dans la suite de Laplace; la quantité ρ_2 n'est pas solution de l'équation de Laplace relative à la surface m_2 (du moins en général). D'ailleurs, si cela arrive, ρ_2 n'est pas la solution déduite de ρ_1 , comme le montre la formule

$$\rho_2^2 = \left(\rho_1 - \frac{1}{B} \frac{\partial \rho_1}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{B^2} \left[E - \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial u} \right)^2 \right].$$

5. — Cas du point focal double et de deux points focaux simples.

Nous avons à traiter d'abord les deux cas

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline f_1 & f_1 & f_2 & f_3 \\ \hline C_1 & C_1 & C_2 & C_3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline f_1 & f_1 & f_2 & f_3 \\ \hline \underbrace{C_1} & & C_2 & C_3 \\ \hline \end{array}$$

qui ont été signalés dans l'introduction. Sur une surface S quelconque on trace ∞^1 courbes γ arbitrairement; au point M de S on mène un plan déterminé par la tangente à la courbe γ qui passe en M et l'on trace le cercle C osculateur en M à la section plane ainsi obtenue sur S; si le plan ne coïncide pas avec le plan osculateur de γ , on a le premier des deux cas en question; si le plan est osculateur on a le second cas; c'est évident géométriquement, car les surfaces cerclées obtenues en associant des cercles C consécutifs sécants donnent une famille de ∞^1 cercles C doués d'une enveloppe: dans le premier cas le cercle C étant simplement tangent à Γ , le point de contact de C et γ est simple dans l'intersection de C et du cercle consécutif C_1 bien qu'il compte pour deux foyers réunis en un seul; dans le second cas, le cercle C et le cercle infiniment voisin sont tangents en M.

On peut s'en assurer par un exemple simple: prenons comme surface S le cylindre $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$, comme courbes γ les sections horizontales de S; si on considère la section plane obtenue par le plan $z - v = 0$ et le point $M(a \cos \varphi,$

$b \sin \varphi, v)$ les cercles osculateurs aux sections planes menées par la tangente sont, d'après le théorème de Meusnier, sur la sphère d'équation

$$(1) \quad x^2 + y^2 + (z - v)^2 - \frac{2c^2}{a} x \cos^3 \varphi + \frac{2c^2}{b} y \sin^3 \varphi - (2b^2 - a^2) - 3c^2 \sin^2 \varphi = 0$$

qui a pour cercle diamétral le cercle de courbure de l'ellipse principale; nous prenons pour cercle C la section de cette sphère par le plan

$$(2) \quad \frac{x}{a} \cos \varphi + \frac{y}{b} \sin \varphi - 1 - \frac{z - v}{l} = 0$$

où l est une constante. Les points focaux s'obtiennent en annulant le Jacobien

$$(3) \quad \begin{vmatrix} 6c^2 \cos \varphi \sin \varphi \left(\frac{x}{a} \cos \varphi + \frac{y}{b} \sin \varphi - 1 \right) & 2(v - z) \\ -\frac{x}{a} \sin \varphi + \frac{y}{b} \cos \varphi & \frac{1}{l} \end{vmatrix} = 0.$$

En remplaçant $z - v$ par $l \left(\frac{x}{a} \cos \varphi + \frac{y}{b} \sin \varphi - 1 \right)$ dans ce Jacobien, on trouve le facteur $\frac{x}{a} \cos \varphi + \frac{y}{b} \sin \varphi - 1 = 0$, qui entraîne la condition $z - v = 0$; on trouve donc bien deux foyers confondus avec M; l'autre facteur

$$3c^2 \cos \varphi \sin \varphi + l^2 \left(-\frac{x}{a} \sin \varphi + \frac{y}{b} \cos \varphi \right) = 0$$

ne s'annule pas en M et conduit aux deux autres foyers.

Le cercle infiniment voisin qui passe en M conduit aux deux équations

$$(4) \quad \begin{cases} 6c^2 \cos \varphi \sin \varphi \left(\frac{x}{a} \cos \varphi + \frac{y}{b} \sin \varphi - 1 \right) d\varphi + 2(v - z) dv = 0, \\ \left(-\frac{x}{a} \sin \varphi + \frac{y}{b} \cos \varphi \right) d\varphi + \frac{dv}{l} = 0 \end{cases}$$

dont la première se réduit à une identité pour M et dont la seconde donne $dv = 0$; l'intersection de C avec le cercle $(\varphi + d\varphi, v)$ conduit à associer aux équations (1), (2) les nouvelles équations déduites de (4) en faisant $dv = 0$

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{x}{a} \cos \varphi + \frac{y}{b} \sin \varphi - 1 = 0, \\ -\frac{x}{a} \sin \varphi + \frac{y}{b} \cos \varphi = 0. \end{cases}$$

Or ces deux équations représentent la parallèle à Oz issue de M, qui coupe C uniquement en M d'ordre 1 dans l'intersection. Au contraire si le cercle C est précisément le cercle osculateur de l'ellipse principale, M compte pour deux dans l'intersection de C et du cercle voisin (pour ce cas particulier, les deux autres foyers se trouvent renvoyés à l'infini, par suite de l'exemple particulier adopté où les cercles passent tous par deux points fixes du cercle de l'infini; chacun de ces points compte pour deux foyers)⁽¹⁾.

6. — Traitons maintenant les deux autres cas suivants prévus dans l'introduction.

D'abord

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline f_1 & f_2 & f_3 & f_3 \\ \hline C_1 & C_3 & C_3 & \\ \hline \end{array}$$

Le cercle C est donné par deux équations

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_1 \equiv (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - \rho_1^2 = 0, \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} \equiv (x - x_1) \frac{\partial x_1}{\partial u} + (y - y_1) \frac{\partial y_1}{\partial u} + (z - z_1) \frac{\partial z_1}{\partial u} + \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial u} = 0 \end{array} \right.$$

où x_1, y_1, z_1, ρ_1 sont quatre fonctions de u et v ; f_1 et f_2 sont fournis par les équations $\Sigma_1 = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u^2} = 0, dv = 0$; les deux autres foyers sont fournis par les équations

$$(7) \quad \Sigma_1 = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u^2} du + \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u \partial v} dv = 0.$$

⁽¹⁾ En réalité l'exemple qui vient d'être traité est un cas particulier du type suivant : les deux foyers simples donnent lieu au même cercle infiniment voisin. La seconde équation (4), en remplaçant $\left(-\frac{x}{a} \sin \varphi + \frac{y}{b} \cos \varphi\right)$ par $\frac{-3c^2}{l^2} \cos \varphi \sin \varphi$ donne en effet une seule valeur du rapport $\frac{dv}{d\varphi}$; on a $ldv - 3c^2 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = 0$ ou $ldv - c^2 \sin^2 \varphi = \text{constante}$. Mais le résultat important est de déterminer l'ordre de multiplicité du foyer double comme point d'intersection de deux cercles consécutifs.

Il est bien connu que le système (7) conduit à calculer le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial y_1}{\partial v} & \frac{\partial z_1}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \delta^2 = \begin{vmatrix} \rho_1^2 & -\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial u} & -\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial v} \\ -\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial u} & E & F \\ -\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial v} & F & G \end{vmatrix} = \rho_1^2 (EG - F^2) [1 - \Delta(\rho_1)]$$

où $\Delta(\rho_1)$ signifie le paramètre différentiel déjà signalé; les deux points focaux f_3, f_4 se confondent donc en un seul f_3, f_4 si $\delta = 0$, c'est-à-dire si les courbes $\rho_1 = \text{const.}$ tracées sur la surface (x_1, y_1, z_1) sont géodésiquement parallèles, ρ_1 désignant l'arc des géodésiques orthogonales. Les sphères Σ_1 ne sont autres que les sphères principales (d'un système) de la surface focale S engendrées par le foyer double f_3 ; la surface lieu du centre $\omega(x_1, y_1, z_1)$ est la développée D correspondante de S ; sur D on trace une série de courbes quelconques ($v = \text{constante}$) et le cercle C est le cercle limite de la sphère Σ_1 quand son centre décrit une courbe v . Les explications qui précèdent suffisent, géométriquement, pour obtenir la congruence: en tous cas, il est clair que l'on doit choisir comme courbes $v = \text{const.}$ des courbes autres que les géodésiques, enveloppes, sur la surface D , des normales de la surface S ; mais, pour étudier, analytiquement, la congruence il y a lieu de choisir à bon escient le paramètre u qui n'a pas encore été fixé: en d'autres termes, les développements analytiques qui précèdent laissent la faculté de poser $v_1 = v$, $u_1 = f(u, v)$ où f est une fonction arbitraire. Il y a donc intérêt à opérer ce changement de variables de façon que le paramètre u_1 soit celui qui individualise les géodésiques enveloppes des normales de S ; supposons ce changement effectué et supprimons, pour u_1 , l'indice 1. On aura donc simplement

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = \left(\frac{F}{\sqrt{G}} du + \sqrt{G} dv \right)^2 + \frac{EG - F^2}{G} du^2, \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial u} = \frac{F}{\sqrt{G}}, \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial v} = \sqrt{G}$$

et la sphère a pour équation $\Sigma_1 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - \rho_1^2 = 0$, le cercle est représenté par $\Sigma_1 = 0, \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0$. Nous pouvons représenter (fig. 2) la surface S , un point F de S , la ligne de courbure ($u = \text{constante}$) issue de F le long de laquelle la sphère Σ_1 reste osculatrice à S ; figurons le centre ω de Σ_1 et la courbe développée décrite par ω quand F décrit la ligne de courbure en jeu: c'est la géodésique $u = \text{const.}$ issue de ω sur D ; les trajectoires orthogonales de ces géodésiques sont les courbes $\rho_1 = \text{constante}$ de D . Le cercle C est tangent en F à la ligne de courbure issue de F , et osculateur à la surface S ; si en ω on mène la courbe $v = \text{constante}$ qui passe sur D , le plan du cercle C est le plan mené

par F perpendiculairement sur la tangente à la courbe v ; l'enveloppe du cercle C quand on suit ceux qui se coupent successivement en F (qui est le foyer double f_2, f_3) est la ligne de courbure $u = \text{constante}$ issue de F . (Si les courbes $v = \text{const.}$

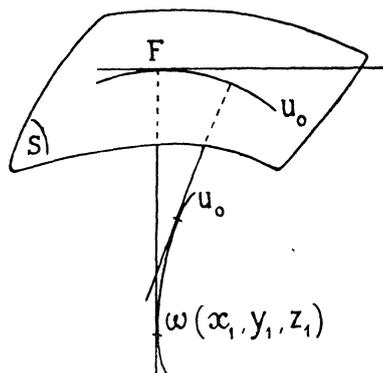


FIG. 2.

se confondaient avec les courbes $u = \text{const.}$ de D , le plan du cercle serait le plan tangent en F à S et le cercle C aurait son rayon nul, cas que nous écartons systématiquement.) Le point f_3 ou F a pour coordonnées

$$x_1 = \frac{\rho_1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x_1}{\partial v}, \quad y_1 = \frac{\rho_1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y_1}{\partial v}, \quad z_1 = \frac{\rho_1}{\sqrt{G}} \frac{\partial z_1}{\partial v}$$

et l'on vérifie sans peine que ce point donne les relations $\Sigma_1 = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial v} = \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u \partial v} = 0$ de sorte que les équations (7) entraînent $du = 0$ et ceci justifie à nouveau la façon dont nous avons choisi le paramètre u .

7. — Ces résultats géométriques bien compris, le cas suivant

$$\boxed{\begin{array}{cc} \underbrace{f_1 \quad f_2}_{C_1} & \underbrace{f_3 \quad f_3}_{C_3} \end{array}}$$

s'obtient sans peine par voie géométrique; il suffit évidemment que nous tracions les cercles osculateurs des lignes de courbure d'une famille de la surface S ; l'axe du cercle osculateur en F à la ligne de courbure passe par ω d'après le théorème de Meusnier, il est perpendiculaire au plan osculateur de la ligne de courbure de S et

est tangent à la surface D ; on peut remarquer que si F décrit la ligne de courbure choisie, le point ω décrit une géodésique de D, développée de la ligne de courbure de S ; les deux plans normaux consécutifs à cette ligne de courbure sont tangents à D et ont pour intersection l'axe du cercle de courbure dont nous parlons, *axe qui est donc la tangente conjuguée de la tangente ωF à D* ; donc il est naturel de prendre comme variable u le paramètre fixant les lignes de courbure de S dans la famille adoptée ; les courbes $u = \text{constante}$ sont géodésiques sur D et les courbes $v = \text{const}$ sont précisément, d'après ce qui précède, les conjuguées sur D des courbes u , puis qu'elles sont tangentes aux axes des cercles C : nous avons retrouvé le résultat obtenu déjà quand les quatre foyers étaient distincts et répartis par couples sur deux cercles infiniment voisins de C.

Il est intéressant de voir les résultats analytiques correspondants : on a quatre fonctions inconnues x_1, y_1, z_1, ρ_1 de (u, v) ; nous retrouvons d'abord toutes les rela-

tions du cas traité précédemment $\left[\begin{array}{cc} \underbrace{f_1 \ f_2}_{C_1} & \underbrace{f_3 \ f_4}_{C_3} \end{array} \right]$, auxquelles on ajoute l'équation

$\Delta(\rho_1) = 1$ qui résulte de la réunion de f_3, f_4 en un seul foyer f_3 . Cela donne le système nécessaire et suffisant

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} - A \frac{\partial x_1}{\partial u} - B \frac{\partial x_1}{\partial v} = 0, \\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial u \partial v} - A \frac{\partial y_1}{\partial u} - B \frac{\partial y_1}{\partial v} = 0, \\ \frac{\partial^2 z_1}{\partial u \partial v} - A \frac{\partial z_1}{\partial u} - B \frac{\partial z_1}{\partial v} = 0, \\ \rho_1 \left(\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial u \partial v} - A \frac{\partial \rho_1}{\partial u} - B \frac{\partial \rho_1}{\partial v} \right) + \frac{\partial \rho_1}{\partial u} \frac{\partial \rho_1}{\partial v} - F = 0, \\ G \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial u} \right)^2 - 2F \frac{\partial \rho_1}{\partial u} \frac{\partial \rho_1}{\partial v} + E \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial v} \right)^2 = EG - F^2. \end{array} \right.$$

L'élimination de A, B et le remplacement de E, F, G par $S \left(\frac{\partial x_1}{\partial u} \right)^2$, $S \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v}$, $S \left(\frac{\partial x_1}{\partial v} \right)^2$ donnent trois équations à 4 inconnues x_1, y_1, z_1, ρ_1 ; les considérations géométriques nous ont permis de découvrir que ces équations entraînent $\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial v} \right)^2 = G$, $\frac{\partial \rho_1}{\partial u} \frac{\partial \rho_1}{\partial v} = F$. Ce serait assez malaisé à découvrir analytiquement : si on emploie les notations p, q, r, s, t de Monge pour désigner $\frac{\partial \rho_1}{\partial u}, \frac{\partial \rho_1}{\partial v}, \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial u^2} \dots$ on déduit,

par dérivations, de la dernière équation (E)

$$(1) \begin{cases} 2(Gp - Fq)r + 2(Eq - Fp)s + \frac{\partial E}{\partial u} q^2 - 2 \frac{\partial F}{\partial u} pq + \frac{\partial G}{\partial u} p^2 - \frac{\partial}{\partial u} (EG - F^2) = 0, \\ 2(Gp - Fq)s + 2(Eq - Fp)t + \frac{\partial E}{\partial v} q^2 - 2 \frac{\partial F}{\partial v} pq + \frac{\partial G}{\partial v} p^2 - \frac{\partial}{\partial v} (EG - F^2) = 0. \end{cases}$$

Si $Gp - Fq$, $Eq - Fp$ sont toutes deux non nulles, on a donc, s étant connu par la quatrième (E), les valeurs de r, s, t ; en dérivant en u , puis v , la quatrième équation (E) une fois, puis deux fois la cinquième, on a 5 équations entre les dérivées $\frac{\partial^3 \rho_1}{\partial u^3}$, $\frac{\partial^3 \rho_1}{\partial u^2 \partial v}$, $\frac{\partial^3 \rho_1}{\partial u \partial v^2}$, $\frac{\partial^3 \rho_1}{\partial v^3}$ en nombre égal à 4 : l'élimination des dérivées d'ordre 3 se fait aisément [cette élimination se fait aisément en dérivant la première équation (1) en v , ce qui introduit $\frac{\partial^3 \rho_1}{\partial u^2 \partial v}$, $\frac{\partial^3 \rho_1}{\partial u \partial v^2}$, dérivées obtenues en dérivant en u et en v , la quatrième équation (E)]; on a ainsi une équation ne contenant que les dérivées d'ordre 2, qui s'éliminent elles-mêmes en remplaçant r, s, t par leurs valeurs déjà obtenues : en joignant cette équation à la dernière équation (E), on a deux équations en p, q et le système ainsi obtenu doit, d'après ce que nous avons obtenu par voie directe, soit conduire à une impossibilité soit conduire à l'une ou l'autre des hypothèses $Gp - Fq = 0$, $Eq - Fp = 0$. L'hypothèse $Gp - Fq = 0$ est celle que nous avons utilisée, car avec la dernière équation (E) elle donne $q^2 = G$, $pq = F$. La relation $Eq - Fp = 0$ conduit à un cercle de rayon nul, cas que nous écartons systématiquement. Nous avons ainsi confirmé les résultats obtenus par Darboux sur les enveloppes de sphères à deux paramètres et les lignes principales de cette enveloppe, même dans le cas particulier où les deux points de contact de la sphère avec son enveloppe sont confondus, la sphère ayant son centre sur la développée de l'enveloppe. Ici non seulement $x_1, y_1, z_1, \rho_1^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2$ mais encore ρ_1 sont solutions de la même équation de Laplace; toutefois, au point de vue des systèmes cycliques, il n'y a rien à tirer, car il faudrait construire le cercle normal à la sphère aux points où elle touche son enveloppe : ici ce cercle est de rayon nul et se décompose.

Si l'on compare maintenant les résultats de ce cas

$$\begin{array}{cc} \overbrace{f_1 \ f_2} & \overbrace{f_3 \ f_3} \\ C_1 & C_3 \end{array}$$

à ceux du

$$\text{cas } \begin{array}{cc} \overbrace{f_1 \ f_2} & \overbrace{f_3 \ f_4} \\ C_1 & C_3 \end{array}$$

traité au n° 4, nous voyons que la figure 1 doit être repro-

duite avec cette modification que les foyers (μ_1, μ'_1) , qui jouent le rôle de f_3 et f_4 , sont confondus en un seul, que nous avons ici appelé F; ce point F est ici le point focal, autre què μ , de cette corde $\mu_1 \mu'_1$, qui est devenue, dans la figure 2, la tangente à la ligne de courbure $u = \text{constante}$ de la surface S; nous nous rappelons aussi que la corde ωF est tangente à la courbe $u = \text{const.}$ de la surface lieu de ω .

D'une façon générale, si l'on se reporte à la figure 1 (sans supposer que ρ_1 soit solution de l'équation de Laplace vérifiée par x_1, y_1, z_1, σ_1), la tangente à la courbe u , décrite par le point m_1 sur la surface focale de l'axe du cercle ne rencontre pas en général la corde $\mu_1 \mu'_1$; car $\mu_1 \mu'_1$ a pour équations

$$(2) \quad \begin{cases} (x - x_1) \frac{\partial x_1}{\partial u} + (y - y_1) \frac{\partial y_1}{\partial u} + (z - z_1) \frac{\partial z_1}{\partial u} + \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial u} = 0, \\ (x - x_1) \frac{\partial x_1}{\partial v} + (y - y_1) \frac{\partial y_1}{\partial v} + (z - z_1) \frac{\partial z_1}{\partial v} + \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial v} = 0 \end{cases}$$

et la tangente en m_1 à la courbe u , a pour équations

$$(3) \quad \frac{x - x_1}{\frac{\partial x_1}{\partial v}} = \frac{y - y_1}{\frac{\partial y_1}{\partial v}} = \frac{z - z_1}{\frac{\partial z_1}{\partial v}}.$$

Si λ est la valeur commune des rapports (3), la condition de rencontre se traduit par deux équations en λ

$$\lambda G + \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial v} = 0, \quad \lambda F + \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial u} = 0$$

ou, éliminant λ , $G \frac{\partial \rho_1}{\partial u} - F \frac{\partial \rho_1}{\partial v} = 0$. Si on suppose, de plus, que ρ_1 vérifie l'équation de Laplace, nous avons vu que le point où la tangente en m_1 à la courbe u perce le plan de C est pôle de $\mu_1 \mu'_1$ par rapport à C; si donc cette tangente coupe $\mu_1 \mu'_1$, c'est que $\mu_1 \mu'_1$ est tangente à C et nous retrouvons le cas actuel avec $\frac{\partial \rho_1}{\partial v} = \sqrt{G}$, $\frac{\partial \rho_1}{\partial u} = \frac{F}{\sqrt{G}}$.

Nous avons vu aussi au paragraphe 4 la chaîne de cercles obtenue par la transformation de Laplace appliquée indéfiniment dans l'un ou l'autre sens : le cercle C étudié est le cercle mené par (M_1, M'_1) [ou f_1, f_2] dans le plan perpendiculaire à la tangente à la courbe $v = \text{const.}$ de la surface (m_1) ou à la tangente à la courbe $u = \text{constante}$ de la surface (m_2); le cercle *antérieur* est celui qui est mené par (μ_1, μ'_1) ou (f_3, f_4) à la tangente à la courbe $u = \text{constante}$ de la surface (m_1); ici puisque μ_1, μ'_1 sont confondus avec l'unique point F, on trouve le cercle de rayon nul

obtenu en coupant la sphère Σ_1 , de centre m_1 et rayon m_1F , par son plan tangent en F; donc, si en étudiant *une seule congruence de cercles*, il est naturel d'éliminer les cercles de rayon nul, nous devons au contraire les accepter dans une chaîne de Laplace; l'apparition d'un tel cercle (dont le centre est au point de contact de son plan avec la surface enveloppe du plan) ne gêne pas pour continuer la suite. On peut même définir à priori la suite par une congruence de tels cercles : on adopte une famille $u = \text{constante}$ de lignes de courbure sur la surface S lieu du centre F du cercle et enveloppe du plan du cercle; la seconde surface focale de la congruence des tangentes aux lignes de courbure $u = \text{const.}$ donne sur la tangente le second foyer, appelé μ au numéro 4 de ce Mémoire, puis la tangente conjuguée $M_1M'_1$; le point m_1 décrit la développée de S relative aux arêtes de rebroussement des normales à S le long des lignes $u = \text{const.}$; sur cette développée on mène la tangente en m_1 à la ligne $v = \text{const.}$; la sphère de centre m_1 et rayon m_1F est ensuite coupée par le plan issu de MM_1 perpendiculairement à la tangente qui vient d'être indiquée et nous avons reconstitué la figure; si en F on adopte au contraire la ligne de courbure $v = \text{const.}$, cela revient à parcourir la suite de Laplace dans l'autre sens : *nous avons ainsi, dans la suite de cercles, une famille de cercles osculateurs aux lignes de courbure d'un système de la surface S, puis une famille de cercles de rayon nul (tangentes isotropes de la surface S) puis les cercles osculateurs de la seconde famille de lignes de courbure de S.*

8. — Le dernier cas prévu à priori dans le cas d'un foyer double,

f_1	f_2	f_1	f_3
C_1	C_1	C_1	C_3

peut sembler paradoxal au premier abord; nous allons l'obtenir très simplement par voie purement géométrique. D'après ce qui a été déjà expliqué, le cercle C, par un choix convenable des paramètres, est représenté par les deux équations

$$\Sigma_1 = 0, \quad \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0$$

de façon à être coupé par le cercle infiniment voisin $(u + du, v)$ en deux points distincts f_1 et f_3 ; quand u et v varient ensuite librement, le point f_1 décrit une nappe focale S_1 , f_3 une autre nappe S_3 . Si le cercle C est osculateur à S_1 , le foyer f_1 compte pour deux unités et par suite est l'un des deux foyers nouveaux donnés par l'ensemble des équations $\Sigma_1 = 0$, $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial v} = 0$; f_1 est donc aussi l'un des deux points f_1, f_3 où Σ_1 touche son enveloppe à deux paramètres, enveloppe constituée d'après ces résultats par S_1 et une certaine surface S_3 lieu de f_3 . *Partons donc d'une surface S_1 arbitraire : en chaque point f_1 de S_1 construisons une sphère*

Σ_1 déterminée tangente à S_1 en f_1 ; il suffit de prendre le centre m_1 sur la normale en f_1 d'après une loi continue, mais arbitraire, en fonction de f_1 . La sphère Σ_1 coupe S_1 suivant une courbe gauche admettant en f_1 deux branches tangentes aux rayons communs des deux indicatrices de Dupin; soit Γ_1 l'une de ces deux branches; coupons Σ_1 par le plan contenant la tangente à Γ_1 en f_1 et la normale abaissée de f_1 sur le plan tangent à la surface lieu de m_1 (normale qui va passer au second point limite f_2 de Σ_1): le cercle C ainsi obtenu est, d'après le théorème de Meusnier, osculateur à la section plane de S_1 par son plan; il a donc trois points communs avec S_1 réunis en f_1 de sorte que f_1 compte pour deux foyers réunis de ce cercle C ; l'axe de C est dans le plan médiateur de $f_1 f_2$, plan tangent à la surface (m_1) : les courbes de (m_1) constamment tangentes à cette direction du plan tangent fournissent les courbes $v = \text{const}$, telles que les cercles C consécutifs soient représentés par les équations $\Sigma_1(u, v_0) = 0$, $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u}(u, v_0) = 0$; les deux foyers correspondants s'obtiennent en abaissant de f_1 , qui est l'un, la perpendiculaire au plan osculateur de la courbe v_0 de (m_1) : cette remarque conduira à examiner si la courbe v_0 ne peut être asymptotique de (m_1) , auquel cas le foyer f_2 se confond lui aussi avec f_1 ; si (m_1) est un plan, la circonstance se produit automatiquement: nous reviendrons sur ce cas spécial.

Il est bon de donner un exemple simple; on prendra par exemple la surface (m_1) arbitraire et on supposera le rayon de Σ_1 constant, de sorte que S_1 est une surface parallèle à (m_1) ; les deux points limites sont de part et d'autres de m_1 sur la normale en m_1 à la surface (m_1) ; les courbes v_0 de (m_1) ne sont jamais asymptotiques sur (m_1) . Aucune difficulté pour vérifier les résultats énoncés; une surface (m_1) simple telle que le cylindre elliptique $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ pourra être utilisée; je développerai plus loin les calculs en prenant le cylindre de révolution $x^2 + y^2 - 1 = 0$ qui donne cette particularité complémentaire que f_2 se confond lui-même avec f_1 .

9. — Jusqu'ici nous n'avons pas parlé du cas où une ou plusieurs nappes focales dégénèrent en courbes, les foyers étant simples ou non. Il est facile de voir que l'on peut se donner arbitrairement quatre courbes focales $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$. Choisissons en effet, arbitrairement, un point f_1 sur Γ_1 et un point f_2 sur Γ_2 ; un plan quelconque mené par $f_1 f_2$ perce Γ_3 en f_3 et Γ_4 en f_4 et le quadrilatère $f_1 f_2 f_3 f_4$ en général n'est pas inscriptible dans un cercle: en exprimant cette propriété, on a une équation qui fixe l'orientation du plan et le cercle C . De même on peut se donner arbitrairement quatre surfaces focales S_1, S_2, S_3, S_4 ; si nous les coupons par un plan quelconque, les sections planes correspondantes n'admettent pas en général de cercle tangent à elles quatre; pour qu'un tel cercle existe, il suffit d'une relation qui

donne donc ∞^2 plans et dans chacun d'eux un cercle. On peut faire des remarques analogues pour la donnée de i courbes focales différentes et de $(4 - i)$ surfaces focales. Des considérations analogues s'appliquent au cas de foyers multiples : donnons-nous par exemple une surface S_1 lieu du foyer double f_1 , deux surfaces focales S_2 et S_3 lieu des foyers simples f_2 et f_3 : si nous coupons S_1 par un plan quelconque, la section plane correspondante admet ∞^1 cercles osculateurs, dont l'un est tangent à S_2 mais, en général, non tangent à S_3 : une condition imposée au plan donne la congruence demandée. De même on peut donner une surface S_1 lieu d'un foyer triple f_1 et une surface S_2 lieu du foyer simple f_2 : la section plane générale de S_1 admet un cercle surosculateur en général non tangent à S_2 : une condition suffit pour établir le contact, donc obtenir la congruence. De même pour tous les cas que l'on peut imaginer : mais si la méthode est précieuse pour rassurer *a priori* le chercheur sur la possibilité de telle distribution de foyers, elle ne nous renseigne pas sur l'ordre de ces foyers à titre de point d'intersection de deux cercles voisins.

10. — Cas de deux foyers doubles.

Nous aurons en général le cas

f_1	f_1	f_2	f_2
C_1	C_1	C_2	C_2

La résolution *a priori* de ce cas peut s'obtenir comme au numéro précédent. Tâchons d'arriver aux constructions les plus précises.

Supposons d'abord que f_1 et f_2 engendrent deux courbes focales Γ_1 et Γ_2 : on doit donner non seulement Γ_1 , mais en chaque point f_1 de Γ_1 indiquer encore le plan P_1 , tangent à Γ_1 , contenant les tangentes aux divers cercles C qui passeront en f_1 , de sorte que f_1 soit foyer double; de même en chaque point f_2 de Γ_2 on indique un plan P_2 tangent à Γ_2 ; choisissons f_1 sur Γ_1 et f_2 sur Γ_2 arbitrairement; les plans P_1 , P_2 correspondants se coupent suivant une droite D et le plan médiateur de $f_1 f_2$ perce D en ω ; il existe manifestement un cercle C tangent en f_1 à ωf_1 et en f_2 à ωf_2 ; c'est le cercle général de notre congruence.

Supposons maintenant que f_1 engendre une courbe focale Γ_1 , pendant que f_2 engendre une surface focale S_2 . Au point f_1 on a donné *a priori*, comme plus haut, le plan tangent à Γ_1 correspondant à f_1 ; si on prend f_2 d'abord au hasard sur S_2 , on construit comme plus haut le cercle unique tangent en f_1 à P_1 et en f_2 à S_2 ; le plan tangent en f_2 à S_2 joue le rôle de P_2 ; en général, le cercle obtenu n'est pas

osculateur à S_2 : cette condition livre sur S_2 une simple infinité de points f_2 que l'on peut associer à f_1 et nous avons ainsi notre congruence.

Si f_1 et f_2 engendrent chacune une surface, S_1 ou S_2 , le même procédé permet de construire le cercle tangent en f_1 à S_1 et en f_2 à S_2 ; si f_1 et f_2 sont fixés, en général le cercle n'est osculateur ni à S_1 ni à S_2 : cette double condition donne deux relations liant les paramètres curvilignes (u_1, v_1) de f_1 sur S_1 et (u_2, v_2) de f_2 de S_2 , de sorte que, en général, le point f_1 pourra se déplacer librement sur S_1 , les deux conditions obtenues faisant correspondre à f_1 un certain nombre de points de S_2 . Cette méthode entraîne des calculs compliqués même si les surfaces adoptées sont simples. Nous pouvons indiquer quelques exemples de simplification (relative).

Supposons que S_1 et S_2 soient symétriques par rapport à un plan Π ; f_1 et f_2 étant deux points homologues dans cette symétrie, prenons l'intersection N avec Π de la normale en f_1 à S_1 ; la sphère de centre N et rayon Nf_1 coupe S_1 suivant une courbe ayant un point double en f_1 ; adoptons la tangente f_1T à l'une des deux branches; coupons la sphère par le plan f_1Tf_2 : nous avons un cercle qui répond aux conditions; cela a été expliqué au paragraphe huit et nous voyons qu'ici il y a deux foyers doubles f_1, f_2 et un cercle unique infiniment voisin de C , recoupant C en f_1 et f_2 : c'est un exemple du cas

$$\boxed{\begin{array}{cc} \overbrace{f_1 \quad f_2} & \overbrace{f_1 \quad f_2} \\ C_1 & C_1 \end{array}}$$

Cette méthode appliquée par exemple aux deux paraboloides $xy + z = 0$, $xy - z = 0$ permet d'associer à un point de l'un successivement ses symétriques par rapport aux trois plans de coordonnées: il peut y avoir d'autres correspondances et l'on voit que, même ce cas simple donne lieu à des calculs compliqués, en dehors des correspondances par symétrie.

Il est intéressant de revenir sur le cas

$$\boxed{\begin{array}{cc} \overbrace{f_1 \quad f_2} & \overbrace{f_1 \quad f_2} \\ C_1 & C_1 \end{array}}$$

Les considérations géométriques directes du numéro huit nous l'ont déjà annoncé comme cas spécial de

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \overbrace{f_1 \quad f_2} & \overbrace{f_1} & \overbrace{f_2} \\ C_1 & C_1 & C_2 \end{array}}$$

et c'est ainsi que nous avons reconnu que l'axe du cercle C est tangente asymptotique sur la surface lieu du centre m_i de la sphère Σ_i , le cercle C étant représenté par les équations $\Sigma_i = 0$, $\frac{\partial \Sigma_i}{\partial u} = 0$. Nous aurions pu aussi considérer ce cas comme spécialisation du cas

$$\boxed{\begin{array}{cc} \underbrace{f_1 \quad f_2} & \underbrace{f_3 \quad f_4} \\ C_1 & C_2 \end{array}}$$

En obligeant les deux nappes de la surface focale des axes à se confondre, on arrive encore à cette conclusion que les courbes (v_0) de la surface des centres des sphères Σ_i sont des asymptotiques : le lecteur se reportera au paragraphe 4 et à la figure 1. En tous cas écrivons les équations de C

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_i \equiv (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 - \rho_i^2 = 0, \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial \Sigma_i}{\partial u} \equiv (x - x_i) \frac{\partial x_i}{\partial u} + (y - y_i) \frac{\partial y_i}{\partial u} + (z - z_i) \frac{\partial z_i}{\partial u} + \rho_i \frac{\partial \rho_i}{\partial u} = 0. \end{array} \right.$$

Les points f_1 et f_2 sont donnés par le système

$$(2) \quad \Sigma_i = \frac{\partial \Sigma_i}{\partial u} = \frac{\partial^2 \Sigma_i}{\partial u^2} = 0, \quad dv = 0.$$

Les deux autres points focaux sont donnés par le système

$$(3) \quad \Sigma_i = \frac{\partial \Sigma_i}{\partial u} = \frac{\partial \Sigma_i}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Sigma_i}{\partial u^2} du + \frac{\partial^2 \Sigma_i}{\partial u \partial v} dv = 0.$$

Pour retrouver les points f_1 , f_2 il est donc nécessaire et suffisant que les trois plans

$$(4) \quad \frac{\partial \Sigma_i}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \Sigma_i}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Sigma_i}{\partial u^2} = 0$$

aient une droite commune, ce qui entraîne que x_i , y_i , z_i et σ_i (avec $2\sigma_i = \rho_i^2 - x_i^2 - y_i^2 - z_i^2$) soient solutions d'une même équation

$$(5) \quad \xi(\theta) \equiv \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + A \frac{\partial \theta}{\partial u} + B \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0.$$

Ce résultat montre que les courbes $v = \text{constante}$ sont asymptotiques sur la surface lieu de (x_1, y_1, z_1) et que σ_1 s'obtient ensuite en prenant une nouvelle solution de l'équation (5), de sorte que tous nos résultats géométriques se trouvent confirmés, et en même temps complétés par un moyen régulier de réaliser ce cas. On peut remarquer l'identité

$$\mathcal{E}(\sigma_1) \equiv \rho_1 \mathcal{E}(\rho_1) + \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial u}\right)^2 - E, \quad \left[E = S \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 \right].$$

On doit écarter la solution $\frac{\partial \rho_1}{\partial u} = \sqrt{E}$ qui donnerait un cercle C de rayon nul (on aurait d'ailleurs $\frac{\partial \rho_1}{\partial u} \frac{\partial \rho_1}{\partial v} = F$, $\mathcal{E}(\rho_1) = 0$).

11. — Nous devons maintenant étudier le cas

$$\boxed{\begin{matrix} f_1 & f_1 & f_2 & f_2 \\ C_1 & C_2 & C_2 & C_1 \end{matrix}}, \quad \text{particularisation du cas} \quad \boxed{\begin{matrix} f_1 & f_3 & f_2 & f_2 \\ C_1 & C_2 & C_2 & C_2 \end{matrix}}$$

traité au paragraphe 6. Nous particularisons les paramètres u, v comme dans ce paragraphe, auquel le lecteur voudra bien se reporter. Nous avons pour définir le cercle C les équations

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_1 \equiv (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - \rho_1^2 = 0. \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} \equiv (x - x_1) \frac{\partial x_1}{\partial u} + (y - y_1) \frac{\partial y_1}{\partial u} + (z - z_1) \frac{\partial z_1}{\partial u} + \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial u} = 0. \end{array} \right.$$

On a de plus

$$(2) \quad dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = d\rho_1^2 + C^2 du^2$$

ce qui avec les notations usuelles donne

$$(3) \quad G = \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial v}\right)^2, \quad F = \frac{\partial \rho_1}{\partial u} \frac{\partial \rho_1}{\partial v}, \quad C^2 = \frac{EG - F^2}{G} = E - \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial u}\right)^2.$$

Nous devons maintenant exprimer que les trois équations

$$(4) \quad \Sigma_1 = 0, \quad \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u^2} = 0$$

définissent deux points confondus. Nous introduisons, selon l'usage, l'inconnue auxiliaire

$$\delta = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y_1}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z_1}{\partial u^2} \end{vmatrix}$$

dont le carré est

$$\delta^2 = \begin{vmatrix} \rho_1 & -\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial u} & E - \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial u}\right)^2 - \rho_1 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial u^2} \\ -\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial u} & E & \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} \\ E - \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial u}\right)^2 - \rho_1 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial u^2} & \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} & S\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}\right)^2 \end{vmatrix}.$$

Les deux points f_1 et f_3 se confondent en un seul si δ est nul; on a ainsi l'équation

$$\begin{aligned} \rho_1^2 \left[\left(E - \frac{F^2}{G} \right) S\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}\right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial E}{\partial u}\right)^2 \right] + \rho_1 \frac{F}{\sqrt{G}} \frac{\partial E}{\partial u} \left[\rho_1 \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{F}{\sqrt{G}} \right) + \frac{F^2}{G} - E \right] \\ - E \left[E - \frac{F^2}{G} - \rho_1 \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{F}{\sqrt{G}} \right) \right]^2 = 0 \end{aligned}$$

qu'il est avantageux de mettre sous la forme

$$(5) \quad \begin{aligned} \rho_1^2 \left[\left(E - \frac{F^2}{G} \right) \left\{ S\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{F}{\sqrt{G}}\right)^2 \right\} - \frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(E - \frac{F^2}{G} \right) \right\}^2 \right] \\ + \left(E - \frac{F^2}{G} \right) \rho_1 \frac{2EF}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial u} \log \left(\frac{F}{\sqrt{EG}} \right) - E \left(E - \frac{F^2}{G} \right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi entre les inconnues x_1, y_1, z_1, ρ_1 trois équations, à savoir (5) et les deux premières équations (3). On peut remarquer que l'équation (5) se réduit à une identité si $EG - F^2$ est nul, ce qui donnerait une surface (x_1, y_1, z_1) réduite à une courbe, solution à écarter; on peut d'ailleurs remplacer (5) par l'équation

$$(5') \quad \begin{aligned} \rho_1^2 \left[S\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{F}{\sqrt{G}}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial u} \sqrt{E - \frac{F^2}{G}}\right)^2 \right] + \frac{2EF}{\sqrt{G}} \rho_1 \frac{\partial}{\partial u} \left(\log \frac{F}{\sqrt{EG}} \right) \\ - E \left(E - \frac{F^2}{G} \right) = 0 \end{aligned}$$

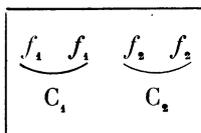
qui ne présente plus l'inconvénient d'introduire cette solution étrangère; en résolvant cette équation en ρ_1 et remplaçant ρ_1 par cette valeur dans les équations

$$G = \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial v} \right)^2, \quad F = \frac{\partial \rho_1}{\partial u} \frac{\partial \rho_1}{\partial v}$$

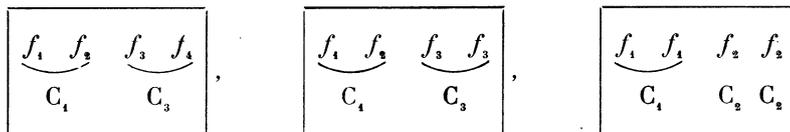
nous obtenons deux équations assez compliquées définissant x_1, y_1, z_1 au moyen de u, v ; nous sommes assurés d'avoir des solutions du problème; le paragraphe suivant, qui introduit une équation de plus, confirme l'existence de solutions. Nous obtenons les ∞^2 sphères principales d'une certaine surface S , dont chacune porte un cercle C tangent à la ligne de courbure correspondante de S et d'autre part osculateur à l'une des courbes d'une famille simplement infinie tracée sur une autre surface S_1 . La surface S est le lieu du foyer f_1 et la surface S_1 est le lieu du foyer f_1 .

12. — Congruence de cercles osculateurs aux lignes de courbure d'un système de deux surfaces différentes.

Abordons maintenant le cas



qui est une particularisation des cas déjà envisagés



L'avant-dernier de ces deux cas a été traité au paragraphe 7. Nous savons, d'après ce paragraphe, que l'on a le cercle C par les deux équations

(1) $\Sigma_1 = 0, \quad \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0.$

Les lignes (u, v) forment sur la surface (x_1, y_1, z_1) un réseau conjugué, les lignes $u = \text{const}$ étant géodésiques; on a de plus

$$(2) \quad \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \right)^2 = G.$$

$$(3) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} = F.$$

Les cercles C sont les cercles osculateurs des lignes de courbure $u = \text{const}$ de la surface développante de la surface (x_1, y_1, z_1) relative au système géodésique $u = \text{const}$ et à la fonction φ_1 . Nous devons adjoindre l'équation

$$(4) \quad \varphi_1^2 \left[S \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{F}{\sqrt{G}} \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial u} \sqrt{E - \frac{F^2}{G}} \right)^2 \right] + \frac{2EF}{\sqrt{G}} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial u} \left(\log \frac{F}{\sqrt{EG}} \right) - E \left(E - \frac{F^2}{G} \right) = 0$$

qui exprime que les foyers définis par les équations $\Sigma_1 = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial u^2} = 0$ sont confondus; les équations (2), (3), (4) sont celles du paragraphe précédent; l'équation

$$(5) \quad \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} \end{array} \right| = 0$$

s'est ajoutée pour exprimer que le cercle C est coupé par le cercle infiniment voisin $(u, v + dv)$ en deux points confondus avec f_2 et non simplement en l'unique point f_2 . Nous avons ainsi quatre équations aux dérivées partielles à quatre fonctions inconnues x_1, y_1, z_1, φ_1 . Si nous nous reportons aux résultats du paragraphe 4, à la

figure 1, (et aussi aux résultats du paragraphe 7 relatif au cas $\left(\begin{array}{cc} \overbrace{f_1 \ f_2} & \overbrace{f_3 \ f_3} \\ C_1 & C_3 \end{array} \right)$,

nous voyons que les lignes $u = \text{const}$ de la surface (x_1, y_1, z_1) et les lignes $v = \text{const}$ de la surface (x_2, y_2, z_2) sont géodésiques: c'est la propriété caractéristique pour les deux nappes focales de la congruence des axes des cercles C ; les deux cordes $M_1 M'_1$ et $\mu_1 \mu'_1$ de la figure 1, appelées ici $(f_1 f_1)$ et $(f_2 f_2)$ sont tangentes au cercle C en f_1 et f_2 ; en f_2 le cercle C est osculateur à la ligne de courbure $u = \text{const}$ de la surface focale lieu de f_2 ; en f_1 le cercle C est osculateur à la ligne de courbure $v = \text{const}$ de la surface focale lieu de f_1 ; la sphère de centre m_1 et rayon $m_1 f_1$ contenant C est sphère principale pour la surface lieu de f_1 ; la sphère

de centre m_2 et contenant C est sphère principale pour la surface lieu de f_1 . Dans la suite de cercles due à la transformation de Laplace, conformément aux résultats du paragraphe 7, le cercle C est encadré par deux cercles de rayon nul : avant, par le cercle de rayon nul f_2 situé sur la sphère de centre m_1 ; après, par le cercle de rayon nul de centre f_1 situé sur la sphère de centre m_2 .

Si cette méthode conduit moins élégamment au résultat que celle qui va suivre, elle a l'avantage de montrer que pour un couple $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ de deux surfaces connu, la fonction ρ_1 s'obtient sans quadrature : en effet l'équation (4) donne ρ_1 par une équation explicite, algébrique et de degré 2; on a même ρ_1 rationnellement; en effet en adjoignant à l'équation (4), écrite pour abrégé,

$$\rho_1^2 + 2M\rho_1 + N = 0$$

les équations dérivées en u ou v , on a

$$2(\rho_1 + M)\frac{F}{\sqrt{G}} + 2\frac{\partial M}{\partial u}\rho_1 + \frac{\partial N}{\partial u} = 0,$$

$$2(\rho_1 + M)\sqrt{G} + 2\frac{\partial M}{\partial v}\rho_1 + \frac{\partial N}{\partial v} = 0.$$

On remarquera encore que ρ_1 est solution de l'équation de Laplace vérifiée par $x_1, y_1, z_1, \sigma_1 (2\sigma_1 = \rho_1^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2)$; ρ_2 est aussi solution de l'équation de Laplace vérifiée par $x_2, y_2, z_2, \sigma_2 (2\sigma_2 = \rho_2^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2)$ transformée de la précédente en écrivant $\theta_2 = \theta_1 - \frac{1}{B} \frac{\partial \theta_1}{\partial u}$, mais ρ_1 et ρ_2 ne sont pas deux solutions correspondantes; il y a inversion du rôle des variables u, v en passant de S_1 à S_2 .

Ce Mémoire a été remis à la direction des *Annales de Toulouse* le 15 mars 1933; j'avais signalé en mars 1933, par écrit à MM. Cartan, Finikoff et Vincensini, oralement à M. Drach, l'intérêt que présentent les congruences rectilignes dont les développables touchent les surfaces focales suivant des géodésiques ($u = \text{constante}$ sur l'une des focales, $v = \text{constante}$ sur l'autre), à l'opposé des congruences de normales qui donnent sur les focales des géodésiques comme arêtes de rebroussement. M. Finikoff m'a envoyé, dans une lettre reçue le 30 mars 1933, les calculs qui suivent (donnant le système E); je les avais envoyés, comme supplément à mon travail, le 15 avril 1933, [en y ajoutant les systèmes E', E'' plus commodes pour la discussion], puis indiquant, toujours d'après M. Finikoff, un cas d'intégrabilité par équations différentielles ($e = g$; e, g, f fonctions de $u + v$); j'ignorais, en rédigeant ce complément, que M. Drach avait donné le 10 avril aux *Comptes Rendus* une Note (C. R., 196, 10 avril 1933, p. 1057) où il donnait les résultats obtenus par M. Finikoff et moi-même sur ce problème précis, et bien d'autres encore; un échange de vues entre M. Drach et moi a eu comme conclusion deux Notes publiées

l'une par M. Drach, l'autre par moi, au numéro du 1 mai 1933 des *C. R.* J'ai donc de nouveau rédigé la fin de ce paragraphe et résumé dans ce qui suit (écrit à la date du 14 mai 1933) les résultats des deux Notes de M. Drach; je renvoie le lecteur aux Notes indiquées.

La méthode qui suit s'applique chaque fois que les quatre points focaux donnent lieu à deux cercles infiniment voisins, contenant chacun deux des foyers; elle fait intervenir la congruence rectiligne des axes des cercles et la représentation sphérique de cette congruence, d'après Guichard (voir par exemple, BIANCHI, *Géométrie différentielle*, t. I, 3^e édition, chapitre X, pages 483 et suivantes); les résultats du paragraphe 4 ont déjà mis en évidence la façon naturelle dont s'introduit cette méthode, puisque, d'une part, la congruence rectiligne $m_1 m_2$ joue un rôle important et que, d'autre part, le point μ commun aux deux cordes $\mu_1 \mu'_1$ et $M_1 M'_1$ engendre une surface dont la normale est parallèle à $m_1 m_2$, rapportée à un réseau conjugué correspondant aux développables de la congruence $m_1 m_2$; on voit aussitôt que le parallélisme, au sens de Peterson, doit jouer un rôle important.

Soit donc

$$(6) \quad d\sigma^2 = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$$

la représentation sphérique des développables rapportée à ses congruences (ou la représentation sphérique de la surface lieu du pôle de $f_1 f_2$ relativement au cercle C , surface rapportée au réseau conjugué correspondant aux développables). Nous appelons 2φ le segment focal et désignons par a, b les symboles de Christoffel

$$a = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix}, \quad b = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix}$$

relatifs à l'élément sphérique (6); on sait que ces symboles a, b peuvent être définis par les équations

$$(7) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial e}{\partial v} = ae + bf, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u} = af + bg.$$

Sur la première nappe focale (lieu de m_1) les lignes $u = \text{const}$ sont géodésiques ce qui donne

$$(8) \quad F \frac{\partial G}{\partial v} - 2G \frac{\partial F}{\partial v} + G \frac{\partial G}{\partial u} = 0;$$

or on a

$$(9) \quad E = 4 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + b\varphi \right)^2, \quad F = -4a\varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + b\varphi \right), \quad G = 4\varphi^2(a^2 + g).$$

L'équation (8) est

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} a\rho \left(\frac{\partial \rho}{\partial u} + b\rho \right) \left\{ 2\rho \frac{\partial \rho}{\partial v} (a^2 + g) + \rho^2 \left(2a \frac{\partial a}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial v} \right) \right\} \\ - 2\rho^2 (a^2 + g) \left\{ \left(\frac{\partial a}{\partial v} \rho + a \frac{\partial \rho}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial \rho}{\partial u} + b\rho \right) + a\rho \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} + \frac{\partial b}{\partial v} \rho + b \frac{\partial \rho}{\partial v} \right) \right\} \\ - \rho^2 (a^2 + g) \left\{ 2\rho \frac{\partial \rho}{\partial u} (a^2 + g) + \rho^2 \left(2a \frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial u} \right) \right\} = 0. \end{array} \right.$$

Mais on sait que ρ satisfait à l'équation

$$(11) \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} + a \frac{\partial \rho}{\partial u} + b \frac{\partial \rho}{\partial v} + \left(\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial v} + f \right) \rho = 0$$

de sorte que, dans (10), on peut remplacer $\frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} + \frac{\partial b}{\partial v} \rho + b \frac{\partial \rho}{\partial v}$ par $- \left(a \frac{\partial \rho}{\partial u} + \frac{\partial a}{\partial u} \rho + f \rho \right)$, ce qui donne le résultat

$$(12) \quad \frac{\partial \rho}{\partial u} \left\{ a \frac{\partial g}{\partial v} - 2g \frac{\partial a}{\partial v} - 2a^2 g - 2g^2 \right\} + ab\rho \frac{\partial g}{\partial v} - 2b \frac{\partial a}{\partial v} \rho g \\ + (a^2 + g) \left(2af\rho - \rho \frac{\partial g}{\partial u} \right) = 0.$$

En remplaçant $2af - \frac{\partial g}{\partial u}$ par $(-2bg)$, on obtient

$$(13) \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial u} + b\rho \right) \left[a \frac{\partial g}{\partial v} - 2g \frac{\partial a}{\partial v} - 2g(a^2 + g) \right] = 0.$$

Le premier facteur donnerait $E = F = 0$, de sorte que la nappe (x_1, y_1, z_1) dégénérerait en courbe (nous retrouvons par cette voie le résultat obtenu plus haut, car l'équation (4) avait été obtenue après suppression du facteur $E - \frac{F^2}{G}$). Nous devons donc conserver uniquement le second facteur; l'équation obtenue

$$(14) \quad a \frac{\partial g}{\partial v} - 2g \frac{\partial a}{\partial v} - 2g(a^2 + g) = 0$$

ne fait intervenir que l'élément sphérique de l'image des développables, ce qui montre que le parallélisme de Peterson doit entrer en jeu. La condition symétrique pour l'autre nappe (lignes $v = \text{const.}$ géodésiques) est de même, par échange de u et v ,

$$(15) \quad b \frac{\partial e}{\partial u} - 2e \frac{\partial b}{\partial u} - 2e(b^2 + e) = 0.$$

Finalement, nous avons pour les cinq fonctions inconnues e, f, g, a, b les deux équations (7) qui servent à définir a, b en fonction de e, f, g , les deux équations (14), (15) qui signifient que les courbes $u = \text{const}$ de la première nappe (m_1) et $v = \text{const}$ de la seconde nappe (m_2) sont géodésiques et la cinquième équation non encore écrite qui exprime que la courbure de la forme $d\sigma^2$ est égale à l'unité. Rassemblons ces équations en posant $f = \sqrt{eg} \cos \omega$, de sorte que ω désigne l'angle des plans focaux :

$$(E) \begin{cases} \frac{\partial e}{\partial v} = 2(ae + bf), & \frac{\partial g}{\partial u} = 2(af + bg), \\ a \frac{\partial g}{\partial v} - 2g \frac{\partial a}{\partial v} - 2g(a^2 + g) = 0, & b \frac{\partial e}{\partial u} - 2e \frac{\partial b}{\partial u} - 2e(b^2 + e) = 0, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial u} \left(b \sqrt{\frac{g}{e}} \sin \omega \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(a \sqrt{\frac{e}{g}} \sin \omega \right) + \sqrt{eg} \sin \omega = 0. \end{cases}$$

Il est naturel de poser $e = \alpha^2, g = \beta^2, f = \alpha\beta \cos \omega$. On a ainsi

$$(E') \begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial v} = a\alpha + b\beta \cos \omega, & \frac{\partial \beta}{\partial u} = a\alpha \cos \omega + b\beta, \\ a \frac{\partial \beta}{\partial v} - \beta \frac{\partial a}{\partial v} - \beta(a^2 + \beta^2) = 0, & b \frac{\partial \alpha}{\partial u} - \alpha \frac{\partial b}{\partial u} - \alpha(b^2 + \alpha^2) = 0, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{b\beta}{\alpha} \sin \omega \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{a\alpha}{\beta} \sin \omega \right) + \alpha\beta \sin \omega = 0. \end{cases}$$

Cette forme suggère de poser

$$(16) \quad \frac{\beta}{a} = \text{tg } \varphi, \quad \frac{\alpha}{b} = \text{tg } \psi,$$

de sorte que l'on a aussitôt

$$(17) \begin{cases} \sqrt{g} = \beta = \frac{\partial \varphi}{\partial v}, & \sqrt{e} = \alpha = \frac{\partial \psi}{\partial u}, & a = \cot \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v}, & b = \cot \psi \frac{\partial \psi}{\partial u}, \\ d\sigma^2 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \right)^2 du^2 + 2 \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cos \omega dudv + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 dv^2. \end{cases}$$

On a entre φ, ψ, ω trois équations nécessaires et suffisantes obtenues en gardant les deux premières équations (E'), qui donnent maintenant $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}$, et

la dernière équation où l'on remplace $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}$, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}$ par ces valeurs. On a ainsi le système E''

$$(E'') \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \{ \cot \psi + \cot \varphi \cos \omega \}, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \{ \cot \varphi + \cot \psi \cos \omega \}, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \omega}{\partial u} \cot \psi + \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \omega}{\partial v} \cot \varphi \right] \cos \omega + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} [2 \cot \varphi \cot \psi \cos \omega - 1] \sin \omega = 0. \end{array} \right.$$

On y ajoute l'équation (11) en φ

$$(18) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cot \psi + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \cot \psi + \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\cot \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\cot \psi \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cos \omega \right] \varphi = 0.$$

J'indique maintenant les résultats a, b, c, d dus à M. Drach.

Le système (E'') est rapporté à ses *caractéristiques*; on remarque que les paramètres u, v ne sont pas essentiels, que la substitution $(u, v; U, V)$ où U et V sont fonctions arbitraires de u, v respectivement ne change pas la forme du système; de la sorte l'intégrale (φ, ψ, ω) du système E'' dépend de six fonctions arbitraires d'une variable, dont deux sont U, V .

a. — Si donc deux des trois fonctions φ, ψ, ω sont *indépendantes*, il peut y avoir intérêt à les prendre comme paramètres indépendants nouveaux, au lieu de u, v : on obtiendrait ainsi trois équations définissant u, v, ω en fonction de φ et ψ ; l'élimination de u, v fournirait soit une équation d'ordre 4 en ω soit un système de plusieurs équations d'ordre au moins 4 en ω (compatibles avec une solution dépendant de quatre fonctions arbitraires d'une variable); ensuite on aurait u, v comme intégrales premières d'une équation

$$R(\varphi, \psi, \omega) d\psi^2 - 2S(\varphi, \psi, \omega) d\varphi d\psi + T(\varphi, \psi, \omega) d\varphi^2 = 0.$$

b. — Si au contraire φ, ψ sont liés par une relation $\psi \equiv \psi(\varphi)$, désignons par ψ' et ψ'' les dérivées de la fonction $\psi(\varphi)$ par rapport à φ : les deux premières équations (E'') donnent

$$\cos \omega \{ \psi' \cot \varphi - \cot \psi \} = \cot \varphi - \psi' \cot \psi - \frac{\psi''}{\psi'}$$

de sorte que, *en général*, ω est lui aussi fonction de φ ; Ω désignant une fonction provisoirement indéterminée de φ , on a

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v} = \{ \Omega' \psi' (\cos \omega \cot \varphi + \cot \psi) + \Omega'' \} \varphi_u \varphi_v$$

et par suite, en déterminant $\Omega(\varphi)$ par l'équation $\Omega'' + \Omega' \psi' (\cos \omega \cot \varphi + \cot \psi) = 0$, on a $\Omega \equiv U + V$ ou plus simplement $\Omega \equiv u + v$: on peut donc supposer φ, ψ, ω fonctions de $u + v$; on obtient alors trois équations différentielles ordinaires pour déterminer φ, ψ, ω en fonction de $t = u + v$.

c. — Si l'on suppose $\cos \psi = k \cos \varphi$ où k est une constante quelconque, les deux premières équations (E'') se réduisent à une seule; dans ce cas ω, φ sont donnés en u, v par deux équations aux dérivées partielles en u, v ; si on suppose, *en outre*, ω lui-même fonction de φ , ω et φ peuvent être supposés fonctions de $t = u + v$ et l'on obtient deux équations différentielles pour déterminer ω et φ en t (celles qui ont été signalées au paragraphe b où l'on fait $\cos \psi = k \cos \varphi$). On voit aisément que le cas spécial $k = \pm 1$ se ramène par changement de notations à $k = 1, \psi = \varphi$ et on a deux équations aux dérivées partielles pour calculer φ et ω en u, v .

d. — Pour avoir une congruence rectiligne des axes qui soit de Ribaucour, on doit avoir $\frac{\partial a}{\partial u} = \frac{\partial b}{\partial v}$. (Rappelons qu'une congruence rectiligne de Ribaucour s'obtient en prenant un couple de surfaces S, \bar{S} se correspondant avec orthogonalité des éléments linéaires homologues; par chaque point \bar{M} de \bar{S} on mène le rayon parallèle à la normale au point homologue M de S ; les développables de la congruence correspondent aux asymptotiques de S et coupent la surface *moyenne* suivant un *réseau conjugué à invariants égaux*: cette dernière propriété, d'après Guichard, est caractéristique; il suffit même que le réseau découpé sur la surface moyenne par les développables d'une congruence soit conjugué, pour qu'il soit à invariants égaux et que la congruence soit de Ribaucour). Ici on a

$$a = \frac{\partial}{\partial v} \log \sin \varphi, \quad b = \frac{\partial}{\partial u} \log \sin \psi$$

et la condition devient

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = 0,$$

ce qui permet de supposer [grâce à la substitution $(u, v; U, V)$],

$$\sin \psi = e^{u+v} \sin \varphi \quad \text{ou} \quad \sin \psi = e^u \sin \varphi \quad \text{ou} \quad \sin \psi = k \sin \varphi,$$

en désignant par k une constante.

Les deux premières hypothèses s'éliminent aisément; si l'on prend la dernière hypothèse, le cas où $k = \pm 1$ peut, sans restreindre, être ramené à $k = 1$, $\psi = \varphi$ et l'on retrouve un cas particulier de (c). Si $k^2 \neq 1$, ψ est fonction de φ , ω aussi: on retrouve un cas particulier de (b), mais alors $\sin \psi = k \sin \varphi$ est incompatible avec les trois équations qui déterminent φ, ψ, ω en fonction de $t = u + v$.

Voici encore quelques remarques dues à M. Drach; ω est l'angle des lignes de coordonnées u, v sur la sphère; $\psi(u_1, v_0) - \psi(u_0, v_0)$ est l'arc compris sur la courbe sphérique v_0 entre les points (u_1, u_0) ; de même φ mesure un arc porté sur la courbe sphérique $u = \text{constante}$. Mais l'interprétation de φ ou ψ est encore plus géométrique sur les nappes focales de la congruence rectiligne; l'angle V des lignes de coordonnées sur la surface (m_1) a pour cosinus l'expression $\frac{F}{\sqrt{EG}}$; or on a vu que

$$F = -4a\rho\left(\frac{\partial\rho}{\partial u} + b\rho\right), \quad EG = 16\rho^2\left(\frac{\partial\rho}{\partial u} + b\rho\right)^2(a^2 + \beta^2) = 16\rho^2\left(\frac{\partial\rho}{\partial u} + b\rho\right)^2 \frac{a^2}{\cos^2\varphi}.$$

On peut donc prendre $\cos V = \cos \varphi$, en choisissant convenablement le signe de \sqrt{EG} ; donc φ est l'angle des lignes coordonnées sur la surface (m_1) et ψ l'angle analogue sur la surface (m_2) .

J'indique maintenant rapidement comment j'ai obtenu une intégrale première du système différentiel d'ordre 4 qui donne φ, ω en fonction de $u + v = t$ en supposant $\varphi \equiv \psi$ et φ, ω fonctions de t . On a, dans ces hypothèses, à intégrer le système

$$(19) \quad \begin{cases} \varphi'' = \varphi'^2(1 + \cos \omega) \cot \varphi, \\ \omega'' + 2\omega'\varphi' \cot \varphi \cos \omega + \varphi'^2(2 \cot^2 \varphi \cos \omega - 1) \sin \omega = 0. \end{cases}$$

Le $d\sigma^2$ de la sphère est

$$(20) \quad \begin{aligned} d\sigma^2 &= \varphi'^2[du^2 + dv^2 + 2dudv \cos \omega], \\ &= \varphi'^2 \left[(du + dv)^2 \cos^2 \frac{\omega}{2} + (du - dv)^2 \sin^2 \frac{\omega}{2} \right]. \end{aligned}$$

Les accents désignent une dérivation en t . On voit que si l'on pose

$$(21) \quad \varphi' \cos \frac{\omega}{2} dt = du_1, \quad du - dv = d\lambda, \quad \varphi' \sin \frac{\omega}{2} = U_1$$

l'élément $d\sigma^2$ prend la forme classique

$$(22) \quad d\sigma^2 = du_1^2 + U_1^2 d\lambda^2$$

où U_1 est fonction du seul argument u_1 . Les courbes $\lambda = \text{constante}$ sont donc des

grands cercles pivotant autour d'un diamètre fixe de la sphère, et si l'on écarte le cas singulier où ce diamètre serait isotrope (les surfaces obtenues seraient alors imaginaires), on peut prendre $U_1 = A \sin(u_1 - h)$ où A, h sont constants; on peut donner à h telle valeur numérique que l'on veut; car la quadrature $du_1 = \varphi' \cos \frac{\omega}{2} dt$ introduit une constante arbitraire nouvelle ne portant que sur u_1 et n'intervenant pas dans les constantes relatives aux fonctions ω, φ de t . En écrivant donc $U_1 = A \sin u_1$, nous avons exprimé que la courbure du $d\sigma^2$ est l'unité, donc tenu compte de la seconde équation (19) qui disparaît. On a ainsi le système donnant u_1, φ, ω

$$(23) \quad \begin{cases} \varphi'' = \varphi'^2 (1 + \cos \omega) \cot \varphi = 2 \varphi'^2 \cos^2 \frac{\omega}{2} \cot \varphi, \\ \varphi' \cos \frac{\omega}{2} = \frac{du_1}{dt}, \quad \varphi' \sin \frac{\omega}{2} = A \sin u_1. \end{cases}$$

On en déduit

$$(24) \quad \begin{cases} \varphi'^2 = \left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 + A^2 \sin^2 u_1, & \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{A \sin u_1}{\left(\frac{du_1}{dt}\right)}, \\ \varphi'' = 2 \cot \varphi \left(\frac{du_1}{dt}\right)^2. \end{cases}$$

La dérivation de l'équation qui donne φ'^2 donne aussitôt

$$(25) \quad \cot \varphi = \frac{\frac{d^2 u_1}{dt^2} + A^2 \sin u_1 \cos u_1}{2 \frac{du_1}{dt} \sqrt{\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 + A^2 \sin^2 u_1}}.$$

En dérivant l'équation (25), remplaçant $\cot \varphi$ et φ' par les valeurs déduites de (25) et (24) on a une équation d'ordre 3 donnant u_1 en t ; $\varphi, \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$ sont donnés explicitement en t par (25) et (24). L'équation résolvante annoncée ne contient pas t explicitement, de sorte qu'elle se ramène à une équation d'ordre 2, liant par exemple u_1 et $\frac{du_1}{dt}$, donnant $\frac{du_1}{dt} = P(u_1, C_1, C_2, A)$ où C_1, C_2 sont des constantes, suivie d'une quadrature donnant

$$t = \int \frac{du_1}{P(u_1, C_1, C_2, A)}.$$

On peut remarquer ici que la substitution $(u, v; \lambda u, \lambda v)$ où λ est une constante arbitraire remplace t par λt et A par $\frac{A}{\lambda}$, en raison de l'équation $d\varphi \sin \frac{\omega}{2} = (A dt) \sin u_1$, de sorte que l'on peut donner à A une valeur fixe, telle que l'unité, sans restreindre.

On peut remarquer à l'avance que ω, φ sont des fonctions de t de la forme spéciale

$$\varphi \equiv \varphi[\lambda t + \mu, C_1, C_2], \quad \omega \equiv \omega[\lambda t + \mu, C_1, C_2]$$

où λ, μ, C_1, C_2 sont des constantes arbitraires; il existe donc une relation $R[\varphi, \omega, C_1, C_2] = 0$; donc ω , considéré comme fonction de φ satisfait à une équation différentielle du second ordre, (équivalente à l'équation du second ordre que j'ai signalée entre u_1 et $\frac{du_1}{dt}$) et on doit obtenir ensuite t par une quadrature; c'est la méthode que signale M. Drach dans sa seconde note; on a en effet

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{d^2\omega}{d\varphi^2} \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

et la seconde équation (19) devient, en tenant compte de la première

$$(26) \quad \frac{d^2\omega}{d\varphi^2} + \frac{d\omega}{d\varphi} (1 + 3 \cos \omega) \cot \varphi + (2 \cot^2 \varphi \cos \omega - 1) \cos \omega = 0.$$

Si on a suivi cette marche et obtenu $\omega(\varphi)$, on a en dérivant la dernière équation (23) en t

$$A \cos u_1 \left(\frac{d\varphi}{dt} \cos \frac{\omega}{2}\right) = \left[2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \cos^2 \frac{\omega}{2} \cot \varphi\right] \sin \frac{\omega}{2} + \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dt} \cos \frac{\omega}{2} \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}$$

de sorte qu'en divisant le tout par $\frac{d\varphi}{dt} \cos \frac{\omega}{2}$, on obtient

$$(27) \quad \begin{cases} A \cos u_1 = \left[\sin \omega \cot \varphi + \frac{1}{2} \frac{d\omega}{d\varphi} \right] \frac{d\varphi}{dt}, \\ A \sin u_1 = \sin \frac{\omega}{2} \frac{d\varphi}{dt}. \end{cases}$$

On a donc par élévation au carré et addition

$$(28) \quad A dt = d\varphi \sqrt{\sin^2 \frac{\omega}{2} + \left[\sin \omega \cot \varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{d\omega}{d\varphi}\right) \right]^2}.$$

On a retrouvé ce fait que At s'obtient par une quadrature, une fois intégrée l'équation différentielle d'ordre 2; les constantes seules essentielles ici sont C_1 et C_2 .

M. Drach a montré comment φ, ψ, ω étant fonctions de $t = u + v$ on doit opérer pour intégrer le système différentiel d'ordre 6 qui généralise celui d'ordre 4 obtenu pour $\psi \equiv \varphi$; on détermine d'abord ω, ψ en fonction de φ par un système différentiel d'ordre 4 [obtenu en éliminant $\lambda t + \mu$ entre les équations

$$\begin{aligned}\varphi &\equiv \varphi(\lambda t + \mu, C_1, C_2, C_3, C_4), & \psi &\equiv \psi(\lambda t + \mu, C_1, C_2, C_3, C_4), \\ \omega &\equiv \omega(\lambda t + \mu, C_1, C_2, C_3, C_4).\end{aligned}$$

Théoriquement, deux quadratures seraient nécessaires pour obtenir ensuite t ; la remarque que j'avais faite et que M. Drach a reprise conduit à une intégrale première qui donne explicitement $\frac{\lambda dt}{d\varphi}$ et il reste une quadrature à faire.

Il est intéressant de montrer que les surfaces obtenues pour φ, ψ, ω fonctions de $u + v$ (ainsi que ρ) sont *hélicoïdales*. Cela résulte aussitôt de ce fait que pour x_1, y_1, z_1 coordonnées de m_1 , on a, en appelant X, Y, Z les coordonnées du point correspondant de la sphère

$$(29) \quad \frac{\partial x_1}{\partial u} = 2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial u} + b\rho \right) X, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = -2a\rho X + 2\rho \frac{\partial X}{\partial v}$$

et analogues pour y_1, z_1 ; les cosinus X, Y, Z vérifient les équations

$$(30) \quad \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = a \frac{\partial X}{\partial u} + b \frac{\partial X}{\partial v} - fX$$

de sorte que D, D', D'' coefficients de Gauss pour la surface (m_1) dépendent, comme E, F, G uniquement de $(u + v)$. Mais alors la correspondance $(u, v; u + \lambda, v - \lambda)$ où λ est une constante arbitraire ne change pas E, F, G, D, D', D'' , donc réalise un *déplacement* de la surface, la faisant glisser sur elle-même; elle est donc ou révolutive ou hélicoïdale; pour départager, il suffit de remarquer que les lignes $u + v = \text{const}$, le long desquelles la courbure totale reste constante, ne vérifient pas l'équation différentielle des lignes de courbure; les surfaces sont donc hélicoïdales.

Il serait curieux de décider si les cercles déduits de cette recherche, osculateurs aux lignes de courbure de deux surfaces différentes dans un système, peuvent ou non rester orthogonaux à une famille de surfaces. On sait que cette question fait aussi intervenir la représentation sphérique des développables de la congruence des axes; la congruence de ces axes doit être *cyclique*; elle l'est en général une fois et elle ne peut l'être ∞^1 fois que si l'on a $\frac{\partial a}{\partial u} = \frac{\partial b}{\partial v} = 2ab$, condition qui ne peut être réalisée dans le problème actuel.

On remarquera aussi que ω ici ne peut devenir égal à $\frac{\pi}{2}$ d'une façon permanente, de sorte que la congruence des axes des cercles n'est pas normale : autrement dit les surfaces focales ne sont pas surfaces de Voss.

13. — Étude du cas d'un foyer triple.

Prenons d'abord le cas

$$\begin{array}{cccc} f_1 & f_1 & f_1 & f_2 \\ C_1 & C_1 & C_1 & C_2 \end{array}$$

Pour obtenir un cercle ayant quatre points communs avec une surface S , il suffit de construire une sphère tangente à S en un point M , puis de la couper par le plan osculateur à l'une des branches d'intersection de S et de la sphère issues de M ; on sait qu'à une direction arbitraire du plan tangent correspond une seule sphère donnant cette direction comme tangente au point double. On pourra donc prendre une surface S arbitraire comme lieu du foyer triple f_1 ; on trace sur S une famille arbitraire de courbes γ à un paramètre; à chaque tangente d'une de ces courbes γ on fait correspondre la sphère indiquée à l'instant et la section circulaire qui s'en déduit. Rien de plus à ajouter.

Nous voulons maintenant avoir les cas plus spéciaux : d'abord

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{f_1 \quad f_1} & f_1 & f_2 \\ C_1 & C_1 & C_2 \end{array}$$

C'est un cas particulier du cas

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{f_1 \quad f_2} & f_1 & f_3 \\ C_1 & C_1 & C_3 \end{array}$$

traité au paragraphe 8, cas

où f_2 vient lui-même se confondre avec f_1 (on tiendra compte du changement de notation naturel : si f_2 est venu se confondre avec f_1 , il n'y a plus de raison de garder l'indice 3). Il paraît assez difficile de donner la règle générale pour obtenir ce cas; mais on peut en découvrir très simplement un exemple : la sphère en jeu est

de rayon constant et son centre décrit le cylindre $x^2 + y^2 = 1$; nous écrivons aussitôt les équations du cercle avec deux paramètres v et φ ; b est une constante.

$$(1) \quad \begin{cases} (x - \cos \varphi)^2 + (y - \sin \varphi)^2 + (z - v)^2 = (1 + b^2)^2, \\ x \sin \varphi - y \cos \varphi - b(z - v) = 0. \end{cases}$$

Pour obtenir les points focaux on écrit les équations

$$(2) \quad \begin{cases} (x \sin \varphi - y \cos \varphi) d\varphi - (z - v) dv = 0, \\ (x \cos \varphi + y \sin \varphi) d\varphi + b dv = 0. \end{cases}$$

La comparaison de la dernière équation (1) et de la première équation (2) prouve qu'il faut choisir entre les deux hypothèses

$$\begin{aligned} 1^\circ) \quad & b d\varphi - dv \neq 0, \quad x \sin \varphi - y \cos \varphi = 0, \quad z - v = 0, \\ 2^\circ) \quad & b d\varphi - dv = 0. \end{aligned}$$

Prenons la première : elle donne deux points focaux

$$(3) \quad \begin{cases} f_1[-b^2 \cos \varphi, & -b^2 \sin \varphi, & v], & dv = b d\varphi, \\ f_2[(2 + b^2) \cos \varphi, & (2 + b^2) \sin \varphi, & v], & (2 + b^2) d\varphi + b dv = 0. \end{cases}$$

la relation entre dv et $d\varphi$ étant obtenue par la dernière équation (2).

La seconde hypothèse entraîne $x \cos \varphi + y \sin \varphi + b^2 = 0$, $x \sin \varphi - y \cos \varphi - b(z - v) = 0$; on en déduit aisément les valeurs de x et y en z et en substituant dans l'équation de la sphère on trouve $(z - v)^2 = 0$ et on retrouve deux fois le foyer f_1 . On remarquera qu'en posant

$$\varphi = u, \quad v = bu + w$$

les équations du cercle C s'écrivent bien

$$\Sigma_1 = 0, \quad \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0.$$

Ici le succès de la méthode tient à ce que la sphère Σ_1 et le cylindre $x^2 + y^2 = b^4$ admettent tous deux le rayon aboutissant en f_1 comme axe de symétrie, de sorte que les plans osculateurs aux deux branches de l'intersection en f_1 contiennent cet axe, qui est la normale commune, c'est-à-dire la droite $f_1 f_2$; cette droite $f_1 f_2$ jointe à la tangente en f_1 donne le plan adopté au paragraphe 8, plan qui dans ce paragraphe 8 n'a pas besoin d'être le plan osculateur.

Il ne reste plus à traiter que le cas

$$\begin{array}{ccc} f_1 & f_1 & \overbrace{f_1 \ f_2} \\ C_1 & C_1 & C_1 \end{array}$$

qui est le seul restant, car nous avons remarqué qu'un foyer ne donne qu'un cercle infiniment voisin; ce cas ne peut se présenter : nous pouvons le voir en remarquant qu'ici la sphère Σ , a deux points limites confondus : elle est osculatrice à la surface S ; la tangente indiquée au début de ce paragraphe est une tangente principale; le plan osculateur à employer est le plan tangent à S et il coupe la sphère suivant un cercle de rayon nul, que nous rejetons.

14. — Étude du foyer quadruple.

On sait qu'en chaque point d'une surface il y a dix cercles ayant avec la surface cinq points communs confondus; donc prenant une surface S arbitraire et suivant par continuité un de ces dix cercles nous obtenons la congruence cherchée, qui correspond au cas

$$\begin{array}{cccc} f_1 & f_1 & f_1 & f_1 \\ C_1 & C_1 & C_1 & C_1 \end{array}$$

Le seul cas spécial à envisager est

$$\begin{array}{cc} \overbrace{f_1 \ f_1} & \overbrace{f_1 \ f_1} \\ C_1 & C_1 \end{array}$$

mais il est impossible : c'est un cas particulier du type

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{f_1 \ f_2} & f_1 & f_1 \\ C_1 & C_1 & C_1 \end{array}$$

dont

nous avons démontré l'impossibilité (ici on suppose de plus que f_2 et f_1 viennent se confondre).

15. — Inversion. Application aux géodésiques.

L'inversion, de puissance égale à l'unité, ayant l'origine pour pôle transforme la sphère d'équation

$$(s) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x_1x - 2y_1y - 2z_1z + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \rho_1^2 = 0$$

en la nouvelle sphère

$$(S) \quad x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2x_1x}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \rho_1^2} - \frac{2y_1y}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \rho_1^2} - \frac{2z_1z}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \rho_1^2} + \frac{1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \rho_1^2} = 0$$

ayant pour centre X_1, Y_1, Z_1 et pour rayon R_1

$$(1) \quad X_1 = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \rho_1^2}, \quad Y_1 = \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \rho_1^2}, \quad Z_1 = \frac{z_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \rho_1^2},$$

$$R_1 = \frac{\rho_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \rho_1^2}$$

on constate aussitôt que

$$(2) \quad dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2 - dR_1^2 = \frac{dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 - d\rho_1^2}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \rho_1^2)^2},$$

$$X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 - R_1^2 = \frac{1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \rho_1^2}$$

égalité que l'on peut mettre sous forme plus symétrique

$$(2') \quad \frac{dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2 - dR_1^2}{R_1^2} = \frac{dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 - d\rho_1^2}{\rho_1^2}$$

D'autre part il est clair que toute congruence de cercles est transformée par une opération du groupe conforme de l'espace à 3 dimensions en une congruence offrant les mêmes particularités; ceci explique une pénétration des propriétés métriques et anallagmatiques : les congruences les plus intéressantes sont celles où chaque cercle est représenté par deux équations

$$(3) \quad s = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial u} = 0$$

où s est une sphère dépendant des deux paramètres u, v ; nous avons eu à étudier alors la surface focale des axes de ces cercles, lieu des arêtes de rebroussement des développables $v = \text{constante}$, surface que nous avons supposé être le lieu du point x_1, y_1, z_1 ; cette surface, après l'inversion de pôle O , est remplacée par une autre qui ne lui correspond pas par l'inversion, mais qui lui est liée par les formules (1).

Si x_1, y_1, z_1 et $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \rho_1^2$ sont solutions d'une équation de la forme

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + A \frac{\partial \theta}{\partial u} + B \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0$$

il en est de même pour $X_1, Y_1, Z_1, X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 - R_1^2$; même remarque s'il s'agit d'une équation de la forme

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + A \frac{\partial \theta}{\partial u} + B \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0.$$

Si (indépendamment de la propriété qui précède), les courbes $\rho_1 = c^{\text{te}}$ sont géodésiquement parallèles sur la surface (x_1, y_1, z_1) , l'expression ρ_1 étant la longueur d'arc porté sur les géodésiques orthogonales, les courbes $R_1 = c^{\text{te}}$ sont géodésiquement parallèles sur la surface (X_1, Y_1, Z_1) . Ces propriétés se vérifient aussitôt par calcul direct, mais elles résultent aussitôt de la transformation par inversion des congruences des divers types dus aux cercles d'équations (3).

Cette remarque est intéressante quand on connaît une surface possédant un faisceau de géodésiques fermées, ayant donc toutes la même longueur a ; on peut supposer que $\rho = 0$ donne une trajectoire orthogonale déterminée; $\rho = a$ donne la même trajectoire et les formules (1), pourvu que l'on prenne au préalable la précaution de déplacer la surface $S(x_1, y_1, z_1)$ de façon à ce qu'elle n'ait aucun point commun avec la sphère $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$, donnent une nouvelle surface S_1 ayant une famille de géodésiques, cette fois non fermées. Si on suppose que S soit une de ces surfaces ayant leurs ∞^3 géodésiques fermées, prenons toutes les géodésiques issues d'un point A déterminé, géodésiques qui viennent repasser en A au bout d'un parcours de longueur a ; $\rho = 0$ donne le point A , $\rho = a$ donne de nouveau A ; nos formules livrent une surface S_1 sur laquelle on connaît ∞^4 géodésiques de même longueur a partant du point $\frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}, \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}, \frac{z_0}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ et aboutissant au point $\frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - a^2}, \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - a^2}, \frac{z_0}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - a^2}$.

Telles sont les propriétés un peu inattendues qui relient l'étude des congruences de cercles aux lignes géodésiques des surfaces.

En terminant rappelons certaines congruences remarquables, telles que les congruences paratactiques où les surfaces focales se réduisent à deux droites isotropes conjuguées, chaque foyer étant double.

16. — Parallélisme de Peterson.

Chaque fois que tout cercle de la congruence est cosphérique à deux cercles infiniment voisins, les développements du paragraphe 4 s'appliquent et il est alors évident que la surface focale (x_1, y_1, z_1) et la solution $\rho_1^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2$ ou $2\sigma_1$ peuvent être transformées par le parallélisme de Peterson, ce qui transforme aussi par parallélisme la seconde nappe (x_2, y_2, z_2) et les surfaces focales des congruences $(M_1 M'_1), (\mu_1 \mu'_1)$. C'est encore plus évident si on applique tout de suite la méthode de Guichard pour représenter les congruences rectilignes rapportées à leurs développables.

17. — Congruences cycliques.

Si ∞^2 cercles sont orthogonaux à ∞^1 surfaces, ils forment une congruence dite *cyclique*; chaque cercle d'une telle congruence est coupé par deux cercles infiniment voisins en deux points; réciproquement si des cercles sont normaux à deux surfaces et si chacun d'eux est rencontré en deux points par un des cercles infiniment voisins, tous ces cercles sont orthogonaux à une famille de surfaces⁽¹⁾. Darboux donne toutes ces propriétés, au tome II de la *Théorie des Surfaces*, au chapitre déjà signalé p. 314-345. Les surfaces trajectoires orthogonales appartiennent à un système triple et leurs lignes de courbure se correspondent.

Dans les congruences que nous avons signalées, il est assez difficile, pour les cas spéciaux, d'indiquer si la congruence obtenue est ou non cyclique. En tous cas le problème revient à trouver six solutions d'une équation de Laplace liées par une relation quadratique, ce qui explique pourquoi deux surfaces applicables et leur système conjugué commun conduisent à un système cyclique.

⁽¹⁾ Il faut, pour appliquer cette proposition, prendre la précaution suivante : *les deux surfaces en jeu ne doivent pas constituer deux portions d'une même sphère (ou d'un même plan, ce qui, par inversion, est équivalent)*. Si on considère deux cercles orthogonaux à un même plan, ou bien ils ne se coupent pas, ou bien ils se coupent en deux points. Si donc nous prenons une congruence de cercles orthogonaux à un même plan, chacun est rencontré en deux points par l'un ou l'autre de deux cercles infiniment voisins et, pourtant, la congruence, en général, n'est pas cyclique. D'ailleurs la démonstration fait intervenir la sphère orthogonale au cercle variable aux points où il est orthogonal aux deux surfaces, et cette sphère doit être *variable* pour que la démonstration soit valable.
