ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

MICHEL MARKIČ

Transformantes nouveau véhicule mathématique. Synthèse des triquaternions de Combebiac et du système géométrique de Grassmann calcul des quadriquaternions

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 28 (1936), p. 103-148

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1936_3_28__103_0>

TRANSFORMANTES
NOUVEAU VÉHICULE MATHÉMATIQUE

SYNTHÈSE
DES TRIQUATERNIONS DE COMBEBIAC
ET DU SYSTÈME GÉOMÉTRIQUE DE GRASSMANN
CALCUL DES QUADRIQUATERNIONS

Par Michel MARKIČ (Markitch)
Professeur émérite, Ljubljana (Yougoslavie).

PRÉFACE

Les travaux de Grassmann (*Ausdehnungslehre*) et les triquaternions de Combebiac, basés sur les quaternions de Hamilton, se présentent comme systèmes géométriques remarquables. Combebiac dit dans son Introduction : « Les procédés exposés dans l'*Ausdehnungslehre* de Grassmann réaliseraient ce but (une analyse géométrique se passant de tout système de référence), s'ils étaient susceptibles d'une réglementation absolument systématique, condition à laquelle ils ne satisfont pas, à notre avis », et comme d'autre part il est difficile de se désister pour l'un ou pour l'autre système, chacun brillant, — dans un même sujet on ne peut pas avoir deux vérités — nous avons été amené à établir une synthèse de ces deux pensées mathématiques.

Nous voudrions croire que nous avons réussi dans cette tâche en imaginant un système qui, en même temps, englobe les deux précédents.

Notre système est basé sur un groupe de 32 membres, à qui nous avons attribué le nom de « my-lambda-groupe », selon les lettres alphabétiques qui y sont adoptées, ou le nom de « groupe des quadriquaternions ».

Pendant notre étude nous avons rencontré le nouveau véhicule « transformantes », qui facilite essentiellement la solution de plusieurs problèmes mathématiques et en qui, en même temps, on peut avoir recours, avec un grand avantage, dans les autres champs d'applications.

CHAPITRE I

Transformantes binaires.

§ 1. — Origine des transformantes.

On connaît (4, pag. 68) que deux substitutions effectuées l'une après l'autre :

$$S\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\delta\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad S\begin{pmatrix}\alpha_1\beta_1\\ \gamma_1\delta_1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \alpha\xi_1 + \beta\eta_1, & y = \gamma\xi_1 + \delta\eta_1; \\ \xi_1 = \alpha_1\xi + \beta_1\eta, & \eta_1 = \gamma_1\xi + \delta_1\eta, \end{cases}$$

donnent la substitution composée suivante :

$$S\begin{pmatrix}AB\\ CD\end{pmatrix} \equiv S\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\delta\end{pmatrix} S\begin{pmatrix}\alpha_1\beta_1\\ \gamma_1\delta_1\end{pmatrix} = S\begin{pmatrix}\alpha\alpha_1 + \beta\gamma_1, & \alpha\beta_1 + \beta\delta_1\\ \gamma\alpha_1 + \delta\gamma_1, & \gamma\beta_1 + \delta\delta_1\end{pmatrix}.$$

Celles-ci doivent être représentées par des unités complexes $e_n (n = 1, 2, 3, 4)$ et par une composition (multiplication) :

$$S\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\delta\end{pmatrix} . S\begin{pmatrix}\alpha_1\beta_1\\ \gamma_1\delta_1\end{pmatrix} \equiv (\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + \delta e_4) . (\alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2 + \gamma_1 e_3 + \delta_1 e_4).$$

Cela donne le carré suivant :

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	0	0
e_2	0	0	e_1	e_2
e_3	e_3	e_4	0	0
e_4	0	0	e_3	e_4

Plus claire devient la multiplication par l'adaptation des unités complexes à deux indices. Le premier indice indique la ligne et le second la colonne de $S\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\delta\end{pmatrix}$.

Alors le carré de Cayley est :

	e_{11}	e_{12}	e_{21}	e_{22}
e_{11}	e_{11}	e_{12}	o	o
e_{12}	o	o	e_{11}	e_{12}
e_{21}	e_{21}	e_{22}	o	o
e_{22}	o	o	e_{21}	e_{22}

Il s'ensuit la règle de composition simple :

$$\boxed{\begin{array}{lll} e_{mn}\cdot e_{rs} = e_{ms}, & \text{si} & n = r; \\ e_{mn}\cdot e_{rs} = 0, & \text{si} & n \neq r. \end{array}}$$

L'élargissement pour plusieurs unités n'apporte aucune difficulté; car la loi de composition reste la même.

C'est à ces grandeurs e_{mn} que nous attribuons le nom de « transformantes ».

§ 2. — Relation des unités e_{mn} pour les unités quaternioniennes et pour l'unité imaginaire.

Note. — Nous marquons les racines d'unité avec le symbole : $i_n = \sqrt[n]{-1}$.

Nous avons trois substitutions S, S_1, S_2 (**4**, pag. 79) avec les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ resp. $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ et $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$ et la relation

$$SS_1 = S_2.$$

$$\begin{cases} \alpha = D + i_2 C, \\ \delta = D - i_2 C; \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta = -B + i_2 A, \\ \gamma = B + i_2 A. \end{cases}$$

$\alpha_1 = D_1 + i_2 C_1$, etc. A, B, C, D, resp. $A_1, \ldots$ $A_2, \ldots$ expressions réelles.

Alors :

$$\begin{aligned}
A_2 &= (AD_1 + DA_1) + (BC_1 - CB_1), \\
B_2 &= (BD_1 + DB_1) + (CA_1 - AC_1), \\
C_2 &= (CD_1 + DC_1) + (AB_1 - BA_1), \\
D_2 &= - AA_1 - BB_1 - CC_1 + DD_1
\end{aligned}$$

et

$$A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 + D_2^2 = (A^2 + B^2 + C^2 + D^2) . (A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + D_1^2).$$

D'après les quaternions (**1**, pag. 56)

$$\begin{aligned}
q &= w + \rho = w + xi + yj + zk, \\
r &= w_1 + \rho_1 = w_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k.
\end{aligned}$$

En changeant quelques lettres pour éviter des collisions, on trouve que

$$\begin{aligned}
&(w^2 + x^2 + y^2 + z^2) . (w_1^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \\
&= (ww_1 - xx_1 - yy_1 - zz_1)^2 \\
&+ (wx_1 + w_1 x + yz_1 - zy_1)^2 \\
&+ (wy_1 + w_1 y + zx_1 - xz_1)^2 \\
&+ (wz_1 + w_1 z + xy_1 - yx_1)^2,
\end{aligned}$$

formule algébrique dérivée d'Euler.

Une comparaison avec ce qui précède donne :

$$D_2 \equiv ww_1 - xx_1 - yy_1 - zz_1,$$

par conséquent

$$\begin{array}{llll}
D \equiv w, & A \equiv x, & B \equiv y, & C \equiv z, \\
D_1 \equiv w_1, & A_1 \equiv x_1, & B_1 \equiv y_1, & C_1 \equiv z_1;
\end{array}$$

de même :

$$\begin{array}{ll}
\left\{\begin{aligned} \alpha &= w + i_2 z, \\ \delta &= w - i_2 z, \end{aligned}\right. & \left\{\begin{aligned} \beta &= -y + i_2 x, \\ \gamma &= y + i_2 x. \end{aligned}\right. \\
\left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= w_1 + i_2 z_1, \\ \delta_1 &= w_1 - i_2 z_1; \end{aligned}\right. & \left\{\begin{aligned} \beta_1 &= -y_1 + i_2 x_1, \\ \gamma_1 &= y_1 + i_2 x_1. \end{aligned}\right.
\end{array}$$

Comme

$$(D_2 + A_2 i + B_2 j + C_2 k) = (D + Ai + Bj + Ck) . (D_1 + A_1 i + B_1 j + C_1 k),$$

et que d'autre part

$$\begin{aligned} &[(D + i_2 C)\, e_{11} + (-B + i_2 A)\, e_{12} + (B + i_2 A)\, e_{21} + (D - i_2 C)\, e_{22}] \\ \times &[(D_1 + i_2 C_1) e_{11} + (-B_1 + i_2 A_1) e_{12} + (B_1 + i_2 A_1) e_{21} + (D_1 - i_2 C_1) e_{22}] \\ = &(D_2 + i_2 C_2) e_{11} + (-B_2 + i_2 A_2) e_{12} + (B_2 + i_2 A_2) e_{21} + (D_2 - i_2 C_2) e_{22}, \end{aligned}$$

on peut identifier

$$D(e_{11} + e_{22}) + Ci_2(e_{11} - e_{22}) + B(e_{21} - e_{12}) + Ai_2(e_{12} + e_{21}) = D + Ck + Bj + Ai;$$

de plus

$$\boxed{\begin{aligned} &e_{11} + e_{22} = 1, \\ &i_2(e_{11} - e_{22}) = k, \\ &e_{21} - e_{12} = j, \\ &i_2(e_{12} + e_{21}) = i. \end{aligned}}$$

Il faut que les parties gauches des quatre équations obéissent aux mêmes lois que les parties droites, c'est-à-dire

1) $ij = k,$	2) $jk = i,$	3) $ki = j;$
4) $ji = -k,$	5) $kj = -i,$	6) $ik = -j;$
7) $i^2 = -1,$	8) $j^2 = -1,$	9) $k^2 = -1.$

Vérifications :

1) $i_2(e_{12} + e_{21})(e_{21} - e_{12}) = i_2(e_{11} - e_{22}),$

2) $(e_{21} - e_{12})\, i_2(e_{11} - e_{22}) = i_2(e_{21} + e_{12}),$

3) $i_2(e_{11} - e_{22})\, i_2(e_{12} + e_{21}) = -(e_{12} - e_{21}) = e_{21} - e_{12};$

4) $(e_{21} - e_{12})\, i_2(e_{12} + e_{21}) = i_2(e_{22} - e_{11}) = -i_2(e_{11} - e_{22}),$

5) $i_2(e_{11} - e_{22})(e_{21} - e_{12}) = i_2(-e_{21} - e_{12}) = -i_2(e_{12} + e_{21}),$

6) $i_2(e_{12} + e_{21})\, i_2(e_{11} - e_{22}) = -(e_{21} - e_{12});$

7) $[i_2(e_{12} + e_{21})]^2 = -(e_{12} + e_{21})(e_{12} + e_{21}) = -(e_{22} + e_{11}),$

8) $(e_{21} - e_{12})^2 = (e_{21} - e_{12})(e_{21} - e_{12}) = -e_{11} - e_{22},$

9) $[i_2(e_{11} - e_{22})]^2 = -(e_{11} - e_{22})(e_{11} - e_{22}) = -(e_{11} + e_{22}).$

Soit à exprimer inversement e_{mn} par i, j, k. On a

$$\boxed{\begin{aligned} &1)\quad e_{11} = \frac{1}{2}(1 - i_2 k),\\ &2)\quad e_{22} = \frac{1}{2}(1 + i_2 k),\\ &3)\quad e_{21} = \frac{1}{2}(j - i_2 i),\\ &4)\quad e_{12} = -\frac{1}{2}(j + i_2 i).\end{aligned}}$$

Aussi ici les parties droites des équations doivent obéir à la loi des $e_{mn} . e_{rs}$. Par exemple :

$$1)\quad e_{11} . e_{22} = 0, \qquad\qquad 2)\quad e_{11} . e_{12} = e_{12}.$$

En effet :

$$1)\quad \frac{1}{2}(1 - i_2 k) . \frac{1}{2}(1 + i_2 k) = \frac{1}{4}(1 - i_2 k + i_2 k - i_2^2 k^2) = 0,$$

$$2)\quad \frac{1}{2}(1 - i_2 k) . \frac{1}{2}(-j - i_2 i) = \frac{1}{4}(-j + i_2 kj - i_2 i + i_2^2 ki)$$

$$= \frac{1}{4}(-j - i_2 i - i_2 i - j) = -\frac{1}{2}(j + i_2 i), \qquad \text{etc.}$$

Autre exemple à résultat surprenant :

$$1)\quad e_{12} . e_{22} = e_{12},$$

$$2)\quad e_{22} . e_{12} = 0.$$

Le produit est égal au premier facteur et l'inversion des mêmes facteurs est égale à zéro. Effectivement :

$$1)\quad -\frac{1}{2}(j + i_2 i) . \frac{1}{2}(1 + i_2 k) = -\frac{1}{4}(j + i_2 i + i_2 jk + i_2^2 ik)$$

$$= -\frac{1}{4}(j + i_2 i + i_2 i + j) = -\frac{1}{2}(j + i_2 i),$$

$$2)\quad \frac{1}{2}(1 + i_2 k) . \frac{1}{2}(-j - i_2 i) = -\frac{1}{4}(j + i_2 kj + i_2 i + i_2^2 ki)$$

$$= -\frac{1}{4}(j - i_2 i + i_2 i - j) = 0.$$

§ 3. — La valeur réciproque et la conjuguée d'une transformante.

Soit $t = \alpha e_{11} + \beta e_{12} + \gamma e_{21} + \delta e_{22}$ une transformante.

La déterminante de la transformante = déterminante de la substitution $S\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\delta\end{pmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma = \Delta t$.

$Rt = t^{-1}$ est à rechercher.

Nous avons (**4**, pag. 68, 63) :

$$S\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\delta\end{pmatrix} . S\begin{pmatrix}\alpha_1\beta_1\\ \gamma_1\delta_1\end{pmatrix} = S\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Donc : 1) $\alpha\alpha_1 + \beta\gamma_1 = 1$, d'où : a) $\alpha_1 = \dfrac{\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma}$,

2) $\alpha\beta_1 + \beta\delta_1 = 0$, b) $\beta_1 = \dfrac{-\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma}$,

3) $\gamma\alpha_1 + \delta\gamma_1 = 0$, c) $\gamma_1 = \dfrac{-\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma}$,

4) $\gamma\beta_1 + \delta\delta_1 = 1$, d) $\delta_1 = \dfrac{\alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma}$.

Ainsi on trouve :

$$\boxed{t^{-1} = \alpha_1 e_{11} + \beta_1 e_{12} + \gamma_1 e_{21} + \delta_1 e_{22} = \frac{\delta e_{11} - \beta e_{12} - \gamma e_{21} + \alpha e_{22}}{\alpha\delta - \alpha\gamma}.}$$

On peut désigner le numérateur de cette fraction comme « conjuguée » de « t » $= Kt$.

Ceci donne droit à la réflexion suivante :

Si l'on pose $\delta = \alpha$, $\gamma = -\beta$; t devient

$$t' = \alpha(e_{11} + e_{22}) + \beta(e_{12} - e_{21}) = \alpha - \beta j = q,$$
$$Kt' = \alpha(e_{11} + e_{22}) - \beta(e_{12} - e_{21}) = \alpha + \beta j = Kq$$

selon Hamilton. En outre :

$$\Delta t' = \alpha^2 + \beta^2 = qKq = Kq \,.\, q = (Tq)^2. \qquad \textbf{(1, pag. 30.)}$$

On a donc :

$$t^{-1} = \frac{Kt}{\Delta t}.$$

En multipliant du côté gauche et du côté droit par t, on trouve :

$$1 = \frac{t\mathrm{K}t}{\Delta t} = \frac{\mathrm{K}t\,.\,t}{\Delta t}, \qquad \Delta t = t\mathrm{K}t = \mathrm{K}t\,.\,t\,.$$

On peut aisément vérifier :

$$\mathrm{K}\,.\,\mathrm{K}t = \mathrm{K}^2 t = t,$$

et

$$\mathrm{K}(tt_1) = \mathrm{K}t_1\,.\,\mathrm{K}t. \qquad (\mathbf{1}, \text{pag. } 32.)$$

Donc :

$$\mathrm{K}(t\mathrm{K}t) = \mathrm{K}^2 t\,.\,\mathrm{K}t = t\mathrm{K}t\,.$$

D'après cela $t\mathrm{K}t$ ne peut être qu'une quantité ordinaire. Elle est juste $= \Delta t$.

§ 4. — **Opérateur et opérande (multiplicateur et multiplicande).**

Il n'est point nécessaire d'identifier opérande avec opérateur comme le fait Hamilton (**1**, pag. 40).

Dans la suite nous employons les transformantes e_{mn} comme opérateurs et e_m (avec un seul indice, les symboles de Grassmann) comme opérandes.

Les e_m représentent les pures formes géométriques (points, droites, plans, etc.) et les transformantes deviennent dynames (réflexions, rotations et autres mouvements).

Alors nous stipulons comme règle :

$$\boxed{\begin{array}{lll} e_{mn}\,.\,e_r = e_m, & \text{si} & r = n, \\ e_{mn}\,.\,e_r = 0, & \text{si} & r \neq n; \end{array}}$$

et inversement :

$$\boxed{\begin{array}{lll} e_r\,.\,e_{mn} = e_n, & \text{si} & r = m, \\ e_r\,.\,e_{mn} = 0, & \text{si} & r \neq m. \end{array}}$$

Par là $\rho = xe_1 + ye_2$ se change dans un autre $\rho' = x'e_1 + y'e_2$, seulement il existe une différence dans le cas où l'opérateur se trouve à droite ou à gauche.

N. B. — Dans la suite nous multiplierons toujours du côté gauche d'après l'analogie : $y = \varphi(x)$.

Dans le cas où les transformantes se trouvent à droite de Σe_m, on peut les remettre au côté gauche, sans changer le résultat, en transposant les deux indices de chaque membre. En symboles :

$$t = \alpha e_{11} + \beta e_{12} + \gamma e_{21} + \delta e_{22}.$$

$$\mathrm{W}t = \alpha e_{11} + \beta e_{21} + \gamma e_{12} + \delta e_{22}; \qquad \rho = x e_1 + y e_2.$$

Alors on a :

$$t_1(\rho t) = (t_1 \mathrm{W} t)\rho.$$

N. B. — Généralement $t_1(\rho t) \neq (t_1 \rho)t$; ainsi l'opération n'est pas associative.
Par contre $(t_1 t)\rho = t_1(t\rho)$; de même $(t_2 t_1)t = t_2(t_1 t)$.
Règles :

$$(t_1 t)\rho = \rho \mathrm{W}(t_1 t) = t_1(t\rho) = (t\rho)\mathrm{W}t_1 = (\rho \mathrm{W}t)\mathrm{W}t_1 = \rho(\mathrm{W}t\mathrm{W}t_1).$$

Par conséquent

$$\mathrm{W}(t_1 t) = \mathrm{W}t \,.\, \mathrm{W}t_1.$$

L'opération W, effectuée sur un produit, est donc distributive et transposante.

Les transformantes qui changent les Σe_{mn} sont transformantes du deuxième degré; en symboles : $\Sigma e_{mn,rs}$. Elles sont en même relation avec les transformantes du premier degré, suivant les mêmes règles, comme les transformantes du premier degré envers les Σe_m.

§ 5. — « **Mutateurs** », **transformantes spéciales du deuxième degré.**

En plus de K, W quels autres mutateurs existent, qui permutent les indices et changent le signe?

Mettons-les ensemble :

	$t = \alpha e_{11} + \beta e_{12} + \gamma e_{21} + \delta e_{22}$	Définitions.
1)	$\mathrm{W}t = \alpha e_{11} + \beta e_{21} + \gamma e_{12} + \delta e_{22}$	Transpose les deux indices de chaque membre.
2)	$\mathrm{E}t = \alpha e_{22} - \beta e_{21} - \gamma e_{12} + \delta e_{11}$	$\mathrm{W}_{12}\mathrm{Z}_2 = \mathrm{Z}_2\mathrm{W}_{12}$.
3)	$\mathrm{K}t = \alpha e_{22} - \beta e_{12} - \gamma e_{21} + \delta e_{11}$	$\mathrm{EW} = \mathrm{WE}$.
4)	$\mathrm{W}_{12}t = \alpha e_{22} + \beta e_{21} + \gamma e_{12} + \delta e_{11}$	L'indice 2 est converti en indice 1 et vice versa.
5)	$\mathrm{W}_{12}\mathrm{W}t = \alpha e_{22} + \beta e_{12} + \gamma e_{21} + \delta e_{11}$	$= \mathrm{WW}_{12}$.
6)	$\mathrm{Z}_2 t = \alpha e_{11} - \beta e_{12} - \gamma e_{21} + \delta e_{22}$	Change le signe au cours de l'apparition de l'indice 2.
7)	$\mathrm{WZ}_2 t = \alpha e_{11} - \beta e_{21} - \gamma e_{12} + \delta e_{22}$	$= \mathrm{Z}_2\mathrm{W}$.

Nous écrivons ces expressions plus brièvement :

$$M_0 \equiv 1, \quad M_1 \equiv W, \quad M_2 \equiv E, \quad M_3 \equiv K,$$
$$M_4 \equiv W_{12}, \quad M_5 \equiv W_{12}W, \quad M_6 \equiv Z_2, \quad M_7 \equiv WZ_2.$$

Les symboles forment un groupe d'Abel de huit membres; voir (**5**, pag. 91, 52).

N. B. — « Les carrés intérieurs du carré de Cayley ne contiennent que les indices. »

Les **M** avec l'indice impair sont transposants; les **M** avec l'indice pair sont non-transposants.

Le groupe des M_n.

M	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

Les symboles M_n se rapportent aux deux indices de chaque membre. Si on emploie les mêmes définitions sur $\rho = xe_1 + ye_2$, c'est-à-dire seulement sur le seul indice de chaque membre, nous écrirons au lieu de $M_n(W, E, K, W_{12}, Z_2, \ldots)$: $\mathfrak{M}_n(\mathfrak{W}, \mathfrak{E}, \mathfrak{K}, \mathfrak{W}_{12}, \mathfrak{Z}_2, \ldots)$. On voit, que $\mathfrak{M}_n$ coïncide avec $\mathfrak{M}_{n-1}$: $\mathfrak{W} \equiv 1$, $\mathfrak{K} \equiv \mathfrak{E}$, $\mathfrak{W}_{12}\mathfrak{W} \equiv \mathfrak{W}_{12}$, $\mathfrak{W}\mathfrak{Z}_2 \equiv \mathfrak{Z}_2$.

Les $\mathfrak{M}_n$ forment un groupe avec une composition totalement différente de celle des M_n (**5**, pag. 93).

$\mathcal{M}$	0	2	4	6
0	0	2	4	6
2	2	-0	-6	4
4	4	6	0	2
6	6	-4	-2	0

C'est seulement un quart du carré de Cayley. On trouve les autres opérateurs par multiplication avec -1. Ainsi $\mathcal{M}_m(-\mathcal{M}_n) = -(\mathcal{M}_m, \mathcal{M}_n)$, etc.

$\mathfrak{Z}_2$ et $\mathfrak{W}_{12}$ sont du deuxième ordre et $\mathfrak{E}$ du quatrième ordre et correspond exactement au « trait de complément » chez Grassmann (**3**, I, pag. 17).

Comme :

$$\begin{aligned} \rho &= \quad x e_1 + y e_2, \\ \mathfrak{E}\rho &= -y e_1 + x e_2, \\ \mathfrak{W}_{12}\rho &= \quad x e_2 + y e_1, \\ \mathfrak{Z}_2\rho &= \quad x e_1 - y e_2, \end{aligned}$$

on peut facilement vérifier que :

$$\mathfrak{E} \equiv e_{21} - e_{12}, \qquad \mathfrak{W}_{12} \equiv e_{12} + e_{21}, \qquad \mathfrak{Z}_2 \equiv e_{11} - e_{22}.$$

On a donc :

$(e_{21} - e_{12})\, e_1 = e_2;$	chez Grassmann :	$\mid e_1 = e_2.$
$(e_{21} - e_{12})\, e_2 = -e_1;$	» »	$\mid e_2 = -e_1.$
$(e_{21} - e_{12})^2 e_1 = -(e_{11} + e_{22}) e_1 = -e_1;$	» »	$\mid\mid e_1 = \mid e_2 = -e_1.$

De plus : $$\mathfrak{E} = \mathfrak{W}_{12}\mathfrak{Z}_2 = -\mathfrak{Z}_2\mathfrak{W}_{12}.$$

§ 6. — **Scalaires, vecteurs, tenseurs, verseurs.**

Aussi dans les transformantes nous distinguons des scalaires S et des vecteurs V, des tenseurs T et des verseurs U.

Soit :

$$\begin{aligned} t &= \alpha e_{11} + \beta e_{12} + \gamma e_{21} + \delta e_{22} = St + Vt. \\ Kt &= \alpha e_{22} - \beta e_{12} - \gamma e_{21} + \delta e_{11} = St - Vt. \end{aligned}$$

De cela :

$$\text{1)}\quad 2St = \alpha e_{11} + \alpha e_{22} + \delta e_{22} + \delta e_{11} = (\alpha + \delta)(e_{11} + e_{22}) = \alpha + \delta .$$

$$\boxed{St = \frac{1}{2}(\alpha + \delta) .}$$

$$\text{2)}\quad 2Vt = t - Kt = 2\beta e_{12} + 2\gamma e_{21} + \alpha e_{11} - \alpha e_{22} + \delta e_{22} - \delta e_{11}$$
$$= 2\beta e_{12} + 2\gamma e_{21} + (\alpha - \delta)(e_{11} - e_{22}) .$$

$$\boxed{Vt = \beta e_{12} + \gamma e_{21} + \frac{1}{2}(\alpha - \delta)(e_{11} - e_{22}) .}$$

Ensuite :

$$(Tt)^2 = t \,.\, Kt = \Delta t = \alpha\delta - \beta\gamma .$$

Pour cela :

$$\boxed{Tt = \sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma} \qquad \text{et} \qquad Ut = \frac{t}{Tt} = \frac{\alpha e_{11} + \beta e_{12} + \gamma e_{21} + \delta e_{22}}{\sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma}} .}$$

§ 7. — Quelles grandeurs complexes peuvent être employées dans l'espace à deux dimensions comme coordonnées?

Il existe deux possibilités; premièrement : I. Les coordonnées se composent de e_{mn}, resp. Σe_{mn}; et deuxièmement : II. elles sont xe_1, resp. ye_2.

I. 1) Abscisse : xe_{11}; ordonnée : ye_{22};
2) » xe_{11}; » ye_{12};
3) » xe_{12}; » ye_{21}; selon Hamilton :
4) » $xi = xi_2(e_{12} + e_{21})$; » $yk = yi_2(e_{11} - e_{22})$.

Nous examinons d'abord les quatre combinaisons : Les additions et les soustractions suivent les règles d'un parallélogramme de forces. En tout quatre cas; par contre, chaque cas possède sa propre multiplication.

Le troisième cas possède une propriété, qu'il donne des points (resp. des droites) de deux genres suivant que le produit se compose de nombre de facteurs pair ou impair. Cf. les multiplications :

$$1)\quad (xe_{11}+ye_{22})(x_1e_{11}+y_1e_{22}) = xx_1e_{11}+yy_1e_{22};$$

comme chez Grassmann :

$$(xe_1+ye_2)\,|\,(x_1e_1,\ y_1e_2) = xx_1,\ yy_1,\quad \text{quant aux coefficients.}$$

$$2)\quad (xe_{11}+ye_{12})(x_1e_{11}+y_1e_{12}) = xx_1e_{11}+xy_1e_{12};$$

$$3)\quad (xe_{12}+ye_{21})(x_1e_{12}+y_1e_{21}) = x_1ye_{22}+xy_1e_{11};$$

$$(x_1ye_{22}+xy_1e_{11})(x_2e_{12}+y_2e_{21}) = xy_1x_2e_{12}+yx_1y_2e_{21}.$$

Pourtant nous ne voulons pas poursuivre ces raisonnements. Nous arrêterons notre attention particulièrement sur le cas II. Abscisse : xe_1, ordonnée : ye_2.

§ 8. — L'interprétation géométrique des expressions $\Sigma x_{mn}e_{mn}$ et Σx_ne_n.

Les coordonnées du point P soient $xe_1 \equiv OP_1$ et $ye_2 \equiv OP_2$, de sorte que

$$(\rho = xe_1+ye_2) \equiv P \equiv (OP_1+OP_2) \equiv (OP).$$

Cette détermination des points suit la méthode des quaternions; e_1 et e_2 sont vecteurs dans le sens de Grassmann (allem. « Strecken »). Voir (*fig. 1*).

Définitions :

$p_1\rho$ indique la projection de ρ sur l'abscisse;
$p_2\rho$ » » » sur l'ordonnée;
$p_0\rho$ » » » sur le point d'origine.
$s_1\rho$ désigne la réflexion de ρ sur l'abscisse;
$s_2\rho$ » » » sur l'ordonnée;
$s_{12}\rho$ » » » sur la bissectrice du premier quadrant;
$s_{21}\rho$ » » » sur la bissectrice du deuxième quadrant;
$s_0\rho$ » » » sur le point d'origine.

Finalement nous dénotons par

$d_1\rho$ la rotation de ρ à 90° autour de l'abscisse; par
$d_2\rho$ » » » » de l'ordonnée; et par
$d_3\rho$ » » » » de la troisième coordonnée $\perp d_1$ et d_2.

d_1 est donc $\equiv k$; $d_2 \equiv i$, $d_3 \equiv j$.

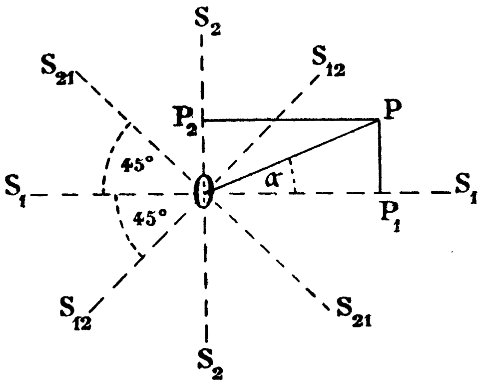

FIG. 1.

$(\rho = OP) \equiv P,$

$OP = OP_1 + OP_2 = \rho_1 + \rho_2,$

$(\rho = \rho_1) \equiv P_1, \ (\rho = \rho_2) \equiv P_2.$

Les lignes pointillées représentent les droites réfléchissantes.

Alors on a manifestement :

$$1) \quad \rho' = e_{11}\rho = p_1\rho; \qquad 2) \quad \rho' = e_{22}\rho = p_2\rho.$$

$$3) \quad \rho' = e_{22}(e_{11}\rho) = p_2(p_1\rho) = p_2\rho_1 = \rho_0 = 0;$$

d'autre part $\quad \rho' = (e_{22}e_{11})\rho = 0 \,.\, \rho = 0;$

de même $\quad \rho' = e_{11}(e_{22}\rho) = p_1(p_2\rho) = p_1\rho_2 = \rho_0 = 0.$

Mais aussi $\quad \rho' = p_0\rho = 0;\;$ d'après celà $\quad p_0 = p_1 p_2 = p_2 p_1.$

$$4) \quad \rho' = e_{11}(e_{11}\rho) = e_{11}\rho_1 = \rho_1 = (e_{11}e_{11})\rho = e_{11}\rho = \rho_1.$$

Pareillement $\quad \rho' = e_{22}(e_{22}\rho); \qquad p_1^2 = p_1. \qquad p_2^2 = p_2.$

N. B. — Il faut bien distinguer entre le point d'origine comme dyname réfléchissant s_0 et entre le point d'origine comme forme purement géométrique ρ_0; $s_0 = -1, \ \rho_0 = 0.$

$$5) \quad \rho' = e_{12}\rho = p_1 s_{12}\rho = -p_1 d_3\rho = -d_3 p_2\rho = s_{12} p_2\rho;$$

$$6) \quad \rho' = e_{21}\rho = p_2 s_{12}\rho = \quad p_2 d_3\rho = \quad d_3 p_1\rho = s_{12} p_1\rho.$$

Sommes et différences géométriques (d'après les règles du parallélogramme des forces).

$$1) \quad \rho' = (e_{11} + e_{22})\rho = (p_1 + p_2)\rho = \rho;$$

$$2) \quad \rho' = (e_{11} - e_{22})\rho = (p_1 - p_2)\rho = s_1\rho;$$

$$3) \quad \rho' = (e_{21} + e_{12})\rho = (p_2 + p_1)s_{12}\rho = s_{12}\rho = (p_2 - p_1)d_3\rho = s_2 d_3\rho = s_{12}\rho;$$

$$4) \quad \rho' = (e_{21} - e_{12})\rho = (p_2 - p_1)s_{12}\rho = s_2 s_{12}\rho = d_3\rho.$$

Car il est évident que $p_1 + p_2 = 1, \ p_1 - p_2 = s_1, \ p_2 - p_1 = s_2.$

Comme

$$e_{11} + e_{22} = 1, \qquad e_{11} - e_{22} = - i_2 k,$$
$$e_{21} + e_{12} = - i_2 i, \qquad e_{21} - e_{12} = j,$$

il en résulte aussi l'interprétation géométrique de ces vecteurs imaginaires de Hamilton en liaison avec $\rho = xe_1 + ye_2$. On a :

$$- i_2 k \equiv s_1, \qquad i_2 k = s_0 s_1 = s_1 s_0 = - s_1 = s_2,$$
$$- i_2 i \equiv s_{12}. \qquad i_2 i = s_0 s_{12} = s_{12} s_0 = - s_{12} = s_{21}.$$

Maintenant on peut représenter aussi les e_{mn} comme sommes géométriques.

1) $e_{11}\rho = \frac{1}{2}(1 - i_2 k)\rho = \frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}s_1 \cdot \rho,$

2) $e_{22}\rho = \frac{1}{2}(1 + i_2 k)\rho = \frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}s_2 \cdot \rho.$

3) $e_{21}\rho = \frac{1}{2}(j - i_2 i)\rho = d_3 \cdot \frac{1}{2}\rho + s_{12} \cdot \frac{1}{2}\rho,$ (Voir *fig.* 2.)

4) $e_{12}\rho = \frac{1}{2}(-j - i_2 i)\rho = - d_3 \cdot \frac{1}{2}\rho + s_{12} \cdot \frac{1}{2}\rho.$

$\mathrm{OM} = \frac{1}{2}\mathrm{OP},$

$\mathrm{M}' = s_1 \mathrm{M},$

$\mathrm{M}'' = s_2 \mathrm{M}.$

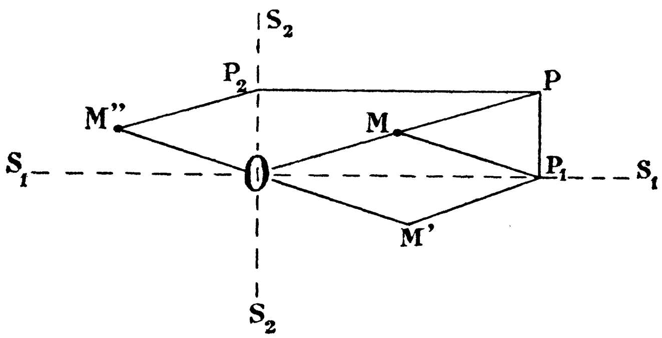

FIG. 2.

Caractéristique des droites réfléchissantes.

Ces droites sont complètement séparées des droites ordinaires purement géométriques; elles n'ont aucune direction mais seulement une position. Une rotation de 180° les ramène à la même position, comme une multiplication par $+1$. On comprend que les droites réfléchissantes négatives sont perpendiculaires aux droites positives. Il faut donner aux droites réfléchissantes un double mouvement rotatoire de 90° pour les amener dans la même position.

Vue d'ensemble sur les symboles employés jusqu'ici.

	A	B	C	D
1)	1	$e_{11} + e_{22}$	1	1.
2)	$\mathfrak{E}$	$e_{21} - e_{12}$	j	d_3.
3)	$\mathfrak{W}_{12}$	$e_{12} + e_{21}$	$-i_2 i$	s_{12}.
4)	$\mathfrak{Z}_2$	$e_{11} - e_{22}$	$-i_2 k$	s_1.
5)	-1	$-(e_{11} + e_{22})$	-1	$-1 = s_0$.
6)	$-\mathfrak{E}$	$e_{12} - e_{21}$	$-j$	$-d_3 = s_0 d_3 = d_3 s_0$.
7)	$-\mathfrak{W}_{12}$	$-(e_{12} + e_{21})$	$i_2 i$	$s_0 s_{12} = s_{12} s_0 = s_{21}$
8)	$-\mathfrak{Z}_2$	$e_{22} - e_{11}$	$i_2 k$	$s_0 s_1 = s_1 s_0 = s_2$.

A. Changement des indices et des signes de φ.
B. Transformantes du même effet.
C. Symboles de Hamilton correspondants.
D. Interprétation géométrique (géométrie des dynames).

Les symboles de la colonne D forment le même groupe de huit membres que les symboles de la colonne A et B (v. § 5).

C'est qu'il suffit d'un quart du carré de Cayley.

	1	d_3	s_{12}	s_1
1	1	d_3	s_{12}	s_1
d_3	d_3	-1	$-s_1$	s_{12}
s_{12}	s_{12}	s_1	1	d_3
s_1	s_1	$-s_{12}$	$-d_3$	1

Comme le complément $\mathfrak{E}$ est composé lui-même de $\mathfrak{W}_{12}$ et $\mathfrak{Z}_2$ ($\mathfrak{E} = \mathfrak{W}_{12} \cdot \mathfrak{Z}_2$; c'est $d_3 = s_{12} s_1$), on voit que dans le système de Grassmann les autres transformantes s'introduisent organiquement et d'après cela permettent une amplification étendue du système.

§ 9. — Géométrie dans l'espace à une seule dimension.

Nous nous contentons de la remarque suivante : Si un des deux symboles e_1, e_2, ou tous les deux représentent des points, l'espace à deux dimensions se change en l'espace à une dimension et les résultats de la première géométrie se laissent facilement traduire dans la géométrie à une seule dimension.

CHAPITRE II

Transformantes ternaires. — Espaces à trois dimensions.

§ 10. — Réflexions.

Nous avons :

$$\rho = xe_1 + ye_2 + ze_3;$$

les e_n sont des vecteurs. On a $t = \Sigma a_{mn} e_{mn}$, c'est-à-dire

$$t = a_{11}e_{11} + a_{12}e_{12} + a_{13}e_{13} + a_{21}e_{21} + a_{22}e_{22} + a_{23}e_{23} + a_{31}e_{31} + a_{32}e_{32} + a_{33}e_{33};$$

les a_{mn} sont des quantités ordinaires.

Nous limitons notre étude aux transformantes élémentaires; ce sont celles dont les coefficients sont $\pm 1, 0$ et dont chacun d'entre les trois indices apparaît en même nombre.

Nous recherchons les expressions des réflexions par Σe_{mn}.

On a en général :

$$\begin{aligned} &1)\quad te_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3;\\ &2)\quad te_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3;\\ &3)\quad te_3 = a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3.\end{aligned}$$

Ainsi on trouve par exemple pour s_{12}.

1)	$te_1 = e_2,$	c'est	1)	$a_{21} = 1,$	$a_{11} = 0,$	$a_{31} = 0;$
2)	$te_2 = e_1,$		2)	$a_{12} = 1,$	$a_{22} = 0,$	$a_{32} = 0;$
3)	$te_3 = -e_3;$		3)	$a_{33} = -1,$	$a_{23} = 0,$	$a_{13} = 0.$

On a donc

$$t = s_{12} = e_{21} + e_{12} - e_{33}.$$

De la même manière on trouve pour les neuf droites réfléchissantes et pour les neuf plans réfléchissants les expressions suivantes :

$$
\begin{aligned}
s_1 &= e_{11} - e_{22} - e_{33}; & \sigma_n &= -s_n; \quad n = 1, 2, 3;\\
s_2 &= -e_{11} + e_{22} - e_{33}; & \sigma_{mn} &= -s_{mn}; \quad m, n = 1, 2, 3.\\
s_3 &= -e_{11} - e_{22} + e_{33}.\\
s_{12} &= e_{12} + e_{21} - e_{33};\\
s_{21} &= -e_{12} - e_{21} - e_{33}.\\
s_{23} &= -e_{11} + e_{32} + e_{23};\\
s_{32} &= -e_{11} - e_{32} - e_{23}.\\
s_{31} &= e_{31} - e_{22} + e_{13};\\
s_{13} &= -e_{31} - e_{22} - e_{13}.
\end{aligned}
$$

Les σ_n sont plans réfléchissants XY, YZ, ZX perpendiculaires à s_n; ou bien $\sigma_{mn} \perp s_{mn}$.

Dans l'espace à trois dimensions les droites réfléchissantes négatives deviennent plans réfléchissants perpendiculaires aux droites et vice-versa.

En outre :

$$
\begin{aligned}
1 &= e_{11} + e_{22} + e_{33},\\
s_0 &= -(e_{11} + e_{22} + e_{33}).
\end{aligned}
$$

Note. — Les notations sont les mêmes qu'au chapitre I, § 8 pour le plan XY. On obtient les notations pour les deux autres plans YZ, ZX par échange circulaire des indices 1, 2, 3; et notamment les indices 1, 2 du plan XY deviendront 2, 3 dans le plan YZ et 3, 1 dans le plan ZX.

§ 11. — Rotations autour des axes coordonnés.

Il y a trois opérateurs du quatrième ordre, qui effectuent une rotation de 90° sinistrorsum (lévogyre).

$$
\begin{aligned}
d_1 &= e_{32} - e_{23} + e_{11}, & d_1^{-1} &= -e_{32} + e_{23} + e_{11},\\
d_2 &= e_{13} - e_{31} + e_{22}, & d_2^{-1} &= -e_{13} + e_{31} + e_{22},\\
d_3 &= e_{21} - e_{12} + e_{33}. & d_3^{-1} &= -e_{21} + e_{12} + e_{33}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_1^2 &= -e_{22} - e_{33} + e_{11} = s_1, & d_n^3 &= d_n^{-1};\\
d_2^2 &= -e_{33} - e_{11} + e_{22} = s_2, & d_n^4 &= 1; \quad n = 1, 2, 3.\\
d_3^2 &= -e_{11} - e_{22} + e_{33} = s_3.
\end{aligned}
$$

On peut facilement constater que

$$s_{12}s_1 = d_3; \qquad (s_{12}s_1)^{-1} = d^{-1} = s_1^{-1}s_{12}^{-1} = s_1 s_{12}.$$

De plus :

$$d_1 d_2 d_3 = e_{31} - e_{22} + e_{13} = s_{31}.$$

Les opérateurs : $1, s_1, s_2, s_3, s_{12}, s_{21}, d_3, d_3^{-1}$ forment un groupe de 8 membres du type suivant $8 = 1(1) + 5(2) + 2(4)$. Parmi les 8 membres, 1 est de degré 1, 5 de degré 2, 2 de degré 4.

Sous-groupe : $1, s_1, s_2, s_3$; type : $4 = 1(1) + 3(2)$.

Par échange circulaire des indices 1, 2, 3 on obtient deux autres groupes de 8 membres du même type. Voir le groupe de 24 membres § 13.

Note. — Il est remarquable que dans l'espace à trois dimensions on ne peut pas généralement identifier k, i, j avec d_1, d_2, d_3.

$d_1 \equiv k$ seulement à l'égard des points du plan YZ comme opérandes.

Pareillement

$d_2 \equiv i$ à l'égard des points du plan ZX,

et $d_3 \equiv j$ » » » XY

comme opérandes.

Par contre d_1 (resp. d_2, d_3) effectue la rotation de tous les points de l'espace tridimensionnel autour des axes correspondants.

Cf. $d_3 e_3 = e_3$; là-contre $i(j) = -1$.

§ 12. — Opérateurs $\mathfrak{D}_n$, D_n.

$$s_{12} \cdot s_{23} = (e_{12} + e_{21} - e_{33}) \cdot (-e_{11} + e_{32} + e_{23}) = -e_{32} + e_{13} - e_{21},$$

donc un nouvel opérateur.

On obtient de cette manière 8 opérateurs. Ils effectuent une rotation sinistrorsum (lévogyre) à 120° autour des axes, qui avec les trois coordonnées forment des angles égaux et passent par le point d'origine. Ils sont du troisième ordre et on peut les dénommer réguliers; car ils transposent tous les 3 indices de ρ, chacun une fois.

Ce sont :

$$
\begin{array}{llll}
1) & \mathfrak{D}_0 = e_{21} + e_{32} + e_{13}, & 5) & D_0 = e_{12} + e_{23} + e_{31}, \\
2) & \mathfrak{D}_1 = -e_{12} - e_{31} + e_{23}, & 6) & D_1 = -e_{21} - e_{13} + e_{32}, \\
3) & \mathfrak{D}_2 = e_{31} - e_{23} - e_{12}, & 7) & D_2 = e_{13} - e_{32} - e_{21}, \\
4) & \mathfrak{D}_3 = -e_{32} - e_{13} + e_{21}; & 8) & D_3 = -e_{23} - e_{31} + e_{12}.
\end{array}
$$

$\mathfrak{D}_0$ forme des angles égaux avec les axes OX, OY, OZ;
$\mathfrak{D}_1$ » » OY, OX', OZ;
$\mathfrak{D}_2$ » » OX', OY', OZ;
$\mathfrak{D}_3$ » » OY', OX, OZ.

Direction $D_n =$ — direction $\mathfrak{D}_n$. (*Fig. 3.*)

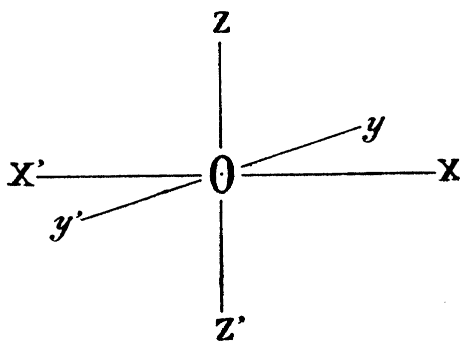

FIG. 3.

On voit :

$$D_n = W\mathfrak{D}_n,$$
$$n = 0, 1, 2, 3,$$

et

$$D_n = \mathfrak{D}_n^{-1} = \mathfrak{D}_n^2.$$

Les opérateurs $\mathfrak{D}_n$, D_n, s_m, 1; $n = 0, 1, 2, 3$, $m = 1, 2, 3$, forment un groupe de 12 membres du type $12 = 1(1) + 3(2) + 8(3)$. Voir § 13.

§ 13. — Le groupe composé.

La combinaison des groupes étudiés jusqu'ici renferme un groupe de 24 membres du type : $24 = 1(1) + 9(2) + 6(4) + 8(3)$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
1	I	s_1	s_2	s_3	d_3	d_3^{-1}	s_{12}	s_{21}	d_1	d_1^{-1}	s_{23}	s_{32}	d_2	d_2^{-1}	s_{31}	s_{13}	$\mathfrak{D}_0$	$\mathfrak{D}_1$	$\mathfrak{D}_2$	$\mathfrak{D}_3$	D_0	D_1	D_2	D_3	1
2	s_1	I	s_3	s_2	s_{21}	s_{12}	d_3^{-1}	d_3	d_1^{-1}	d_1	s_{32}	s_{23}	s_{31}	s_{13}	d_2	d_2^{-1}	D_2	$\mathfrak{D}_2$	$\mathfrak{D}_1$	D_1	D_3	$\mathfrak{D}_3$	$\mathfrak{D}_0$	D_0	2
3	s_2	s_3	I	s_1	s_{12}	s_{21}	d_3	d_3^{-1}	s_{32}	s_{23}	d_1^{-1}	d_1	d_2^{-1}	d_2	s_{13}	s_{31}	$\mathfrak{D}_3$	D_0	D_3	$\mathfrak{D}_0$	$\mathfrak{D}_1$	D_2	D_1	$\mathfrak{D}_2$	3
4	s_3	s_2	s_1	I	d_3^{-1}	d_3	s_{21}	s_{12}	s_{23}	s_{32}	d_1	d_1^{-1}	s_{13}	s_{31}	d_2^{-1}	d_2	D_1	D_3	D_0	D_2	$\mathfrak{D}_2$	$\mathfrak{D}_0$	$\mathfrak{D}_3$	$\mathfrak{D}_1$	4
5	d_3	s_{12}	s_{21}	d_3^{-1}	s_3	I	s_2	s_1	$\mathfrak{D}_0$	$\mathfrak{D}_3$	D_1	D_2	$\mathfrak{D}_1$	$\mathfrak{D}_2$	D_0	D_3	s_{23}	s_{13}	s_{31}	s_{32}	d_2^{-1}	d_1	d_1^{-1}	d_2	5
6	d_3^{-1}	s_{21}	s_{12}	d_3	I	s_3	s_1	s_2	D_1	D_2	$\mathfrak{D}_0$	$\mathfrak{D}_3$	D_3	D_0	$\mathfrak{D}_2$	$\mathfrak{D}_1$	d_1	d_2	d_2^{-1}	d_1^{-1}	s_{31}	s_{23}	s_{32}	s_{13}	6
7	s_{12}	d_3	d_3^{-1}	s_{21}	s_1	s_2	I	s_3	$\mathfrak{D}_3$	$\mathfrak{D}_0$	D_2	D_1	D_0	D_3	$\mathfrak{D}_1$	$\mathfrak{D}_2$	d_1^{-1}	s_{31}	s_{13}	d_1	d_2	s_{32}	s_{23}	d_2^{-1}	7
8	s_{21}	d_3^{-1}	d_3	s_{12}	s_2	s_1	s_3	I	D_2	D_1	$\mathfrak{D}_3$	$\mathfrak{D}_0$	$\mathfrak{D}_2$	$\mathfrak{D}_1$	D_3	D_0	s_{32}	d_2^{-1}	d_2	s_{23}	s_{13}	d_1^{-1}	d_1	s_{31}	8
9	d_1	d_1^{-1}	s_{23}	s_{32}	$\mathfrak{D}_2$	D_3	D_0	$\mathfrak{D}_1$	s_1	I	s_3	s_2	$\mathfrak{D}_0$	D_1	D_2	$\mathfrak{D}_3$	s_{31}	d_3	s_{21}	d_2^{-1}	d_3^{-1}	s_{13}	d_2	s_{12}	9
10	d_1^{-1}	d_1	s_{32}	s_{23}	$\mathfrak{D}_1$	D_0	D_3	$\mathfrak{D}_2$	I	s_1	s_2	s_3	D_2	$\mathfrak{D}_3$	$\mathfrak{D}_0$	D_1	d_2	s_{21}	d_3	s_{13}	s_{12}	d_2^{-1}	s_{31}	d_3^{-1}	10
11	s_{23}	s_{32}	d_1	d_1^{-1}	D_0	$\mathfrak{D}_1$	$\mathfrak{D}_2$	D_3	s_2	s_3	I	s_1	D_1	$\mathfrak{D}_0$	$\mathfrak{D}_3$	D_2	d_2^{-1}	d_3^{-1}	s_{12}	s_{31}	d_3	d_2	s_{13}	s_{21}	11
12	s_{32}	s_{23}	d_1^{-1}	d_1	D_3	$\mathfrak{D}_2$	$\mathfrak{D}_1$	D_0	s_3	s_2	s_1	I	$\mathfrak{D}_3$	D_2	D_1	$\mathfrak{D}_0$	s_{13}	s_{12}	d_3^{-1}	d_2	s_{21}	s_{31}	d_2^{-1}	d_3	12
13	d_2	s_{13}	d_2^{-1}	s_{31}	$\mathfrak{D}_0$	D_2	$\mathfrak{D}_3$	D_1	D_3	$\mathfrak{D}_1$	D_0	$\mathfrak{D}_2$	s_2	I	s_1	s_3	s_{12}	s_{23}	d_1	d_3	d_1^{-1}	d_3^{-1}	s_{21}	s_{32}	13
14	d_2^{-1}	s_{31}	d_2	s_{13}	$\mathfrak{D}_3$	D_1	$\mathfrak{D}_0$	D_2	$\mathfrak{D}_2$	D_0	$\mathfrak{D}_1$	D_3	I	s_2	s_3	s_1	d_3	d_1^{-1}	s_{32}	s_{12}	s_{23}	s_{21}	d_3^{-1}	d_1	14
15	s_{31}	d_2^{-1}	s_{13}	d_2	D_2	$\mathfrak{D}_0$	D_1	$\mathfrak{D}_3$	D_0	$\mathfrak{D}_2$	D_3	$\mathfrak{D}_1$	s_3	s_1	I	s_2	d_3^{-1}	s_{32}	d_1^{-1}	s_{21}	d_1	s_{12}	d_3	s_{23}	15
16	s_{13}	d_2	s_{31}	d_2^{-1}	D_1	$\mathfrak{D}_3$	D_2	$\mathfrak{D}_0$	$\mathfrak{D}_1$	D_3	$\mathfrak{D}_2$	D_0	s_1	s_3	s_2	I	s_{21}	d_1	s_{23}	d_3^{-1}	s_{32}	d_3	s_{12}	d_1^{-1}	16
17	$\mathfrak{D}_0$	$\mathfrak{D}_3$	D_1	D_2	s_{31}	d_2	d_2^{-1}	s_{13}	s_{12}	d_3	d_3^{-1}	s_{21}	s_{23}	d_1	d_1^{-1}	s_{32}	D_0	s_3	s_1	$\mathfrak{D}_2$	I	D_3	$\mathfrak{D}_1$	s_2	17
18	$\mathfrak{D}_1$	D_3	$\mathfrak{D}_2$	D_0	s_{23}	d_1^{-1}	s_{32}	d_1	d_2	s_{13}	d_2^{-1}	s_{31}	s_{21}	d_3	s_{12}	d_3^{-1}	s_2	D_1	$\mathfrak{D}_0$	s_3	$\mathfrak{D}_3$	I	s_1	D_2	18
19	$\mathfrak{D}_2$	D_0	$\mathfrak{D}_1$	D_3	s_{32}	d_1	s_{23}	d_1^{-1}	s_{31}	d_2^{-1}	s_{13}	d_2	d_3	s_{21}	d_3^{-1}	s_{12}	s_3	$\mathfrak{D}_3$	D_2	s_2	D_1	s_1	I	$\mathfrak{D}_0$	19
20	$\mathfrak{D}_3$	$\mathfrak{D}_0$	D_2	D_1	s_{13}	d_2^{-1}	d_2	s_{31}	d_3	s_{12}	s_{21}	d_3^{-1}	d_1^{-1}	s_{32}	s_{23}	d_1	$\mathfrak{D}_1$	s_1	s_3	D_3	s_2	$\mathfrak{D}_2$	D_0	I	20
21	D_0	$\mathfrak{D}_2$	D_3	$\mathfrak{D}_1$	d_1^{-1}	s_{23}	d_1	s_{32}	d_2^{-1}	s_{31}	d_2	s_{13}	d_3^{-1}	s_{12}	d_3	s_{21}	I	D_2	$\mathfrak{D}_3$	s_1	$\mathfrak{D}_0$	s_2	s_3	D_1	21
22	D_1	D_2	$\mathfrak{D}_0$	$\mathfrak{D}_3$	d_2^{-1}	s_{13}	s_{31}	d_2	s_{21}	d_3^{-1}	d_3	s_{12}	d_1	s_{23}	s_{32}	d_1^{-1}	$\mathfrak{D}_2$	I	s_2	D_0	s_3	$\mathfrak{D}_1$	D_3	s_1	22
23	D_2	D_1	$\mathfrak{D}_3$	$\mathfrak{D}_0$	d_2	s_{31}	s_{13}	d_2^{-1}	d_3^{-1}	s_{21}	s_{12}	d_3	s_{32}	d_1^{-1}	d_1	s_{23}	D_3	s_2	I	$\mathfrak{D}_1$	s_1	D_0	$\mathfrak{D}_2$	s_3	23
24	D_3	$\mathfrak{D}_1$	D_0	$\mathfrak{D}_2$	d_1	s_{32}	d_1^{-1}	s_{23}	s_{13}	d_2	s_{31}	d_2^{-1}	s_{12}	d_3^{-1}	s_{21}	d_3	s_1	$\mathfrak{D}_0$	D_1	I	D_2	s_3	s_2	$\mathfrak{D}_3$	24
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	

CHAPITRE III

Transformantes quaternaires.

§ 14. — Explications fondamentales.

$$t = \Sigma x_{mn} e_{mn}; \qquad m, n = 0, 1, 2, 3.$$

Nous intéressent surtout les transformantes qui ont même composition que les symboles de Hamilton i, j, k.

Il y a deux séries de telles transformantes :

$$\text{I)}\quad \mathfrak{J}_1 = e_{32} - e_{23} + e_{01} - e_{10}; \qquad \text{II)}\quad \mathfrak{J}'_1 = e_{32} - e_{23} - e_{01} + e_{10};$$

$$\mathfrak{J}_2 = e_{13} - e_{31} + e_{02} - e_{20}; \qquad \mathfrak{J}'_2 = e_{13} - e_{31} - e_{02} + e_{20};$$

$$\mathfrak{J}_3 = e_{21} - e_{12} + e_{03} - e_{30}; \qquad \mathfrak{J}'_3 = e_{21} - e_{12} - e_{03} + e_{30}.$$

$$\mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2 = \mathfrak{J}_3, \text{ etc.}; \qquad \mathfrak{J}'_1 \mathfrak{J}'_2 = \mathfrak{J}'_3, \text{ etc.}$$

$$\mathfrak{J}_n^2 = -(e_{00} + e_{11} + e_{22} + e_{33}) = -1; \qquad \text{de même} \quad \mathfrak{J}_n'^2 = -1, \qquad n = 1, 2, 3.$$

Quant à l'opérande $r = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, nous le pouvons interpréter de deux manières. Premièrement tous les quatre e_n sont des vecteurs. Alors $(r = \ldots)$ est un point dans l'espace à quatre dimensions et $(r = 0 = r_0)$ est le point d'origine.

Au contraire, si seulement une des quatre grandeurs e_n symbolise un point, r est un point de l'espace tridimensionnel.

Nous faisons la plus simple acception que e_0 soit le point d'origine et e_1, e_2, e_3 des vecteurs dans les directions des coordonnées.

De telle sorte un point de coordonnées $\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}$ est représenté par

$$m = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = x_0 e_0 + \rho.$$

§ 15. — La représentation des équations données par Olinde Rodrigues et Combebiac (2, pag. 8, 11) par les transformantes quaternaires.

Nous écrivons au lieu de x, y, z resp. x', y', z' : x_1, x_2, x_3, resp. x'_1, x'_2, x'_3 en ajoutant x_0 et x'_0.

Alors on a

$$m' = tm;$$

$$m = \Sigma x_n e_n, \qquad m' = \Sigma x'_n \,.\, e_n; \qquad n = 0, 1, 2, 3.$$

$$\begin{aligned} t = {} & 2(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0)e_{10} + (\alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2)e_{11} \\ & + 2(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_0\alpha_3)e_{12} + 2(\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2)e_{13} + 2(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 + \alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0)e_{20} \\ & + 2(\alpha_2\alpha_1 + \alpha_0\alpha_3)e_{21} + (\alpha_0^2 - \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2)e_{22} + 2(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_0\alpha_1)e_{23} \\ & + 2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0)e_{30} + 2(\alpha_3\alpha_1 - \alpha_0\alpha_2)e_{31} \\ & + 2(\alpha_3\alpha_2 + \alpha_0\alpha_1)e_{32} + (\alpha_0^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2)e_{33} + (\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)e_{00}. \end{aligned}$$

La transformante t représente un déplacement dont l'axe a pour coordonnées

$$\frac{p_{01}}{\alpha_1} : \frac{p_{02}}{\alpha_2} : \frac{p_{03}}{\alpha_3} : \frac{p_{23}}{\beta_1 + \dfrac{\alpha_0\beta_0\alpha_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}} : \frac{p_{31}}{\beta_2 + \dfrac{\alpha_0\beta_0\alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}} : \frac{p_{12}}{\beta_3 + \dfrac{\alpha_0\beta_0\alpha_3}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}},$$

dont l'angle de rotation 2ϑ et le glissement suivant l'axe 2η sont donnés par les relations

$$\operatorname{cotg} \vartheta = \frac{\alpha_0}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}, \qquad \eta = -\frac{\beta_0}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}.$$

En annulant les β_n, $n = 0, 1, 2, 3$, dans t on obtient les formules d'Olinde Rodrigues (**2**, pag. 8) transformées en transformantes.

Si λ, μ, ν sont les angles de l'axe de la rotation avec les axes de coordonnées et 2ϑ l'angle de la rotation, on a les relations suivantes :

$$\cos\lambda = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}, \qquad \cos\mu = \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha^2}}, \qquad \cos\nu = \frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha^2}},$$

$$\cos\vartheta = \frac{\alpha_0}{\sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_2^3}}.$$

§ 16. — Réflexions.

I. — *Un point réfléchissant* avec l'équation

$$m = e_0 + ae_1 + be_2 + ce_3$$

donne la relation :

$$\boxed{{}^s m = 2ae_{10} + 2be_{20} + 2ce_{30} + e_{00} - e_{11} - e_{22} - e_{33}.}$$

Note. — « s » dans « ${}^{s}m$ » est un index supérieur du côté gauche emprunté du nom latin *speculum*; nous userons de tels indices pour certaines transformantes.

C'est par voie d'intuition que nous avons obtenu la relation ci-dessus.

Conclusions :

$$
\begin{aligned}
{}^{s}m_2 \,.\, {}^{s}m_1 &= (2a_2e_{10} + \ldots)(2a_1e_{10} + \ldots) \\
&= 2(a_2 - a_1)e_{10} + 2(b_2 - b_1)e_{20} + 2(c_2 - c_1)e_{30} + 1\,;
\end{aligned}
$$

$$1 = e_{00} + e_{11} + e_{22} + e_{33}\,.$$

De plus le point d'origine comme le point réfléchissant est

$${}^{s}m_0 = e_{00} - e_{11} - e_{22} - e_{33}\,,$$

puisque $a = b = c = 0$.

II. — *La droite réfléchissante.*

Des formules (**2**, pag. 11, 13) suit pour $\eta = 0$, $\vartheta = 90°$, $2\vartheta = 180°$, comme $\operatorname{cotg} \vartheta = 0$, resp. $\cos \vartheta = 0$:

$$\alpha_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \beta_0 = 0\,.$$

Si on accepte *a priori*

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1\,,$$

on a $x'_0 = 1$, de même $x_0 = 1$ et, si « d » a des coordonnées linéaires

$$\frac{p_{01}}{\alpha_1} : \frac{p_{02}}{\alpha_2} : \frac{p_{03}}{\alpha_3} : \frac{p_{23}}{\beta_1} : \frac{p_{31}}{\beta_2} : \frac{p_{12}}{\beta_3}\,,$$

on a

$$m' = {}^{s}d \,.\, m\,,$$

où

$$m = e_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3\,, \qquad m' = e_0 + x'_1e_1 + x'_2e_2 + x'_3e_3\,,$$

et

$$
\begin{aligned}
&{}^s d = \Sigma a_{mn} e_{mn}, \qquad m, n = 0, 1, 2, 3; \\
&\text{où} \\
&\quad a_{11} = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2, \qquad a_{12} = 2\alpha_1\alpha_2, \qquad a_{13} = 2\alpha_{13}, \\
&\qquad a_{10} = 2(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2), \\
&\quad a_{21} = 2\alpha_2\alpha_1, \qquad a_{22} = -\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2, \qquad a_{23} = 2\alpha_2\alpha_3, \\
&\qquad a_{20} = 2(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3), \\
&\quad a_{31} = 2\alpha_3\alpha_1, \qquad a_{32} = 2\alpha_3\alpha_2, \qquad a_{33} = -\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2, \\
&\qquad a_{30} = 2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1), \qquad a_{00} = 1, \\
&\qquad a_{01} = a_{02} = a_{03} = 0.
\end{aligned}
$$

Pour d_0, droite passant par le point origine, il vient $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ et si on considère $\cos\lambda = \alpha_1$, $\cos\mu = \alpha_2$, $\cos\nu = \alpha_3$, avec $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$, on trouve :

$$
\begin{aligned}
{}^s d_0 = {} & (\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2) e_{11} + 2\alpha_1\alpha_2 e_{12} + 2\alpha_1\alpha_3 e_{13} \\
& + 2\alpha_2\alpha_1 e_{21} + (-\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2) e_{22} + 2\alpha_2\alpha_3 e_{23} \\
& + 2\alpha_3\alpha_1 e_{31} + 2\alpha_3\alpha_2 e_{32} + (-\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2) e_{33} + e_{00}.
\end{aligned}
$$

III. — *Le plan réfléchissant.*

Il suffit d'accepter un point m sur une droite d'origine dans l'éloignement

$$
ae_1 + be_2 + ce_3; \qquad a = h\alpha_1, \qquad b = h\alpha_2, \qquad c = h\alpha_3;
$$

car alors

$$
{}^s p = {}^s d_0 \,.\, {}^s m = {}^s m \,.\, {}^s d_0 .
$$

D est un plan perpendiculaire à la droite d_0 et passant par le point m.

$$
\begin{aligned}
{}^s m \,.\, {}^s d_0 = {}^s p = {} & 2ae_{10} + 2be_{20} + 2ce_{30} + e_{00} \\
& - (\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2) e_{11} - 2\alpha_2\alpha_1 e_{21} - 2\alpha_3\alpha_1 e_{31} \\
& - 2\alpha_1\alpha_2 e_{12} - (-\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2) e_{22} - 2\alpha_3\alpha_2 e_{32} \\
& - 2\alpha_1\alpha_3 e_{13} - 2\alpha_2\alpha_3 e_{23} - (-\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2) e_{33}.
\end{aligned}
$$

${}^s d_0 . {}^s m$ donne le même résultat; car le coefficient a_{10} de $\Sigma a_{mn} e_{mn}$, qui est égal à

$$
2a(\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2) + 2b \,.\, 2\alpha_1\alpha_2 + 2c \,.\, 2\alpha_1\alpha_3
$$

devient

$$2h(\alpha_1^3 - \alpha_1\alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_3^2 + 2\alpha_1\alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_3^2)$$
$$= 2h(\alpha_1^3 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_3^2) = 2h\alpha_1(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) = 2h\alpha_1 = 2a.$$

Pareillement a_{20} et a_{30}.

La multiplication des facteurs ${}^sm$, ${}^sd$, ${}^sp$, ... en quantité arbitraire (les opérations sont associatives) permet de former divers dynames; voir **6**.

Par exemple ${}^sm.{}^sp$ ou ${}^sp.{}^sm$, en allemand « Quirl » (**6**, pag. 59, 60, 63, 165) représente un mouvement rotatoire de 180° ascendant. Deux droites parallèles ou deux plans parallèles ou deux points expriment un mouvement translatoire. Deux plans arbitraires effectuent une rotation autour de la ligne d'intersection. Etc.

Note. — La multiplication des $(tt_1 .. t_n)$ n'a pas besoin d'être réalisée, puisque

$$(tt_1 \ldots t_n)m = t[t_1 \ldots (t_n m)].$$

§ 16 a). — *Suite.*

Si le point réfléchissant ${}^sm$ se trouve dans le plan ${}^sp$, il est connu que ${}^sm.{}^sp = {}^sp.{}^sm = {}^sd$, ${}^sd \perp {}^sp$ passant par ${}^sm$. Si trois plans sont mutuellement perpendiculaires : $p_1 \perp p_2 \perp p_3 \perp p_1$, alors les lignes d'intersection le sont aussi :

$$d_1 \perp d_2 \perp d_3 \perp d_1 \qquad \text{et} \qquad d_1 \perp p_1,\ d_2 \perp p_2,\ d_3 \perp p_3.$$

« ${}^sm$ » est le point d'intersection.

Alors il y a

$${}^sm\,.\,{}^sd_n = {}^sd_n\,.\,{}^sm = {}^sp_n,$$
$${}^sm\,.\,{}^sp_n = {}^sp_n\,.\,{}^sm = {}^sd_n, \qquad {}^sp_n\,.\,{}^sd_n = {}^sd_n\,.\,{}^sp_n = {}^sm; \qquad n = 1, 2, 3.$$

Cela donne un groupe d'Abel de 8 membres; car

$${}^sm^2 = {}^sd_n^2 = {}^sp^2 = 1.$$

Prenant le cas le plus simple : « m » est le point d'origine, d_n les axes de coordonnées et p_n les plans de coordonnées, alors il suit des équations d'Olinde Rodrigues ou directement de l'effet de réflexion sur e_0, e_1, e_2, e_3 :

$${}^sm = e_{00} - e_{11} - e_{22} - e_{33},$$
$${}^sp_1 = e_{00} - e_{11} + e_{22} + e_{33}, \qquad {}^sd_1 = e_{00} + e_{11} - e_{22} - e_{33},$$
$${}^sp_2 = e_{00} + e_{11} - e_{22} + e_{33}, \qquad {}^sd_2 = e_{00} - e_{11} + e_{22} - e_{33},$$
$${}^sp_3 = e_{00} + e_{11} + e_{22} - e_{33}, \qquad {}^sd_3 = e_{00} - e_{11} - e_{22} + e_{33}.$$

§ 17. — Les transformantes isomorphes avec ses opérandes.

Jusqu'ici il n'y avait que la question de l'addition géométrique des opérandes $\Sigma x_n e_n$ et de la multiplication des mêmes avec les transformantes; sur la règle de composition des opérandes eux-mêmes, $e_m e_n$, il n'y avait pas d'accord fait. Ils peuvent suivre de différentes règles, peut-être les règles de Grassmann ou les règles de Hamilton. Dans le dernier cas nous écrivons au lieu de « e_n » : « h_n » — « h » emprunt au nom « h(amilton) » — ou aussi « λ_n ».

Et h_0, h_1, h_2, h_3 correspondent successivement à $1, i, j, k$. Cependant il faut remarquer que h_0 peut être suppléé par l'unité « 1 » seulement en conjonction avec h_n et pas du tout en conjonction avec les transformantes h_{mn}, où

$$\text{« } h_{00} + h_{11} + h_{22} + h_{33} = 1 \text{ » et « } h_{n0} . h_0 = h_n \text{ ».}$$

Nous désignons par le symbole « $^{\circ}h_m$ » les transformantes isomorphes, si elles se trouvent devant « h_n » : « transformantes prépositives »; et par « $^*h$ », si elles se trouvent après « h_n » : « transformantes postpositives ».

Pour l'inversion des indices W.$^{\circ}h_m$ resp. W.$^*h_m$ nous écrivons brièvement « $\underline{\circ}h_m$ » resp. « $\underline{*}h_m$ ».

Vue d'ensemble sur les transformantes isomorphes prépositives et postpositives :

$$1 = h_{00} + h_{11} + h_{22} + h_{33} = {}^{\circ}h_0 = {}^*h_0,$$

$$\begin{aligned}
{}^{\circ}h_1 &= h_{32} - h_{23} + h_{10} - h_{01}, & {}^*h_1 &= h_{32} - h_{23} - h_{10} + h_{01}.\\
{}^{\circ}h_2 &= h_{13} - h_{31} + h_{20} - h_{02}, & {}^*h_2 &= h_{13} - h_{31} - h_{20} + h_{02}.\\
{}^{\circ}h_3 &= h_{21} - h_{12} + h_{30} - h_{03}; & {}^*h_3 &= h_{21} - h_{12} - h_{30} + h_{03}.
\end{aligned}$$

On voit que $^{\circ}h_n$ sont identiques avec $\mathfrak{J}'_n$ et que $^*h_n$ avec $\mathfrak{J}_n$, § 14.

Par le calcul on peut confirmer les règles suivantes :

1) $h_m h_n = {}^{\circ}h_m . h_n = h_m . {}^*h_n = \underline{*}h_n . h_m$;

2) ${}^{\circ}h_m . {}^*h_n = {}^*h_n . {}^{\circ}h_m$, $\quad {}^{\circ}(h_m h_n) = {}^{\circ}h_m . {}^{\circ}h_n$, $\quad {}^*(h_m h_n) = {}^*h_m . {}^*h_n$;

3) $({}^{\circ}h_m . h_n) . {}^*h_s = {}^{\circ}h_m(h_n . {}^*h_s) = ({}^{\circ}h_m . \underline{*}h_s) . h_n$.

Par contre chez les transformantes non-isomorphes, en général $(te_m)t_1 \neq t(e_m t_1)$.

4) $({}^*h_n)^{-1} = \underline{*}h_n$ et $({}^{\circ}h_n)^{-1} = \underline{\circ}h_n$.

Pour cela

$$^{\circ}h_1 . {}^{*}h_1 = {}^{s}d_1 ,$$
$$^{\circ}h_2 . {}^{*}h_2 = {}^{s}d_2 ,$$
$$^{\circ}h_3 . {}^{*}h_3 = {}^{s}d_3 \qquad \text{(voir § 16 a);}$$

car « $({}^{\circ}h_1 . {}^{*}h_1) . h_n$ » provient de « $^{\circ}h . h_n . ({}^{*}h_1)^{-1}$ ».

Nous sommes arrivés de deux manières vers les transformantes isomorphes, premièrement nous basant sur la même composition et deuxièmement par conclusion de l'effet des transformantes sur les opérandes. Alors, nous arrivons vers la troisième méthode : développement des transformantes du carré de Cayley pour le groupe h_n, $n = 0, 1, 2, 3$; proprement dit du premier quart de carré, comme la moitié des membres se distingue de l'autre moitié seulement par le signe.

	h_0, 1	h_1, i	h_2, j	h_3, k
h_0, 1	h_0	h_1	h_2	h_3
h_1, i	h_1	$-h_0$	h_3	$-h_2$
h_2, j	h_2	$-h_3$	$-h_0$	h_1
h_3, k	h_3	h_2	$-h_1$	$-h_0$

Nous désignons les opérations suivantes avec un point-virgule :

$$h_m ; h_n = h_{mn} .$$

Alors, on a, d'après cela :

$$^{\circ}h_s = \Sigma' h_m ; h_n = \Sigma' h_{mn} = \sum_n h_s h_n ; h_n ,$$

où $s =$ index dans la colonne gauche extérieure de la rangée,

$m =$ indices des carrés intérieurs de la rangée s,

$n =$ indices dans la rangée supérieure, correspondant avec m de sorte que « $h_s h_n = h_m$ ».

Avec cela il faut avoir égard aux signes.

On trouve les transformantes postpositives de la même manière, seulement il faut échanger la rangée avec la colonne; à savoir :

$$*h_s = \Sigma'' h_m ; h_n = \Sigma'' h_{mn} = \sum_m h_m ; h_m h_s ,$$

où $s =$ index dans la rangée supérieure de la colonne,

$m =$ indices dans la colonne gauche extérieure,

$n =$ indices des carrés intérieurs de la colonne s, de manière que $h_m h_s = h_n$.

Cette méthode est applicable à tous les autres groupes.

La composition des grandeurs $^\circ h_m$ et $^* h_n$ fait résulter un groupe de 32 membres du type : $32 = 1(1) + 19(2) + 12(4)$ avec un sous-groupe des opérateurs :

$$\pm(1, \quad {}^\circ h_1, \quad {}^* h_2, \quad {}^\circ h_1 . {}^* h_2, \quad {}^\circ h_2 . {}^* h_1, \quad {}^\circ h_2 . {}^* h_3, \quad {}^\circ h_3 . {}^* h_1, \quad {}^\circ h_3 . {}^* h_3).$$

§ 18. — Les transformantes de degrés supérieurs.

Du groupe de 32 membres ci-dessus mentionné on peut déduire de la même manière les « transformantes de transformantes » ou les transformantes du deuxième degré. Pour ce but nous écrivons les opérateurs $^\circ h_n . {}^* h_n$, dans cette série, $= h_{(mn)}$, et $^\circ h_m = {}^\circ h_m . {}^* h_0 = h_{(m0)}$, $^* h_n = {}^\circ h_0 {}^* h_n = h_{(0n)}$. Un produit $({}^\circ h_m . {}^* h_n) \cdot ({}^\circ h_r . {}^* h_s)$ donne, comme « $^* h_n$ » et « $^\circ h_r$ » sont commutatifs, $= {}^\circ h_p . {}^* h_q = h_{(pq)}$. Donc la transformante cherchée a la forme : $^\circ h_{(mn)} = \Sigma' h_{(pq)(rs)}$, polynome de 16 membres, etc.

D'autre part on peut dériver $^\circ(h_{mn})$ resp. $^*(h_{mn})$ directement du carré

	h_{00}	h_{01}	h_{02}	h_{03}	h_{10}	h_{11}	...
...	...	...	...	...	...	...	...
h_{10}	h_{10}	h_{11}	h_{12}	h_{13}	0	0	...
...	...	...	...	...	...	...	...

Par exemple :

$$^\circ(h_{10}) = h_{10,00} + h_{11,01} + h_{12,02} + h_{13,03} ,$$

un polynome de 4 membres.

Ainsi il faut distinguer $^\circ h_{(mn)}$ et $^* h_{mn}$, resp. $^* h_{(mn)}$ et $^* h_{mn}$; en plus : $^\circ(h_{mn})$ resp. $^*(h_{mn})$.

Cependant, comme

$$h_{(10)} = {}^{0}h_{1} = h_{32} - h_{23} + h_{10} - h_{01}, \qquad {}^{0}h_{(10)} = {}^{00}h_{1}$$

peut être représentée aussi par

$${}^{0}h_{32} - {}^{0}h_{23} + {}^{0}h_{10} - {}^{0}h_{01}.$$

De même ${}^{*0}h_{n}$, ${}^{0*}h_{n}$ et ${}^{**}h_{n}$, en remplaçant h dans les formules pour ${}^{0}h_{m}$ resp. ${}^{*}h_{m}$ par ${}^{0}h$ resp. ${}^{*}h$.

Donc ${}^{0}h_{mn} = {}^{0}h_{m};{}^{0}h_{n}$, etc. (voir § 22 a).

§ 19. — Les transformantes électives.

Si on a un quaternion

$$q = a_0 h_0 + a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3,$$

« h_{00} » exercée sur le quaternion a même effet que le symbole de Hamilton « S » (Scalaire) :

$$h_{00} q \equiv Sq = a_0 h_0 .$$

De la même façon « $h_{11} + h_{22} + h_{33}$ » est identique avec « V » (Vecteur).

De plus

$$\mathrm{K}\ (\text{Conjuguée}) \equiv h_{00} - h_{11} - h_{22} - h_{33}$$

et

$$\mathrm{K}^2 \equiv h_{00} + h_{11} + h_{22} + h_{33} = 1 .$$

On peut vérifier de suite :

$$SS = S, \qquad VV = V, \qquad KS = SK = S, \qquad KV = VK = -V,$$
$$SV = VS = 0. \qquad \text{(1, pag. 43.)}$$

CHAPITRE IV

Les transformantes biquaternaires et quadriquaternaires. Les vecteurs polaires et axiaux. My-ny-groupe et my-lambda-groupe. Les transformantes isomorphes dérivées de ces deux groupes.

§ 20. — Les vecteurs polaires et axiaux.

Les discussions jusqu'à présent n'ont donné aucun motif de distinguer les deux vecteurs ; à présent nous voulons désigner les premiers par ν_1, ν_2, ν_3 et les derniers par λ_1, λ_2, λ_3, tous deux dans les directions coordonnées avec le tenseur 1 ; alors ν_0 resp. λ_0 sont les opérateurs de premier ordre.

Pour leur composition, il faut mettre en vigueur la règle suivante (**7**, pag. 23) :

« Le produit vectoriel de deux vecteurs polaires, ainsi que de deux vecteurs axiaux, est un vecteur axial.

« Le produit vectoriel d'un vecteur polaire et d'un vecteur axial est un vecteur polaire. »

Donc λ_n se rapporte à ν_n comme « + 1 » à « — 1 » ou comme un nombre réel à un nombre imaginaire.

D'après cela, on a :

$$\begin{array}{lll}
\lambda_1\lambda_2 = \lambda_3 = -\lambda_2\lambda_1, & \nu_1\nu_2 = \lambda_3, & \lambda_1^2 = -1, \\
\lambda_2\lambda_3 = \lambda_1 = -\lambda_3\lambda_2, & \nu_2\nu_3 = \lambda_1, & \lambda_2^2 = -1, \\
\lambda_3\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_1\lambda_3; & \nu_3\nu_1 = \lambda_2; & \lambda_3^2 = -1.
\end{array}$$

De plus (**7**, pag. 23) :

« Par la multiplication avec un pseudoscalaire, un vecteur axial devient un vecteur polaire, et vice-versa un vecteur polaire devient un vecteur axial. »

Ce « pseudoscalaire » sera désigné par « l » ; nous montrerons que « l » n'est aucun scalaire présumé, non pas un pseudoscalaire, mais un véritable opérateur complexe du deuxième ordre, qui a, avec les scalaires, quelques propriétés communes. (« l » est commutatif avec les deux vecteurs et sa transformante isomorphe a une constitution similaire de celle de la transformante $t = 1$.)

On a :

$$l\nu_1 = \lambda_1, \qquad l\lambda_1 = \nu_1,$$
$$l\nu_2 = \lambda_2, \qquad l\lambda_2 = \nu_2,$$
$$l\nu_3 = \lambda_3; \qquad l\lambda_3 = \nu_3.$$

De cela :

1) $l.l.\lambda_1 = l\nu_1 = \lambda_1, \qquad \underline{l^2 = 1.}$

2) $\nu_1\nu_2 = l\lambda_1.l\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_1\lambda_2 = l(\lambda_1 l)\lambda_2 = l(l\lambda_1)\lambda_2.$

Ainsi : $\underline{\lambda_1 l = l\lambda_1;}$ en général : $\underline{\lambda_n l = l\lambda_n, \quad n = 1, 2, 3.}$

3) $l\lambda_1.l\lambda_1 = \underline{\nu_1\nu_1 = -1,}$ car $l\lambda_1.l\lambda_2 = ll\lambda_1\lambda_2.$

4) $l\lambda_2.l\lambda_1 = \nu_2\nu_1 = ll\lambda_2\lambda_1 = -\lambda_3 = -\nu_1\nu_2, \qquad \underline{\nu_2\nu_1 = -\nu_1\nu_2.}$

Note. — « $\lambda_n^2 = -1$ d'après Hamilton. Si Abraham (**7**, pag. 14) écrit le produit scalaire $\lambda_n^2 = +1$, alors on devrait écrire strictement $S_A.\lambda_n^2 = +1$, tandis que chez Hamilton $S_H.\lambda_n^2 = -1$, ce qui est naturellement permis. Alors $S_A \equiv -\lambda_{00}$, et par contre $S_H \equiv +\lambda_{00} = -S_A$. »

Avec cela, la composition des opérateurs $\pm(1, l, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$ est déterminée et donne un groupe de seize membres, du type $16 = 1(1) + 3(2) + 12(4)$.

Il faut faire attention que λ_n, $n = 0, 1, 2, 3$, forme un groupe par soi-même, tandis que avec $\pm\nu_n$ ce n'est pas le cas; $\pm\nu$ forme un groupe seulement en connexion avec $\pm\lambda_n$.

Les transformantes isomorphes correspondantes contiennent huit indices différents et peuvent être désignées comme « biquaternaires ».

Mais nous ne nous y arrêtons pas, parce que nous visons les transformantes quadriquaternaires.

§ 21. — My-ny-groupe et my-lambda-groupe.

Si nous ajoutons à $\pm\nu_m$, $\pm\lambda_n$ le point d'origine $\pm\mu \equiv \pm\nu_4$, nous dédoublons le nombre des opérateurs.

Nous sommes d'accord avec Grassmann, où

$$e_0(1 + |)e_0 = e_0e_0 + e_0|e_0 = 0 + 1 = 1,$$

aussi bien qu'avec Combebiac, où $\mu^2 = 1$, si nous mettons $\mu^2 \equiv \nu_4^2 = 1$.

Les autres règles de composition suivent d'une comparaison préalable avec les symboles de Grassmann.

Soit de nouveau e_0 le point origine, par contre e_1, e_2, e_3 doivent être les points terminaux des vecteurs, désignés plus haut (§ 14) avec ces lettres. Dès à présent, les derniers sont ε_1, ε_2, ε_3 et $\varepsilon_0 \equiv e_0$.

Alors

$$\varepsilon_1 = e_1 - e_0,$$
$$\varepsilon_2 = e_2 - e_0,$$
$$\varepsilon_3 = e_3 - e_0.$$

N. B. — Grassmann désigne la direction même de ε_n avec « $e_0 - e_n$ », ce qui est une question de convention non essentielle.

Il y a donc :

$$\nu_1 \equiv \varepsilon_1 = -e_0 + e_1,$$
$$\nu_2 \equiv \varepsilon_2 = -e_0 + e_2,$$
$$\nu_3 \equiv \varepsilon_3 = -e_0 + e_3.$$

On peut alors mettre les équations

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 \equiv (e_1 - e_0)(e_2 - e_0) = e_1e_2 - e_0e_2 - e_1e_0 + e_0e_0 = e_0e_1 + e_1e_2 + e_2e_0 \ddagger (e_3 - e_0)$$

seulement à côté de $\nu_1\nu_2 = \lambda_3 \ddagger \nu_3$.

Nous usons des expressions synonymes « vecteur polaire », « différence de deux points », « points de l'infini » pour les symboles ν_1, ν_2, ν_3. Un vecteur polaire permet un déplacement parallèle avec lui-même dans tout l'espace tridimensionel.

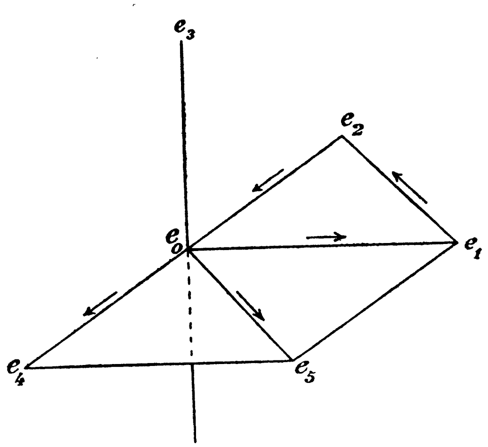

FIG. 4.

Quant à λ_n avec $n = 1, 2, 3$, λ_3 par exemple, est $= e_0e_1 + e_1e_2 + e_2e_0$, soit une somme de segments des trois droites, qui forment une figure fermée, un triangle parcouru dans le sens positif, vu de e_3.

Voir (*fig.* 4).

Les segments des droites fixes peuvent avoir un déplacement translatoire seulement sur leurs droites. Ils permettent une conversion en un parallélogramme

$$= e_1e_2 + e_0e_5 = e_1e_2 - e_5e_0,$$

somme de deux segments antiparallèles ou différence de deux segments parallèles, ayant des longueurs égales.

Car $e_2 e_0 = e_0 e_1$ et, suivant la règle de l'addition géométrique, $e_0 e_1 + e_0 e_1 = e_0 e_5$. Ce parallélogramme peut être converti dans un autre parallélogramme dans son plan ou dans un plan parallèle sous la seule condition que son tenseur, égal à la double aire du triangle $e_0 e_1 e_2$, reste inaltéré.

Ultérieurement ces parallélogrammes peuvent être identifiés avec l'unique droite fermée dans leurs plans, avec la ligne d'intersection des plans parallèles aux parallélogrammes, c'est-à-dire avec la droite de l'infini.

Les symboles de Hamilton i, j, k correspondent, comme le démontre leur composition, exactement à ces parallélogrammes; ils sont ainsi exclusivement vecteurs axiaux.

Quand Hamilton se sert à leur place des droites perpendiculaires aux parallélogrammes, avec la longueur égale à l'aire de ces derniers, ils sont les vecteurs axiaux *auxiliaires*, pour certaines constructions très utilisables, mais enfin ils doivent être convertis de nouveau en parallélogrammes.

Nous usons des expressions vecteur axial, parallélogramme, différence de deux segments, droite de l'infini.

Les autres règles de composition s'obtiennent facilement à partir des considérations suivantes :

$$1)\quad \mu\nu_1 = e_0(e_1 - e_0) = e_0 e_1 = \delta_1,$$

un segment, une partie de droite fixe, mobile seulement sur sa droite portante.

En plus

$$\nu_1\mu = (e_1 - e_0)e_0 = e_1 e_0 = -e_0 e_1;$$

donc

$$\underline{\mu\nu_1 = -\nu_1\mu.}$$

Pareillement pour les autres indices.

$$2)\quad \mu\lambda_3 = e_0(e_0 e_1 + e_1 e_2 + e_2 e_0) = e_0 e_1 e_2,$$

partie d'un plan fixe $= \pi_3$; mobile dans son plan portant.

$$\lambda_3\mu = (e_0 e_1 + e_1 e_2 + e_2 e_0)e_0 = e_1 e_2 e_0 = e_0 e_1 e_2;$$

c'est donc

$$\underline{\mu\lambda_3 = \lambda_3\mu,}$$

comme chez Combebiac.

D'un échange circulaire des indices 1, 2, 3 on trouve les équations correspondantes.

3) Il reste seulement « μl » à discuter. La signification géométrique de « l » résulte de la réflexion suivante :

$$l\lambda_3\lambda_3 = \nu_3\lambda_3 = -l = (e_3 - e_0)(e_0e_1 + e_1e_2 + e_2e_0) = e_3e_0e_1 + e_3e_1e_2 + e_3e_2e_0 - e_0e_1e_2 .$$

$$l = e_0e_1e_2 + e_0e_2e_3 + e_0e_3e_1 + e_3e_2e_1 . \qquad \text{Voir } (\textit{fig. } 5).$$

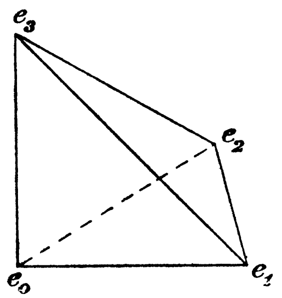

Fig. 5.

D'après cela « l » représente la superficie du tétraèdre $e_0e_1e_2e_3$. La figure est déplaçable, translative et rotatoire dans l'espace entier et égalisable avec le plan de l'infini. Car le trinome $e_0e_2e_3 + e_0e_3e_1 + e_3e_2e_1$ peut être transformé dans un plan parallèle à $e_0e_1e_2$ de même aire et de position contraire; « l » est donc la différence de deux plans fixes parallèles ayant la même aire et peut ainsi être égalisée avec le plan de l'infini, l'unique plan fermé comme la superficie du tétraèdre.

Les deux plans parallèles délimitent un cube du sextuple ($3! = 6$) volume du tétraèdre $e_0e_1e_2e_3$. Ce volume est le tenseur de la figure.

On a finalement

$$\underline{\mu l} = -\mu.\nu_1\lambda_1 = +\nu_1\lambda_1.\mu = \underline{-l\mu} = -\Psi .$$

On obtient le même résultat par le calcul de Grassmann :

$$l\mu = (e_0e_1e_2 + e_0e_2e_3 + e_0e_3e_1 + e_3e_2e_1)e_0 = e_3e_2e_1e_0 ;$$

et

$$\mu l = e_0(e_0e_1e_2 + e_0e_2e_3 + e_0e_3e_1 + e_3e_2e_1) = e_0e_3e_2e_1 = -e_3e_2e_1e_0 .$$

Alors $l\mu = \Psi$ est une grandeur du quatrième ordre et à trois dimensions, un solide géométrique.

Nous ne mettons pas comme Grassmann $e_0e_1e_2e_3$ directement égal à l'unité 1, mais $= \Psi$. Seulement $\Psi^4 = 1$.

A présent on peut construire un carré de Cayley pour ce groupe de 32 membres. Il suffit naturellement pour cela de considérer seulement le premier quart du carré. Voir la table I.

On peut désigner les opérateurs du groupe mentionné par une seule lettre et avec 16 indices différents, par exemple $\pm t_n$, $n = 0, 1, \ldots 15$.

D'une autre manière on peut dénoter ces opérateurs par deux lettres, chacune avec 4 indices, par exemple $\mu_m\nu_n$ ou $\mu_m\lambda_n$; $m, n = 0, 1, 2, 3$.

Nous nous servons de cette dernière méthode pour éviter les indices chiffrés doublement.

Par l'analogie des mots composés nous appelons μ_m *opérateur déterminatif* et ν_n, resp. λ_n, *opérateur primitif.*

TABLE I

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
		1	ν_1	ν_2	ν_3	μ	δ_1	δ_2	δ_3	Ψ	$-\pi_1$	$-\pi_2$	$-\pi_3$	l	λ_1	λ_2	λ_3	
1	1	1	ν_1	ν_2	ν_3	μ	δ_1	δ_2	δ_3	Ψ	$-\pi_1$	$-\pi_2$	$-\pi_3$	l	λ_1	λ_2	λ_3	1
2	ν_1	ν_1	-1	λ_3	$-\lambda_2$	$-\delta_1$	μ	$-\pi_3$	π_2	π_1	Ψ	δ_3	$-\delta_2$	λ_1	$-l$	ν_3	$-\nu_2$	2
3	ν_2	ν_2	$-\lambda_3$	-1	λ_1	$-\delta_2$	π_3	μ	$-\pi_1$	π_2	$-\delta_3$	Ψ	δ_1	λ_2	$-\nu_3$	$-l$	ν_1	3
4	ν_3	ν_3	λ_2	$-\lambda_1$	-1	$-\delta_3$	$-\pi_2$	π_1	μ	π_3	δ_2	$-\delta_1$	Ψ	λ_3	ν_2	$-\nu_1$	$-l$	4
5	μ	μ	δ_1	δ_2	δ_3	1	ν_1	ν_2	ν_3	$-l$	$-\lambda_1$	$-\lambda_2$	$-\lambda_3$	$-\Psi$	π_1	π_2	π_3	5
6	δ_1	δ_1	$-\mu$	π_3	$-\pi_2$	$-\nu_1$	1	$-\lambda_3$	λ_2	λ_1	$-l$	ν_3	$-\nu_2$	π_1	Ψ	δ_3	$-\delta_2$	6
7	δ_2	δ_2	$-\pi_3$	$-\mu$	π_1	$-\nu_2$	λ_3	1	$-\lambda_1$	λ_2	$-\nu_3$	$-l$	ν_1	π_2	$-\delta_3$	Ψ	δ_1	7
8	δ_3	δ_3	π_2	$-\pi_1$	$-\mu$	$-\nu_3$	$-\lambda_2$	λ_1	1	λ_3	ν_2	$-\nu_1$	$-l$	π_3	δ_2	$-\delta_1$	Ψ	8
9	Ψ	Ψ	$-\pi_1$	$-\pi_2$	$-\pi_3$	l	λ_1	λ_2	λ_3	-1	$-\nu_1$	$-\nu_2$	$-\nu_3$	$-\mu$	$-\delta_1$	$-\delta_2$	$-\delta_3$	9
10	$-\pi_1$	$-\pi_1$	$-\Psi$	$-\delta_3$	δ_2	$-\lambda_1$	l	$-\nu_3$	ν_2	ν_1	-1	λ_3	$-\lambda_2$	$-\delta_1$	μ	$-\pi_3$	π_2	10
11	$-\pi_2$	$-\pi_2$	δ_3	$-\Psi$	$-\delta_1$	$-\lambda_2$	ν_3	l	$-\nu_1$	ν_2	$-\lambda_3$	-1	λ_1	$-\delta_2$	π_3	μ	$-\pi_1$	11
12	$-\pi_3$	$-\pi_3$	$-\delta_2$	δ_1	$-\Psi$	$-\lambda_3$	$-\nu_2$	ν_1	l	ν_3	λ_2	$-\lambda_1$	-1	$-\delta_3$	$-\pi_2$	π_1	μ	12
13	l	l	λ_1	λ_2	λ_3	Ψ	$-\pi_1$	$-\pi_2$	$-\pi_3$	μ	δ_1	δ_2	δ_3	1	ν_1	ν_2	ν_3	13
14	λ_1	λ_1	$-l$	ν_3	$-\nu_2$	π_1	Ψ	δ_3	$-\delta_2$	$-\delta_1$	μ	$-\pi_3$	π_2	ν_1	-1	λ_3	$-\lambda_2$	14
15	λ_2	λ_2	$-\nu_3$	$-l$	ν_1	π_2	$-\delta_3$	Ψ	δ_1	$-\delta_2$	π_3	μ	$-\pi_1$	ν_2	$-\lambda_3$	-1	λ_1	15
16	λ_3	λ_3	ν_2	$-\nu_1$	$-l$	π_3	δ_2	$-\delta_1$	Ψ	$-\delta_3$	$-\pi_2$	π_1	μ	ν_3	λ_2	$-\lambda_1$	-1	16
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	

Type : $32 = 1(1) + 11(2) + 20(4)$.

TABLE II

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
	$\mu_m\nu_n$	$\mu_0\nu_0$	$\mu_0\nu_1$	$\mu_0\nu_2$	$\mu_0\nu_3$	$\mu_1\nu_0$	$\mu_1\nu_1$	$\mu_1\nu_2$	$\mu_1\nu_3$	$\mu_2\nu_0$	$\mu_2\nu_1$	$\mu_2\nu_2$	$\mu_2\nu_3$	$\mu_3\nu_0$	$\mu_3\nu_1$	$\mu_3\nu_2$	$\mu_3\nu_3$	
1	$\mu_0\nu_0$	00	01	02	03	10	11	12	13	20	21	22	23	30	31	32	33	1
2	$\mu_0\nu_1$	01	— 00	33	— 32	— 11	10	23	— 22	— 21	20	13	— 12	31	— 30	03	— 02	2
3	$\mu_0\nu_2$	02	— 33	— 00	31	— 12	— 23	10	21	— 22	— 13	20	11	32	— 03	— 30	01	3
4	$\mu_0\nu_3$	03	32	— 31	— 00	— 13	22	— 21	10	— 23	12	— 11	20	33	02	— 01	— 30	4
5	$\mu_1\nu_0$	10	11	12	13	00	01	02	03	— 30	— 31	— 32	— 33	— 20	— 21	— 22	— 23	5
6	$\mu_1\nu_1$	11	— 10	— 23	22	— 01	00	— 33	32	31	— 30	03	— 02	— 21	20	13	— 12	6
7	$\mu_1\nu_2$	12	23	— 10	— 21	— 02	33	00	— 31	32	— 03	— 30	01	— 22	— 13	20	11	7
8	$\mu_1\nu_3$	13	— 22	21	— 10	— 03	— 32	31	00	33	02	— 01	— 30	— 23	12	— 11	20	8
9	$\mu_2\nu_0$	20	21	22	23	30	31	32	33	— 00	— 01	— 02	— 03	— 10	— 11	— 12	— 13	9
10	$\mu_2\nu_1$	21	— 20	— 13	12	— 31	30	— 03	02	01	— 00	33	— 32	— 11	10	23	— 22	10
11	$\mu_2\nu_2$	22	13	— 20	— 11	— 32	03	30	— 01	02	— 33	— 00	31	— 12	— 23	10	21	11
12	$\mu_2\nu_3$	23	— 12	11	— 20	— 33	— 02	01	30	03	32	— 31	— 00	— 13	22	— 21	10	12
13	$\mu_3\nu_0$	30	31	32	33	20	21	22	23	10	11	12	13	00	01	02	03	13
14	$\mu_3\nu_1$	31	— 30	03	— 02	— 21	20	13	— 12	— 11	10	23	— 22	01	— 00	33	— 32	14
15	$\mu_3\nu_2$	32	— 03	— 30	01	— 22	— 13	20	11	— 12	— 23	10	21	02	— 33	— 00	31	15
16	$\mu_3\nu_3$	33	02	— 01	— 30	— 23	12	— 11	20	— 13	22	— 21	10	03	32	— 31	— 00	16
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	

Les carrés intérieurs renferment seulement les indices dans la succession μ, ν et les signes.

TABLE III

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
	$\mu_m\lambda_n$	$\mu_0\lambda_0$	$\mu_3\lambda_1$	$\mu_3\lambda_2$	$\mu_3\lambda_3$	$\mu_1\lambda_0$	$-\mu_2\lambda_1$	$-\mu_2\lambda_2$	$-\mu_2\lambda_3$	$\mu_2\lambda_0$	$-\mu_1\lambda_1$	$-\mu_1\lambda_2$	$-\mu_1\lambda_3$	$\mu_3\lambda_0$	$\mu_0\lambda_1$	$\mu_0\lambda_2$	$\mu_0\lambda_3$	
1	$\mu_0\lambda_0$	00	31	32	33	10	— 21	— 22	— 23	20	— 11	— 12	— 13	30	01	02	03	1
2	$\mu_3\lambda_1$	31	— 00	03	— 02	21	10	— 13	12	11	20	— 23	22	01	— 30	33	— 32	2
3	$\mu_3\lambda_2$	32	— 03	— 00	01	22	13	10	— 11	12	23	20	— 21	02	— 33	— 30	31	3
4	$\mu_3\lambda_3$	33	02	— 01	— 00	23	— 12	11	10	13	— 22	21	20	03	32	— 31	— 30	4
5	$\mu_1\lambda_0$	10	— 21	— 22	— 23	00	31	32	33	— 30	— 01	— 02	— 03	— 20	11	12	13	5
6	$-\mu_2\lambda_1$	— 21	— 10	13	— 12	— 31	00	— 03	02	01	— 30	33	— 32	11	20	— 23	22	6
7	$-\mu_2\lambda_2$	— 22	— 13	— 10	11	— 32	03	00	— 01	02	— 33	— 30	31	12	23	20	— 21	7
8	$-\mu_2\lambda_3$	— 23	12	— 11	— 10	— 33	— 02	01	00	03	32	— 31	— 30	13	— 22	21	20	8
9	$\mu_2\lambda_0$	20	— 11	— 12	— 13	30	01	02	03	— 00	— 31	— 32	— 33	— 10	21	22	23	9
10	$-\mu_1\lambda_1$	— 11	— 20	23	— 22	— 01	30	— 33	32	31	— 00	03	— 02	21	10	— 13	12	10
11	$-\mu_1\lambda_2$	— 12	— 23	— 20	21	— 02	33	30	— 31	32	— 03	— 00	01	22	13	10	— 11	11
12	$-\mu_1\lambda_3$	— 13	22	— 21	— 20	— 03	— 32	31	30	33	02	— 01	— 00	23	— 12	11	10	12
13	$\mu_3\lambda_0$	30	01	02	03	20	— 11	— 12	— 13	10	— 21	— 22	— 23	00	31	32	33	13
14	$\mu_0\lambda_1$	01	— 30	33	— 32	11	20	— 23	22	21	10	— 13	12	31	— 00	03	— 02	14
15	$\mu_0\lambda_2$	02	— 33	— 30	31	12	23	20	— 21	22	13	10	— 11	32	— 03	— 00	01	15
16	$\mu_0\lambda_3$	03	32	— 31	— 30	13	— 22	21	20	23	— 12	11	10	33	02	— 01	— 00	16
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	

Les carrés intérieurs renferment seulement les indices dans la succession μ, λ et les signes.

On peut à chaque moment passer à une lettre et à 16 indices en écrivant :

$$\mu_m \nu_n = \nu_{(mn)}, \qquad \text{resp.} \qquad \mu_m \lambda_n = \lambda_{(mn)},$$

où $(mn) = 4m + n$, m, $n = 0, 1, 2, 3$. Dans cette succession

$$\nu_n \cdot \mu_m = \mu_r \nu_s = \nu_{(rs)}.$$

De plus $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ correspondent successivement à $1, \mu, \Psi, l$. Alors par exemple $\mu_1 \nu_0 = \nu_{(10)} = \nu_4$, point origine. ν_n et λ_n conservent les significations antérieures. On a donc

$$\mu_0 \nu_0 \equiv \mu_0 \lambda_0 \equiv 1, \qquad \mu_0 \nu_n \equiv \nu_n, \qquad \mu_0 \lambda_n \equiv \lambda_n,$$
$$\mu_m \nu_0 \equiv \mu_m \lambda_0 \equiv \mu_m, \qquad \mu_1 \equiv \mu, \qquad \mu_2 \equiv \Psi, \qquad \mu_3 \equiv l,$$
$$\mu_1 \nu_m \equiv \delta_m, \qquad \mu_2 \nu_m \equiv -\pi_m, \qquad \mu_3 \nu_m \equiv \lambda_m, \qquad m = 1, 2, 3.$$

De plus :

$$\mu_1 \nu_m = \mu_1 l . l \nu_m = -\Psi . \lambda_m = -\mu_2 \lambda_m,$$
$$\mu_2 \nu_m = \mu_2 l . l \nu_m = -\mu . \lambda_m = -\mu_1 \lambda_m,$$
$$\mu_3 \nu_m = \mu_3 l . l \nu_m = ll . l \nu_m = \mu_0 \lambda_m,$$
$$\mu_0 \nu_m = \mu_0 l . l \nu_m = l . l \nu_m = \mu_3 \lambda_m.$$

Voir la table II et III.

Un avantage du μ-λ-groupe à l'opposite du μ-ν-groupe est celui que tous les μ_n sont commutatifs avec tous les λ_m.

§ 22. — Les transformantes isomorphes prépositives et postpositives dérivées des tables II et III.

Comme les lettres différentes (μ, ν resp. μ, λ) avec leurs indices sont commutables, les indices des lettres égales conservant leur succession ; on peut stipuler la règle :

$$\boxed{\mu_m \nu_n ; \mu_r \nu_s = (\mu_m ; \mu_r)(\nu_n ; \nu_s), \qquad \text{resp.} \qquad \mu_m \lambda_n ; \mu_r \lambda_s = (\mu_m ; \mu_r)(\lambda_n ; \lambda_s).}$$

TABLE II a). *Transformantes prépositives.*

Il résulte de la table II.

$$
\begin{aligned}
{}^{0}(\mu_0\nu_0) &= (\ \ \mu_{00}+\mu_{11}+\mu_{22}+\mu_{33})(\nu_{00}+\nu_{11}+\nu_{22}+\nu_{33}),\\
{}^{0}(\mu_1\nu_0) &= (\ \ \mu_{01}+\mu_{10}-\mu_{23}-\mu_{32})(\quad \text{»} \quad),\\
{}^{0}(\mu_2\nu_0) &= (-\mu_{02}+\mu_{20}+\mu_{31}-\mu_{13})(\quad \text{»} \quad),\\
{}^{0}(\mu_3\nu_0) &= (\ \ \mu_{03}+\mu_{30}+\mu_{12}+\mu_{21})(\quad \text{»} \quad);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{0}(\mu_0\nu_1) &= (\mu_{00}-\mu_{11}-\mu_{22}+\mu_{33})(\nu_{10}-\nu_{01})+(\ \ \mu_{30}+\mu_{03}+\mu_{12}+\mu_{21})(\nu_{32}-\nu_{23}),\\
{}^{0}(\mu_1\nu_1) &= (\mu_{10}-\mu_{01}-\mu_{23}+\mu_{32})(\quad \text{»} \quad)+(\ \ \mu_{02}-\mu_{20}-\mu_{31}+\mu_{13})(\quad \text{»} \quad),\\
{}^{0}(\mu_2\nu_1) &= (\mu_{20}+\mu_{02}-\mu_{31}-\mu_{13})(\quad \text{»} \quad)+(-\mu_{01}-\mu_{10}+\mu_{32}+\mu_{23})(\quad \text{»} \quad),\\
{}^{0}(\mu_3\nu_1) &= (\mu_{30}+\mu_{03}-\mu_{12}-\mu_{21})(\quad \text{»} \quad)+(\ \ \mu_{00}+\mu_{11}+\mu_{22}+\mu_{33})(\quad \text{»} \quad);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{0}(\mu_0\nu_2) &= (\mu_{00}-\mu_{11}-\mu_{22}+\mu_{33})(\nu_{20}-\nu_{02})+(\ \ \mu_{30}+\mu_{03}+\mu_{12}+\mu_{21})(\nu_{13}-\nu_{31}),\\
{}^{0}(\mu_1\nu_2) &= (\mu_{10}-\mu_{01}-\mu_{23}+\mu_{32})(\quad \text{»} \quad)+(\ \ \mu_{02}-\mu_{20}-\mu_{31}+\mu_{13})(\quad \text{»} \quad),\\
{}^{0}(\mu_2\nu_2) &= (\mu_{20}+\mu_{02}-\mu_{31}-\mu_{13})(\quad \text{»} \quad)+(-\mu_{01}-\mu_{10}+\mu_{32}+\mu_{23})(\quad \text{»} \quad),\\
{}^{0}(\mu_3\nu_2) &= (\mu_{30}+\mu_{03}-\mu_{12}-\mu_{21})(\quad \text{»} \quad)+(\ \ \mu_{00}+\mu_{11}+\mu_{22}+\mu_{33})(\quad \text{»} \quad);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{0}(\mu_0\nu_3) &= (\mu_{00}-\mu_{11}-\mu_{22}+\mu_{33})(\nu_{30}-\nu_{03})+(\ \ \mu_{30}+\mu_{03}+\mu_{12}+\mu_{21})(\nu_{21}-\nu_{12}),\\
{}^{0}(\mu_1\nu_3) &= (\mu_{10}-\mu_{01}-\mu_{23}+\mu_{32})(\quad \text{»} \quad)+(\ \ \mu_{02}-\mu_{20}-\mu_{31}+\mu_{13})(\quad \text{»} \quad),\\
{}^{0}(\mu_2\nu_3) &= (\mu_{20}+\mu_{02}-\mu_{31}-\mu_{13})(\quad \text{»} \quad)+(-\mu_{01}-\mu_{10}+\mu_{32}+\mu_{23})(\quad \text{»} \quad),\\
{}^{0}(\mu_3\nu_3) &= (\mu_{30}+\mu_{03}-\mu_{12}-\mu_{21})(\quad \text{»} \quad)+(\ \ \mu_{00}+\mu_{11}+\mu_{22}+\mu_{33})(\quad \text{»} \quad).
\end{aligned}
$$

On peut facilement montrer que $\mu_m\nu'_n;\mu_r\nu_s$ donne le même résultat que $(\mu_m;\mu_r)(\nu_n;\nu_s)$.

1) $\mu_m\nu_n;\mu_r\nu_s = \nu_{(mn)};\nu_{(rs)} = \nu_{(mn)(rs)}$,

$\nu_{(mn)(rs)}\cdot\nu_{(rs)} = \nu_{(mn)} = \mu_m\nu_n$;

2) $(\mu_m;\mu_r)(\nu_n;\nu_s) = \mu_{mr}\cdot\nu_{ns}$,

$\mu_{mr}\cdot\nu_{ns}\cdot\nu_{(rs)} = \mu_{mr}\nu_{ns}\cdot\mu_r\nu_s = \mu_{mr}\mu_r\cdot\nu_{ns}\nu_s = \mu_m\nu_n = \nu_{(mn)}$.

TABLE II b). *Transformantes postpositives.*

$$
\begin{aligned}
{}^*(\mu_0\nu_0) &= (\mu_{00} + \mu_{11} + \mu_{22} + \mu_{33})(\nu_{00} + \nu_{11} + \nu_{22} + \nu_{33}),\\
{}^*(\mu_1\nu_0) &= (\mu_{01} + \mu_{10} + \mu_{23} + \mu_{32})(\nu_{00} - \nu_{11} - \nu_{22} - \nu_{33}),\\
{}^*(\mu_2\nu_0) &= (\mu_{02} - \mu_{20} + \mu_{31} - \mu_{13})(\nu_{00} - \nu_{11} - \nu_{22} - \nu_{33}),\\
{}^*(\mu_3\nu_0) &= (\mu_{03} + \mu_{30} - \mu_{12} - \mu_{21})(\nu_{00} + \nu_{11} + \nu_{22} + \nu_{33});
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^*(\mu_0\nu_1) &= (\mu_{00} + \mu_{11} + \mu_{22} + \mu_{33})(\nu_{01} - \nu_{10}) + (\mu_{30} + \mu_{03} - \mu_{12} - \mu_{21})(\nu_{32} - \nu_{23}),\\
{}^*(\mu_1\nu_1) &= (\mu_{10} + \mu_{01} + \mu_{23} + \mu_{32})(\quad \text{»} \quad) + (\mu_{02} - \mu_{20} + \mu_{31} - \mu_{13})(\quad \text{»} \quad),\\
{}^*(\mu_2\nu_1) &= (-\mu_{20} + \mu_{02} + \mu_{31} - \mu_{13})(\quad \text{»} \quad) + (\mu_{01} + \mu_{10} + \mu_{32} + \mu_{23})(\quad \text{»} \quad),\\
{}^*(\mu_3\nu_1) &= (\mu_{30} + \mu_{03} - \mu_{12} - \mu_{21})(\quad \text{»} \quad) + (\mu_{00} + \mu_{11} + \mu_{22} + \mu_{33})(\quad \text{»} \quad);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^*(\mu_0\nu_2) &= (\mu_{00} + \mu_{11} + \mu_{22} + \mu_{33})(\nu_{02} - \nu_{20}) + (\mu_{30} + \mu_{03} - \mu_{12} - \mu_{21})(\nu_{13} - \nu_{31}),\\
{}^*(\mu_1\nu_2) &= (\mu_{10} + \mu_{01} + \mu_{23} + \mu_{32})(\quad \text{»} \quad) + (\mu_{02} - \mu_{20} + \mu_{31} - \mu_{13})(\quad \text{»} \quad),\\
{}^*(\mu_2\nu_2) &= (-\mu_{20} + \mu_{02} + \mu_{31} - \mu_{13})(\quad \text{»} \quad) + (\mu_{01} + \mu_{10} + \mu_{32} + \mu_{23})(\quad \text{»} \quad),\\
{}^*(\mu_3\nu_2) &= (\mu_{30} + \mu_{03} - \mu_{12} - \mu_{21})(\quad \text{»} \quad) + (\mu_{00} + \mu_{11} + \mu_{22} + \mu_{33})(\quad \text{»} \quad);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^*(\mu_0\nu_3) &= (\mu_{00} + \mu_{11} + \mu_{22} + \mu_{33})(\nu_{03} - \nu_{30}) + (\mu_{30} + \mu_{03} - \mu_{12} - \mu_{21})(\nu_{21} - \nu_{12}),\\
{}^*(\mu_1\nu_3) &= (\mu_{10} + \mu_{01} + \mu_{23} + \mu_{32})(\quad \text{»} \quad) + (\mu_{02} - \mu_{20} + \mu_{31} - \mu_{13})(\quad \text{»} \quad),\\
{}^*(\mu_2\nu_3) &= (-\mu_{20} + \mu_{02} + \mu_{31} - \mu_{13})(\quad \text{»} \quad) + (\mu_{01} + \mu_{10} + \mu_{32} + \mu_{23})(\quad \text{»} \quad),\\
{}^*(\mu_3\nu_3) &= (\mu_{30} + \mu_{03} - \mu_{12} - \mu_{21})(\quad \text{»} \quad) + (\mu_{00} + \mu_{11} + \mu_{22} + \mu_{33})(\quad \text{»} \quad).
\end{aligned}
$$

Table III a). *Transformantes prépositives.*

$$\begin{aligned}
{}^{\circ}(\mu_0\lambda_0) &= (\mu_{00} + \mu_{11} + \mu_{22} + \mu_{33})(\lambda_{00} + \lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33}),\\
{}^{\circ}(\mu_1\lambda_0) &= (\mu_{01} + \mu_{10} - \mu_{23} - \mu_{32})(\qquad\quad \text{»} \qquad\quad),\\
{}^{\circ}(\mu_2\lambda_0) &= (-\mu_{02} + \mu_{20} + \mu_{31} - \mu_{13})(\qquad\quad \text{»} \qquad\quad),\\
{}^{\circ}(\mu_3\lambda_0) &= (\mu_{03} + \mu_{30} + \mu_{12} + \mu_{21})(\qquad\quad \text{»} \qquad\quad);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{\circ}(\mu_0\lambda_1) &= (\mu_{00} + \mu_{11} + \mu_{22} + \mu_{33})(\lambda_{10} - \lambda_{01} + \lambda_{32} - \lambda_{23}),\\
{}^{\circ}(\mu_1\lambda_1) &= (\mu_{01} + \mu_{10} - \mu_{23} - \mu_{32})(\qquad\quad \text{»} \qquad\quad),\\
{}^{\circ}(\mu_2\lambda_1) &= (-\mu_{02} + \mu_{20} + \mu_{31} - \mu_{13})(\qquad\quad \text{»} \qquad\quad),\\
{}^{\circ}(\mu_3\lambda_1) &= (\mu_{03} + \mu_{30} + \mu_{12} + \mu_{21})(\qquad\quad \text{»} \qquad\quad);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{\circ}(\mu_0\lambda_2) &= (\mu_{00} + \mu_{11} + \mu_{22} + \mu_{33})(\lambda_{20} - \lambda_{02} + \lambda_{13} - \lambda_{31}),\\
{}^{\circ}(\mu_1\lambda_2) &= (\mu_{01} + \mu_{10} - \mu_{23} - \mu_{32})(\qquad\quad \text{»} \qquad\quad),\\
{}^{\circ}(\mu_2\lambda_2) &= (-\mu_{02} + \mu_{20} + \mu_{31} - \mu_{13})(\qquad\quad \text{»} \qquad\quad),\\
{}^{\circ}(\mu_3\lambda_2) &= (\mu_{03} + \mu_{30} + \mu_{12} + \mu_{21})(\qquad\quad \text{»} \qquad\quad);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{\circ}(\mu_0\lambda_3) &= (\mu_{00} + \mu_{11} + \mu_{22} + \mu_{33})(\lambda_{30} - \lambda_{03} + \lambda_{21} - \lambda_{12}),\\
{}^{\circ}(\mu_1\lambda_3) &= (\mu_{01} + \mu_{10} - \mu_{23} - \mu_{32})(\qquad\quad \text{»} \qquad\quad),\\
{}^{\circ}(\mu_2\lambda_3) &= (-\mu_{02} + \mu_{20} + \mu_{31} - \mu_{13})(\qquad\quad \text{»} \qquad\quad),\\
{}^{\circ}(\mu_3\lambda_3) &= (\mu_{03} + \mu_{30} + \mu_{12} + \mu_{21})(\qquad\quad \text{»} \qquad\quad).
\end{aligned}$$

Table III b). *Transformantes postpositives.*

$$\begin{aligned}
{}^*(\mu_0\lambda_0) &= (\mu_{00} + \mu_{11} + \mu_{22} + \mu_{33})(\ \ \lambda_{00} + \lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33}),\\
{}^*(\mu_1\lambda_0) &= (\mu_{01} + \mu_{10} + \mu_{23} + \mu_{32})(\qquad\quad \text{»} \qquad\quad),\\
{}^*(\mu_2\lambda_0) &= (\mu_{02} - \mu_{20} + \mu_{31} - \mu_{13})(\qquad\quad \text{»} \qquad\quad),\\
{}^*(\mu_3\lambda_0) &= (\mu_{03} + \mu_{30} - \mu_{12} - \mu_{21})(\qquad\quad \text{»} \qquad\quad);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^*(\mu_0\lambda_1) &= (\mu_{00} + \mu_{11} + \mu_{22} + \mu_{33})(-\lambda_{10} + \lambda_{01} + \lambda_{32} - \lambda_{23}),\\
{}^*(\mu_1\lambda_1) &= (\mu_{01} + \mu_{10} + \mu_{23} + \mu_{32})(\qquad\quad \text{»} \qquad\quad),\\
{}^*(\mu_2\lambda_1) &= (\mu_{02} - \mu_{20} + \mu_{31} - \mu_{13})(\qquad\quad \text{»} \qquad\quad),\\
{}^*(\mu_3\lambda_1) &= (\mu_{03} + \mu_{30} - \mu_{12} - \mu_{21})(\qquad\quad \text{»} \qquad\quad);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^*(\mu_0\lambda_2) &= (\mu_{00} + \mu_{11} + \mu_{22} + \mu_{33})(-\lambda_{20} + \lambda_{02} + \lambda_{13} - \lambda_{31}),\\
{}^*(\mu_1\lambda_2) &= (\mu_{01} + \mu_{10} + \mu_{23} + \mu_{32})(\qquad\quad \text{»} \qquad\quad),\\
{}^*(\mu_2\lambda_2) &= (\mu_{02} - \mu_{20} + \mu_{31} - \mu_{13})(\qquad\quad \text{»} \qquad\quad),\\
{}^*(\mu_3\lambda_2) &= (\mu_{03} + \mu_{30} - \mu_{12} - \mu_{21})(\qquad\quad \text{»} \qquad\quad);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^*(\mu_0\lambda_3) &= (\mu_{00} + \mu_{11} + \mu_{22} + \mu_{33})(-\lambda_{30} + \lambda_{03} + \lambda_{21} - \lambda_{12}),\\
{}^*(\mu_1\lambda_3) &= (\mu_{01} + \mu_{10} + \mu_{23} + \mu_{32})(\qquad\quad \text{»} \qquad\quad),\\
{}^*(\mu_2\lambda_3) &= (\mu_{02} - \mu_{20} + \mu_{31} - \mu_{13})(\qquad\quad \text{»} \qquad\quad),\\
{}^*(\mu_3\lambda_3) &= (\mu_{03} + \mu_{30} - \mu_{12} - \mu_{21})(\qquad\quad \text{»} \qquad\quad).
\end{aligned}$$

L'avantage des opérateurs ${}^\circ(\mu_m\lambda_n)$ resp. ${}^*(\mu_m\lambda_n)$ en face des ${}^\circ(\mu_m\nu_n)$ resp. ${}^*(\mu_m\nu_n)$ saute aux yeux.

Si on met dehors les facteurs communs, on obtient dans tous les cas un monome.

On n'a pas besoin d'effectuer la multiplication $\Sigma\mu_{mn}.\Sigma\lambda_{rs}$. Observons

$$\Sigma\mu_{mn}.\Sigma\lambda_{rs}.\mu_p\lambda_q = [\Sigma\mu_{mn}.\mu_p(\Sigma\lambda_{rs}.\lambda_q)].$$

En outre

$${}^\circ(\mu_m\lambda_n) = {}^\circ\mu_m.{}^\circ\lambda_n \qquad \text{et} \qquad {}^*(\mu_m\lambda_n) = {}^*\mu_m.{}^*\lambda_n.$$

C'est que les λ_n correspondent exactement aux vecteurs axiaux h_n du § 17 et qu'aussi les μ_n forment un groupe propre :

	μ_0	μ_1	μ_2	μ_3
μ_0	μ_0	μ_1	μ_2	μ_3
μ_1	μ_1	μ_0	$-\mu_3$	$-\mu_2$
μ_2	μ_2	μ_3	$-\mu_0$	$-\mu_1$
μ_3	μ_3	μ_2	μ_1	μ_0

De ce groupe, on peut développer de suite les transformantes isomorphes qui avec celles de la Table III (aussi de la Table II) sont en concordance.

On peut les représenter aussi par les vecteurs axiaux h_n et en effet :

$$^0\mu_0 = {}^*\mu_0 = {}^0h_0 = {}^*h_0,$$

$$^0\mu_1 = -{}^0h_2 . {}^*h_3, \qquad {}^*\mu_1 = {}^0h_3 . {}^*h_2,$$

$$^0\mu_2 = -{}^*h_2, \qquad {}^*\mu_2 = -{}^0h_2,$$

$$^0\mu_3 = {}^0h_2 . {}^*h_1, \qquad {}^*\mu_3 = -{}^0h_1 . {}^*h_2.$$

§ 22 a). *Suite.* — La méthode précédente est applicable aussi au § 18. Comme on doit regarder ^0h et $^*h$ ainsi que deux lettres différentes, on peut écrire

$$^0h_m . {}^*h_n ; {}^0h_r . {}^*h_s = ({}^0h_m ; {}^0h_r)({}^*h_n ; {}^*h_s) = {}^0h_{mr} . {}^*h_{ns},$$

et on trouve du groupe $^0h_m . {}^*h_n$:

$$^{00}h_1 = ({}^0h_{10} - {}^0h_{01} + {}^0h_{32} - {}^0h_{23})({}^*h_{00} + {}^*h_{11} + {}^*h_{22} + {}^*h_{33}),$$

$$^{*0}h_1 = ({}^0h_{01} - {}^0h_{10} + {}^0h_{32} - {}^0h_{23})(\quad » \quad),$$

$$^{0*}h_1 = ({}^0h_{00} + {}^0h_{11} + {}^0h_{22} + {}^0h_{33})({}^*h_{10} - {}^*h_{01} + {}^*h_{32} - {}^*h_{23}),$$

$$^{**}h_1 = (\quad » \quad)({}^*h_{01} - {}^*h_{10} + {}^*h_{32} - {}^*h_{23}).$$

On voit que

$$^{00}h_1 = {}^0({}^0h_1 . {}^*h_0) = {}^{00}h_1 . {}^{0*}h_0,$$

$$^{*0}h_1 = {}^*({}^0h_1 . {}^*h_0) = {}^{*0}h_1 . {}^{**}h_0,$$

$$^{0*}h_1 = {}^0({}^0h_0 . {}^*h_1) = {}^{00}h_0 . {}^{0*}h_1,$$

$$^{**}h_1 = {}^*({}^0h_0 . {}^*h_1) = {}^{*0}h_0 . {}^{**}h_1, \qquad \text{etc.}$$

(*A suivre.*)

BIBLIOGRAPHIE

(1) P. G. Tait, M. A., Professor in Edinburg. Übersetzung von Dr G. v. Scherff, *Elementares Handbuch der Quaternionen.* Leipzig, Verlag von B. G. Teubner, 1880.

(2) M. Gaston Combebiac, Capitaine du Génie, *Calcul des triquaternions.* Paris, Gauthier-Villars, 1902.

(3) Victor Schlegel, Mathematiker am Gymnasium zu Waren, *System der Raumlehre. Nach den Prinzipien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre.* Leipzig, Verlag von B. G. Teubner. I. Teil, 1872; II. Teil, 1875.

(4) W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr., *Allgemeine Formen-und Invarianten theorie.* I. Bd. G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, 1909.

(5) Dr Eugen Netto, O. Professor an der Universität in Gieszen, *Gruppen-und Substitutionen-theorie.* Leipzig, G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, 1908.

(6) E. Study, *Geometrie der Dynamen.* Leipzig, Verlag von B. G. Teubner, 1903.

(7) Dr M. Abraham, *Theorie der Elektrizität.* I. Bd. II. Auflage. Leipzig, Verlag v. B. G. Teubner, 1904.