ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

G. PFEIFFER

Méthode spéciale d'intégration des systèmes complets d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre, à une fonction inconnue

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 28 (1936), p. 211-242
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1936_3_28__211_0>

MÉTHODE SPÉCIALE D'INTÉGRATION

DES SYSTÈMES COMPLETS D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE, A UNE FONCTION INCONNUE

PAR M. G. PFEIFFER (Kiew).

L'idée du présent Mémoire fut publiée en 1926(1). Dès lors, nous avons fait beaucoup de recherches dans ce domaine et nos pensées ont pris un large essor. Un rôle particulier provient de travaux s'étendant sur les années 1923-1933(2).

Prenons un système complet d'équations linéaires et homogènes :

$$(1)\qquad \begin{aligned} X_1(z) &= p_1 + b_1^1 p_{m+1} + b_2^1 p_{m+2} + \ldots + b_n^1 p_{m+n} = 0, \\ X_2(z) &= p_2 + b_1^2 p_{m+1} + b_2^2 p_{m+2} + \ldots + b_n^2 p_{m+n} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_m(z) &= p_m + b_1^m p_{m+1} + b_2^m p_{m+2} + \ldots + b_n^m p_{m+n} = 0, \end{aligned}$$

ou, en abrégé :

$$(2)\qquad X_\nu(z) = \frac{\partial z}{\partial x_\nu} + \sum_{g=1}^{n} b_g^\nu \frac{\partial z}{\partial x_{m+g}} = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, m.$$

Les conditions pour que le système (1), (2) soit complet :

$$(3)\qquad X_\lambda(b_h^\mu) \equiv X_\mu(b_h^\lambda), \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, m, \qquad \lambda \neq \mu, \qquad h = 1, 2, \ldots, n$$

sont satisfaites.

Ajoutons aux relations (1) l'égalité :

$$(4)\qquad p_{m+1} = v_2 p_{m+2} + v_3 p_{m+3} + \ldots + v_n p_{m+n},$$

---

(1) G. PFEIFFER, *Méthode spéciale d'intégration des systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre* (Bull. de l'Acad. des Sc. de l'Ukraïne, t. II, f. I, pp. 56-76, 1926).

(2) Voir la fin du Mémoire.

où :

$$(5)\qquad v_2,\ v_3,\ \ldots,\ v_n$$

sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n}$; alors les relations (1), (4) donnent le système :

$$(6)\qquad \begin{aligned} &Y_1(z) = p_1 + (b_2^1 + b_1^1 v_2)p_{m+2} + \ldots + (b_n^1 + b_1^1 v_n)p_{m+n} = 0,\\ &Y_2(z) = p_2 + (b_2^2 + b_1^2 v_2)p_{m+2} + \ldots + (b_n^2 + b_1^2 v_n)p_{m+n} = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &Y_m(z) = p_m + (b_2^m + b_1^m v_2)p_{m+2} + \ldots + (b_n^m + b_1^m v_n)p_{m+n} = 0.\\ &Y(z) = p_{m+1} - v_2 p_{m+2} - \ldots - v_n p_{m+n} = 0. \end{aligned}$$

Supposons les fonctions (5) telles que les équations du système (6) soient en involution, c'est-à-dire que les conditions :

$$(7)\qquad \begin{gathered} Y_\lambda(b_h^\mu + b_1^\mu v_h) \equiv Y_\mu(b_h^\lambda + b_1^\lambda v_h),\\ \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, m, \qquad \lambda \neq \mu,\\ h = 2, 3, \ldots, n; \end{gathered}$$

$$(8)\qquad \begin{gathered} Y(b_h^\nu + b_1^\nu v_h) \equiv -Y_\nu(v_h),\\ \nu = 1, 2, \ldots, m,\\ h = 2, 3, \ldots, n \end{gathered}$$

soient remplies.

Grâce à ce que :

$$(9)\qquad \begin{gathered} Y_\nu(\ldots) \equiv X_\nu(\ldots) - b_1^\nu Y(\ldots),\\ \nu = 1, 2, \ldots, m, \end{gathered}$$

les égalités (7) prennent la forme :

$$(10)\qquad \begin{aligned} &Y_\lambda(b_h^\mu) + v_h Y_\lambda(b_1^\mu) + b_1^\mu Y_\lambda(v_h) \equiv Y_\mu(b_h^\lambda) + v_h Y_\mu(b_1^\lambda) + b_1^\lambda Y_\mu(v_h),\\ &X_\lambda(b_h^\mu) - b_1^\lambda Y(b_h^\mu) + v_h X_\lambda(b_1^\mu) - v_h b_1^\lambda Y(b_1^\mu) + b_1^\mu X_\lambda(v_h) - b_1^\mu b_1^\lambda Y(v_h)\\ &\qquad \equiv X_\mu(b_h^\lambda) - b_1^\mu Y(b_h^\lambda) + v_h X_\mu(b_1^\lambda) - v_h b_1^\mu Y(b_1^\lambda) + b_1^\lambda X_\mu(v_h) - b_1^\lambda b_1^\mu Y(v_h),\\ &b_1^\mu[X_\lambda(v_h) + Y(b_h^\lambda) + v_h Y(b_1^\lambda)] \equiv b_1^\lambda[X_\mu(v_h) + Y(b_h^\mu) + v_h Y(b_1^\mu)]. \end{aligned}$$

De même les égalités (8) prennent la forme :

$$(11)\qquad \begin{aligned} &Y(b_h^\lambda + b_1^\lambda v_h) + Y_\lambda(v_h) \equiv Y(b_h^\lambda) + b_1^\lambda Y(v_h) + v_h Y(b_1^\lambda) + X_\lambda(v_h) - b_1^\lambda Y(v_h)\\ &\qquad\qquad \equiv X_\lambda(v_h) + Y(b_h^\lambda) + v_h Y(b_1^\lambda) \equiv 0,\\ &Y(b_h^\mu + b_1^\mu v_h) + Y_\mu(v_h) \equiv Y(b_h^\mu) + b_1^\mu Y(v_h) + v_h Y(b_1^\mu) + X_\mu(v_h) - b_1^\mu Y(v_h)\\ &\qquad\qquad \equiv X_\mu(v_h) + Y(b_h^\mu) + v_h Y(b_1^\mu) \equiv 0. \end{aligned}$$

On voit que les relations (7) sont des conséquences des relations (8).

Le système (6) est un système jacobien, si la dernière des équations (6) est en involution avec les m antécédentes.

En vertu de tout ceci, les fonctions (5) doivent être la solution du système d'équations linéaires, en général, non homogènes, aux dérivées partielles du premier ordre :

$$(12)\qquad \begin{aligned} X_1(v_\rho) &= -Y(b_\rho^1) - v_\rho Y(b_1^1), \\ X_2(v_\rho) &= -Y(b_\rho^2) - v_\rho Y(b_1^2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_m(v_\rho) &= -Y(b_\rho^m) - v_\rho Y(b_1^m), \\ \rho &= 2, 3, \ldots, n, \end{aligned}$$

avec $n-1$, fonctions (5).

Le système (12) appartient au type des systèmes jacobiens généralisés à plusieurs fonctions inconnues, qui ont été étudiés par M. N. Saltykow [1]. Son intégration est équivalente à l'intégration du système d'équations linéaires, homogènes aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue :

$$(13)\qquad \begin{aligned} Z_1(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{g=1}^{n} b_g^1 \frac{\partial f}{\partial x_{m+g}} - \sum_{\rho=2}^{n} [Y(b_\rho^1) + v_\rho Y(b_1^1)] \frac{\partial f}{\partial v_\rho} = 0, \\ Z_2(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_2} + \sum_{g=1}^{n} b_g^2 \frac{\partial f}{\partial x_{m+g}} - \sum_{\rho=2}^{n} [Y(b_\rho^2) + v_\rho Y(b_1^2)] \frac{\partial f}{\partial v_\rho} = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Z_m(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_m} + \sum_{g=1}^{n} b_g^m \frac{\partial f}{\partial x_{m+g}} - \sum_{\rho=2}^{n} [Y(b_\rho^m) + v_\rho Y(b_1^m)] \frac{\partial f}{\partial v_\rho} = 0. \end{aligned}$$

Avec les conditions (3) le système (13) est jacobien. Pour s'en convaincre, prenons deux équations (13) quelconques :

$$(14)\qquad \begin{aligned} Z_i(f) &= X_i(f) - \sum_{\rho=2}^{n} M_\rho^i \frac{\partial f}{\partial v_\rho} = 0, \\ Z_k(f) &= X_k(f) - \sum_{\rho=2}^{n} M_\rho^k \frac{\partial f}{\partial v_\rho} = 0. \end{aligned}$$

---

[1] N. SALTYKOW, *Étude, sur les intégrales d'un système, des équations différentielles aux dérivées partielles de plusieurs fonctions inconnues* (Journ. de Math. pures et appliquées, 1897, t. III, s. 5, pp. 423-428); *Recherches sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue* (Kharkow, 1905, pp. 68-76).

où :

$$
\text{(15)} \qquad \mathbf{M}_\nu^j = \mathrm{Y}(b_\nu^j) + v_\nu \mathrm{Y}(b_1^j) = \left(\frac{\partial b_\nu^j}{\partial x_{m+1}} - \sum_{h=2}^{n} v_h \frac{\partial b_\nu^j}{\partial x_{m+h}} \right) + v_\nu \left(\frac{\partial b_1^j}{\partial x_{m+1}} - \sum_{h=2}^{n} v_h \frac{\partial b_1^j}{\partial x_{m+h}} \right),
$$

$$
j = 1, 2, \ldots, m, \qquad \nu = 2, 3, \ldots, n.
$$

On voit immédiatement, qu'en vertu de (3) :

$$
\text{(16)} \qquad \begin{gathered} \mathrm{Z}_k(b_\nu^i) \equiv \mathrm{Z}_i(b_\nu^k), \\ i, k = 1, 2, \ldots, m, \qquad i \neq k, \\ \nu = 2, 3, \ldots, n, \end{gathered}
$$

attendu que :

$$
\text{(17)} \qquad \mathrm{Z}_k(b_\nu^i) \equiv \mathrm{X}_k(b_\nu^i), \qquad \mathrm{Z}_i(b_\nu^k) \equiv \mathrm{X}_i(b_\nu^k).
$$

Aux identités :

$$
\text{(18)} \qquad \begin{gathered} \mathrm{Z}_k(\mathbf{M}_\nu^i) \equiv \mathrm{Z}_i(\mathbf{M}_\nu^k), \\ i, k = 1, 2, \ldots, m, \qquad i \neq k. \\ \nu = 2, 3, \ldots, n \end{gathered}
$$

nous parvenons de la manière suivante.

Grâce aux liaisons :

$$
\text{(19)} \qquad \mathrm{Z}_k(\mathbf{M}_\nu^i) = \mathrm{X}_k(\mathbf{M}_\nu^i) - \sum_{\rho=2}^{n} [\mathrm{Y}(b_\rho^k) + v_\rho \mathrm{Y}(b_1^k)] \frac{\partial \mathbf{M}_\nu^i}{\partial v_\rho}
$$

et :

$$
\text{(20)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{M}_\nu^i}{\partial v_\rho} &= -\left(\frac{\partial b_k^i}{\partial x_{m+\rho}} + v_\nu \frac{\partial b_1^i}{\partial x_{m+\rho}} \right), & \rho \neq \nu, \\ \frac{\partial \mathbf{M}_\nu^i}{\partial b_\nu} &= -\left(\frac{\partial b_\nu^i}{\partial x_{m+\nu}} + v_\nu \frac{\partial b_1^i}{\partial x_{m+\nu}} \right) + \mathrm{Y}(b_1^i), & \rho = \nu, \end{aligned}
$$

on a :

$$
\text{(21)} \quad \mathrm{Z}_k(\mathbf{M}_\nu^i) = \mathrm{X}_k(\mathbf{M}_\nu^i) + \sum_{\rho=2}^{n} [\mathrm{Y}(b_\rho^k) + v_\rho \mathrm{Y}(b_1^k)] \left(\frac{\partial b_\nu^i}{\partial x_{m+\rho}} + v_\nu \frac{\partial b_1^i}{\partial x_{m+\rho}} \right) - \mathrm{Y}(b_\nu^k)\mathrm{Y}(b_1^i) - \omega,
$$

où :

$$(22) \qquad \omega = v_\nu Y(b^k_1) Y(b^i_1)$$

est une expression symétrique par rapport aux indices i, k.

Puisque :

$$(23) \qquad X_k(M^i_\nu) = Y\left(\frac{\partial b^i_\nu}{\partial x_k}\right) + \sum_{g=1}^{n} b^k_g Y\left(\frac{\partial b^i_\nu}{\partial x_{m+g}}\right) + v_\nu \left[Y\left(\frac{\partial b^i_1}{\partial x_k}\right) + \sum_{g=1}^{n} b^k_g Y\left(\frac{\partial b^i_1}{\partial x_{m+g}}\right)\right]$$

et :

$$(24) \qquad \begin{aligned} YX_k(b^i_\nu) &= Y\left(\frac{\partial b^i_\nu}{\partial x_k}\right) + \sum_{g=1}^{n} b^k_g Y\left(\frac{\partial b^i_\nu}{\partial x_{m+g}}\right) + \sum_{g=1}^{n} Y(b^k_g)\frac{\partial b^i_\nu}{\partial x_{m+g}}, \\ YX_k(b^i_1) &= Y\left(\frac{\partial b^i_1}{\partial x_k}\right) + \sum_{g=1}^{n} b^k_g Y\left(\frac{\partial b^i_1}{\partial x_{m+g}}\right) + \sum_{g=1}^{n} Y(b^k_g)\frac{\partial b^i_1}{\partial x_{m+g}}, \end{aligned}$$

on a :

$$(25) \qquad X_k(M^i_\nu) = \varpi - \sum_{g=1}^{n} Y(b^k_g)\frac{\partial b^i_\nu}{\partial x_{m+g}} - v_\nu \sum_{g=1}^{n} Y(b^k_g)\frac{\partial b^i_1}{\partial x_{m+g}},$$

où, en vue de (3), ϖ est symétrique par rapport aux indices i, k :

$$(26) \qquad \varpi = YX_k(b^i_\nu) + v_\nu YX_k(b^i_1) \equiv YX_i(b^k_\nu) + v_\nu X_i(b^k_1).$$

Il suit :

$$(27) \qquad \begin{aligned} Z_k(M^i_\nu) = \varpi &- Y(b^k_1)\frac{\partial b^i_\nu}{\partial x_{m+1}} - v_\nu Y(b^k_1)\frac{\partial b^i_\nu}{\partial x_{m+1}} - \sum_{\rho=2}^{n} Y(b^k_\rho)\frac{\partial b^i_\nu}{\partial x_{m+\rho}} - v_\nu \sum_{\rho=2}^{n} Y(b^k_\rho)\frac{\partial b^i_1}{\partial x_{m+\rho}} \\ &+ \sum_{\rho=2}^{n} [Y(b^k_\rho) + v_\rho Y(b^k_1)]\frac{\partial b^i_\nu}{\partial x_{m+\rho}} + v_\nu \sum_{\rho=2}^{n} [Y(b^k_\rho) + v_\rho Y(b^k_1)]\frac{\partial b^i_1}{\partial x_{m+\rho}} - Y(b^k_\nu)Y(b^i_1) - \omega \\ = \varpi &- Y(b^k_1)Y(b^i_\nu) - v_\nu Y(b^k_1)Y(b^i_1) - Y(b^k_\nu)Y(b^i_1) - \omega. \end{aligned}$$

L'expression (27) est symétrique par rapport aux indices i, k; de là suit que les identités sont exactes.

Ainsi, d'après les conditions (3), le système (13) est jacobien; ses intégrales indépendantes seront désignées par :

$$(28) \qquad f_2, f_3, \ldots, f_{2n}.$$

L'intégrale générale du système (12) sera :

$$\begin{array}{ll} (29) & \begin{array}{l} \Phi_2(f_2, f_3, \ldots, f_{2n}) = 0, \\ \Phi_3(f_2, f_3, \ldots, f_{2n}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_n(f_2, f_3, \ldots, f_{2n}) = 0, \end{array} \end{array}$$

$$(30) \qquad \frac{D(\Phi_2, \Phi_3, \ldots, \Phi_n)}{D(v_2, v_3, \ldots, v_n)} \neq 0,$$

$\Phi_2, \Phi_3, \ldots, \Phi_n$ étant des fonctious arbitraires.

Sous les conditions (3) le système (12) possède toujours une solution.

En intégrant le système (1), nous conviendrons de chercher, généralement, l'intégrale complète :

$$(31) \qquad z = \theta(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \quad c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}),$$

$$(32) \qquad \frac{D\left(\theta, \dfrac{\partial\theta}{\partial\varphi_1}, \ldots, \dfrac{\partial\theta}{\partial\varphi_n}\right)}{D(c_1, c_2, \ldots, c_{n+1})} \neq 0,$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont les intégrales indépendantes du système (1); en particulier, l'intégrale complète la plus simple(1) :

$$(33) \qquad z = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_n\varphi_n + c_{n+1}.$$

Puisque le nombre des intégrales indépendantes du système (6), dans le cas où les fonctions (5) sont les solutions du système (12), est moindre, d'une unité, que le nombre des intégrales indépendantes du système (1), c'est pourquoi, en intégrant le système (1), on n'a pas besoin de chercher l'intégrale générale (29) du système (12); il suffit de prendre une solution particulière, qui contient une seule constante arbitraire, soit γ_1 :

$$(34) \qquad \begin{array}{l} v_2 = \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n}, \quad \gamma_1) \equiv u_2, \\ v_3 = \psi_3(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n}, \quad \gamma_1) \equiv u_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n = \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n}, \quad \gamma_1) \equiv u_n. \end{array}$$

---

(1) G. Pfeiffer, *Sur les intégrales complètes des équations linéaires et des systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue* (Ann. de Toulouse, s. 3, t. XXII, p. 162, 1930).

La substitution de la solution (34) au système (6) donne un système jacobien :

$$
(35) \qquad \begin{cases} Z_1(z) = p_1 + (b_2^1 + b_1^1 u_2)p_{m+2} + \ldots + (b_n^1 + b_1^1 u_n)p_{m+n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z_m(z) = p_m + (b_2^m + b_1^m u_2)p_{m+2} + \ldots + (b_n^m + b_1^m u_n)p_{m+n} = 0, \\ Z_{m+1}(z) = p_{m+1} - u_2 p_{m+2} - \ldots - u_n p_{m+n} = 0 \end{cases}
$$

avec le paramètre γ_1.

En appliquant, au système (35), les mêmes raisonnements et ainsi de suite, nous parviendrons, après la répétition, faite $n - 1$ fois, à des opérations du même caractère, au système jacobien :

$$
(36) \qquad \begin{cases} H_1(z) = p_1 + s_1 p_{m+n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ H_{m+n-1}(z) = p_{m+n-1} + s_{m+n-1} p_{m+n} = 0, \end{cases}
$$

dont les coefficients contiennent $(n - 1)$ constantes arbitraires $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}$.

L'intégration du système (36) est équivalente à l'intégration d'une équation aux différentielles totales complètement intégrable :

$$
(37) \qquad dx_{m+n} = s_1 dx_1 + s_2 dx_2 + \ldots + s_{m+n-1} dx_{m+n-1}.
$$

Si l'on désigne son intégrale par :

$$
(38) \qquad \omega(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n}, \quad \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}) = \text{const.},
$$

l'intégrale complète du système (1) est :

$$
(39) \qquad z = \gamma_n \omega + \gamma_{n+1}.
$$

Le système (36), pour lequel sont remplies les conditions :

$$
(40) \qquad \begin{gathered} H_\lambda(s_\mu) \equiv H_\mu(s_\lambda), \\ \lambda, \mu = 1, 2, \ldots (m + n - 1), \qquad \lambda \neq \mu, \end{gathered}
$$

peut être intégré de la manière suivante.

En ajoutant, aux relations (40), la relation :

$$
(41) \qquad p_{m+n} = -\varphi,
$$

où φ est fonction des variables indépendantes, nous obtiendrons les équations :

$$
(42) \qquad p_1 = s_1\varphi, \quad p_2 = s_2\varphi, \quad \ldots, \quad p_{m+n-1} = s_{m+n-1}\varphi, \quad p_{m+n} = -\varphi.
$$

La fonction φ sera déterminée de manière que les conditions :

$$
\frac{\partial(s_i\varphi)}{\partial x_{m+n}} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = 0, \tag{43}
$$
$$
i = 1, 2, \ldots (m+n-1),
$$

soient satisfaites.

Grâce à ce que les relations :

$$
\frac{\partial(s_\lambda\varphi)}{\partial x_\mu} = \frac{\partial(s_\mu\varphi)}{\partial x_\lambda}, \tag{44}
$$
$$
\lambda, \mu = 1, 2, \ldots (m+n-1), \qquad \lambda \neq \mu,
$$

sont des conséquences des conditions (40) et (43), la fonction $\varphi = \gamma_n\varphi_0$, où φ_0 est une solution du système (43), présente un multiplicateur intégrant de l'équation (37) :

$$
dz = \gamma_n\varphi_0(s_1 dx_1 + s_2 dx_2 + \ldots + s_{m+n-1}dx_{m+n-1} - dx_{m+n}) = \gamma_n d\omega, \tag{45}
$$
$$
z = \gamma_n\omega + \gamma_{n+1}.
$$

Le système (43), ce qui est la même chose :

$$
\frac{\partial\theta}{\partial x_i} + s_i\frac{\partial\theta}{\partial x_{m+n}} = -\frac{\partial s_i}{\partial x_{m+n}}, \tag{46}
$$
$$
i = 1, 2, \ldots (m+n-1), \qquad \theta = \log\varphi.
$$

est, en vertu des conditions (40), un système complet d'équations linéaires avec des seconds membres (¹); il a toujours la solution φ_0.

Il arrive fréquemment que les solutions (34) du système (12) se trouvent facilement par conjecture. Quand le système (12) est homogène, sa solution :

$$
v_2 = \text{const.}, \qquad v_3 = \text{const.}, \qquad \ldots, \qquad v_n = \text{const.} \tag{47}
$$

mène à un nombre infini de solutions (34).

Nous avons parlé de l'intégration des systèmes jacobiens. Tous nos raisonnements et la méthode indiquée d'intégration sont applicables aux systèmes complets d'équations linéaires avec seconds membres et aux systèmes complets d'équations linéaires non homogènes.

(¹) E. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (Paris, 1921, pp. 89-94).

Exemple. — Considérons le système jacobien :

$$(\alpha_1) \qquad \begin{aligned} X_3(z) &= p_3 + \frac{x_5}{x_4} p_2 + p_6 = 0, \\ X_4(z) &= p_4 + \frac{x_2 - x_5}{x_4} p_2 + p_6 = 0, \\ X_5(z) &= p_5 + \frac{x_6}{x_4} p_2 - \frac{x_1}{x_5} p_1 = 0. \end{aligned}$$

Ajoutons aux équations (α_1) la condition :

$$(\alpha_2) \qquad p_2 - \lambda x_4 p_1 + \mu x_4 p_6 = 0.$$

Les égalités (α_1), (α_2) donnent le système :

$$(\alpha_3) \qquad \begin{aligned} Y_3(z) &= p_3 + \lambda x_5 p_1 + (1 - \mu x_5) p_6 = 0, \\ Y_4(z) &= p_4 - \lambda(x_2 - x_5) p_1 + [1 + \mu(x_2 - x_5)] p_6 = 0, \\ Y_5(z) &= p_5 + \left(\lambda x_6 - \frac{x_1}{x_5}\right) p_1 - \mu x_6 p_6 = 0, \\ Y\ (z) &= p_2 - \lambda x_4 p_1 + \mu x_4 p_6 = 0. \end{aligned}$$

La dernière équation (α_3) est en involution avec les trois premières aux conditions :

$$(\alpha_4) \qquad \begin{gathered} x_5 Y(\lambda) + x_4 Y_3(\lambda) = 0, \qquad (x_2 - x_5) Y(\lambda) - x_4 Y_4(\lambda) = 0, \\ \frac{\lambda x_4}{x_5} + \lambda \mu x_4 + x_6 Y(\lambda) + x_4 Y_5(\lambda) = 0, \\ x_5 Y(\mu) + x_4 Y_3(\mu) = 0, \qquad (x_2 - x_5) Y(\mu) - x_4 Y_4(\mu) = 0, \\ \mu^2 x_4 + x_6 Y(\mu) + x_4 Y_5(\mu) = 0. \end{gathered}$$

Les relations :

$$(\alpha_5) \qquad -\frac{d\mu}{\mu^2} = dx_5, \qquad \frac{1}{\mu} = x_5 + \text{const.}$$

permettent de prendre :

$$(\alpha_6) \qquad \mu = \frac{1}{x_5};$$

la relation :

$$(\alpha_7) \qquad \frac{d\lambda}{\lambda} + 2\frac{dx_5}{x_5} = 0$$

donne :

$$(\alpha_8) \qquad -\lambda = \frac{c}{x_5^2}.$$

Ayant substitué (α_6), (α_8) à (α_3), nous obtenons le système jacobien :

$$(\alpha_9) \qquad \begin{aligned} X_3(z) &= p_3 + \frac{c}{x_5} p_1 = 0, \\ X_4(z) &= p_4 - \frac{c}{x_5^2}(x_2 - x_3) p_1 + \frac{x_2}{x_5} p_6 = 0, \\ X_5(z) &= p_5 + \left(\frac{cx_6}{x_5^2} - \frac{x_1}{x_5}\right) p_1 - \frac{x_6}{x_5} p_6 = 0, \\ X_2(z) &= p_2 - \frac{cx_4}{x_5^2} p_1 + \frac{x_4}{x_5} p_6 = 0(*). \end{aligned}$$

En ajoutant la condition :

$$(\alpha_{10}) \qquad p_1 + x_5 \pi p_6 = 0$$

aux équations (α_9), nous viendrons au système :

$$(\alpha_{11}) \qquad \begin{aligned} Y_3(z) &= p_3 - c\pi p_6 = 0, \\ Y_4(z) &= p_4 + [x_2 + c(x_2 - x_3)\pi] \frac{p_6}{x_5} = 0, \\ Y_5(z) &= p_5 - \left[\frac{x_6}{x_5} + \left(\frac{cx_6}{x_5} - x_1\right)\pi\right] p_6 = 0, \\ Y_2(z) &= p_2 + \frac{x_4}{x_5}(1 + c\pi) p_6 = 0, \\ Y\,(z) &= p_1 + x_5 \pi p_6 = 0(**). \end{aligned}$$

La dernière équation (α_{11}) est en involution avec les quatre premières aux conditions :

$$(\alpha_{12}) \qquad \begin{aligned} &cY(\pi) + x_5 Y_3(\pi) = 0, \qquad c(x_2 - x_3) Y(\pi) - x_5^2 Y_4(\pi) = 0, \\ &\pi(1 + c\pi) + \left(\frac{cx_6}{x_5} - x_1\right) Y(\pi) + x_5 Y_5(\pi) = 0, \qquad cx_4 Y(\pi) = x_5^2 Y_2(\pi). \end{aligned}$$

D'après la relation :

$$(\alpha_{13}) \qquad \frac{d\pi}{\pi(1 + c\pi)} + \frac{dx_5}{x_5} = 0$$

(*) Les symboles $X(\ldots)$ en (α_9) sont différents des symboles $X(\ldots)$ en (α_1).
(**) Les symboles $Y(\ldots)$ en (α_{11}) sont différents des symboles $Y(\ldots)$ en (α_2).

nous prenons :

$$(\alpha_{14})\qquad \pi = \frac{1}{fx_5 - c}.$$

La substitution de (α_{14}) à (α_{11}) donne le système jacobien :

$$(\alpha_{15})\qquad \begin{aligned} &p_3 - \frac{c}{fx_5 - c}\,p_6 = 0,\\ &p_4 + \frac{fx_2 - c}{fx_5 - c}\,p_6 = 0,\\ &p_5 - \frac{fx_6 - x_1}{fx_5 - c}\,p_6 = 0,\\ &p_2 + \frac{fx_4}{fx_5 - c}\,p_6 = 0,\\ &p_1 + \frac{x_5}{fx_5 - c}\,p_6 = 0,\end{aligned}$$

dont l'intégration est équivalente à l'intégration de l'équation aux différentielles totales :

$$(\alpha_{16})\qquad (fx_5 - c)dx_6 = x_5dx_1 + fx_4dx_2 - cdx_3 + (fx_2 - c)dx_4 - (fx_6 - x_1)dx_5.$$

L'intégrale de l'équation (α_{16}) est :

$$(\alpha_{17})\qquad \begin{aligned} &x_6(fx_5 - c) = x_1x_5 + fx_2x_4 - c(x_3 + x_4) + \text{const.},\\ &f(x_6x_5 - x_2x_4) - c(x_6 - x_3 - x_4) - x_1x_5 = \text{const.}\end{aligned}$$

où :

$$(\alpha_{18})\qquad A_1(x_6x_5 - x_2x_4) + A_2(x_6 - x_3 - x_4) + x_1x_5 + A_3 = 0.$$

Les intégrales indépendantes du système (α_1) sont :

$$(\alpha_{19})\qquad \varphi_1 = x_6x_5 - x_2x_4,\qquad \varphi_2 = x_6 - x_3 - x_4,\qquad \varphi_3 = x_1x_5.$$

L'expression :

$$(\alpha_{20})\qquad z = C_1(x_6x_5 - x_2x_4) + C_2(x_6 - x_3 - x_4) + C_3x_1x_5 + C_4$$

est l'intégrale complète du système (α_1).

***

Les coefficients du système jacobien (35) dépendent du paramètre γ_1.

Si nous l'écrivons en la forme :

$$
(48) \qquad
\begin{aligned}
X_1(z) &= p_1 + b_1^1 p_{m+1} + \ldots + b_n^1 p_{m+n} = 0, \\
X_2(z) &= p_2 + b_1^2 p_{m+1} + \ldots + b_n^2 p_{m+n} = 0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
X_m(z) &= p_m + b_1^m p_{m+1} + \ldots + b_n^m p_{m+n} = 0, \\
Y(z) &= p_{m+1} - u_2 p_{m+2} - \ldots - u_n p_{m+n} = 0,
\end{aligned}
$$

nous obtiendrons un *système des systèmes complets successifs*[1], dans lequel seulement la dernière équation contient le paramètre γ_1.

Pour le système (48) sont réalisées les conditions :

$$
(49) \qquad
\begin{gathered}
X_i X_k(z) - X_k X_i(z) \equiv 0, \\
i, k = 1, 2, \ldots, m. \qquad i \neq k;
\end{gathered}
$$

$$
(50) \qquad
\begin{aligned}
X_1 Y(z) - Y X_1(z) &\equiv -Y(b_1^1)\, Y(z) \equiv \mu_1 Y(z), \\
X_2 Y(z) - Y X_2(z) &\equiv -Y(b_1^2)\, Y(z) \equiv \mu_2 Y(z), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
X_m Y(z) - Y X_m(z) &\equiv -Y(b_1^m)\, Y(z) \equiv \mu_m Y(z),
\end{aligned}
$$

où :

$$
(51) \qquad
\begin{gathered}
\mu_i = -Y(b_1^i), \\
i = 1, 2, \ldots, m.
\end{gathered}
$$

Nous serons convaincu de la justesse des relations (50), en vertu des identités

$$
(52) \qquad
\begin{gathered}
X_i(u_\rho) + Y(b_\rho^i) \equiv -u_\rho Y(b_1^i), \\
i = 1, 2, \ldots, m, \qquad \rho = 2, 3, \ldots, n.
\end{gathered}
$$

En effet :

$$
(53) \qquad
\begin{aligned}
X_i Y(z) - Y X_i(z) &\equiv -Y(b_1^i) p_{m+1} - \sum_{\rho=2}^{n} [X_i(u_\rho) - Y(b_\rho^i)] p_{m+\rho} \\
&\equiv -Y(b_1^i)\left(p_{m+1} - \sum_{\rho=2}^{n} u_\rho p_{m+\rho}\right) \equiv -Y(b_1^i) Y(z), \\
i &= 1, 2, \ldots, m.
\end{aligned}
$$

---

[1] G. PFEIFFER, *La généralisation de la méthode de Jacobi de l'intégration des systèmes complets d'équations linéaires et homogènes; généralisation des recherches correspondantes de Clebsch* (Acta math., B. 61, p. 215, 1933).

Désignons les intégrales indépendantes du système (1) :

(54) $$X_1(z) = 0, \qquad X_2(z) = 0, \qquad \ldots, \qquad X_m(z) = 0$$

par :

(55) $$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \qquad \varphi_n \equiv \varphi$$

et admettons que :

(56) $$Y(\varphi) \not\equiv 0;$$

alors la transformation infinitésimale :

(57) $$Z(z) = \frac{Y(z)}{Y(\varphi)}$$

est l'opérateur[1] du système (54), c'est-à-dire l'opérateur qui permute les intégrales du système (54) :

(58) $$\begin{aligned} Z(\varphi_1) &\equiv \omega_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots, \varphi_{n-1}, \quad \varphi, \quad \gamma_1), \\ Z(\varphi_2) &\equiv \omega_2(\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots, \varphi_{n-1}, \quad \varphi, \quad \gamma_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z(\varphi_{n-1}) &\equiv \omega_{n-1}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \quad \varphi, \quad \gamma_1), \\ Z(\varphi_n) &\equiv 1. \end{aligned}$$

---

(1) G. PFEIFFER, *La généralisation de la méthode de Jacobi, etc.* (Acta math., B. 61, pp. 211-215.

En substituant φ dans les connexions (49), (50), nous recevrons les identités :

$$\begin{aligned} X_1\, Y(\varphi) &\equiv \mu_1\, Y(\varphi), \\ X_2\, Y(\varphi) &\equiv \mu_2\, Y(\varphi), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_m Y(\varphi) &\equiv \mu_m Y(\varphi), \end{aligned}$$

ce qui est la même chose :

$$\begin{aligned} X_1\, (\log \sigma) &\equiv -\mu_1, \\ X_2\, (\log \sigma) &\equiv -\mu_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_m (\log \sigma) &\equiv -\mu_m, \end{aligned}$$

$$\sigma = \frac{1}{Y(\varphi)}.$$

Le système :

$$X_1(z) = 0, \qquad X_2(z) = 0, \qquad \ldots, \qquad X_m(z) = 0, \qquad Z(z) = \sigma Y(z) = 0$$

(*Voir suite de la note page suivante.*)

Les intégrales (55) ne contiennent pas le paramètre γ_1, mais l'opérateur (57) le contient.

En cherchant la fonction :

$$(59) \qquad \Theta(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi, \gamma_1)$$

de manière qu'elle soit l'intégrale du système (48) :

$$(60) \qquad X_1(z) = 0, \qquad X_2(z) = 0, \qquad \ldots, \qquad X_m(z) = 0, \qquad Z(z) = 0,$$

autrement dit, en intégrant l'équation :

$$(61) \qquad \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_1}\omega_1 + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_2}\omega_2 + \ldots + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_{n-1}}\omega_{n-1} + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = 0$$

et le système :

$$(62) \qquad \frac{d\varphi_1}{\omega_1} = \frac{d\varphi_2}{\omega_2} = \ldots = \frac{d\varphi_{n-1}}{\omega_{n-1}} = d\varphi,$$

nous trouvons que les intégrales indépendantes du système (48) :

$$(63) \qquad \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$$

ont la forme :

$$(64) \qquad \begin{aligned} \psi_1 &= \theta_1(\varphi_1, \ldots\ldots, \varphi_{n-1}, \varphi_n, \gamma_1), \\ \psi_2 &= \theta_2(\varphi_1, \ldots\ldots, \varphi_{n-1}, \varphi_n, \gamma_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_{n-1} &= \theta_{n-1}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi_n, \gamma_1). \end{aligned}$$

---

est jacobien ; outre le caractère (49), il possède le caractère :

$$X_j Z(z) - Z X_j(z) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

qui mène aux identités :

$$X_j Z(\varphi_i) \equiv 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \qquad i = 1, 2, \ldots (n-1).$$

Les expressions :

$$Z(\varphi_i) = \frac{Y(\varphi_i)}{Y(\varphi)}, \quad i = 1, 2, \ldots (n-1)$$

sont les intégrales du système (54) et, par suite, la transformation infinitésimale (57) est son opérateur.

Exemple. — Les intégrales indépendantes (α_{19}) du système (α_1) sont connues :

$$(\beta_1) \qquad \varphi_1 = x_6 x_5 - x_2 x_4, \qquad \varphi_2 = x_6 - x_3 - x_4, \qquad \varphi_3 = x_1 x_5.$$

En écrivant le système (α_9) sous la forme :

$$(\beta_2) \qquad \begin{aligned} X_3(z) &= p_3 + \frac{x_5}{x_4} p_2 + p_6 = 0, \\ X_4(z) &= p_4 - \frac{(x_2 - x_3)}{x_4} p_2 + p_6 = 0, \\ X_5(z) &= p_5 + \frac{x_6}{x_4} p_2 - \frac{x_1}{x_5} p_1 = 0, \\ Y(z) &= p_2 - \frac{c x_4}{x_5^2} p_1 + \frac{x_4}{x_5} p_6 = 0 \end{aligned}$$

et tenant compte de ce que :

$$(\beta_3) \qquad Y(\varphi_3) = -\frac{c x_4}{x_5} \not\equiv 0,$$

nous trouvons, laissant de côté le multiplicateur constant $-c$, que la transformation infinitésimale :

$$(\beta_4) \qquad Z(z) = \frac{x_5}{x_4} p_2 - \frac{c}{x_5} p_1 + p_6$$

est l'opérateur du système (α_1) :

$$(\beta_5) \qquad \begin{aligned} Z(\varphi_1) &\equiv 0, \\ Z(\varphi_2) &= 1, \\ Z(\varphi_3) &= -c. \end{aligned}$$

L'intégration de l'équation :

$$(\beta_6) \qquad 0 \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_2} - c \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_3} = 0$$

et du système :

$$(\beta_7) \qquad \frac{d\varphi_1}{0} = \frac{d\varphi_2}{1} = \frac{d\varphi_3}{-c},$$

donne les intégrales indépendantes du système (α_9) :

$$(\beta_8) \qquad \psi_1 = \varphi_1 = x_6 x_5 - x_2 x_4, \qquad \psi_2 = \varphi_3 + c\varphi_2 = x_1 x_5 + c(x_6 - x_3 - x_4).$$

Ayant les intégrales indépendantes (β_8) du système (α_9), nous récrirons de nouveau le système (α_{15}) en forme :

$$(\beta_9)\qquad \begin{aligned} X_3(z) &= p_3 + \frac{c}{x_5} p_1 = 0, \\ X_4(z) &= p_4 - \frac{c}{x_5^2}(x_2 - x_3) p_1 + \frac{x_2}{x_5} p_6 = 0, \\ X_5(z) &= p_5 + \left(\frac{cx_6}{x_5^2} - \frac{x_1}{x_5}\right) p_1 - \frac{x_6}{x_5} p_6 = 0, \\ X_2(z) &= p_2 - \frac{cx_4}{x_5^2} p_1 + \frac{x_4}{x_5} p_6 = 0, \\ Y(z) &= p_1 + \frac{x_5}{fx_5 - c} p_6 = 0. \end{aligned}$$

En tenant compte de :

$$(\beta_{10})\qquad Y(\psi_2) = \frac{fx_5^2}{fx_5 - c} \not\equiv 0,$$

on trouve, laissant de côté le multiplicateur constant f, que la transformation infinitésimale :

$$(\beta_{11})\qquad Z(z) = \frac{fx_5 - c}{x_5^2} p_1 + \frac{1}{x_5} p_6$$

est l'opérateur du système (α_9) :

$$(\beta_{12})\qquad \begin{aligned} Z(\psi_1) &= 1, \\ Z(\psi_2) &= f. \end{aligned}$$

L'intégration de l'équation :

$$(\beta_{13})\qquad \begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial\psi_1} + f\frac{\partial\theta}{\partial\psi_2} &= 0, \\ d\psi_1 &= \frac{d\psi_2}{f}, \end{aligned}$$

donne l'intégrale du système (α_{15}) :

$$(\beta_{14})\qquad \chi_1 = f(x_6 x_5 - x_2 x_4) - c(x_6 - x_3 - x_4) - x_1 x_5,$$

qui mène immédiatement à l'intégrale complète (α_{20}) du système (α_1).

* * *

La méthode spéciale d'intégration des systèmes complets d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre a sans doute un joint avec la méthode de Jacobi-Mayer[1] et sa généralisation[2]. C'est pourquoi nous appliquons la méthode de Jacobi-Mayer et sa généralisation à l'intégration du système (1) :

$$F_i = X_i(z) = p_i + b^i_1 p_{m+1} + \dots + b^i_n p_{m+n} = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, m, \tag{65}$$

non sans quelques variantes. En ajoutant au système (65) la relation :

$$f = f(x_1, \dots, x_m, \quad x_{m+1}, \dots, x_{m+n}, \quad p_{m+1}, \dots, p_{m+n}) = a, \tag{66}$$

exigeons que les équations (65), (66) fournissent un système complet. Pour cela, il est nécessaire que les parenthèses de Poisson :

$$(F_i, f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} b^i_j \frac{\partial f}{\partial x_{m+j}} - \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial b^i_h}{\partial x_{m+j}} p_{m+h}\right)\frac{\partial f}{\partial p_{m+j}} = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, m, \tag{67}$$

soient nulles en vertu des relations (65), (66). Puisque les relations (67) ne contiennent ni p_i ni a, elles doivent être nulles identiquement.

Le système (67) est jacobien[3]. Il possède $2n$ intégrales indépendantes qui peuvent être linéaires en p_{m+j}, peuvent ne pas les contenir, mais peuvent aussi être non linéaires en p_{m+j}. La dernière circonstance est évidente, une fonction des intégrales étant aussi une intégrale. La marche ultérieure des raisonnements est claire.

Exemple. — Intégrons le système (α_1) :

$$(\alpha_1) \qquad \begin{aligned} & p_3 + \frac{x_5}{x_4} p_2 + p_6 = 0, \\ & p_4 - \frac{x_2 - x_5}{x_4} p_2 + p_6 = 0, \\ & p_5 + \frac{x_6}{x_4} p_2 - \frac{x_1}{x_3} p_1 = 0. \end{aligned}$$

---

(1) Ed. GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (Paris, 1921, pp. 266-293).

A. FORSYTH, *Theory of differential equations* (Cambridge, 1906, vol. V, pp. 117-131).

(2) G. PFEIFFER, *La généralisation de la méthode de Jacobi-Mayer de l'intégration des équations non linéaires et des systèmes d'équations non linéaires aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue* (Acta math., B. 61, pp. 239-261, 1933).

(3) Ed, GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (Paris, 1921, pp. 274-275).

En ajoutant l'égalité :

$$(\gamma_2)\qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_6, \quad p_1, p_2, p_6) = a,$$

exigeons que les équations (γ_1), (γ_2) fournissent un système complet :

$$(\gamma_3)\qquad \begin{aligned} X(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_3} + \frac{x_5}{x_4}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_6} = 0,\\ Y(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_4} - \frac{x_2 - x_5}{x_4}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_6} + \frac{p_2}{x_4}\frac{\partial f}{\partial p_2} = 0,\\ Z(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_5} + \frac{x_6}{x_4}\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{x_1}{x_5}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{p_1}{x_5}\frac{\partial f}{\partial x_4} - \frac{p_2}{x_4}\frac{\partial f}{\partial p_6} = 0. \end{aligned}$$

Les intégrales de la première équation du système jacobien (γ_3) sont :

$$(\gamma_4)\qquad \varphi_3 = x_1, \quad \varphi_4 = x_4, \quad \varphi_5 = x_5, \quad \varphi_6 = p_1, \quad \varphi_7 = p_2, \quad \varphi_8 = p_6$$

et :

$$(\gamma_5)\qquad \varphi_1 = x_2 x_4 - x_3 x_5, \qquad \varphi_2 = x_6 - x_3.$$

φ_1, φ_2 étant les intégrales du système :

$$(\gamma_6)\qquad dx_3 = \frac{x_4\, dx_2}{x_5} = dx_6.$$

Attendu que :

$$(\gamma_7)\qquad \begin{gathered} Y(\varphi_1) = \varphi_5, \qquad Y(\varphi_2) = 1, \qquad Y(\varphi_4) = 1, \qquad Y(\varphi_7) = \frac{\varphi_7}{\varphi_4},\\ Y(\varphi_3) = Y(\varphi_5) = Y(\varphi_6) = Y(\varphi_8) = 0, \end{gathered}$$

les intégrales communes aux deux premières équations (γ_3) sont :

$$(\gamma_8)\qquad \psi_4 = \varphi_3, \qquad \psi_5 = \varphi_5, \qquad \psi_6 = \varphi_6, \qquad \psi_7 = \varphi_8$$

et :

$$(\gamma_9)\qquad \psi_1 = \varphi_2\varphi_5 - \varphi_1, \qquad \psi_2 = \varphi_2 - \varphi_4, \qquad \psi_3 = \frac{\varphi_7}{\varphi_4}.$$

ψ_1, ψ_2, ψ_3 étant les intégrales de l'équation :

$$(\gamma_{10})\qquad Y(\theta) = \varphi_5\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_1} + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_2} + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_4} + \frac{\varphi_7}{\varphi_4}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_7} = 0.$$

ou, ce qui est la même chose, du système :

$$(\gamma_{11}) \qquad \frac{d\varphi_1}{\varphi_5} = d\varphi_2 = d\varphi_4 = \frac{\varphi_4 d\varphi_7}{\varphi_7}.$$

Vu que :

$$(\gamma_{12}) \qquad \begin{gathered} Z(\varphi_1) = \varphi_2, \quad Z(\varphi_3) = -\frac{\varphi_3}{\varphi_5}, \quad Z(\varphi_5) = 1, \quad Z(\varphi_6) = \frac{\varphi_6}{\varphi_5}, \quad Z(\varphi_8) = -\frac{\varphi_7}{\varphi_4}, \\ Z(\varphi_2) = Z(\varphi_4) = Z(\varphi_7) = 0 \end{gathered}$$

et, par conséquent :

$$(\gamma_{13}) \qquad \begin{gathered} Z(\psi_4) = -\frac{\psi_4}{\psi_5}, \quad Z(\psi_5) = 1, \quad Z(\psi_6) = \frac{\psi_6}{\psi_5}, \quad Z(\psi_7) = -\psi_3, \\ Z(\psi_1) = Z(\psi_2) = Z(\psi_3) = 0, \end{gathered}$$

les intégrales communes aux trois équations du système (γ_3) sont :

$$(\gamma_{14}) \qquad \begin{gathered} \chi_4 = \psi_1 = \varphi_2\varphi_5 - \varphi_1 = x_5 x_6 - x_2 x_4, \\ \chi_5 = \psi_2 = \varphi_2 - \varphi_4 = x_6 - x_3 - x_4, \qquad \chi_6 = \psi_3 = \frac{\varphi_7}{\varphi_4} = \frac{p_2}{x_4} \end{gathered}$$

et :

$$(\gamma_{15}) \qquad \begin{gathered} \chi_1 = \psi_4\psi_5 = \varphi_3\varphi_5 = x_1 x_5, \qquad \chi_2 = \frac{\psi_6}{\psi_5} = \frac{\varphi_6}{\varphi_5} = \frac{p_1}{x_5}, \\ \chi_3 = \psi_7 + \psi_3\psi_5 = \varphi_3 + \frac{\varphi_5\varphi_7}{\varphi_4} = p_6 + \frac{x_5}{x_4} p_2, \end{gathered}$$

χ_1, χ_2, χ_3 étant les intégrales de l'équation :

$$(\gamma_{16}) \qquad Z(\theta) = -\frac{\psi_4}{\psi_5}\frac{\partial\theta}{\partial\psi_4} + \frac{\partial\theta}{\partial\psi_5} + \frac{\psi_6}{\psi_5}\frac{\partial\theta}{\partial\psi_6} - \psi_3\frac{\partial\theta}{\partial\psi_7} = 0,$$

ou, ce qui est la même chose, du système :

$$(\gamma_{17}) \qquad \frac{\psi_5 d\psi_4}{-\psi_4} = d\psi_5 = \frac{\psi_5 d\psi_6}{\psi_6} = \frac{d\psi_7}{-\psi_3}.$$

On peut prendre l'égalité (γ_2) en diverses formes :

$$(\gamma_{18}) \qquad \frac{p_2}{x_4} = a, \qquad \frac{p_1}{x_5} = a, \qquad p_6 + \frac{x_5}{x_4} p_2 = a,$$

linéaires aux dérivées et aussi non linéaires.

Profitant de la première relation (γ_{18}), nous passons du système (γ_1) au système :

$$(\gamma_{19})\qquad \begin{aligned} &p_2 - ax_4 = 0,\\ &p_3 + p_6 + ax_5 = 0,\\ &p_4 + p_6 - a(x_2 - x_3) = 0,\\ &p_5 - \frac{x_4}{x_5}p_1 + ax_6 = 0. \end{aligned}$$

En ajoutant l'égalité :

$$(\gamma_{20})\qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_6, \quad p_1, p_6) = b,$$

exigeons que le système (γ_{19}), (γ_{20}) soit complet :

$$(\gamma_{21})\qquad \begin{aligned} &X_1(f) = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \qquad X_2(f) = \frac{\partial f}{\partial x_3} + \frac{\partial f}{\partial x_6} = 0,\\ &Y(f) = \frac{\partial f}{\partial x_4} + \frac{\partial f}{\partial x_6} = 0, \qquad Z(f) = \frac{\partial f}{\partial x_5} - \frac{x_1}{x_5}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{p_1}{x_5}\frac{\partial f}{\partial p_1} - a\frac{\partial f}{\partial p_6} = 0. \end{aligned}$$

Les intégrales des deux premières équations (γ_{21})(*) sont :

$$(\gamma_{22})\qquad \varphi_2 = x_1, \qquad \varphi_3 = x_4, \qquad \varphi_4 = x_5, \qquad \varphi_5 = p_1, \qquad \varphi_6 = p_6$$

et :

$$(\gamma_{23})\qquad \varphi_1 = x_6 - x_3,$$

φ_1 étant l'intégrale de l'équation :

$$(\gamma_{24})\qquad dx_3 = dx_6.$$

Puisque :

$$(\gamma_{25})\qquad \begin{aligned} &Y(\varphi_1) = 1, \qquad Y(\varphi_3) = 1,\\ &Y(\varphi_2) = Y(\varphi_4) = Y(\varphi_5) = Y(\varphi_6) = 0, \end{aligned}$$

les intégrales communes aux trois premières équations (γ_{21}) sont :

$$(\gamma_{26})\qquad \psi_2 = \varphi_2, \qquad \psi_3 = \varphi_4, \qquad \psi_4 = \varphi_5, \qquad \psi_5 = \varphi_6$$

et :

$$(\gamma_{27})\qquad \psi_1 = \varphi_1 - \varphi_3;$$

(*) Les φ, ψ, χ nouveaux ne sont pas les mêmes que les précédents.

ψ_1 est l'intégrale de l'équation :

$$(\gamma_{28}) \qquad \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_3} = 0,$$

ou, ce qui est la même chose, de l'équation :

$$(\gamma_{29}) \qquad d\varphi_1 = d\varphi_3.$$

Dès que :

$$(\gamma_{30}) \qquad Z(\varphi_2) = -\frac{\varphi_2}{\varphi_4}, \qquad Z(\varphi_4) = 1, \qquad Z(\varphi_5) = \frac{\varphi_5}{\varphi_4}, \qquad Z(\varphi_6) = -a,$$
$$Z(\varphi_1) = Z(\varphi_3) = 0$$

et, par conséquent :

$$(\gamma_{31}) \qquad Z(\psi_2) = -\frac{\psi_2}{\psi_3}, \qquad Z(\psi_3) = 1, \qquad Z(\psi_4) = \frac{\psi_4}{\psi_3}, \qquad Z(\psi_5) = -a,$$
$$Z(\psi_1) = 0,$$

les intégrales communes aux quatre équations du système (γ_{21}) sont :

$$(\gamma_{32}) \qquad \chi_4 = \psi_1 = \varphi_1 - \varphi_3 = x_6 - x_3 - x_4$$

et :

$$(\gamma_{33}) \qquad \chi_1 = \psi_2\psi_3 = \varphi_2\varphi_4 = x_1x_5, \qquad \chi_2 = \frac{\psi_4}{\psi_3} = \frac{\varphi_5}{\varphi_4} = \frac{p_1}{x_5},$$
$$\chi_3 = \psi_5 + a\psi_3 = \varphi_6 + a\varphi_4 = p_6 + ax_5,$$

χ_1, χ_2, χ_3 étant les intégrales de l'équation :

$$(\gamma_{34}) \qquad Z(\theta) = -\frac{\psi_2}{\psi_3}\frac{\partial \theta}{\partial \psi_2} + \frac{\partial \theta}{\partial \psi_3} + \frac{\psi_4}{\psi_3}\frac{\partial \theta}{\partial \psi_4} - a\frac{\partial \theta}{\partial \psi_5} = 0,$$

ou, ce qui est la même chose, du système :

$$(\gamma_{35}) \qquad \frac{\psi_3 d\psi_2}{-\psi_2} = d\psi_3 = \frac{\psi_3 d\psi_4}{\psi_4} = \frac{d\psi_5}{-a}.$$

Profitant de l'égalité (γ_{20}) en la forme :

$$(\gamma_{36}) \qquad p_6 + ax_5 = b,$$

nous passons du système (γ_{19}) au système :

$$
(\gamma_{37})\qquad
\begin{aligned}
&p_2 - ax_4 = 0,\\
&p_3 + b = 0,\\
&p_4 - ax_2 + b = 0,\\
&p_5 - \frac{x_1}{x_5}p_1 + ax_6 = 0,\\
&p_6 + ax_5 - b = 0.
\end{aligned}
$$

En ajoutant la relation :

$$
(\gamma_{38})\qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_6, \quad p_1) = c,
$$

exigeons que le système (γ_{37}), (γ_{38}) soit complet :

$$
(\gamma_{39})\qquad
\begin{aligned}
&X_1(f) = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \qquad X_2(f) = \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0, \qquad X_3(f) = \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0,\\
&X_4(f) = \frac{\partial f}{\partial x_6} = 0. \qquad Y(f) = \frac{\partial f}{\partial x_5} - \frac{x_1}{x_5}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{p_1}{x_5}\frac{\partial f}{\partial p_1} = 0.
\end{aligned}
$$

Les intégrales du système (γ_{39}) sont :

$$
(\gamma_{40})\qquad \varphi_1 = x_1x_5, \qquad \varphi_2 = \frac{p_1}{x_5}.
$$

Profitant de la relation (γ_{38}) sous la forme :

$$
(\gamma_{41})\qquad p_1 = cx_5,
$$

nous parvenons au système :

$$
(\gamma_{42})\qquad
\begin{aligned}
&p_1 = cx_5, \qquad p_2 = ax_4, \qquad p_3 = -b, \qquad p_4 = ax_2 - b,\\
&p_5 = cx_1 - ax_6, \qquad p_6 = -ax_5 + b.
\end{aligned}
$$

Ainsi on trouve que l'intégrale complète du système (γ_1) est :

$$
(\gamma_{43})\qquad Z = a(x_2x_4 - x_5x_6) + b(x_6 - x_3 - x_4) + cx_1x_5 + d.
$$

Son intégrale générale est :

$$
(\gamma_{44})\qquad Z = \Phi(x_2x_4 - x_5x_6, \quad x_6 - x_3 - x_4, \quad x_1x_5),
$$

où Φ est fonction arbitraire des arguments.

* * *

En intégrant le système (65) d'après la méthode de Jacobi-Mayer et sa généralisation, admettons la supposition que la relation (66) est linéaire en dérivées $p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_{m+n}$ (¹); alors

$$f = Y(z) = a_1 p_{m+1} + a_2 p_{m+2} + \ldots + a_n p_{m+n} = a. \tag{68}$$

Les coefficients :

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \tag{69}$$

sont des fonctions des variables indépendantes; alors

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial a_h}{\partial x_i} p_{m+h}, \tag{70}$$
$$i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_{m+j}} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial a_h}{\partial x_{m+j}} p_{m+h}, \qquad \frac{\partial f}{\partial p_{m+j}} = a_j, \tag{71}$$
$$j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ayant substitué (70), (71) dans (67), nous trouverons :

$$\sum_{h=1}^{n} \left[\frac{\partial a_h}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \left(b_j^i \frac{\partial a_h}{\partial x_{m+j}} - a_j \frac{\partial b_h^i}{\partial x_{m+j}} \right) \right] p_{m+h} = 0, \tag{72}$$
$$i = 1, 2, \ldots, m,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\sum_{h=1}^{n} [X_i(a_h) - Y(b_h^i)] p_{m+h} = 0, \tag{73}$$
$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

Attendu que les dérivées $p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_{m+n}$ dans le système (67) sont des variables indépendantes, essayons de satisfaire les systèmes (72), (73), en apprêtant les coefficients (69) de telle manière que soient remplies les égalités du système :

$$\begin{aligned} X_1(a_h) &= Y(b_h^1), \\ X_2(a_h) &= Y(b_h^2), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ X_m(a_h) &= Y(b_h^m), \\ h &= 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{74}$$

(¹) On peut aussi faire une telle supposition au cas où le système à intégrer est un système complet d'équations linéaires avec des seconds membres ou un système complet d'équations non homogènes.

Le système (74) est le système jacobien généralisé, dont l'intégration est équivalente à l'intégration du système d'équations linéaires homogènes :

$$(75)\qquad \begin{gathered} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} b_j^i \frac{\partial f}{\partial x_{m+j}} + \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial b_1^i}{\partial x_{m+j}}\right) \frac{\partial f}{\partial a_1} \\ + \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial b_2^i}{\partial x_{m+j}}\right) \frac{\partial f}{\partial a_2} + \ldots + \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial b_n^i}{\partial x_{m+j}}\right) \frac{\partial f}{\partial a_n} = 0, \\ i = 1, 2, \ldots, m, \end{gathered}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(76)\qquad \begin{gathered} X_i(f) + \sum_{h=1}^{n} Y(b_h^i) \frac{\partial f}{\partial a_h} = 0, \\ i = 1, 2, \ldots, m. \end{gathered}$$

Montrons que d'après les conditions (3) :

$$(77)\qquad \begin{gathered} X_k(b_\nu^i) \equiv X_i(b_\nu^k), \\ i, k = 1, 2, \ldots, m, \qquad i \neq k, \\ \nu = 1, 2, \ldots, n, \end{gathered}$$

$$(78)\qquad X_k(b_\nu^i) = \frac{\partial b_\nu^i}{\partial x_k} + \sum_{h=1}^{n} b_h^k \frac{\partial b_\nu^i}{\partial x_{m+h}}, \qquad X_i(b_\nu^k) = \frac{\partial b_\nu^k}{\partial x_i} + \sum_{h=1}^{n} b_h^i \frac{\partial b_\nu^k}{\partial x_{m+h}},$$

desquelles sortent les identités :

$$(79)\qquad \begin{gathered} \frac{\partial}{\partial x_{m+g}} X_k(b_\nu^i) \equiv \frac{\partial}{\partial x_{m+g}} X_i(b_\nu^k), \\ i, k = 1, 2, \ldots, m, \qquad i \neq k, \\ \nu = 1, 2, \ldots, n, \qquad g = 1, 2, \ldots, n, \end{gathered}$$

$$(80)\qquad \begin{gathered} \frac{\partial}{\partial x_{m+g}} X_k(b_\nu^i) = \frac{\partial^2 b_\nu^i}{\partial x_k \partial x_{m+g}} + \sum_{h=1}^{n} \left(b_h^k \frac{\partial^2 b_\nu^i}{\partial x_{m+h} \partial x_{m+g}} + \frac{\partial b_h^k}{\partial x_{m+g}} \frac{\partial b_\nu^i}{\partial x_{m+h}} \right), \\ \frac{\partial}{\partial x_{m+g}} X_i(b_\nu^k) = \frac{\partial^2 b_\nu^k}{\partial x_i \partial x_{m+g}} + \sum_{h=1}^{n} \left(b_h^i \frac{\partial^2 b_\nu^k}{\partial x_{m+h} \partial x_{m+g}} + \frac{\partial b_h^i}{\partial x_{m+g}} \frac{\partial b_\nu^k}{\partial x_{m+h}} \right), \end{gathered}$$

le système (75)-(76) est jacobien. Pour s'en convaincre, prenons deux équations (76), n'importe lesquelles :

$$
(81)\qquad
\begin{aligned}
Z_i(f) &= X_i(f) + \sum_{h=1}^{n} Y(b_h^i)\frac{\partial f}{\partial a_h} = 0,\\
Z_k(f) &= X_k(f) + \sum_{h=1}^{n} Y(b_h^k)\frac{\partial f}{\partial a_h} = 0.
\end{aligned}
$$

D'après les relations (3)-(77) nous voyons immédiatement que :

$$
(82)\qquad
\begin{gathered}
Z_k(b_\nu^i) \equiv Z_i(b_\nu^k),\\
i, k = 1, 2, \ldots, m, \qquad i \neq k,\\
\nu = 1, 2, \ldots, n,
\end{gathered}
$$

parce que :

$$
(83)\qquad Z_k(b_\nu^i) \equiv X_k(b_\nu^i), \qquad Z_i(b_\nu^k) \equiv X_i(b_\nu^k).
$$

Aux identités :

$$
(84)\qquad
\begin{gathered}
Z_k Y(b_\nu^i) \equiv Z_i Y(b_\nu^k),\\
i, k = 1, 2, \ldots, m, \qquad i \neq k,\\
\nu = 1, 2, \ldots, n,
\end{gathered}
$$

nous parviendrons de la manière suivante.

Dès que :

$$
Z_k Y(b_\nu^i) = X_k Y(b_\nu^i) + \sum_{h=1}^{n} Y(b_h^k)\frac{\partial}{\partial a_h} Y(b_\nu^i),
$$

$$
Y(b_\nu^i) = \sum_{g=1}^{n} a_g \frac{\partial b_\nu^i}{\partial x_{m+g}}, \qquad \frac{\partial Y(b_\nu^i)}{\partial a_h} = \frac{\partial b_\nu^i}{\partial x_{m+h}}, \qquad Y(b_h^k) = \sum_{g=1}^{n} a_g \frac{\partial b_h^k}{\partial x_{m+g}},
$$

$$
\sum_{h=1}^{n} Y(b_h^k)\frac{\partial}{\partial a_h} Y(b_\nu^i) = \sum_{g=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} a_g \frac{\partial b_h^k}{\partial x_{m+g}}\frac{\partial b_\nu^i}{\partial x_{m+h}},
$$

$$
X_k Y(b_\nu^i) = \sum_{g=1}^{n} a_g X_k\left(\frac{\partial b_\nu^i}{\partial x_{m+g}}\right) \overset{(*)}{=} \sum_{g=1}^{n} a_g \left(\frac{\partial^2 b_\nu^i}{\partial x_k \partial x_{m+g}} + \sum_{h=1}^{n} b_h^k \frac{\partial b_\nu^i}{\partial x_{m+h}\partial x_{m+g}}\right),
$$

$$
Z_k Y(b_\nu^i) = \sum_{g=1}^{n} a_g \left[\frac{\partial^2 b_\nu^i}{\partial x_k \partial x_{m+g}} + \sum_{h=1}^{n}\left(b_h^k \frac{\partial^2 b_\nu^i}{\partial x_{m+h}\partial x_{m+g}} + \frac{\partial b_h^k}{\partial x_{m+g}}\frac{\partial b_\nu^i}{\partial x_{m+h}}\right)\right],
$$

(*) On doit avoir égard à ce que, dans les équations (81), $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des variables indépendantes.

nous avons, par (78), l'égalité ;

$$\mathrm{Z}_k \mathrm{Y}(b^i_\nu) = \sum_{g=1}^{n} a_g \frac{\partial \mathrm{X}_k(b^i_\nu)}{\partial x_{m+g}} \tag{85}$$

et l'égalité analogue :

$$\mathrm{Z}_i \mathrm{Y}(b^k_\nu) = \sum_{g=1}^{n} a_g \frac{\partial \mathrm{X}_i(b^k_\nu)}{\partial x_{m+g}}. \tag{86}$$

De là on voit qu'avec les conditions (77) les identités (84) sont justes.

Ainsi, aux conditions (3)-(77) le système (75)-(76) est jacobien ; le système (74) a toujours une solution.

Attendu que, dans la relation (68), entre la constante arbitraire a, il suffit de prendre pour les coefficients (69), en intégrant le système (1)-(65), par la méthode exposée, la solution particulière du système (74), ne contenant pas de constantes arbitraires.

Exemple. — Intégrons le système (α_1)-(γ_1) :

$$(\delta_1)\qquad \begin{aligned} \mathrm{X}_3(z) &= p_3 + \frac{x_5}{x_4} p_2 + p_6 = 0, \\ \mathrm{X}_4(z) &= p_4 - \frac{(x_2 - x_5)}{x_4} p_2 + p_6 = 0, \\ \mathrm{X}_5(z) &= p_5 + \frac{x_6}{x_4} p_2 - \frac{x_1}{x_5} p_1 = 0. \end{aligned}$$

En ajoutant l'égalité :

$$(\delta_2)\qquad \mathrm{Y}(z) = a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_6 p_6 = a,$$

exigeons que les équations (δ_1), (δ_2), fournissent un système complet.

Les coefficients :

$$(\delta_3)\qquad a_1,\ a_2,\ a_6$$

doivent être les solutions du système (74), qui d'après :

$$(\delta_4)\qquad \begin{array}{lll} b^3_1 = 0, & b^3_2 = \dfrac{x_5}{x_4}, & b^3_6 = 1, \\ b^4_1 = 0, & b^4_2 = -\dfrac{(x_2 - x_5)}{x_4}, & b^4_6 = 1, \\ b^5_1 = -\dfrac{x_1}{x_5}, & b^5_2 = \dfrac{x_6}{x_4}, & b^5_6 = 0 \end{array}$$

et

$$
(\delta_5) \qquad
\begin{array}{lll}
Y(b_1^3) = 0, & Y(b_2^3) = 0, & Y(b_6^3) = 0, \\
Y(b_1^4) = 0, & Y(b_2^4) = -\dfrac{a_2}{x_4}, & Y(b_6^4) = 0, \\
Y(b_1^5) = -\dfrac{a_1}{x_5}, & Y(b_2^5) = \dfrac{a_6}{x_4}, & Y(b_6^5) = 0\,(*),
\end{array}
$$

a l'aspect :

$$
(\delta_6) \qquad
\begin{array}{lll}
X_3(a_1) = 0, & X_3(a_2) = 0, & X_3(a_6) = 0, \\
X_4(a_1) = 0, & X_4(a_2) = -\dfrac{a_2}{x_4}, & X_4(a_6) = 0, \\
X_5(a_1) = -\dfrac{a_1}{x_5}, & X_5(a_2) = \dfrac{a_6}{x_4}, & X_5(a_6) = 0.
\end{array}
$$

Le système (δ_6) possède la solution particulière évidente à deux constantes arbitraires λ, μ :

$$
(\delta_7) \qquad a_1 = \frac{\lambda}{x_5}, \qquad a_2 = \frac{\mu}{x_4}, \qquad a_6 = 0,
$$

qui permet d'écrire deux solutions particulières tout à fait simples, ne contenant pas de constantes arbitraires :

$$
(\delta_8) \qquad a_1 = 0, \qquad a_2 = \frac{1}{x_4}, \qquad a_6 = 0,
$$

$$
(\delta_9) \qquad a_1 = \frac{1}{x_5}, \qquad a_2 = 0, \qquad a_6 = 0.
$$

Aux solutions (δ_8), (δ_9), correspondent les égalités (δ_2) :

$$
(\delta_{10}) \qquad p_2 = ax_4, \qquad p_1 = ax_5,
$$

identiques aux deux premières (γ_{18}).

Profitant de la première relation (δ_{10}), nous passerons du système (α_1)-(γ_1)-(δ_1) au système (γ_{19}) et ainsi de suite.

Si nous voulons trouver l'intégrale générale du système (δ_6), ou un plus grand

(*) Les indices inférieurs des coefficients b et les indices des coefficients a sont les mêmes que les indices des dérivées correspondantes p.

nombre de solutions particulières que l'on peut remarquer immédiatement, nous serons obligé d'intégrer le système (76) :

$$(\delta_{11})\qquad \begin{aligned} \Xi(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_3} + \frac{x_5}{x_4}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_6} = 0, \\ \mathrm{Y}(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_4} - \frac{x_2 - x_5}{x_4}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_6} - \frac{a_2}{x_4}\frac{\partial f}{\partial a_2} = 0, \\ \mathrm{Z}(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_5} + \frac{x_6}{x_4}\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{x_4}{x_5}\frac{\partial f}{\partial x_4} - \frac{a_4}{x_5}\frac{\partial f}{\partial a_4} + \frac{a_2}{x_4}\frac{\partial f}{\partial a_2} = 0. \end{aligned}$$

Les intégrales de la première équation (δ_{11}) sont :

$$(\delta_{12})\qquad \varphi_3 = x_1,\quad \varphi_4 = x_4,\quad \varphi_5 = x_5,\quad \varphi_6 = a_1,\quad \varphi_7 = a_2,\quad \varphi_8 = a_6$$

et

$$(\delta_{13})\qquad \varphi_1 = x_2 x_4 - x_3 x_5,\qquad \varphi_2 = x_6 - x_3,$$

φ_1, φ_2 étant les intégrales du système :

$$(\delta_{14})\qquad dx_3 = \frac{x_4\, dx_2}{x_5} = dx_6.$$

Attendu que :

$$(\delta_{15})\qquad \begin{gathered} \mathrm{Y}(\varphi_1) = \varphi_5,\qquad \mathrm{Y}(\varphi_2) = 1,\qquad \mathrm{Y}(\varphi_4) = 1,\qquad \mathrm{Y}(\varphi_7) = -\frac{\varphi_7}{\varphi_4}, \\ \mathrm{Y}(\varphi_3) = \mathrm{Y}(\varphi_5) = \mathrm{Y}(\varphi_6) = \mathrm{Y}(\varphi_8) = 0, \end{gathered}$$

les intégrales communes aux deux premières équations (δ_{11}) sont :

$$(\delta_{16})\qquad \psi_4 = \varphi_3,\qquad \psi_5 = \varphi_5,\qquad \psi_6 = \varphi_6,\qquad \psi_7 = \varphi_8$$

et

$$(\delta_{17})\qquad \psi_1 = \varphi_1 - \varphi_2\varphi_5,\qquad \psi_2 = \varphi_4 - \varphi_2,\qquad \psi_3 = \varphi_4\varphi_7,$$

ψ_1, ψ_2, ψ_3 étant les intégrales de l'équation :

$$(\delta_{18})\qquad \mathrm{Y}(\theta) = \varphi_5\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_1} + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_2} + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_4} - \frac{\varphi_7}{\varphi_4}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_7} = 0$$

ou, ce qui est la même chose, du système :

$$(\delta_{19})\qquad \frac{d\varphi_1}{\varphi_5} = d\varphi_2 = d\varphi_4 = \frac{\varphi_4\, d\varphi_7}{-\varphi_7}.$$

Vu que

$$(\delta_{20})\qquad \begin{gathered} Z(\varphi_1)=\varphi_2, \qquad Z(\varphi_3)=-\frac{\varphi_3}{\varphi_5},\\ Z(\varphi_5)=1, \qquad Z(\varphi_6)=-\frac{\varphi_6}{\varphi_5}, \qquad Z(\varphi_7)=\frac{\varphi_8}{\varphi_4},\\ Z(\varphi_2)=Z(\varphi_4)=Z(\varphi_8)=0 \end{gathered}$$

et, par conséquent,

$$(\delta_{21})\qquad \begin{gathered} Z(\psi_3)=\psi_7, \qquad Z(\psi_4)=-\frac{\psi_4}{\psi_5}, \qquad Z(\psi_5)=1, \qquad Z(\psi_6)=-\frac{\psi_6}{\psi_5},\\ Z(\psi_1)=Z(\psi_2)=Z(\psi_7)=0, \end{gathered}$$

les intégrales communes aux trois équations du système (δ_{11}) sont :

$$(\delta_{22})\qquad \begin{aligned} \chi_4&=\psi_1=\varphi_1-\varphi_2\varphi_5=x_2x_4-x_5x_6,\\ \chi_5&=\psi_2=\varphi_4-\varphi_2=-(x_6-x_3-x_4),\\ \chi_6&=\psi_7=\varphi_8=a_6 \end{aligned}$$

et

$$(\delta_{23})\qquad \begin{aligned} \chi_1&=\psi_3-\psi_5\psi_7=\varphi_4\varphi_7-\varphi_5\varphi_8=a_2x_4-a_6x_5,\\ \chi_2&=\psi_4\psi_5=\varphi_3\varphi_5=x_4x_5,\\ \chi_3&=\psi_5\psi_6=\varphi_5\varphi_6=a_1x_5, \end{aligned}$$

χ_1, χ_2, χ_3 étant les intégrales de l'équation :

$$(\delta_{24})\qquad Z(\theta)=\psi_7\frac{\partial\theta}{\partial\psi_3}-\frac{\psi_4}{\psi_5}\frac{\partial\theta}{\partial\psi_4}+\frac{\partial\theta}{\partial\psi_5}-\frac{\psi_6}{\psi_5}\frac{\partial\theta}{\partial\psi_6}=0,$$

ou, ce qui est la même chose, du système :

$$(\delta_{25})\qquad \frac{d\psi_3}{\psi_7}=\frac{\psi_5d\psi_6}{-\psi_4}=d\psi_5=\frac{\psi_5d\psi_6}{-\psi_6}.$$

Il n'est pas difficile de voir que les coefficients (δ_3) peuvent affecter les équations qui contiennent trois constantes arbitraires λ, μ, ν ;

$$(\delta_{26})\qquad a_1x_5=\lambda, \qquad a_2x_4-a_6x_5=\mu, \qquad a_6=\nu.$$

En substituant leurs expressions :

$$(\delta_{27})\qquad a_1=\frac{\lambda}{x_5}, \qquad a_2=\frac{\mu+\nu x_5}{x_4}, \qquad a_6=\nu$$

dans la relation (δ_2) :

$$(\delta_{28}) \qquad \frac{\lambda}{x_5} p_1 + \frac{\mu + \nu x_5}{x_4} p_2 + \nu p_6 = a,$$

il est commode de prendre la connexion (δ_2) dans une des formes très simples :

$$(\delta_{29}) \qquad \frac{p_1}{x_5} = a, \qquad \frac{p_2}{x_4} = a, \qquad p_6 + \frac{x_5}{x_4} p_2 = a;$$

ces formes sont identiques aux formes (γ_{16}).

* * *

Enfin, faisons la supposition que l'égalité (66) est linéaire par rapport aux dérivées $p_{m+1}, \ldots, p_{m+n}$ et ne contient pas la constante arbitraire a. En admettant que $a = 0$, réduisons l'équation (66) en a_1 et introduisons, pour les coefficients, de nouvelles significations $-v_2, -v_3, \ldots, -v_n$. Alors

$$(87) \qquad f = \mathrm{Y}(z) = p_{m+1} - v_2 p_{m+2} - v_3 p_{m+3} - \ldots - v_n p_{m+n} = 0,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(88) \qquad p_{m+1} - \sum_{h=2}^{n} v_h p_{m+h} = 0.$$

Donc

$$(89) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i} = -\sum_{h=2}^{n} \frac{\partial v_h}{\partial x_i} p_{m+h}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$(90) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_{m+j}} = -\sum_{h=2}^{n} \frac{\partial v_h}{\partial x_{m+j}} p_{m+h}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$(91) \qquad \frac{\partial f}{\partial p_{m+1}} = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial p_{m+j}} = -v_j, \qquad j = 2, 3, \ldots, n.$$

Ayant substitué (89), (90), (91) dans (67), nous trouvons les relations :

$$(92) \qquad \sum_{h=2}^{n} \frac{\partial v_h}{\partial x_i} p_{m+h} + \sum_{j=1}^{n} b_j^i \sum_{h=2}^{n} \frac{\partial v_h}{\partial x_{m+j}} p_{m+h} - \sum_{j=2}^{n} v_j \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial b_h^i}{\partial x_{m+j}} p_{m+h} + \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial b_h^i}{\partial x_{m+1}} p_{m+h} = 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

Grâce à la relation (87) :

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial b_h^i}{\partial x_{m+j}} p_{m+h} = \sum_{h=2}^{n} \left(v_h \frac{\partial b_1^i}{\partial x_{m+j}} + \frac{\partial b_h^i}{\partial x_{m+j}} \right) p_{m+h}, \tag{93}$$

$$-\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial b_h^i}{\partial x_{m+1}} p_{m+h} = -\sum_{h=2}^{n} \left(v_h \frac{\partial b_1^i}{\partial x_{m+1}} + \frac{\partial b_h^i}{\partial x_{m+1}} \right) p_{m+h}, \tag{94}$$

et les relations (92) deviennent :

$$\sum_{h=2}^{n} \left[\frac{\partial v_h}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} b_j^i \frac{\partial v_h}{\partial x_{m+j}} - \sum_{j=2}^{n} v_j \left(v_h \frac{\partial b_1^i}{\partial x_{m+j}} + \frac{\partial b_h^i}{\partial x_{m+j}} \right) + \left(v_h \frac{\partial b_1^i}{\partial x_{m+1}} + \frac{\partial b_h^i}{\partial x_{m+1}} \right) \right] p_{m+h} = 0, \tag{95}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\sum_{h=2}^{n} [X_i(v_h) + v_h Y(b_1^i) + Y(b_h^i)] p_{m+h} = 0, \tag{96}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

Les dérivées $p_{m+2}, p_{m+3}, \ldots, p_{m+n}$ sont indépendantes, c'est pourquoi nous essaierons de satisfaire aux systèmes (95), (96) en écrivant les coefficients $v_2, v_3, \ldots, v_n$ de telle manière que soient remplies les égalités du système :

$$\begin{aligned} X_1(v_h) &= -v_h Y(b_1^1) - Y(b_h^1), \\ X_2(v_h) &= -v_h Y(b_1^2) - Y(b_h^2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_m(v_h) &= -v_h Y(b_1^m) - Y(b_h^m), \\ h &= 2, 3, \ldots, n. \end{aligned} \tag{97}$$

Le système (97) n'est pas autre chose que le système (12) de la méthode spéciale d'intégration des systèmes complets d'équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue. Il représente le système jacobien généralisé. L'existence de sa solution est démontrée par nous.

Travaux de M. G. Pfeiffer (1923-1933) liés au sujet.

Méthode spéciale d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre (Comptes rendus de l'Acad. des Sc. de Paris, t. 176, pp. 62-64, 1923).

Sur une méthode spéciale d'intégration des équations et des systèmes d'équations non *linéaires aux dérivées partielles du premier ordre* (Bull. de l'Acad. des Sc. de l'Ukraïne, T. I., F. I., pp. 41-59, 1923).

Sur la permutation des solutions d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre (Bull. des Sc. math., s. 2, t. LII, octobre 1928).

Quelques additions au problème de M. A. Buhl (Atti del Congr. Intern. dei Mathem.; Bologna, 1928, t. VI, pp. 49-53).

Théorèmes expliquant une série de questions dans le problème de la permutation des solutions d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre (Comptes rendus de l'Acad. des Sc. de l'U. R. S. S., 1929, fasc. 8, pp. 177-182).

Sur les opérateurs d'un système complet d'équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue (Comptes rendus de l'Acad. des Sc. de Paris, t. 190, pp. 909-911, 1930).

Sur les intégrales complètes des équations linéaires et des systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue (Ann. de Toulouse, s. 3, t. XXII, pp. 147-169, 1930).

Construction de l'opérateur général permutant les intégrales d'une équation linéaire et homogène aux dérivées partielles du premier ordre (Comptes rendus de l'Acad. des Sc. de Paris, t. 192, pp. 660-662, 1931).

Sur la permutation des intégrales d'une équation linéaire et homogène aux dérivées partielles du premier ordre (Ann. de Toulouse, s. 3, t. XXIII, pp. 139-181, 1931).

La généralisation des méthodes de Jacobi pour l'intégration des systèmes complets d'équations linéaires et de Jacobi-Mayer pour l'intégration des systèmes complets d'équations non linéaires (Verhandl. des Intern. Math. Kongresses Zürich, B. II, Ss. 82-83, 1932).

La généralisation de la méthode de Jacobi pour l'intégration des systèmes complets d'équations linéaires et homogènes; généralisation des recherches correspondantes de Clebsch (Acta math., B. 61, pp. 203-238, 1933).