

ALFRED LIÉNARD

**Application de la thermodynamique aux théories électrodynamiques
de Hertz et de H. Lorentz pour les corps en mouvement**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4^e série, tome 5 (1941), p. 1-48

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1941_4_5_1_0

© Université Paul Sabatier, 1941, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANNALES
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,
POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES.

APPLICATION DE LA THERMODYNAMIQUE
AUX THÉORIES ÉLECTRODYNAMIQUES DE HERTZ ET DE H. LORENTZ
POUR LES CORPS EN MOUVEMENT

Par M. ALFRED LIÉNARD

INTRODUCTION

1. J'ai étudié dans deux précédents mémoires (¹) l'équilibre et la déformation de systèmes de conducteurs traversés par des courants et de corps magnétiques sans hystérésis. J'avais d'abord établi que, contrairement à ce que pensait Duhem, la notion de potentiel thermodynamique utilisée par Helmholtz, puis par Duhem, pour l'étude des diélectriques polarisables et des corps magnétiques, peut parfaitement s'étendre au cas de systèmes parcourus par des courants (*loc. cit.*, §§ 1, 2, 36, 37, 38). C'est cette proposition fondamentale qui m'avait permis d'aboutir dans mon étude. Mais je m'en étais tenu alors aux hypothèses de l'ancienne électrodynamique, à savoir que les courants sont fermés et que les actions se propagent instantanément. Il n'était donc question ni de courants de déplacement, ni de courant de convection. Je me propose de montrer dans le présent travail qu'il est possible d'aller plus loin et de traiter le cas d'un système comprenant, en plus de courants de conduction et

1. A. LIÉNARD, *Ann. de Phys.*, 9^e série, t. XX, p. 249 (1923) [§§ 1 à 35 et 7 annexes] et 10^e série, t. III, p. 145 (1925) [§§ 36 à 42]. Le numérotage du second mémoire faisant suite à celui du premier, l'indication du numéro d'un paragraphe suffit à préciser celui des deux mémoires auquel il appartient.

de corps magnétiques, des charges électriques statiques, des courants de convection et de déplacement, avec vitesse finie de propagation des perturbations électromagnétiques (1).

Bien que la nouvelle étude ait puisé son inspiration dans celle de 1923-1925, elle n'en constitue pas une application pure et simple. Grâce à cela, il m'a été possible de faire une rédaction se suffisant à elle-même et n'exigeant pas du lecteur l'étude préalable des mémoires antérieurs. Si j'ai cependant mis un certain nombre de renvois aux précédents mémoires, c'est en vue de permettre au lecteur de se rendre compte, s'il le désire, de la suite des idées dans la mise sur pieds du présent travail. Mais il lui est parfaitement loisible de n'en rien faire et d'éviter de se reporter constamment au travail primitif.

J'ai pris comme exemples les théories de Hertz et de H. Lorentz ou, plus exactement, deux groupes de théories comprenant comme cas particuliers celles de Hertz et de Lorentz.

Cette dernière est beaucoup plus intéressante que celle de Hertz, dont le principal mérite me paraît d'avoir servi d'étape dans la recherche de solutions plus parfaites.

J'ai estimé cependant utile de ne pas m'en tenir à la seule théorie de H. Lorentz pour montrer que la méthode imaginée est assez souple pour s'adapter à plusieurs théories et qu'elle n'est pas simplement valable pour une théorie particulière. A cet égard, il aurait été intéressant de faire une application à la théorie relativiste. J'en ai été empêché pour cette raison que, à ma connaissance du moins, personne n'a réussi jusqu'à présent à établir, en relativité, une théorie élastique de la matière.

Le travail que je publie aujourd'hui remonte en réalité à une dizaine d'années, à l'exception des études faisant l'objet des chapitres IV et V que je n'ai terminées que récemment.

M. L. Roy s'est occupé, dans un important mémoire que viennent de publier les

1. Au début de l'étude de 1923, j'ai conclu d'une certaine équation (5) :

$$d\bar{C} + \Sigma S dT + \Sigma \Phi dI = - d\Theta,$$

où $d\bar{C}$, dT , dI se rapportent à des modifications réelles subies au cours du temps, à l'existence séparée d'équations :

$$d\bar{C} = - d_{T,I}\Theta, \quad S = - \frac{\partial \Theta}{\partial T}, \quad \Phi = - \frac{\partial \Theta}{\partial I}.$$

J'ai posé ces diverses équations parce que j'ai considéré comme évident qu'il était toujours possible de disposer des conditions initiales de telle sorte que les variables géométriques définissant la position et la forme du système, et de même les variables T et I , prissent dans le temps dt des variations choisies *a priori* (comme c'est le cas en mécanique). Je me suis rendu compte depuis que le fait n'avait pas l'évidence que je lui avais supposé et que j'aurais dû énoncer explicitement l'hypothèse faite ou, mieux encore, d'après une suggestion de M. Jouguet, dire que j'admettais que la relation ci-dessus, établie pour des variations réelles, était encore valable pour des variations virtuelles.

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (1), d'un problème analogue à celui qui fait l'objet du présent travail. M. L. Roy et moi appliquons la théorie des potentiels thermodynamiques de Helmholtz-Duhem à l'électromagnétisme. Malgré cela les buts poursuivis sont assez différents pour que nos études ne fassent pas double emploi.

M. L. Roy, qui avait déjà donné en 1923, dans la collection *Scientia* (2), un exposé de la théorie exposée par Duhem en 1893-1894 (3), a voulu reprendre son exposé pour y introduire des simplifications de calcul et autres améliorations en même temps qu'il traitait quelques applications nouvelles. Dans le complément, en particulier, il se préoccupe de la recherche de relations qu'on puisse soumettre au contrôle de l'expérience. M. Roy ne considère que des corps homogènes et traite les champs magnétiques et électriques comme entraînés instantanément et rigidement par les aimants, les courants ou les charges électriques qui leur donnent naissance.

De mon côté, je me suis avant tout préoccupé d'établir que la théorie thermodynamique des phénomènes électromagnétiques n'était pas applicable à la seule théorie d'Helmholtz, mais l'était également aux théories issues des travaux de Maxwell. Et si je m'en suis tenu aux théories de Hertz et de H. Lorentz sans aborder la théorie de la relativité, c'est seulement, comme je l'ai dit plus haut, parce qu'aucune théorie relativiste de l'élasticité n'a été édifiée jusqu'à ce jour.

2. Notations et unités. — ρ est la densité électrique vraie, B , H , J , E , P et i sont les vecteurs représentant respectivement l'induction magnétique, la force magnétique, l'aimantation, la force électrique, la polarisation diélectrique et le courant de conduction. J'emploie la dénomination « force magnétique » plutôt que celle de « champ » souvent adoptée aujourd'hui, réservant le mot de champ magnétique pour désigner qualitativement toute région de l'espace où se produisent des phénomènes magnétiques. En vertu du principe de Hertz sur l'unité tant du champ magnétique que du champ électrique, il n'y a pas lieu de distinguer suivant que le champ magnétique est produit par un aimant ou par un courant, ni de distinguer la force électrique d'origine électrostatique de la force électromotrice d'induction.

Je ferai uniquement usage des unités d'Heaviside qui évitent complètement la

1. L. ROY, *Sur les actions magnétiques, électriques, électrodynamiques et électromagnétiques dans les corps rigides ou déformables* (Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, 4^e série, t. II (1939), pp. 1 à 68 avec un complément, 4^e série, t. III (1940) pp. 117 à 148).

2. L. ROY, *L'électrodynamique des milieux isotropes en repos, d'après Helmholtz et Duhem*.

3. P. DUHEM, *Les actions électrodynamiques et électromagnétiques* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1^{re} série, t. VII et VIII).

présence du facteur 4π dans les diverses formules. Je rappelle que l'on repasse des unités d'Heaviside aux unités usuelles en changeant dans les formules :

$$B, H, J, E, P, i, \rho$$

respectivement en :

$$\frac{B}{\sqrt{4\pi}}, \frac{H}{\sqrt{4\pi}}, \sqrt{4\pi}J, \frac{E}{\sqrt{4\pi}}, \sqrt{4\pi}P, \sqrt{4\pi}i, \sqrt{4\pi}\rho.$$

Avec les unités adoptées, on a $H + J = B$ et la somme $E + P$ représente le déplacement de Maxwell.

Je choisis comme unité de vitesse la vitesse de la lumière dans le vide et je prends, en outre, une unité de charge électrique telle que le coefficient de la loi de Coulomb ait la valeur 1.

Les valeurs algébriques des projections d'un vecteur K seront notées indifféremment K_x, K_y, K_z ou K_1, K_2, K_3 ou encore K_μ ou K^μ , suivant les usages du calcul tensoriel, si l'on ne veut pas préciser celle des composantes considérée. Faisant uniquement usage de coordonnées cartésiennes trirectangles, il est loisible de faire monter ou descendre les indices à volonté. K_N et K_T seront les *vecteurs* projections du vecteur K sur la normale et le plan tangent en un point d'une surface. On aura donc :

$$K \equiv K_N + K_T.$$

Je désigne par N un vecteur unité normal à une surface, en le notant au besoin N' ou N'' suivant celle des faces de la surface vers laquelle le vecteur unité est dirigé. On a :

$$K_{N'} = + K_{N''} \quad \text{et} \quad (K \cdot N') = - (K \cdot N'').$$

$(A \cdot B)$ et $[A \cdot B]$ désignent, suivant la notation de Grassmann, les produits scalaire et vectoriel de A par B (1). Le gradient de φ , de composantes $+\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \dots$ est noté $\text{grad } \varphi$, tandis que $\text{rot } K$ représente le rotationnel de K , de composantes $\frac{\partial K_z}{\partial y} - \frac{\partial K_y}{\partial z}, \dots$. Le sens positif de rotation est celui de droite à gauche. Les axes de coordonnées employés forment toujours un système à gauche.

1. On fait aujourd'hui usage dans l'enseignement des notations $\vec{A} \cdot \vec{B}$ et $\vec{A} \wedge \vec{B}$. Lorsque A et B se présentent, comme il arrivera fréquemment, sous la forme de sommes ou produits de vecteurs (par ex. : $E + [V \cdot B]$) la notation de Grassmann est plus simple et plus claire.

CHAPITRE I

Tensions à l'intérieur d'un corps aimanté ou polarisé.

3. J'ai envisagé (*loc. cit.*, §§ 40 et 41) diverses hypothèses sur la forme possible des équations reliant la déformation subie par un corps aimanté ou polarisé aux tensions internes que cette déformation provoque. On peut encore envisager une autre hypothèse qui forme la base du présent travail et que je vais exposer.

Précisons d'abord que je ne m'occupe que de corps magnétiques ou polarisables dénués d'hystérésis, les raisonnements thermodynamiques employés ne valant que pour des transformations réversibles.

On sait que, pour un corps isotrope de volume spécifique σ restant isotrope en se déformant (fluide), la pression interne p est reliée au potentiel thermodynamique $\mathcal{F}(\sigma, T)$ par la relation $p = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma}$. Ceci suppose que \mathcal{F} se rapporte à l'unité de masse. Or nous serons conduit à rapporter \mathcal{F} à l'unité de volume pour que l'intégrale $\int \mathcal{F} d\tau$ ($d\tau =$ élément de volume) représente le potentiel du corps. L'expression du potentiel par unité de masse devient $\sigma \mathcal{F}$ et la formule précédente doit être remplacée par :

$$p = -\frac{\partial (\sigma \mathcal{F})}{\partial \sigma},$$

que l'on peut écrire identiquement :

$$p \frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial (\sigma \mathcal{F})}{\partial \sigma} d\sigma = -\frac{1}{\sigma} d_{\tau} (\sigma \mathcal{F}). \quad (1)$$

Le symbole d_{τ} indique une différentielle prise à une température constante. On peut considérer que la variation $d\sigma$ provient d'une déformation réelle ou virtuelle imposée au corps, de sorte que $\frac{d\sigma}{\sigma}$ sera la dilatation cubique subie.

Soit λ le vecteur représentant le déplacement infiniment petit *réel* ou *virtuel* d'un point dans la déformation.

Les variations de λ d'un point à un autre produisent des dilatations et glissements représentés par un tenseur symétrique du 2^e ordre d'expression :

$$\delta_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \lambda_{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \lambda_{\nu}}{\partial x^{\mu}} \right).$$

La dilatation cubique $\frac{d\sigma}{\sigma}$ est encore égale à δ^{ν} .

Au lieu de rapporter, comme en 1923, les dilatations et glissements aux déplacements infiniment petits λ , il nous sera plus commode, pour la présente étude, de les rapporter aux vitesses. Nous poserons (à l'exemple de M. L. Roy, *loc. cit.*, p. 3) :

$$\begin{aligned} \lambda &= V dt, \\ \delta_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial V_{\nu}}{\partial x^{\mu}} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

V est une vitesse réelle si λ est un déplacement réel réalisé dans le temps dt , tandis que V est une vitesse virtuelle s'il s'agit d'un déplacement virtuel que l'on peut considérer comme ayant mis un temps virtuel dt à se produire. La dilatation cubique par unité de temps (réelle ou virtuelle) s'écrit $\frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\mu}}$ ou encore δ^{ν} , ou $\text{div } V$ (*).

L'équation (1) peut donc encore s'écrire :

$$p \delta_{\mu}^{\mu} = - \frac{d_{\tau} (\sigma \mathcal{F})}{\sigma dt}.$$

Si le corps n'est pas isotrope ou ne le reste pas en se déformant, la formule ci-dessus doit être remplacée par la suivante (*) :

$$p_{\mu\nu} \delta^{\mu\nu} = - \frac{d_{\tau} (\sigma \mathcal{F})}{\sigma dt}. \quad (3)$$

Remarquons que, dans ce cas, \mathcal{F} ne dépend pas seulement de T et de σ , mais de tous paramètres définissant la déformation. On doit d'ailleurs ne faire usage que de variables normales (au sens donné à cette expression en thermodynamique) pour définir déplacements et déformations.

Si les $\delta^{\mu\nu}$ sont des déformations virtuelles arbitraires, l'équation (3) permet de déterminer séparément les six composantes $p_{\mu\nu}$ ($p_{\mu\nu} = p_{\nu\mu}$) (*) et, s'il s'agit d'une déformation réelle, (3) permet de calculer la quantité $p_{\mu\nu} \delta^{\mu\nu}$ sans avoir besoin de connaître séparément les valeurs des six composantes $p_{\mu\nu}$.

1. Le lecteur qui voudrait se reporter à notre travail primitif devra se souvenir du changement de définition des $\delta_{\mu\nu}$ dans la comparaison des formules de 1923 avec celles du présent travail. La différence ne porte d'ailleurs que sur un facteur dt .

Même modification en ce qui concerne la rotation moyenne représentée par $\frac{1}{2} \text{rot } \lambda$ en 1923 et par $\frac{1}{2} \text{rot } V$ dans le présent travail.

2. Les quantités $p_{\mu\nu}$ ainsi déterminées ne diffèrent que par le signe des quantités $A_{\mu\nu}$ du précédent travail (§ 18, p. 285).

3. Voir au § 12 une exception à la règle $p_{\mu\nu} = p_{\nu\mu}$.

4. Ceci étant rappelé, voyons à généraliser la relation (3) pour un corps aimanté ou polarisé.

Soit \mathcal{F}^0 la valeur du potentiel en absence d'aimantation ou de polarisation. La valeur de \mathcal{F} pour J ou P non nuls sera (Helmholtz, Duhem) donnée par la relation :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 + \int_0^J (\text{H ou B} \cdot dJ) + \int_0^P (\text{E} \cdot dP),$$

relation où les intégrations par rapport à J et P sont effectuées en laissant la température et la forme invariables. Plus généralement, en admettant que les propriétés magnétiques du corps puissent dépendre de sa polarisation diélectrique et, réciproquement, que le pouvoir inducteur dépende de l'intensité d'aimantation, nous écrirons (1) :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 + \int_{0,0}^{J,P} (\text{H ou B} \cdot dJ) + (\text{E} \cdot dP). \quad (4)$$

Le problème de la détermination des pressions paraît résolu par l'ensemble des équations (3) et (4). En réalité, il ne l'est pas encore pour la raison suivante : tandis que \mathcal{F}^0 ne dépend que de variables géométriques et de T, la fonction \mathcal{F} définie par (4) dépend en outre des variables J et P. Doit-on laisser ces deux quantités constantes comme T ou au contraire leur donner des variations virtuelles δJ et δP dépendant de la déformation ?

La première alternative n'est admissible que pour un corps isotrope restant isotrope en se déformant. Mais pour un corps anisotrope elle conduirait à une contradiction, car en donnant au corps une rotation pure sans déformation, le premier membre de (3) resterait nul, alors que les vecteurs J et P, fixes dans l'espace, changeraient d'orientation par rapport à la matière, d'où changement de valeur de $\sigma \mathcal{F}$ pour le corps anisotrope. Il faudrait donc dans ce cas faire varier J de $\left[\frac{1}{2} \text{rot V} \cdot J \right] dt$ de manière que l'aimantation tourne avec le corps. Mais s'il y a déformation en même temps que rotation, la quantité $\frac{1}{2} \text{rot V}$ ne représente plus qu'une rotation moyenne; les points matériels alignés suivant la direction du vecteur rot V ne conservent pas leur alignement primitif; c'est une autre direction matérielle qui possède la propriété de rester parallèle à elle-même.

1. La relation (4) n'a de sens que si la différentielle sous le signe \int est une différentielle exacte, d'où la condition :

$$\frac{\partial H}{\partial P} \text{ ou } \frac{\partial B}{\partial P} = \frac{\partial E}{\partial J}.$$

L'existence d'une condition montre qu'il y a une relation nécessaire entre la manière dont les propriétés magnétiques dépendent de la polarisation et celle dont les propriétés électriques dépendent de l'aimantation.

Il n'y a alors pas plus de raison d'adopter pour J la variation virtuelle $\left[\frac{1}{2} \text{rot V. J} \right] dt$ que toute autre de la forme :

$$\delta J_{\mu} = \left\{ \left[\frac{1}{2} \text{rot V. J} \right]_{\mu} + C J_{\mu} \delta_{\mu}^{\nu} + C' J_{\mu} \delta_{\nu}^{\mu} \right\} dt, \quad (5)$$

qui est la forme la plus générale possédant les propriétés suivantes : la relation est linéaire par rapport aux infiniment petits $\delta_{\mu}^{\nu} dt$; elle est homogène par rapport à J et δJ ; enfin elle donne un δJ_{μ} qui est un tenseur du premier ordre et qui se réduit à $\left[\frac{1}{2} \text{rot V. J} \right]_{\mu}$ lorsque dilatations et glissements sont nuls. C et C' sont des quantités constantes par rapport aux δ_{μ}^{ν} , mais qui pourraient, à priori, dépendre de quantités scalaires telles que la température, etc... P devrait subir comme J une variation virtuelle donnée par une formule de même forme que (5), mais où les coefficients C et C' n'ont pas forcément les mêmes valeurs.

Nous sommes ainsi amenés à formuler l'hypothèse suivante :

Les pressions dans un corps aimanté ou polarisé sont données par la même formule (3) que pour un corps ordinaire, à condition d'évaluer la variation $d_{\tau}(\sigma \mathcal{F})$ en attribuant aux vecteurs J et P des variations virtuelles qui ne sont pas arbitraires, mais qui dépendent d'après une loi de la forme (5), de la rotation et des quantités δ_{μ}^{ν} représentant la déformation virtuelle arbitrairement imposée (1).

5. La relation (5) reproduit, sauf le changement de notation défini au § 3 une relation du mémoire de 1923 [*loc. cit.*, § 7, éq. (10)] fixant des variations conventionnelles attribuées à l'aimantation lors d'une déformation, variations que j'avais été amené à considérer pour des raisons toutes différentes, de celles qui viennent d'aboutir, à poser la relation (5). Il est ici nécessaire de résumer certains résultats du mémoire primitif. C'est ce que je vais faire très brièvement dans le présent paragraphe.

1. Il peut sembler, à priori, étrange d'imposer aux vecteurs J et P des variations virtuelles dépendant des dilatations et glissements ainsi que de la rotation. Or une circonstance analogue se produit sans conteste possible dans d'autres cas. Par exemple, si l'on veut calculer le travail des forces électrodynamiques sur un conducteur à trois dimensions au moyen de la formule :

$$d\mathcal{C} = - d_i W = d_i \int \frac{B^2}{2} d\tau,$$

il faut faire varier les composantes de la densité de courant en fonction des $\delta^{\mu\nu}$ et de la rotation de sorte que le flux de courant à travers toute surface matérielle reste constant dans le déplacement virtuel (A. LIÉNARD, *loc. cit.*, § 7).

Dans le cas d'un fluide parfait, le fait que le corps reste isotrope quels que soient les glissements, entraîne la condition $C = 0$; seul C' peut être différent de 0 pour un tel corps.

Le potentiel thermodynamique d'un système aimanté et polarisé contient en plus du terme $\int \mathcal{F} d\tau$ se rapportant à la matière seule un terme [désigné par les lettres W ou \mathcal{W} dans le mémoire primitif] d'expression

$$\int_{\text{espace}} w d\tau$$

avec

$$w = \frac{E^2 - B^2}{2} \quad \text{ou} \quad w = \frac{E^2 + H^2}{2} - (B.H) \quad (6)$$

suivant que l'on a pris \mathcal{F} égal à $f(B.dJ)$ ou à $f(H.dJ)$. Le passage de la première expression de \mathcal{F} à la seconde diminue \mathcal{F} de $f(J.dJ)$ ou $\frac{J^2}{2}$ et, en compensation, il faut accroître w de la même quantité, laquelle est égale à

$$\frac{(B - H)^2}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{B^2}{2} - (B.H) + \frac{H^2}{2}.$$

D'après les propriétés des potentiels thermodynamiques, le travail produit dans une variation du système a pour valeur (*loc. cit.*, § 7, p. 266)

$$d\mathcal{C} = -d\tau \int \mathcal{F} d\tau - d_{\tau,1} \int w d\tau.$$

Il se trouve que la valeur de $d\mathcal{C}$ donnée par cette relation est indépendante des valeurs des variations dJ et dP de l'aimantation et de la polarisation et que le résultat final est le même, que l'on prenne dJ et dP égaux aux variations réelles subies par J et P dans une déformation, ou qu'on leur attribue des valeurs fictives fixées conventionnellement d'une manière arbitraire [*loc. cit.*, milieu des pages 261 et 321].

Il peut sembler que le plus simple serait alors de poser $dJ = 0$ et $dP = 0$; mais les variations intéressantes au point de vue physique, ne sont pas les variations évaluées par rapport à l'espace fixe, mais par rapport à la matière déplacée et déformée (*).

6. Parmi l'infinité de variations virtuelles de J et de P définies par (5), il en est deux qui sont de beaucoup les plus intéressantes en elles-mêmes et pour la suite de cette étude.

1. Une autre raison m'avait conduit à adopter pour dJ et dP d'autres valeurs que 0,0. Plusieurs auteurs se sont occupés avant moi de la détermination des forces développées dans les phénomènes électromagnétiques, et ils ont donné pour les représenter des expressions discordantes entre elles. Il était par suite indispensable que je ne me contente pas d'établir de nouveaux résultats, mais que je montre d'où provenaient les divergences entre les diverses expressions données, les unes par Maxwell, d'autres par différents auteurs (Ganz, Cohn) et celles auxquelles je parvenais. Et c'est à quoi m'avait servi la considération des variations conventionnelles du type (5). Le lecteur désireux d'avoir plus de détails pourra se reporter *loc. cit.*, §§ 9, 17, 22 et 40, mais ces détails ne sont pas nécessaires pour la lecture du présent travail.

La première se définit comme suit (*loc. cit.*, § 8, première convention p. 268 et annexe IV, p. 337) :

La variation de J dans un déplacement accompagné de déformation d'amplitude finie ou infiniment petite est telle que le courant équivalent conserve une intensité constante à travers tout élément de surface de la matière.

Pour une déformation infiniment petite, on aura (1)

$$\delta J_{\mu} = -J_{\nu} \frac{\partial V^{\nu}}{\partial x^{\mu}} dt. \quad (7)$$

La formule (7) rentre dans le type (5) avec $C = -1$; $C' = 0$.

L'autre (dite 5^e convention, mêmes références) :

La variation de J ou de P dans un déplacement accompagné de déformation d'amplitude finie ou infiniment petite est telle que la masse de magnétisme fictif équivalent à l'aimantation (ou la charge électrique équivalente à la polarisation) reste invariable pour tout élément de matière.

Pour une déformation infiniment petite, cela donne :

$$\delta' J^{\mu} = \left\{ J^{\nu} \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\nu}} - J^{\mu} \frac{\partial V^{\nu}}{\partial x^{\nu}} \right\} dt, \quad (7')$$

soit encore, en notation vectorielle :

$$\delta' P = \{ (P \cdot \Delta) V - P \operatorname{div} V \} dt.$$

Les formules (7') sont encore du type (5) avec $C = +1$ et $C' = -1$.

M. H. Chipart a nettement mis en lumière l'importance de ces deux variations particulières dans un mémoire sur les Milieux déformables polarisés et aimantés (2).

1. Si pour les motifs exposés dans notre étude : *Relations entre la symétrie des phénomènes physiques et leur représentation au moyen de vecteurs ou de tenseurs* (Ann. Physique, 10^e série, t. X, p. 5, 1928), on adopte la représentation de l'aimantation par un tenseur symétrique gauche du 2^e ordre de préférence à la représentation par un vecteur, on aura

$$\delta J^{\mu\nu} = \left\{ J^{\mu\alpha} \frac{\partial V^{\nu}}{\partial x^{\alpha}} + J^{\alpha\nu} \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} - J^{\mu\nu} \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} \right\} dt.$$

2. Journal de l'École Polytechnique, 2^e série, cahier 33 (pp. 215-286, 1935): Voir §§ 36 et 39. Le résultat fondamental établi dans ce mémoire concerne l'expression du potentiel thermodynamique pour un corps ayant subi des déformations et déplacements de grandeur quelconque (§§ 40 à 42).

CHAPITRE II

Application aux théories de H. Lorentz et de Hertz.

7. Pour éviter des répétitions qui allongeraient inutilement l'exposé, je ne traiterai dans le texte que de la théorie de H. Lorentz. Je me bornerai, en ce qui concerne la théorie de Hertz, à donner simplement en notes et avec le même numéro, les équations à substituer à celles du texte pour passer de la théorie de Lorentz à celle de Hertz.

Je remets à un chapitre suivant l'étude des discontinuités introduites par les surfaces des corps conducteurs, des diélectriques ou des corps aimantés et supposeraï dans le présent chapitre que toutes les grandeurs figurant dans les équations varient d'une manière continue. Je remets en outre au dernier chapitre l'examen du cas où les conducteurs de courant donneraient lieu à des phénomènes thermoélectriques (effets Peltier, Thomson, etc...)

Toutes indications utiles pour les notations et les unités adoptées ont été données au § 2. Avec ces notations et unités, les équations de H. Lorentz peuvent être écrites sous la forme suivante (*) :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{H} + \mathbf{J}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \operatorname{div} (\mathbf{E} + \mathbf{P}) &= \rho, & (9), (10) \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{i} + \rho \mathbf{V} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \operatorname{rot} [\mathbf{V} \cdot \mathbf{P}]. & (11), (12) \end{aligned}$$

En éliminant $\mathbf{E} + \mathbf{P}$ entre les équations (10) et (12), on obtient la relation

$$\operatorname{div} \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \{ \rho \mathbf{V} \} = 0,$$

qui exprime le principe de la conservation de l'électricité.

Contrairement à Hertz qui traite l'éther comme un corps quelconque, ne différant des corps matériels que par les valeurs de sa perméabilité et de son pouvoir inducteur spécifique, H. Lorentz suppose l'éther essentiellement immobile, les corps matériels se mouvant par rapport à lui. Il est ainsi conduit à distinguer la force

1. H.-A. LORENTZ, *Archives néerlandaises*, t. XXV, 1892. A. LIÉNARD, *La théorie de Lorentz, Eclairage électrique*, t. XIV, 1898, pp. 417 et 456. H. POINCARÉ, *Electricité et Optique*, 2^e éd., 1901, pp. 422 à 499 pour la théorie de Lorentz et pp. 343 à 421 pour la théorie de Hertz.

électrique E dans l'éther (force électrique qui figure dans les équations ci-dessus) et une force électrique dans la matière E_m , reliée à la première par l'équation :

$$E_m = E + [V.B]. \quad (13)$$

Signalons tout de suite une autre particularité de la théorie de H. Lorentz qui la distingue de celle de Hertz : supposons l'existence dans le champ d'un corps qu'on pourrait appeler « inerte », j'entends par là un corps non conducteur, incapable de se polariser ou de s'aimanter et non électrisé. Pour un tel corps inerte, on aura $i = P = J = \rho = 0$ et, en tenant compte de ces valeurs particulières, on voit que (10) et (12) deviennent :

$$\operatorname{div} E = 0, \quad \operatorname{rot} H = \frac{\partial E}{\partial t}.$$

V a disparu. Donc un corps inerte en mouvement ne modifie en rien le champ qui existerait dans l'éther et aucune discontinuité ne se produira dans le champ à la surface d'un tel corps, contrairement à ce qui pourra se produire avec la théorie de Hertz (Cf. chap. IV).

H. Lorentz n'introduit pas dans son exposé la notion d'aimantation. Considérant les phénomènes d'aimantation comme produits par des électrons mobiles à l'intérieur des atomes ou molécules, il suppose que l'on en tient compte individuellement en introduisant explicitement dans les équations les charges et vitesses de chaque électron. Nous ne le suivrons pas dans cette voie et introduirons explicitement la notion d'une aimantation produisant en moyenne les mêmes effets que les électrons en mouvement. Nous supposerons en outre que la force exercée par le champ magnétique sur l'aimantation est la même que celle qui s'exercerait sur le courant équivalent dont l'expression est $\operatorname{rot} J$. L'expression de la force R d'origine électrique électromagnétique exercée par unité de volume devient alors (*) :

$$R = \left[i + \operatorname{rot} J + \rho V + \frac{\partial P}{\partial t} - \operatorname{rot} [V.P].B \right] + \left\{ \rho - \operatorname{div} P \right\} E. \quad (14)$$

Remarquons qu'il suffirait de faire $J = 0$ dans toutes les équations (8) à (14) et de supposer que l'on tient compte individuellement au moyen du terme ρV de l'existence de chaque électron planétaire pour revenir rigoureusement à la théorie de H. Lorentz. La théorie que nous développons actuellement n'est donc pas opposée à celle de H. Lorentz, mais plus générale qu'elle, puisqu'elle la contient comme cas particulier. Nous la généraliserons encore au chapitre suivant.

1. C'est bien E qu'il faut mettre en facteur de $\rho - \operatorname{div} P$ et non pas E_m , car changer E en E_m reviendrait, d'après (13), à ajouter un terme $[\rho V - V \operatorname{div} P].B$ qui ferait double emploi avec le terme $[\rho V.B]$ et avec une partie du terme $[-\operatorname{rot}(V.P).B]$ figurant dans le premier produit.

Compte tenu des équations (8) à (12) on peut encore mettre R sous l'une des deux formes suivantes qui nous seront utiles :

$$R = \left[\text{rot } B - \frac{\partial E}{\partial t} \cdot B \right] + E \text{ div } E \quad (15)$$

ou, en notations tensorielles,

$$R_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left\{ B_\mu B^\nu + E_\mu E^\nu \right\} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{B_\nu B^\nu + E_\nu E^\nu}{2} + \frac{\partial}{\partial t} \left[B \cdot E \right]_\mu. \quad (16)$$

R_μ est mis ainsi sous la forme de la dérivée contractée d'un tenseur du second ordre à laquelle s'ajoute un terme en $\frac{\partial}{\partial t}$.

Or nous avons rencontré dans notre étude de 1923 des forces dérivant de même de divers tenseurs (tenseurs de Maxwell). Si l'on se reporte au tableau du bas de la page 82 (§ 16), on constate que le tenseur dépendant de B correspond à la première convention (éq. 7 ci-dessus) avec \mathcal{F} défini au moyen de l'intégrale $\int (B \cdot dJ)$, tandis que le tenseur dépendant de E n'est autre (sauf les notations) que le tenseur L du tableau et correspond à la variation conventionnelle d'expression (7') avec \mathcal{F} défini au moyen de $\int (E \cdot dP)$. Nous sommes ainsi conduit à poser

$$w = \frac{E^2 - B^2}{2} \quad (17)$$

et

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 + \int_{0,0}^{j,p} (B \cdot dJ) + (E_m \cdot dP). \quad (18)$$

Il est essentiel de faire au sujet de la définition adoptée pour w et \mathcal{F} les deux remarques suivantes :

1° Alors que le tenseur dépend de E et non de E_m , c'est cette dernière quantité E_m qu'il faut introduire dans la définition de P parce que c'est E_m , force électrique dans la matière, qui produit la polarisation P .

2° Nous n'avons tenu aucun compte dans le choix des valeurs à attribuer à w et à \mathcal{F} de l'existence dans l'expression de R_μ du terme en $\frac{\partial}{\partial t}$, ce qui, à priori, n'est pas logique. On pourrait donc s'attendre à ce qu'un choix effectué d'une manière aussi arbitraire conduise à des résultats inadmissibles. En fait, la suite des calculs montre que les craintes exprimées ne se réalisent pas. Il se produit sans doute une compensation entre le fait que l'on écrit E_m au lieu de E et que l'on ne tient nul compte du terme $\frac{\partial}{\partial t} \left[B \cdot E \right]_\mu$.

La présence du terme en $\frac{\partial}{\partial t}$ est encore cause de ce fait que la force de H. Lorentz, contrairement à celle de Hertz, ne satisfait pas au principe de l'égalité de l'action et de la réaction. Autre différence entre les deux théories : tandis que la force de Lorentz n'existe que là où il y a de la matière, celle de Hertz existe aussi bien *dans le vide que dans la matière* (et y est en outre indéterminée vu l'arbitraire de la vitesse attribuée aux points du vide).

8. Il me reste à montrer que toutes les hypothèses faites pour étendre les résultats de 1923 à la théorie de H. Lorentz et à celle de Hertz sont d'accord avec les deux principes de la thermodynamique. J'emploierai pour cela un mode de présentation très commode qui m'a été suggéré par M. H. Chipart.

Soit U une région de l'espace limitée par une surface fermée S. Ecrivons qu'il y a égalité entre l'augmentation par unité de temps de l'énergie des corps ou de l'éther situées dans la région U et l'énergie fournie de l'extérieur. Nous obtenons l'équation :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathfrak{v}} \frac{1}{2} V^2 dm + \frac{d}{dt} \int_{\mathfrak{v}} \left\{ w + (\text{B.H}) + \mathcal{F} - T \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} \right\} d\tau \quad (19) \\ = & \int_{\mathfrak{v}} (\text{F.V}) d\tau + \int_{\mathfrak{s}} p^{\nu\mu} N_{\nu} V_{\mu} dS - \int_{\mathfrak{v}} T \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} d\tau \right) - \int_{\mathfrak{v}} (\text{E}_m \cdot i) d\tau + \int_{\mathfrak{s}} (\mathcal{E} \cdot \text{N}) dS \end{aligned}$$

Expliquons la signification des différents termes.

Au premier membre un terme se rapporte à l'énergie cinétique de la matière et l'autre à l'énergie contenue tant dans les corps matériels que dans l'éther. Cette énergie est égale à la somme : 1° du potentiel thermodynamique $w + \mathcal{F}$ calculé précédemment; 2° d'un terme (B.H) [*loc. cit.*, §§ 2, 5 et 6]; 3° du terme $-T \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} d\tau$, terme que l'on devrait en principe écrire sous la forme $-T \frac{\partial (\sigma \mathcal{F})}{\partial T} \frac{d\tau}{\sigma}$ pour mettre en évidence la masse élémentaire $\frac{d\tau}{\sigma}$ et le potentiel $\sigma \mathcal{F}$ par unité de masse. Mais comme on suppose essentiellement qu'il est fait usage de variables normales, $\frac{\partial \sigma}{\partial T}$ est nul et l'on peut supprimer le facteur σ haut et bas.

Le symbole $\frac{d}{dt}$ est un symbole de dérivation totale, indiquant que l'on suit la matière dans son mouvement. Ce symbole porte sur le facteur $d\tau$ aussi bien que sur w, \mathcal{F} , etc. ...

Avant d'aller plus loin, il nous faut examiner la difficulté suivante : la matière n'entraîne pas la totalité de l'énergie de l'élément $d\tau$, car une partie de cette énergie réside dans l'éther. Il en est en particulier ainsi pour les régions de U qui sont

vides de matière. Il semblerait donc qu'il y a lieu de décomposer l'énergie de $d\tau$ en deux parties, et n'appliquer le symbole $\frac{d}{dt}$ qu'à l'énergie entraînée par la matière.

En fait, il se trouve que la distinction est sans importance. Soit, en effet, $ud\tau$ une certaine énergie de $d\tau$. Supposons d'abord que cette énergie appartienne à la matière et soit totalement entraînée. Comme la vitesse de dilatation d'un élément de matière est égale à $\text{div } V$, on pourra écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(ud\tau) &= u \text{div } V d\tau + \frac{du}{dt} d\tau \\ &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + (V \cdot \text{grad } u) + u \text{div } V \right\} d\tau \\ &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + \text{div } \{ uV \} \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (20)$$

Supposons au contraire que l'énergie $ud\tau$ réside dans l'éther. La variation de l'énergie intérieure à la surface S maintenue immobile ne serait plus que $\int_u \frac{\partial u}{\partial t} d\tau$. Mais si l'on considère S comme entraîné avec la vitesse V , chaque élément dS balaie dans le temps dt un volume $(N \cdot V dt) dS$ [N dirigé vers l'intérieur] contenant une énergie $u(N \cdot V) dS dt$, de sorte que, *par rapport à la surface mobile* S , la variation totale d'énergie par unité de temps est :

$$\int_u \frac{\partial u}{\partial t} d\tau - \int_s (uV \cdot N) dS = \int_u \frac{\partial u}{\partial t} d\tau + \int_u \text{div } \{ uV \} d\tau.$$

Nous retrouvons exactement la même expression que dans la première hypothèse. Nous n'avons donc pas à nous préoccuper de savoir comment l'énergie se répartit entre l'éther et la matière. Et, si la surface S est, en totalité ou en partie, tracée dans l'éther pur immobile, nous pouvons considérer la surface S comme mobile avec une vitesse choisie arbitrairement. Dans tous les cas, le premier membre de l'équation représentera la variation par unité de temps de l'énergie contenue à l'intérieur de la surface mobile S .

Occupons-nous maintenant de la signification des termes du second membre.

Le premier terme représente le travail des forces F autres que celles d'origine électrodynamique agissant sur la matière (la pesanteur, par exemple).

Le second terme représente le travail des pressions p^m agissant sur la surface S limitant la région U (les p^m sont nuls aux points vides de matière).

Le troisième terme, qui pourrait s'écrire $+\int_u T \frac{d}{dt}(Sd\tau)$, $Sd\tau$ étant l'entropie de la matière occupant le volume $d\tau$, représente l'énergie apportée sous forme de chaleur par voie réversible.

Le quatrième terme se rapporte à l'effet Joule du courant de conduction. En effet, en l'absence de forces thermoélectriques dont l'étude a été reportée au chapitre V, la loi d'Ohm donne les relations $E_m = r i$ ou $E_m^\mu = r^{\mu\nu} i_\nu$ suivant que le conducteur est isotrope ou anisotrope; r ou $r^{\mu\nu}$ représente la résistivité de la matière. D'où l'on déduit que, dans tous les cas, le terme $-(E_m \cdot i)$ représente l'apport négatif d'énergie résultant de l'effet Joule.

Enfin, le dernier terme de (19), où \mathcal{F} est le vecteur de Poynting, représente l'énergie radiante traversant la surface S de l'extérieur vers l'intérieur.

Le principe de la conservation de l'énergie sera vérifié s'il est possible de trouver un vecteur \mathcal{L} , bien défini et ne dépendant en chaque point que de l'état *actuel* de la matière et du champ électromagnétique en ce point, et tel que la relation (19) soit satisfaite quel que soit le volume U considéré. Nous savons que le vecteur \mathcal{L} doit se réduire à $[E, H]$ dans l'éther pur et lorsque l'on suppose en outre que la surface à travers laquelle on évalue le flux d'énergie est immobile, mais rien n'oblige à supposer que ce vecteur conserve la même expression en présence de matière.

Quant au principe de Carnot, il est satisfait par le fait même que la chaleur réversible a une expression de la forme $T dS$ et que la chaleur Joule irréversible est essentiellement positive.

9. Pour discuter l'équation (19) nous allons la comparer à l'équation résultant de la loi fondamentale de la mécanique, appliquée à la masse élémentaire dm du volume $d\tau$, savoir :

$$\frac{dV^\mu}{dt} dm = \left(F^\mu + R^\mu - \frac{\partial p^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \right) d\tau, \quad (21)$$

équation à laquelle correspond comme équation des forces vives pour le volume U :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_U V^2 dm &= \int_U (F + R \cdot V) d\tau - \int_U \frac{\partial p^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} V_\mu d\tau \\ &= \int_U (F + R \cdot V) d\tau + \int_U p^{\mu\nu} \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} d\tau + \int_S p^{\mu\nu} N_\nu V_\mu dS. \end{aligned} \quad (22)$$

Retranchons membre à membre l'équation (22) de l'équation (19) en faisant en outre passer tous les termes dans le premier membre. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_U \left\{ w + (B \cdot H) + \mathcal{F} - T \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} \right\} d\tau + \int_U p^{\mu\nu} \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} d\tau + \int_U T \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} d\tau \right) \\ + \int_U \left\{ (R \cdot V) + (E_m \cdot i) \right\} d\tau - \int_S (\mathcal{L} \cdot N) dS = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Permutant les indices muets μ et ν et nous rappelant que le tenseur $p^{\nu\mu}$ est symétrique, de sorte que :

$$p^{\nu\mu} \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} = p^{\nu\mu} \frac{\partial V_\nu}{\partial x^\mu} = p^{\nu\mu} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial V_\nu}{\partial x^\mu} \right) = p^{\nu\mu} \delta_{\nu\mu},$$

nous pouvons supposer le terme $p^{\nu\mu} \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu}$ remplacé par $p^{\nu\mu} \delta_{\nu\mu}$.

Effectuons les dérivations indiquées : d'après (20) les termes $w + (\text{B. H})$ donnent :

$$\int_v \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial (\text{B. H})}{\partial t} + \text{div} \left\{ w \mathbf{V} + (\text{B. H}) \mathbf{V} \right\} \right\} d\tau.$$

Les termes contenant \mathcal{F} et $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{T}}$ donnent sous le signe \int , après quelques réductions,

$$\mathcal{F} \text{ div } \mathbf{V} + \frac{d\mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{T}} d\mathbf{T}}{dt}, \quad \text{ou} \quad \mathcal{F} \text{ div } \mathbf{V} + \frac{d_{\tau} \mathcal{F}}{dt}.$$

Le terme suivant, en $p^{\nu\mu} \delta_{\nu\mu}$, est égal, d'après la relation (3) et les explications des §§ 3 et 4, à $-\mathcal{F} \text{ div } \mathbf{V} - \frac{\delta \mathcal{F}}{dt}$.

Au total, l'ensemble des termes en \mathcal{F} vaut

$$\frac{d_{\tau} \mathcal{F}}{dt} - \frac{\delta \mathcal{F}}{dt}. \quad (24)$$

$d_{\tau} \mathcal{F}$ et $\delta \mathcal{F}$ sont des variations de la fonction \mathcal{F} prises toutes deux à température constante et correspondant à une même déformation. Elles ne diffèrent que par les valeurs des variations $d\mathbf{J}$ et $d\mathbf{P}$; dans $d_{\tau} \mathcal{F}$ on doit prendre les variations vraies de \mathbf{J} et de \mathbf{P} pendant le temps dt , tandis que pour $\delta \mathcal{F}$ il faut prendre les variations virtuelles résultant de (5) pour \mathbf{J} et de son analogue pour \mathbf{P} . Remarquant que d'après (18)

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{J}} = \mathbf{B}, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} = \mathbf{E}_m, \quad (18')$$

on obtient

$$\frac{d_{\tau} \mathcal{F}}{dt} - \frac{\delta \mathcal{F}}{dt} = \left(\mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{J}}{dt} - \frac{\delta \mathbf{J}}{dt} \right) + \left(\mathbf{E}_m \cdot \frac{d\mathbf{P}}{dt} - \frac{\delta' \mathbf{P}}{dt} \right). \quad (25)$$

On peut enfin transformer le dernier terme de l'équation (23) en écrivant

$$+ \int_v \text{div } \mathcal{X} d\tau.$$

10. Une fois effectuées toutes les modifications indiquées pour les divers termes de l'équation (23), celle-ci ne contient plus que des intégrales étendues au même volume U , lequel est arbitraire. On peut alors supprimer les signes d'intégration, car une intégrale étendue à un volume arbitraire ne peut être constamment nulle que si la fonction à intégrer est elle-même nulle. Nous remplaçons ainsi l'équation (23) par la suivante

$$\operatorname{div} \left\{ \mathcal{E} + wV + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) V \right\} + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ w + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \right\} + \left(\mathbf{E}_m \cdot i + \frac{dP}{dt} - \frac{\delta' P}{dt} \right) + \left(\mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{J}}{dt} - \frac{\delta \mathbf{J}}{dt} \right) + (\mathbf{R} \cdot \mathbf{V}) = 0. \quad (26)$$

Calculons d'abord le terme en $\frac{\partial}{\partial t}$. D'après la valeur (17) de w et compte tenu de (11), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{ w + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \}}{\partial t} &= \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) - \left(\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) + \left(\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} \right) \\ &= \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) - \left(\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \right) - (\mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}). \end{aligned} \quad (27)$$

Au terme suivant, le facteur de \mathbf{E}_m vaut, vu (7'),

$$i + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \Delta) \mathbf{P} - (\mathbf{P} \cdot \Delta) \mathbf{V} + \mathbf{P} \operatorname{div} \mathbf{V},$$

ou

$$i + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \operatorname{rot} [\mathbf{V} \cdot \mathbf{P}] + \mathbf{V} \operatorname{div} \mathbf{P},$$

ou encore, vu (10) et (12),

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mathbf{V} \operatorname{div} \mathbf{E}. \quad (28)$$

Comme, d'autre part, \mathbf{E}_m vaut $\mathbf{E} + [\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}]$, le terme en \mathbf{E}_m de (26) peut se mettre sous la forme

$$\left(\mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mathbf{V} \operatorname{div} \mathbf{E} \right) + \left([\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}] \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mathbf{V} \operatorname{div} \mathbf{E} \right),$$

le second produit scalaire pouvant encore s'écrire

$$\left(\mathbf{B} \cdot \left[\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mathbf{V} \operatorname{div} \mathbf{E} \cdot \mathbf{V} \right] \right), \quad \text{ou} \quad \left(\mathbf{B} \cdot \left[\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{V} \right] \right).$$

Enfin, d'après (15), le produit $(\mathbf{R} \cdot \mathbf{V})$ est égal à

$$\left(\left[\text{rot } \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} \right] \cdot \mathbf{V} \right) + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{V}) \text{ div } \mathbf{E}, \text{ ou } \left(\mathbf{B} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \text{rot } \mathbf{B} \cdot \mathbf{V} \right] \right) + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{V}) \text{ div } \mathbf{E}. \quad (29)$$

Tenant compte de tous ces résultats, de la valeur (17) de w et substituant dans l'équation (26), celle-ci devient après suppression de six termes, deux à deux égaux et de signe contraire,

$$\begin{aligned} \text{div} \left\{ \mathcal{F} + \frac{\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2}{2} \mathbf{V} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \mathbf{V} \right\} - (\mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E}) + (\mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H}) \\ + \left(\mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{J}}{dt} - \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - \frac{\delta \mathbf{J}}{\delta t} + [\mathbf{V} \cdot \text{rot } \mathbf{J}] \right) = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Or

$$(\mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H}) - (\mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E}) = - \text{div } [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}].$$

D'autre part, le dernier terme de (30), vu l'expression (7) de $\frac{\delta \mathbf{J}}{\delta t}$, peut s'écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^\mu \left\{ \mathbf{V}^\nu \frac{\partial \mathbf{J}_\mu}{\partial x^\nu} + \mathbf{J}_\nu \frac{\partial \mathbf{V}^\nu}{\partial x^\mu} + \mathbf{V}^\nu \frac{\partial \mathbf{J}_\nu}{\partial x^\mu} - \mathbf{V}^\nu \frac{\partial \mathbf{J}_\mu}{\partial x^\nu} \right\}, \\ \text{ou} \quad \mathbf{B}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\mathbf{V}^\nu \mathbf{J}_\nu), \quad \text{ou} \quad (\mathbf{B} \cdot \text{grad } (\mathbf{V} \cdot \mathbf{J})), \end{aligned}$$

soit enfin, grâce à ce que $\text{div } \mathbf{B}$ est nul, $\text{div } \{ (\mathbf{V} \cdot \mathbf{J}) \mathbf{B} \}$. L'équation devient finalement

$$\text{div} \left\{ \mathcal{F} - [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}] + \frac{\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2}{2} \mathbf{V} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{J}) \mathbf{B} \right\} = 0.$$

Une solution évidente est

$$\mathcal{F} = [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}] - \frac{\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2}{2} \mathbf{V} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{J}) \mathbf{B}. \quad (31)$$

Cette solution remplit les conditions indiquées ce qui montre que la théorie proposée satisfait bien aux principes de la thermodynamique.

Dans l'éther, \mathbf{J} est nul, et si l'on fait en outre $\mathbf{V} = 0$ pour avoir le flux d'énergie à travers une surface fixe, la valeur de \mathcal{F} se réduit à $[\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}]$. C'est la valeur donnée par Poynting.

Théorie de Hertz.

Relations inchangées : (8), (9), (10).

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot} [\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}], \quad (11)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = i + \rho \mathbf{V} + \frac{\partial (\mathbf{E} + \mathbf{P})}{\partial t} - \text{rot} [\mathbf{V} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{P}], \quad (12)$$

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E}, \quad (13)$$

$$\mathbf{R} = \left[i + \rho \mathbf{V} + \frac{\partial (\mathbf{E} + \mathbf{P})}{\partial t} - \text{rot} [\mathbf{V} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{P}] \cdot \mathbf{H} \right] - \mathbf{H} \text{ div } \mathbf{J} \left. \vphantom{\mathbf{R}} \right\} \quad (14)$$

$$+ \{ \rho - \text{div } \mathbf{P} \} \mathbf{E} + [\text{rot } \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}]$$

(Le dernier terme représente la « force de Hertz »).

$$\mathbf{R} = [\text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}] + \mathbf{H} \text{ div } \mathbf{H} + [\text{rot } \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}] + \mathbf{E} \text{ div } \mathbf{E}, \quad (15)$$

$$R_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} (H_\mu H^\nu + E_\mu E^\nu) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{H_\nu H^\nu + E_\nu E^\nu}{2}, \quad (16)$$

$$w = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{2} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}), \quad (17)$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 + \int_{0,0}^{J,P} (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{J}) + (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{P}). \quad (18)$$

Relations inchangées : (19) à (24)

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{J}} = \mathbf{H}, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} = \mathbf{E}, \quad (18')$$

$$\frac{d_t \mathcal{F}}{dt} - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta t} = \left(\mathbf{H} \cdot \frac{d\mathbf{J}}{dt} - \frac{\delta' \mathcal{J}}{dt} \right) + \left(\mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{P}}{dt} - \frac{\delta' \mathcal{P}}{dt} \right). \quad (25)$$

L'avant-dernier terme de (26) devient $\left(\mathbf{H} \cdot \frac{d\mathbf{J}}{dt} - \frac{\delta' \mathcal{J}}{dt} \right)$. (26)

$$\frac{\partial \{ w + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \}}{\partial t} = \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) + \left(\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right). \quad (27)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \text{rot} [\mathbf{V} \cdot \mathbf{E}] - \mathbf{V} \text{ div } \mathbf{E}. \quad (28)$$

ou

$$\left. \begin{aligned} &([\text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}] \cdot \mathbf{V}) + (\mathbf{H} \cdot \mathbf{V}) \text{ div } \mathbf{H} + ([\text{rot } \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}] \cdot \mathbf{V}) + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{V}) \text{ div } \mathbf{E}, \\ &(\mathbf{E} \cdot \mathbf{V} \text{ div } \mathbf{E} + [\mathbf{V} \cdot \text{rot } \mathbf{E}]) + (\mathbf{H} \cdot \mathbf{V} \text{ div } \mathbf{H} + [\mathbf{V} \cdot \text{rot } \mathbf{H}]). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\operatorname{div} \left\{ \mathfrak{F} + \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{2} \mathbf{V} \right\} + (\mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} + [\mathbf{V} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}] + \operatorname{rot} [\mathbf{V} \cdot \mathbf{E}])$$

$$+ \left(\mathbf{H} \cdot \frac{\partial (\mathbf{H} + \mathbf{J})}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \Delta) \mathbf{J} - (\mathbf{J} \cdot \Delta) \mathbf{V} + \mathbf{J} \operatorname{div} \mathbf{V} + \mathbf{V} \operatorname{div} \mathbf{H} + [\mathbf{V} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}] \right) = 0.$$

Vu (9) et (11) le facteur de \mathbf{H} peut s'écrire

$$- \operatorname{rot} \mathbf{E} + [\mathbf{V} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}] + \operatorname{rot} [\mathbf{V} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{J}].$$

L'équation devient

$$\operatorname{div} \left\{ \mathfrak{F} + \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{2} \mathbf{V} \right\} + (\mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}) - (\mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E})$$

$$+ (\mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} [\mathbf{V} \cdot \mathbf{E}]) - ([\mathbf{V} \cdot \mathbf{E}] \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}) + (\mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} [\mathbf{V} \cdot \mathbf{H}]) - ([\mathbf{V} \cdot \mathbf{H}] \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}) = 0,$$

ou encore, en vertu de $(\mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}) - (\mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A}) \equiv - \operatorname{div} [\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}]$,

$$\operatorname{div} \left\{ \mathfrak{F} + \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{2} \mathbf{V} - [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}] - [\mathbf{E} \cdot [\mathbf{V} \cdot \mathbf{E}]] - [\mathbf{H} \cdot [\mathbf{V} \cdot \mathbf{H}]] \right\} = 0.$$

$$\mathfrak{F} = [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}] - \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{2} \mathbf{V} + [\mathbf{E} \cdot [\mathbf{V} \cdot \mathbf{E}]] + [\mathbf{H} \cdot [\mathbf{V} \cdot \mathbf{H}]]$$

$$= [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}] + \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{2} \mathbf{V} - \mathbf{E} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{H} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{H}).$$

(30)

(31)

CHAPITRE III

Extension des résultats précédents à des cas plus généraux.

11. Nous venons d'établir que, tant pour la théorie de Hertz que pour celle de H. Lorentz, il est possible de déterminer un vecteur \mathcal{P} , jouant pour la matière en mouvement le même rôle que fait le vecteur de Poynting pour l'éther pur. Ici, se pose la question suivante : la réussite tient-elle essentiellement aux hypothèses particulières faites au cours du calcul ? Il est intéressant de montrer qu'il n'en est rien et que le résultat s'étend à des théories plus générales.

a) Supposons tout d'abord que l'on modifie les valeurs des constantes C et C' de la formule (5)

$$\delta J_{\mu} = \left\{ \left[\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{V} \cdot \mathbf{J} \right]_{\mu} + C J_{\nu} \delta_{\mu}^{\nu} + C' J_{\mu} \delta_{\nu}^{\nu} \right\} dt,$$

fixant la variation virtuelle δJ à introduire dans le calcul du second membre de l'équation (3) qui relie les pressions et la déformation, équation que je récris :

$$p_{\nu\mu} \delta^{\nu\mu} = - \frac{d_{\mathbf{r}} (\sigma \mathcal{F})}{\sigma dt}. \quad (3)$$

Soient donc $C + \Delta C$ et $C' + \Delta C'$ les nouvelles valeurs adoptées pour C et C' . Les variations ΔC et $\Delta C'$ n'ont d'influence que sur le terme du second membre de (3) qui dépend de δJ . Comme, d'autre part, $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial J_{\mu}} = B^{\mu}$, les variations $\Delta p^{\nu\mu}$ des pressions satisferont à l'équation

$$\Delta p_{\nu\mu} \delta^{\nu\mu} = - B^{\mu} \{ \Delta C J_{\nu} \delta_{\mu}^{\nu} + \Delta C' J_{\mu} \delta_{\nu}^{\nu} \}. \quad (32)$$

On satisferait à l'équation (32) et à la condition que les $\Delta p^{\nu\mu}$ soient les composantes d'un tenseur en prenant

$$\Delta p^{\nu\mu} = - \Delta C B^{\mu} J^{\nu} - \Delta C' (B \cdot J) g^{\mu\nu}.$$

Mais le tenseur ainsi obtenu ne serait pas symétrique droit. Pour satisfaire à cette dernière condition sans cesser de satisfaire aux deux premières, il suffit de poser

$$\Delta p^{\nu\mu} = - \Delta C \frac{B^{\mu} J^{\nu} + B^{\nu} J^{\mu}}{2} - \Delta C' (B \cdot J) g^{\mu\nu}. \quad (33)$$

Le second terme représente une pression normale de grandeur $\Delta C'$ (B.J). C'est ce qui résulte de la présence du facteur $g^{\mu\nu}$ qui (les coordonnées étant trirectangles) vaut 1 pour $\mu = \nu$ et est nul pour $\mu \neq \nu$.

Par suite de la modification apportée aux p^{μ} le terme $-\frac{\partial p^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$ de l'équation (21) subit une modification de valeur (*)

$$\Delta C \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \frac{B^{\mu} J^{\nu} + B^{\nu} J^{\mu}}{2} + \Delta C' \frac{\partial (B.J)}{\partial x^{\nu}} g^{\mu\nu}.$$

Si l'on ne veut rien modifier à l'équilibre ou au mouvement des points du système, il faut augmenter le terme R^{μ} de (21) d'une quantité ΔR^{μ} égale et contraire à la précédente

$$\Delta R^{\mu} = -\Delta C \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \frac{B^{\mu} J^{\nu} + B^{\nu} J^{\mu}}{2} - \Delta C' \frac{\partial (B.J)}{\partial x^{\nu}} g^{\mu\nu}. \quad (34)$$

Une autre raison conduit à admettre une telle modification dans la valeur des forces exercées par le champ magnétique sur l'aimantation. Nous avons rappelé au § 4 que nous avons obtenu en 1923 comme expression du travail virtuel dans une déformation (*loc. cit.*, § 7)

$$-d_{\tau} \int \mathcal{F} d\tau - d_{\tau,1} \int w d\tau.$$

Nous avons dit de plus que, si la valeur de chacun de ces termes dépend de la valeur conventionnelle attribuée à δJ , leur somme n'en dépend pas : en cas de changement des δJ , il y a donc simplement report d'un terme à l'autre d'une partie du travail virtuel, donc également des efforts correspondants. Il est donc logique de supposer qu'il en est de même dans l'essai d'extension de notre théorie au cas des corps en mouvement.

Reportons-nous maintenant à l'équation (23). En vertu de (33) et (34), les termes $p^{\mu} \frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\nu}} + (R.V)$ de l'intégrale de volume subissent un accroissement

$$\begin{aligned} & -\Delta C \left\{ \frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{B^{\mu} J^{\nu} + B^{\nu} J^{\mu}}{2} + V_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \frac{B^{\mu} J^{\nu} + B^{\nu} J^{\mu}}{2} \right\} \\ & -\Delta C' \left\{ \frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\nu}} (B.J) g^{\mu\nu} + V_{\mu} \frac{\partial (B.J)}{\partial x^{\nu}} g^{\mu\nu} \right\}, \end{aligned}$$

accroissement égal à

$$-\Delta C \frac{\partial (V.B) J^{\nu} + (V.J) B^{\nu}}{2} - \Delta C' \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left\{ (B.J) V^{\nu} \right\},$$

1. Les dérivées des $g_{\mu\nu}$ sont identiquement nulles.

ou encore à

$$- \operatorname{div} \left\{ \Delta C \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{J} + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{J}) \mathbf{B}}{2} + \Delta C' (\mathbf{B} \cdot \mathbf{J}) \mathbf{V} \right\}.$$

Pour que les équations (23) et (26) restent satisfaites, il suffit de majorer le vecteur \mathcal{F} de la quantité

$$\Delta C \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{J} + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{J}) \mathbf{B}}{2} + \Delta C' (\mathbf{B} \cdot \mathbf{J}) \mathbf{V}. \quad (35)$$

La vérification subsiste donc quelles que soient les valeurs attribuées aux constantes C et C' .

b) Ce que nous venons de dire pour la théorie de Lorentz est applicable à celle de Hertz, sauf qu'il faudrait partout substituer le vecteur \mathbf{H} au vecteur \mathbf{B} .

Il y a même plus : pour chacune des deux théories, il serait possible de définir à volonté la fonction \mathcal{F} au moyen de l'intégrale $\int (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{J})$ ou au moyen de $\int (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{J})$. Pour l'établir, nous pouvons supposer que l'on effectue d'abord une transformation du type étudié en *a)*, ramenant les constantes C et C' à prendre les valeurs particulières

$$C = 0, \quad C' = -\frac{1}{2}.$$

On vérifie immédiatement que, avec ces valeurs attribuées à C et C' , le produit $\mathbf{J}^2 d\tau$ reste invariant lorsqu'on donne à \mathbf{J} la modification virtuelle (5).

Or, la différence des valeurs de $\mathcal{F} d\tau$ suivant que l'on définit \mathcal{F} au moyen de \mathbf{B} ou de \mathbf{H} est précisément égale à $d\tau \int (\mathbf{B} - \mathbf{H} \cdot d\mathbf{J})$ ou $\frac{\mathbf{J}^2}{2} d\tau$. Par suite, pour ces valeurs particulières de C et C' , l'emploi de \mathbf{B} ou de \mathbf{H} dans la définition de \mathcal{F} laisse inchangées les valeurs de la force \mathbf{R} et du vecteur \mathcal{F} .

c) Enfin tant pour la théorie de Lorentz que pour celle de Hertz, des considérations analogues s'appliqueraient au remplacement par d'autres, des valeurs des constantes figurant dans la relation correspondante à (5) pour la polarisation diélectrique \mathbf{P} .

Mais l'on ne pourrait plus dire (pas plus du reste que pour le cas *b)* en ce qui concerne la théorie de Hertz) que les théories étudiées sont encore celles de Lorentz et de Hertz, car l'un et l'autre de ces savants ont fixé les expressions qu'ils adoptaient pour les termes de \mathbf{R} se rapportant à la polarisation diélectrique.

12. Disons quelques mots pour le cas où l'on voudrait considérer, comme au § 13 du premier travail (*loc. cit.*, pp. 276 et 277) l'existence d'un couple $[\mathbf{J} \cdot \mathbf{H}] d\tau$

s'exerçant sur tout élément aimanté. Soit, d'une façon générale, $\Gamma^{\mu\nu}$ le tenseur symétrique gauche du second ordre représentant le couple par unité de volume.

Lorsqu'il existe un tel couple, la relation $p^{\nu\mu} = p^{\mu\nu}$, déduite des conditions d'équilibre d'un parallépipède élémentaire, est remplacée par celle-ci :

$$p^{\nu\mu} - p^{\mu\nu} = \Gamma^{\nu\mu}. \quad (36)$$

On passera du tenseur symétrique $p^{\nu\mu}$ satisfaisant à (3) au tenseur dissymétrique en majorant respectivement $p^{\nu\mu}$ et $p^{\mu\nu}$ de

$$\Delta p^{\nu\mu} = \frac{1}{2} \Gamma^{\nu\mu} \quad \text{et} \quad \Delta p^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \Gamma^{\mu\nu} = -\Delta p^{\nu\mu}.$$

Les nouvelles valeurs obtenues pour $p^{\nu\mu}$ et $p^{\mu\nu}$ satisfont comme les premières à la relation (3), mais en plus, elles satisfont à (36).

Le terme $-\frac{\partial p^{\nu\mu}}{\partial x^\nu}$ de l'équation (21) se trouvant majoré de $-\frac{1}{2} \frac{\partial \Gamma^{\nu\mu}}{\partial x^\nu}$, il est nécessaire de diminuer R^μ de la même quantité afin que le mouvement ne change pas; cela donne

$$\Delta R^\mu = \frac{1}{2} \frac{\partial \Gamma^{\nu\mu}}{\partial x^\nu}. \quad (37)$$

Si nous nous reportons maintenant à l'équation (19), nous constatons que le terme $p^{\nu\mu} N_\nu V_\mu$ est augmenté de $\frac{1}{2} \Gamma^{\nu\mu} N_\nu V_\mu$ ou, par permutation des indices muets, de $\frac{1}{2} \Gamma^{\mu\nu} N_\mu V_\nu$. L'équation (19) pourra cependant être maintenue rien qu'en ajoutant à \mathcal{F} un vecteur $\Delta \mathcal{F}$ tel que

$$\Delta \mathcal{F} = \frac{1}{2} \Gamma^{\nu\mu} V_\nu. \quad (38)$$

13. L'hypothèse émise au § 4 sur la forme des relations entre les pressions et la déformation dans un corps aimanté ou polarisé, ne fait qu'étendre à ces corps, d'une manière qui paraît très naturelle, le type de relation existant pour les autres corps. Mais on peut se demander s'il ne serait pas plus commode pour les applications de revenir à l'une des hypothèses envisagées au § 40 du mémoire de 1925 (*loc. cit.*, p. 156), en admettant que la pression dépend de la déformation exactement de la même manière que le corps soit aimanté ou ne le soit pas (¹).

Vérifions que ce retour à une hypothèse antérieure n'empêcherait pas de trouver encore un vecteur jouant le rôle du vecteur de Poynting.

1. Cette manière de traiter le problème est celle adoptée par M. L. Roy.

Soient $p^{\nu\mu}$ les pressions développées dans un corps non aimanté ni polarisé et $p^{\nu\mu}$ les pressions dans le même corps aimanté ou polarisé. Ces quantités satisfont à des équations de la forme (3)

$$\left. \begin{aligned} p^{\circ\nu\mu} \delta^{\nu\mu} dt &= -\frac{1}{\sigma} d_{\tau} (\sigma \mathcal{F}^{\circ}), & p^{\nu\mu} \delta^{\nu\mu} dt &= -\frac{1}{\sigma} d_{\tau} (\sigma \mathcal{F}), \\ \text{avec} & & & \\ \mathcal{F} &= \mathcal{F}^{\circ} + \mathcal{F}_s, & \mathcal{F}_s &= \int_{0,0}^{\nu,\mu} (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{J}) + (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{P}). \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

\mathcal{F}_s est le terme supplémentaire à ajouter à \mathcal{F}° pour obtenir \mathcal{F} .

Supposons que l'on donne aux $\delta^{\nu\mu}$ les mêmes valeurs dans les deux premières relations (39) et soustrayons ces relations l'une de l'autre. Nous obtenons

$$(p_{\nu\mu} - p^{\circ}_{\nu\mu}) \delta^{\nu\mu} = -\frac{d\sigma}{\sigma dt} \mathcal{F}_s - \frac{\delta \mathcal{F}_s}{dt} = -\delta^{\nu} \mathcal{F}_s - \frac{\delta \mathcal{F}_s}{dt}. \quad (40)$$

La variation $\delta \mathcal{F}_s$ se calcule en laissant T constant, mais en donnant aux $\delta \mathbf{J}$ leurs valeurs en fonction des δ^{ν}_{μ} et δ^{ν} suivant les valeurs attribuées aux constantes C et C' dans la relation (5). $\delta \mathcal{F}_s$ est une fonction linéaire des dilatations et glissements qui est indépendante de la rotation, d'après la manière dont la forme de relation (5) a été choisie (cf. § 4). Si en effet on annule tous les $\delta^{\nu\mu}$, l'aimantation \mathbf{J} ne fait que tourner avec le corps, ce qui n'entraîne aucune modification de \mathcal{F}_s ni de \mathcal{F} .

Une fois le tenseur $p_{\nu\mu} - p^{\circ}_{\nu\mu}$ déterminé, supposons que l'on remplace dans l'équation (21) les $p^{\nu\mu}$ par les $p^{\circ\nu\mu}$ conformément à la nouvelle hypothèse envisagée. Pour que l'équation subsiste avec les mêmes valeurs de la force \mathbf{F} et de l'accélération, il faut supposer que la force \mathbf{R}^{μ} subit un accroissement.

$$\Delta \mathbf{R}^{\mu} = -\frac{\partial (p^{\nu\mu} - p^{\circ\nu\mu})}{\partial x^{\nu}}.$$

Ceci fait, la somme des termes $p^{\nu\mu} \frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\nu}}$ et $(\mathbf{R} \cdot \mathbf{V})$ de (23) subit une variation

$$\begin{aligned} - (p^{\nu\mu} - p^{\circ\nu\mu}) \frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial (p^{\nu\mu} - p^{\circ\nu\mu})}{\partial x^{\nu}} V_{\mu} &= -\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left\{ (p^{\nu\mu} - p^{\circ\nu\mu}) V_{\mu} \right\} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left\{ (p^{\mu\nu} - p^{\circ\mu\nu}) V_{\nu} \right\} \end{aligned}$$

et il suffit de faire varier le vecteur \mathcal{F} de

$$\Delta \mathcal{F}^{\mu} = (p^{\mu\nu} - p^{\circ\mu\nu}) V_{\nu}$$

pour rétablir l'égalité (23).

L'augmentation de la puissance transmise par le vecteur de Poynting, augmentation égale pour un élément dS à $\Delta \mathfrak{F} N_\mu dS$ ou $(p^{\mu\nu} - p^{0,\mu\nu}) N_\mu V_\nu dS$, ou encore $(p^{\nu\mu} - p^{0,\nu\mu}) N_\nu V_\mu dS$, compense la réduction de la puissance transmise mécaniquement par les pressions dont les valeurs sont ramenées de $p^{\nu\mu}$ à $p^{0,\nu\mu}$.

Il importe de remarquer que les valeurs finales auxquelles on parvient pour la force R et pour le vecteur \mathfrak{F} sont indépendantes des valeurs attribuées aux constantes C et C' . Pour l'établir, nous remarquerons que C et C' n'interviennent dans l'expression de $p_{\nu\mu} - p_{\nu\mu}^0$ que par le terme $-\frac{\delta \mathfrak{F}_s}{dt}$ qui est égal à

$$-\left(\frac{\delta \mathfrak{F}_s}{dt}\right)_{c=c'=0} = B^\mu \left\{ C J_\mu \delta_\nu^\nu + C' J_\mu \delta_\nu^\nu \right\}.$$

Aux termes en C et C' de $-\frac{\delta \mathfrak{F}_s}{dt}$ correspondent pour $p^{\nu\mu} - p^{0,\nu\mu}$ [cf. équat. (33)] un terme

$$-C \frac{B^\mu J^\nu + B^\nu J^\mu}{2} - C' (B \cdot J) g^{\mu\nu}$$

et pour R^μ [cf. équat. (34)] un terme

$$-C \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{B^\mu J^\nu + B^\nu J^\mu}{2} - C' \frac{\partial (B \cdot J)}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu}.$$

Or, nous venons de voir que, en ramenant la pression de la valeur $p^{\nu\mu}$ à celle $p^{0,\nu\mu}$ qui est développée dans le système désaimanté, on augmente R^μ de $-\frac{\partial}{\partial x^\nu} (p^{\nu\mu} - p^{0,\nu\mu})$ c'est-à-dire de

$$+C \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{B^\mu J^\nu + B^\nu J^\mu}{2} + C' \frac{\partial (B \cdot J)}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu}.$$

Les deux effets se détruisent. De même pour le vecteur \mathfrak{F} .

Nous n'avons tenu compte dans nos explications que de l'aimantation J . Des raisonnements identiques s'appliqueraient à la polarisation diélectrique P .

Que faut-il penser de l'hypothèse faite au présent paragraphe, suivant laquelle la relation entre pression et déformation resterait la même lorsqu'un corps passe de l'état neutre ($J = P = 0$) à l'état aimanté ou polarisé? Cette hypothèse est certainement la plus commode à adopter pour les calculs d'application [cf., 1^{er} mémoire, § 21 et § 30, pp. 319 et 320]. Mais, en elle-même, cette hypothèse paraît peu satisfaisante, car on ne voit pas de raison théorique d'appliquer la relation (3)

$$p_{\mu\nu} \delta^{\mu\nu} dt = -\frac{1}{\sigma} d_r (\sigma \mathfrak{F}),$$

en donnant à \mathcal{F} , non pas la valeur que prend en fait le potentiel thermodynamique du corps aimanté et polarisé, mais la valeur \mathcal{F}^0 que prendrait ce potentiel si l'on désaimantait et dépolarisait le corps (en laissant bien entendu sa température et sa forme invariables). On reporte ainsi d'une manière arbitraire sur la force R l'influence qu'exercent la polarisation et l'aimantation sur les pressions développées.

L'expérience est d'ailleurs incapable de trancher la question en faveur d'une hypothèse ou d'une autre, car un changement d'hypothèse ne fait que reporter des pressions sur les forces R ou inversement, sans que les effets soient modifiés.

CHAPITRE IV

Etude des surfaces de discontinuité.

14. Nous ne nous occuperons que des surfaces de discontinuité stationnaires par rapport à la matière, surfaces constituées par des contacts entre corps différents, que ces corps soient soudés ou libres de se déplacer l'un par rapport à l'autre. Nous laissons donc de côté tous phénomènes tels que des ondes de choc. Il en résulte que, si une certaine grandeur a est susceptible de subir une discontinuité en un point fixe de l'espace, lorsque le point est rencontré par la surface de discontinuité, il n'en est pas de même pour un point entraîné dans le mouvement de la matière. Autrement dit, tandis que la dérivée partielle $\frac{\partial a}{\partial t}$ est susceptible de devenir infinie au passage de la surface de discontinuité, la dérivée totale $\frac{da}{dt}$ reste essentiellement finie et même continue.

Ceci dit, soit une région quelconque U limitée par une surface fermée S et traversée par une surface de discontinuité Σ . Décomposons U en trois régions par deux surfaces Σ' et Σ'' situées de part et d'autre de la surface Σ et infiniment voisines de celle-ci. Soit U_0 la région limitée à Σ' et Σ'' et contenant Σ . Les deux autres régions ne sont le siège d'aucune discontinuité et l'analyse du chapitre II s'y applique. Tout revient à étudier la région U_0 que nous considérerons comme zone d'épaisseur décroissante, se réduisant à la limite à la surface Σ .

Appliquons à la région U_0 l'équation (23), en ne conservant que les termes qui ne tendent pas vers zéro en même temps que l'épaisseur de U_0 . Cela donne

$$\left. \begin{aligned} \lim_{v_0} \int_{v_0} p^{v\mu} \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} d\tau + \lim_{v_0} \int_{v_0} (R \cdot V) d\tau &= \lim_{v_0} \int_{\Sigma' + \Sigma''} (\mathcal{F} \cdot N) dS \\ &= - \int_{\Sigma} \left\{ (\mathcal{F}' \cdot N') + (\mathcal{F}'' \cdot N'') \right\} d\Sigma. \end{aligned} \right\} (41)$$

Le changement de signe en passant de $\int_{\Sigma' + \Sigma''}$ à \int_{Σ} provient de ce que, pour la première intégrale, la normale N est menée vers l'intérieur de U_0 , tandis que, pour la dernière intégrale, chaque normale N' , N'' est menée à partir de Σ respectivement vers les régions où \mathcal{F} prend les valeurs \mathcal{F}' et \mathcal{F}'' .

Nous avons conservé dans (41) le terme en $\frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\nu}}$ pour le cas de discontinuité dans la vitesse. Ce terme ne joue de rôle que dans la théorie de Hertz, contrairement à la théorie de H. Lorentz, où, comme la suite nous le montrera, ce terme n'intervient pas. Cette différence entre les deux théories est en corrélation avec le fait signalé § 7 qu'il suffit d'annuler ρ , i , P et J pour faire disparaître V des équations de Lorentz, alors que cela ne l'empêche pas de subsister dans celles de Hertz. Il ne nous est donc plus possible de conserver dans tous les raisonnements sur les surfaces de discontinuité le même parallélisme entre les deux théories qu'au chapitre II.

Aussi pour ne pas trop allonger ce travail, je me bornerai à l'examen de la théorie de H. Lorentz et ne donnerai en notes pour la théorie de Hertz que les relations pour lesquelles le parallélisme subsiste.

L'élément de volume $d\tau$ qui figure dans les intégrales de (41) peut être pris égal à $de \times d\Sigma$, e étant l'épaisseur de la couche de passage, évaluée normalement à Σ . Si nous posons alors

$$\lim_{e \rightarrow 0} \int (R \cdot V) de = (R \cdot V) \quad \text{ou} \quad \Sigma (R \cdot V),$$

suivant que la valeur de la vitesse limite V est la même pour tous les points de la couche ou peut prendre plusieurs valeurs, nous pourrions supprimer le signe d'intégration sur la surface Σ , car le champ d'intégration pour Σ est arbitraire comme il l'est pour le volume U . L'équation (41) prend la forme

$$(R \cdot V) \quad \text{ou} \quad \Sigma (R \cdot V) = - (\mathcal{F} \cdot N') - (\mathcal{F}'' \cdot N''). \quad (42)$$

Nous justifierons l'extension au cas de discontinuités des propriétés établies au chapitre II en montrant que l'équation (42) est satisfaite en donnant à \mathcal{F} la valeur (31) calculée dans l'hypothèse de milieux continus.

15. Il nous faut tout d'abord rechercher ce que deviennent les équations du champ dans la théorie de H. Lorentz [éq. (9) à (12)] lorsqu'on se trouve sur une surface de discontinuité.

Pour (9) et (10) le résultat est bien connu; les équations correspondantes sur Σ sont

$$(B' \cdot N') + (B'' \cdot N'') = 0 \quad \text{ou} \quad B'_{\Sigma'} = B''_{\Sigma''}$$

et

$$(E' + P' \cdot N') + (E'' + P'' \cdot N'') = \sigma, \quad (\sigma = \text{densité superficielle}).$$

Comme nous n'avons besoin que de déterminer les relations entre la grandeur du champ des deux côtés de la surface Σ en chaque point de cette surface (sans

comparer ce qui se passe en deux points différents de la surface), nous pourrions simplifier en supposant que nous prenons le plan tangent à la surface au point considéré comme plan des x, y , la direction positive de l'axe des z étant dirigée vers la face notée '.

Avant le passage à la limite, l'équation (9) s'écrit

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

Les dérivées $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ restent finies dans le passage à la limite, car ce n'est que dans la traversée de la surface qu'une discontinuité peut se produire. La dérivée $\frac{\partial}{\partial z}$ est donc la seule qui pourrait devenir infinie et qu'il y ait lieu de conserver. L'équation (9) se réduit ainsi dans la couche de passage à

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad \text{d'où} \quad B_z = \text{Const}^e \text{ (par rapport à } z\text{)}. \quad (43)$$

On peut maintenant passer à la limite et on retrouve ainsi la première des équations ci-dessus.

Traisons de même l'équation (10). Dans la couche de passage elle se réduit à

$$\frac{\partial (E_z + P_z)}{\partial z} = \rho,$$

d'où

$$E_z + P_z = \int \rho dz$$

et, en intégrant dans l'épaisseur de la couche de passage,

$$(E_z + P_z)' - (E_z + P_z)'' = \sigma, \quad (44)$$

équation qui concorde bien avec la seconde des relations ci-dessus (*).

Passons à (11) que nous écrirons

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \left(V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{B}.$$

La dérivée $\frac{d}{dt}$ reste finie pour les points de la couche de passage, comme nous l'avons remarqué au début du § 14. Les dérivées $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ également. Il n'y a donc

1. Théorie de Hertz :

sans changement.

(43), (44)

à conserver au second membre que le terme $V_z \frac{\partial B}{\partial z}$. Si nous projetons maintenant sur les trois axes, nous obtenons

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} = V_z \frac{\partial B_x}{\partial z}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = V_z \frac{\partial B_y}{\partial z}, \quad 0 = V_z \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (45)$$

La dernière équation rentre dans (43) et n'a pas besoin d'être conservée. Quant aux deux premières, il est possible de les intégrer parce que V_z peut être considéré comme constant. Si, en effet, V_z variait d'une quantité finie dans la couche de passage, il en résulterait une onde de choc, cas que nous avons explicitement réservé. L'intégration donne

$$E_x - V_z B_y = C^{te}, \quad E_y + V_z B_x = C^{te}. \quad (45')$$

Traisons de même l'équation (12) en commençant par retrancher $\text{rot} [V.E]$ aux deux membres de l'équation et développant $\text{rot} [V.E + P]$ au second membre. Si l'on tient compte en outre de (10) et de la relation entre les symboles $\frac{\partial}{\partial t}$ et $\frac{d}{dt}$, on obtient

$$\text{rot} \{ H - [V.E] \} = i + \frac{d(E + P)}{dt} + \{ E + P \} \text{div} V - (E + P.\Delta) V.$$

Les trois premiers termes du second membre restent finis et seul le produit $-(E_x + P_x) \frac{\partial V}{\partial z}$ provenant du quatrième terme pourrait devenir infini.

En projetant sur les trois axes, on obtient les deux relations suivantes, plus une troisième identiquement satisfaite (*) :

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial z} \left\{ H_y - V_z E_x + V_x E_z \right\} + (E_x + P_x) \frac{\partial V_x}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ H_x - V_y E_z + V_z E_y \right\} + (E_z + P_z) \frac{\partial V_y}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

16. Nous pouvons maintenant aborder la vérification des relations (41) ou (42) en distinguant différents cas.

Nous supposons d'abord que les matières des deux côtés de la surface de discontinuité Σ sont soudées entre elles. Dans ce cas, non seulement V reste continue

1. Théorie de Hertz :

$$\left. \begin{aligned} E_x - B_z V_y &= C^{te}, \\ E_y + B_z V_x &= C^{te}. \end{aligned} \right\} (45') \quad \left. \begin{aligned} -\frac{\partial H_y}{\partial z} + (E_x + P_x) \frac{\partial V_x}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} + (E_z + P_z) \frac{\partial V_y}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} (46)$$

à la traversée de Σ , mais les trois dérivées $\frac{\partial V_x}{\partial z}$, $\frac{\partial V_y}{\partial z}$ et $\frac{\partial V_z}{\partial z}$ restent finies, car sans cela les δ_i^v seraient infinis, ce qui est physiquement impossible. Dans ces conditions, les derniers termes en $E_x + P_x$ disparaissent des équations (46) qui donnent par intégration dans l'épaisseur de la couche de passage

$$H_x + V_z E_y - V_y E_z = C^{10}, \quad H_y - V_z E_x + V_x E_z = C^{10}. \quad (46')$$

Reportons-nous à l'équation (16) qui donne les composantes de la force R par unité de volume. Dans la couche de passage, les dérivées $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ restent finies, contrairement à la dérivée $\frac{\partial}{\partial z}$ et à la dérivée $\frac{\partial}{\partial t}$ qui, d'après la relation

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{dt} - V_x \frac{\partial}{\partial x} - V_y \frac{\partial}{\partial y} - V_z \frac{\partial}{\partial z},$$

est de l'ordre de $-V_z \frac{\partial}{\partial z}$. Ne conservant que les quantités devenant infinies lorsque l'épaisseur de la couche tend vers zéro, nous obtenons

$$R_x = \frac{\partial}{\partial z} (B_x B_z + E_x E_z) - V_z \frac{\partial}{\partial z} (B_y E_z - B_z E_y),$$

Multipliant par V_x et faisant passer sous le signe de dérivation les facteurs constants V_x et V_z , il vient (1)

$$\left. \begin{aligned} R_x V_x &= \frac{\partial}{\partial z} V_x \left\{ B_z (B_x + V_z E_y) + E_z (E_x - V_z B_y) \right\}. \\ \text{De même} \\ R_y V_y &= \frac{\partial}{\partial z} V_y \left\{ B_z (B_y - V_z E_x) + E_z (E_y + V_z B_x) \right\} \\ \text{et} \\ R_z V_z &= \frac{\partial}{\partial z} V_z \left\{ E_x^2 + B_z^2 - \frac{E^2 + B^2}{2} - V_z (B_x E_y - B_y E_x) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

1. Théorie de Hertz :

$$H_x = C^{10}, \quad H_y = C^{10}. \quad (46')$$

$$\left. \begin{aligned} R_x V_x &= \frac{\partial}{\partial z} V_x (H_x H_z + E_x E_z), \\ R_y V_y &= \frac{\partial}{\partial z} V_y (H_y H_z + E_y E_z), \\ R_z V_z &= \frac{\partial}{\partial z} V_z \left(E_x^2 + H_z^2 - \frac{E^2 + H^2}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Additionnons les trois équations pour obtenir la puissance (R.V). Le résultat peut s'écrire

$$(R.V) = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (E_x - V_z B_y + V_y B_z) (H_y - V_z E_x + V_x E_z) - (E_y + V_z B_x - V_x B_z) (H_x + V_z E_y - V_y E_z) \right\} - \frac{\partial \mathcal{F}_z}{\partial z}. \quad (48)$$

Toutes les parenthèses sous le premier signe $\frac{\partial}{\partial z}$ sont constantes en vertu de (43), (45') et (46'). L'équation se réduit à

$$(R.V) = - \frac{\partial \mathcal{F}_z}{\partial z}. \quad (49)$$

Une intégration dans l'épaisseur de la couche de passage transforme en

$$(\mathcal{R}.V) = - \mathcal{F}_z' + \mathcal{F}_z''. \quad (50)$$

Cette relation n'est autre que la relation (42) à vérifier. C'est (42) qui est applicable et non pas (41), parce que les dérivées de V_x , V_y , V_z restent toutes finies dans le cas étudié. Le terme en δ_{μ} de (41) disparaît donc dans le passage à la limite (*).

17. Le calcul ci-dessus montre que la valeur limite \mathcal{R} de la force dans la couche de passage ne dépend que des valeurs du champ électromagnétique de part et d'autre de la surface Σ . Cette valeur limite est parfaitement déterminée quel que soit le mode de variation de ρ , J , P , etc. à l'intérieur même de la couche de passage. Il n'en est pas de même pour les trois forces partielles en lesquelles on peut décomposer la force R , savoir : 1° force $\left(\rho - \frac{\partial P_z}{\partial z}\right) E$; 2° force sur le courant de convection résultant du mouvement de la charge $\rho - \frac{\partial P_z}{\partial z}$; force sur le courant équivalent à l'aimantation. Les composantes de ces trois forces (en laissant de côté les termes disparaissant dans le passage à la limite) sont :

	Force électrostatique	Courants de convection	Aimantation
Suivant Ox :	$\frac{\partial E_z}{\partial z} E_x$,	$\frac{\partial E_z}{\partial z} (V_y B_z - V_z B_y)$,	$\frac{\partial J_x}{\partial z} B_z$,
Oy :	$\frac{\partial E_z}{\partial z} E_y$,	$\frac{\partial E_z}{\partial z} (V_z B_x - V_x B_z)$,	$\frac{\partial J_y}{\partial z} B_z$,
Oz :	$\frac{\partial E_z}{\partial z} E_z$,	$\frac{\partial E_z}{\partial z} (V_x B_y - V_y B_x)$,	$-\left(\frac{\partial J_x}{\partial z} B_x + \frac{\partial J_y}{\partial z} B_y\right)$.

1. Théorie de Hertz :

$$(R.V) = \frac{\partial}{\partial z} (E_y H_x - E_x H_y) - \frac{\partial \mathcal{F}_z}{\partial z}, \quad (48)$$

$$\text{Equations inchangées.} \quad (49), (50)$$

Pour la force résultante, les composantes suivant les trois axes sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial z} (\mathbf{E}_x + \mathbf{V}_y \mathbf{B}_z - \mathbf{V}_z \mathbf{B}_y) + \frac{\partial \mathbf{J}_x}{\partial z} \mathbf{B}_z, \\ \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial z} (\mathbf{E}_y + \mathbf{V}_z \mathbf{B}_x - \mathbf{V}_x \mathbf{B}_z) + \frac{\partial \mathbf{J}_y}{\partial z} \mathbf{B}_z, \\ \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial z} (\mathbf{E}_z + \mathbf{V}_x \mathbf{B}_y - \mathbf{V}_y \mathbf{B}_x) - \left(\frac{\partial \mathbf{J}_x}{\partial z} \mathbf{B}_x + \frac{\partial \mathbf{J}_y}{\partial z} \mathbf{B}_y \right). \end{aligned}$$

Ces composantes de la force résultante s'identifient facilement avec les quantités \mathbf{R}_x , \mathbf{R}_y , \mathbf{R}_z ci-dessus. Ce sont des dérivées exactes par rapport à z . Il résulte de là que les valeurs des intégrales de \mathbf{R}_x , \mathbf{R}_y , \mathbf{R}_z dans la couche de passage ne dépendent que des valeurs du champ sur les deux faces de cette couche. Mais il n'en est pas de même pour les forces partielles; aussi les intégrales de ces forces partielles n'ont-elles pas de limite déterminée. Seule leur résultante est physiquement déterminée (cf. J.-J. Thomson : On the mechanical force acting on a Piece of Iron... Phil. Mag., Juil. 1898 et L. Roy : Sur les actions..., *Annales de Toulouse*, 1939, 4^e série, tome II, bas de la page 2).

18. Les résultats du paragraphe 16 sont en particulier valables si, d'un côté de la surface de discontinuité, on a affaire à une matière « inerte » c'est-à-dire, comme il a été défini au paragraphe 7, à une matière qui n'est pas susceptible d'aimantation, de polarisation ni de conduction. Nous avons vu que la présence d'une telle matière inerte, même en mouvement, est sans influence sur le champ magnétique produit, qui est le même que dans l'éther pur. Nous pouvons donc, en passant par cet intermédiaire d'une matière inerte, étudier les discontinuités du champ à la surface d'une matière située dans le vide. Supposons que la matière soit du côté ' de la surface Σ et désignons par un indice 0 les valeurs du champ du côté du vide où \mathbf{J} et \mathbf{P} sont nuls et \mathbf{H} est égal à \mathbf{B} . les formules (43) à (46') donnent

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}_z' &= \mathbf{B}_z^0, & \mathbf{E}_z' - \mathbf{E}_z^0 &= \sigma' - \mathbf{P}_z', \\ \mathbf{E}_x' - \mathbf{E}_x^0 &= \mathbf{V}_z (\mathbf{B}_y' - \mathbf{B}_y^0), & \mathbf{H}_x' - \mathbf{H}_x^0 &= \mathbf{V}_y' (\mathbf{E}_z' - \mathbf{E}_z^0) - \mathbf{V}_z (\mathbf{E}_y' - \mathbf{E}_y^0), \\ \mathbf{E}_y' - \mathbf{E}_y^0 &= -\mathbf{V}_z (\mathbf{B}_x' - \mathbf{B}_x^0), & \mathbf{H}_y' - \mathbf{H}_y^0 &= -\mathbf{V}_x' (\mathbf{E}_z' - \mathbf{E}_z^0) + \mathbf{V}_z (\mathbf{E}_x' - \mathbf{E}_x^0), \\ (\mathcal{R}' \cdot \mathbf{V}') &= -\mathcal{F}_z' + \mathcal{F}_z^0, \end{aligned} \right\} (51)$$

avec

$$\mathcal{F}_z^0 = + [\mathbf{E}^0 \cdot \mathbf{H}^0]_z - \frac{(\mathbf{E}^0)^2 + (\mathbf{H}^0)^2}{2} \mathbf{V}_z.$$

Nous avons écrit σ' , \mathbf{V}_x' , \mathbf{V}_y' pour indiquer que ces quantités se rapportent à la matière. On remarquera la forme simple à laquelle se réduit \mathcal{F}_z^0 qui est *indépendant des composantes tangentielles* \mathbf{V}_x' , \mathbf{V}_y' de la vitesse de la matière.

19. Il est maintenant facile de traiter le cas de deux corps glissant l'un sur l'autre en même temps qu'ils se déplacent ou se déforment. Il suffit de traiter la surface de contact comme la limite d'une couche de passage vide de matière et infiniment mince. Les formules (51) seront applicables à la matière située du côté ' et pour l'autre côté on aura les formules analogues

$$\left. \begin{aligned} B_z^{\circ} &= B_z'', & E_z^{\circ} - E_z'' &= \sigma'' + P_z'', \\ E_x^{\circ} - E_x'' &= V_z(B_y^{\circ} - B_y''), & H_x^{\circ} - H_x'' &= V_y''(E_z^{\circ} - E_z'') - V_z(E_y^{\circ} - E_y''), \\ E_y^{\circ} - E_y'' &= -V_z(B_x^{\circ} - B_x''), & H_y^{\circ} - H_y'' &= -V_x''(E_z^{\circ} - E_z'') + V_z(E_x^{\circ} - E_x''), \\ (\mathcal{R}'' \cdot V'') &= -\mathcal{F}_z^{\circ} + \mathcal{F}_z''. \end{aligned} \right\} (52)$$

La valeur de \mathcal{F}_z° ne change pas.

Ajoutons membre à membre les équations correspondantes de (51) et de (52). Nous obtenons

$$\left. \begin{aligned} B_z' &= B_z'', & E_z' - E_z'' &= \sigma' + \sigma'' - (P_z' + P_z''), \\ E_x' - E_x'' &= V_z(B_y' - B_y''), & H_x' - H_x'' &= V_y'(E_z' - E_z'') - V_y''(E_z'' - E_z'') - V_z(E_y' - E_y''), \\ E_y' - E_y'' &= -V_z(B_x' - B_x''), & H_y' - H_y'' &= -V_x'(E_z' - E_z'') + V_x''(E_z'' - E_z'') + V_z(E_x' - E_x''), \\ (\mathcal{R}' \cdot V') + (\mathcal{R}'' \cdot V'') &= -\mathcal{F}_z' + \mathcal{F}_z''. \end{aligned} \right\} (53)$$

On remarquera que B_x° , B_y° , B_z° , E_x° , E_y° ont disparu des équations finales où subsiste seule la quantité E_z° . Remarquons encore que la quantité

$V_y'(E_z' - E_z'') - V_y''(E_z'' - E_z'')$, égale à $V_y'(\sigma' - P_z') + V_y''(\sigma'' + P_z'')$, représente la composante suivant Oy du courant de convection des charges vraies σ' , σ'' augmenté de celui des charges apparentes de polarisation $-P_z'$ et $+P_z''$.

Les relations (53) établissent d'une manière entièrement générale que l'existence de surfaces de discontinuité n'apporte aucun obstacle à l'application de la théorie des potentiels thermodynamiques à la théorie de Lorentz. L'on s'assure facilement qu'il en est de même pour les extensions envisagées au chapitre III.

Nous laissons au lecteur le soin d'achever l'étude des surfaces de discontinuité dans la théorie de Hertz, en appelant son attention sur ce que, dans cette théorie, l'éther ou le vide (comme on préférera l'appeler) subit des forces pondéromotrices.

CHAPITRE V

Phénomènes thermoélectriques.

20. La théorie des phénomènes thermoélectriques en régime permanent était établie grâce à Sir W. Thomson dès 1854. Non seulement il avait donné la théorie de ces phénomènes pour les conducteurs isotropes présentant les effets Peltier et Thomson, mais il avait également établi la théorie pour les conducteurs cristallins qui donnent lieu à des phénomènes plus complexes, phénomènes qui ont reçu depuis les noms d'effet Bridgman et d'effet Kelvin-Borelius (¹).

On sait qu'une difficulté se présente pour l'application du principe de Carnot aux phénomènes thermoélectriques. La relation bien connue $\frac{dQ}{T} = dS$ ne s'applique plus, car en régime permanent dS est nul tandis que dQ ne l'est pas, puisque l'on constate des dégagements ou absorptions de chaleur réversibles en plus de l'effet Joule irréversible.

Aussi Sir Thomson et la plupart des auteurs à sa suite évitent-ils de parler d'entropie et se contentent-ils d'écrire que, en régime permanent, la somme des termes $\frac{dQ}{T}$ pour tous les éléments $d\tau$ du conducteur est nulle.

Presque simultanément, M. Verschaffelt et moi-même nous sommes préoccupés, chacun de notre côté (²), de rechercher sous quelle forme il serait possible d'appliquer le principe de Carnot à un élément de conducteur.

En particulier, j'ai cherché à maintenir la notion d'entropie pour chaque élément de conducteur, et cela même en régime varié, en remplaçant la relation $\frac{dQ}{T} = dS$ par une autre relation de la forme

$$\frac{dQ}{T} - dS = du, \quad (54)$$

(dQ , dS et du de l'ordre de $d\tau dt$),

1. SIR W. THOMSON : *On the dynamical Theory of Heat*, ... mémoire reproduit dans « Mathematical and Physical papers », t. I (p. 174 à 291). L'étude des courants thermoélectriques ne commence qu'au § 97 (p. 232) et le cas de conducteurs cristallins (par suite anisotropes) n'est envisagé qu'à partir du § 147 (p. 266).

2. J.-E. VERSCHAFFELT : *La thermomécanique du conducteur électrique*. Mémoires de l'Académie royale de Belgique (classe des Sciences), 2^e série, tome XIV, 1935 (46 pages).

A. LIÉNARD : *Phénomènes Peltier et Thomson et entropie*. C. R. A. 199, p. 838, Oct. 1934. Bien qu'antérieure comme publication au travail de M. Verschaffelt, cette note lui est postérieure comme présentation.

la quantité du devant être telle que l'intégrale de $\frac{du}{dt}$ étendue à tous les éléments $d\tau$ du conducteur soit identiquement nulle. Cette condition est nécessaire pour que la variation d'entropie de l'ensemble du conducteur pendant la durée dt soit égale à la somme des quotients $\frac{dQ}{T}$ pour la totalité du volume du conducteur. Le calcul m'a donné pour du une expression que l'on peut mettre sous la forme (1)

$$du = \operatorname{div} \{ \theta i \} d\tau dt, \quad (55)$$

θ étant une quantité scalaire dépendant de la nature et de la température de l'élément $d\tau$. Mais, si la valeur (55) attribuée à du suffit pour expliquer les effets thermoélectriques des conducteurs isotropes, la lecture du mémoire Verschaffelt m'a montré qu'elle ne suffisait plus pour les conducteurs anisotropes. Pour ceux-ci il faut, à l'exemple de W. Thomson (exemple déjà suivi par Verschaffelt), substituer un tenseur du second ordre à la quantité scalaire θ et remplacer la relation (55) par la suivante

$$du = D_x (\theta^{\mu\nu} i_\nu) d\tau dt. \quad (55')$$

$D_x (\theta^{\mu\nu} i_\nu)$ n'est autre chose que la divergence du vecteur G^μ que représente le produit contracté $\theta^{\mu\nu} i_\nu$.

L'intégrale de $\frac{du}{dt}$ dans une région contenant la totalité de la masse conductrice et dont la surface Σ est en entier tracée dans l'isolant entourant le conducteur vaut :

$$\int_{\text{Vol}} D_x G^\mu d\tau, \quad \text{ou} \quad - \int_{\Sigma} G^\mu N_x d\Sigma.$$

Cette quantité est bien nulle comme il le fallait, puisque G^μ est nul comme i en tous les points de la surface Σ .

Le raisonnement suppose le vecteur G^μ continu dans tout le champ d'intégration. S'il y a des surfaces de discontinuité (cas général au contact entre conducteur et isolant), le résultat subsiste à condition de tenir compte de la divergence superficielle de G sur ces surfaces (2) et de prendre l'intégrale de cette divergence sur les surfaces de discontinuité aussi bien que l'intégrale de $\operatorname{div} G$ dans le volume.

La relation (55') comprend l'ancienne forme (55) comme cas particulier, car pour $\theta^{\mu\nu}$ de la forme $\theta g^{\mu\nu}$, on a $\theta^{\mu\nu} i_\nu = \theta g^{\mu\nu} i_\nu = \theta i^\mu$. θ est le pouvoir thermoélectrique du corps.

1. En effet, l'équation (4), *loc. cit.*, p. 840, peut s'écrire

$$\frac{dQ}{T} - dS = - \int_{\text{Surf}} H \delta q = - \int_S H (idt \cdot N) dS = dt \int_{\text{Vol}} \operatorname{div} \{ H i \} d\tau.$$

2. $\operatorname{div} \text{superf. } G = (G' \cdot N') + (G'' \cdot N'')$.

21. Reportons-nous maintenant à la relation fondamentale (23) du § 9, relation qui nous a permis d'obtenir l'expression du vecteur \mathcal{E} de Poynting et voyons quels sont les termes de cette relation dont il peut y avoir lieu de modifier la forme pour tenir compte des phénomènes thermoélectriques.

A) Le premier terme susceptible de modification est le terme

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\mathcal{F} - T \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} \right) d\tau \right].$$

(Je laisse de côté le symbole d'intégration en n'écrivant que le terme concernant l'élément $d\tau$).

L'existence des phénomènes thermoélectriques conduit en effet à introduire un nouveau terme dans l'expression du potentiel thermodynamique (Voir § 22 ci-après).

B) Le second terme rencontré est le terme

$$p^{\nu\mu} \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} d\tau, \quad \text{ou} \quad p^{\nu\mu} \delta_{\nu\mu} d\tau,$$

dont la valeur dépend du potentiel \mathcal{F} d'après la relation $p^{\nu\mu} \delta_{\nu\mu} = -\frac{1}{\sigma} \frac{d_\tau(\sigma \mathcal{F})}{dt}$. L'introduction d'un nouveau terme dans l'expression de \mathcal{F} entraîne une modification correspondante $\Delta p^{\nu\mu}$ pour les pressions.

C) De même pour le terme suivant

$$T \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} d\tau \right)$$

qui peut s'écrire $-T \frac{dS}{dt}$, S étant l'entropie du seul élément $d\tau$.

D) Mais il ne suffit pas de modifier la valeur de S ; il faut en outre, d'après les considérations du paragraphe précédent, introduire une distinction entre dS et $\frac{dQ}{dT}$, c'est-à-dire introduire un terme représentant

$$-T \frac{\frac{dQ}{T} - dS}{dt}, \quad \text{ou} \quad \frac{-dQ + TdS}{dt}, \quad \text{ou} \quad -T \frac{du}{dt}. \quad (56)$$

E) Nous arrivons au terme $(E_m \cdot i)$ qui représentait la chaleur Joule, en vertu de $E_m = ri$ (corps isotrope) ou de $E_m^\mu = r^{\nu\mu} i_\nu$ (corps anisotrope). Or ici une force ε d'origine thermoélectrique s'ajoute à la force E_m d'origine électrostatique ou électromagnétique. L'expression de la perte Joule devient $(E_m + \varepsilon \cdot i)$; autrement dit, il faut introduire dans l'équation (23) un terme

$$(\varepsilon \cdot i) d\tau.$$

F) Enfin le dernier terme de (23) (que l'on peut écrire $+\int_{\mathfrak{u}} \operatorname{div} \mathfrak{F} d\tau$) devra à son tour être modifié et subir pour chaque élément une modification $\operatorname{div} \Delta \mathfrak{F} d\tau$, pour que l'équation continue à être vérifiée malgré les modifications A) à E) apportées à d'autres termes.

La colonne 2 du tableau de la page 45 reproduit la liste des différentes modifications possibles, modifications qu'il s'agit maintenant d'évaluer (*).

22. Nous obtiendrons une première solution en partant des théories de Duhem sur le potentiel thermodynamique d'une charge électrostatique (*). Duhem est conduit à écrire que le potentiel thermodynamique, l'énergie interne et l'entropie d'un système électrisé présentent par rapport au même système non électrisé des excédents respectivement égaux, pour une charge q , à

$$\Theta q, \quad Kq, \quad \text{et} \quad Hq.$$

Les coefficients Θ , K et H dépendent de la nature et de la température de la matière qui porte la charge q et sont reliés entre eux par les relations

$$H = -\frac{\partial \Theta}{\partial T}, \quad K = \Theta - T \frac{\partial \Theta}{\partial T} = \Theta + TH. \quad (57)$$

A ces excédents de potentiel, énergie et entropie correspondent pour un élément de volume $d\tau$ portant la charge $\rho d\tau$:

1° En ce qui concerne A, un terme

$$\frac{d}{dt}(K\rho d\tau), \quad \text{ou} \quad \frac{dK}{dt}\rho d\tau + K \frac{d}{dt}(\rho d\tau).$$

Comme, en vertu du principe de la conservation de l'électricité, $\frac{d}{dt}(\rho d\tau)$ est égal à $-\operatorname{div} i d\tau$, le terme A) peut encore s'écrire

$$\left(\frac{dK}{dt}\rho - K \operatorname{div} i\right) d\tau.$$

2° En ce qui concerne B), un terme $-\frac{d(\Theta\rho d\tau)}{dt}$, la variation devant être prise à température et à charge constantes, ce qui donne

$$-\frac{d_{\tau}\Theta}{dt}\rho d\tau, \quad \text{soit} \quad -\left(\frac{d\Theta}{dt} - \frac{\partial \Theta}{\partial T} \frac{dT}{dt}\right)\rho d\tau, \quad \text{ou} \quad -\left(\frac{d\Theta}{dt} + H \frac{dT}{dt}\right)\rho d\tau.$$

1. Nous n'avons pas envisagé de modification pour la force R. A priori on pourrait en admettre une, mais la suite montre que c'est tout au moins inutile.

2. DUHEM, *Leçons sur l'Electricité et le Magnétisme*, tome I, livres IV et V. Voir en particulier les équations (15) à (19) pp, 363 et 364.

3° Enfin, en ce qui concerne C), un terme $T \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial T} \rho d\tau \right)$,

c'est-à-dire

$$- T \frac{d}{dt} (H \rho d\tau), \quad \text{ou} \quad - T \left(\frac{dH}{dt} \rho - H \operatorname{div} i \right) d\tau.$$

Compte tenu des relations (57), la somme des trois termes A), B), C) ci-dessus se réduit à $-\Theta \operatorname{div} i d\tau$, quantité que l'on peut écrire

$$- [\operatorname{div} \{ \Theta i \} - (\operatorname{grad} \Theta \cdot i)] d\tau.$$

La somme des termes D), E) et F) qu'il reste à déterminer doit donc être égale à

$$+ [\operatorname{div} \{ \Theta i \} - (\operatorname{grad} \Theta \cdot i)] d\tau,$$

pour que l'adjonction des six termes A) à F) dans l'équation (23) n'empêche pas cette équation de rester satisfaite.

On satisfera *en particulier* à cette condition en prenant

terme D)	o,		
terme E)	$-(\operatorname{grad} \Theta \cdot i) d\tau,$	d'où	$\epsilon = -\operatorname{grad} \Theta,$
terme F)	$\operatorname{div} \{ \Theta i \} d\tau,$	d'où	$\Delta \mathcal{F} = \Theta i.$

Les valeurs correspondantes des termes A) à E) sont inscrites à la colonne 3 du tableau.

La solution ci-dessus n'est pas la seule qui existe (*).

Ayant une solution particulière du problème pour les valeurs de A), B), C) inscrites à la colonne 3, on obtiendra la solution la plus générale pour D), E), F), en ajoutant à la solution particulière ci-dessus, la solution la plus générale pour D), E), F) correspondant à la valeur zéro pour chacun des termes A), B), C). Ce fait est une conséquence du caractère linéaire des équations par rapport aux termes A) à F). Or, si A), B) et C) sont nuls, la condition pour que la somme des six termes de A) à F) soit nulle, se réduit à $D) + E) + F) = 0$. Remplaçons le terme D) par son expression (56) $-T \frac{du}{dt}$, ou encore $-T D_{\mu} (\theta^{\mu\nu} i_{\nu}) d\tau$, d'après (55') et remplaçons les deux autres termes par leurs définitions. Nous obtenons la condition

$$-T D_{\mu} (\theta^{\mu\nu} i_{\nu}) + (\epsilon \cdot i) + \operatorname{div} \{ \Delta \mathcal{F} \} = 0,$$

1. Si elle était seule, elle serait du reste dénuée de tout intérêt, car en vertu de la valeur zéro attribué à $\frac{dQ}{T} - dS$, les chaleurs Peltier et Thomson correspondantes seraient nulles.

qui peut s'écrire identiquement

$$D_x \left\{ \Delta \mathcal{F}^\mu - T \theta^{\mu\nu} i_\nu \right\} + \left(\frac{\partial T}{\partial x^\mu} \theta^{\mu\nu} + \varepsilon^\nu \right) i_\nu = 0.$$

On satisfera à cette condition en prenant

$$\varepsilon^\nu = -\theta^{\mu\nu} \frac{\partial T}{\partial x^\mu}, \quad \Delta \mathcal{F}^\mu = T \theta^{\mu\nu} i_\nu. \quad (58), (59)$$

On pourrait même prendre

$$\varepsilon^\nu = -\theta^{\mu\nu} \frac{\partial T}{\partial x^\mu} + \lambda^{\nu\alpha} i_\alpha.$$

à la seule condition que le tenseur $\lambda^{\nu\alpha}$ soit symétrique gauche. La solution ainsi obtenue pour ε est la plus générale, car pour toute autre valeur de ε , le produit $(\theta^{\mu\nu} \frac{\partial T}{\partial x^\mu} + \varepsilon^\nu) i_\nu$ serait différent de zéro sans pouvoir, en raison du facteur i_ν , s'égaliser à la divergence d'un vecteur.

En prenant $\lambda^{\nu\alpha}$ de la forme $R B^{\nu\alpha}$ [B = induction magnétique (*)], le terme $R B^{\nu\alpha} i_\alpha$ représenterait la force électromotrice de l'effet Hall. Si on prend en outre $\theta^{\mu\nu}$ de la forme $\theta g^{\mu\nu} + Q B^{\mu\nu}$, on fera apparaître dans ε^ν un terme $-Q \frac{\partial T}{\partial x^\mu} B^{\mu\nu}$ représentant la force électromotrice de l'effet Nernst. Or, les effets Ettinghausen et Righi-Leduc sont en connexion avec les effets Hall et Nernst. Toutefois, en présence du désaccord entre divers auteurs sur les relations entre les quatre effets précités, et pour ne pas allonger, je me bornerai à cette indication et m'en tiendrai pour la suite à la relation (58).

Les vecteurs \mathcal{F} , et à fortiori $\Delta \mathcal{F}$, sont indéterminés au rotationnel près d'un vecteur arbitraire. Mais il n'y a aucun intérêt à mettre ce rotationnel en évidence dans les formules.

Les valeurs que nous venons d'obtenir pour les termes D), E) et F), lorsque les trois termes A) à C) sont nuls, sont inscrites à la colonne 4 du tableau. Pour le cas particulier d'un corps isotrope où $\theta^{\mu\nu} = \theta g^{\mu\nu}$, les valeurs particulières correspondantes sont inscrites à la colonne 5. Enfin la solution la plus générale (la plus générale lorsqu'on suppose $\lambda^{\nu\alpha} = 0$) s'obtiendra en ajoutant, ligne par ligne, les termes soit de la colonne 4, soit de la colonne 5, suivant les cas, à ceux de de la colonne 3.

*. Au sujet de la représentation de l'induction et de la force magnétiques par un tenseur symétrique gauche de préférence à un vecteur, voir l'indication bibliographique de la première note du paragraphe 6.

23. Considérons en particulier la solution obtenue en ajoutant les termes des colonnes 3 et 5 après avoir fait θ égal à H pour les termes de la colonne 5. On trouve pour ε et $\Delta \mathcal{F}$ les valeurs particulières suivantes

$$\varepsilon = - \operatorname{grad}_r \Theta, \quad \Delta \mathcal{F} = K i \quad (58'), (59')$$

La valeur ainsi obtenue pour ε coïncide avec celle que Duhem a obtenue dans sa théorie (¹). On voit, en outre, que l'expression de $\Delta \mathcal{F}$ est particulièrement simple : le vecteur $\Delta \mathcal{F}$ d'où dépend le flux d'énergie est simplement proportionnel au vecteur densité de courant, le coefficient de proportionnalité étant précisément le coefficient K qui figure dans l'expression Kq de l'excédent d'énergie dû à la présence de la charge q .

Cette solution particulière est la seule que j'avais obtenue et donnée dans la note précitée d'octobre 1934.

24. Discussion. — Les vecteurs $\theta^{\mu\nu} i$, ou θi sont discontinus à la traversée du contact de deux conducteurs différents et à toute surface de contact entre conducteur et isolant. Le vecteur $\Delta \mathcal{F}$, égal à $T \theta^{\mu\nu} i$, ou $T \theta i$, présente les mêmes surfaces de discontinuité et n'en présente pas d'autres car, en pratique, la température T ne peut présenter de discontinuité. Si, en effet, on met en contact deux corps portés à des températures différentes, celles-ci s'égalisent immédiatement sur le contact même avec un $\frac{\partial T}{\partial x^\mu}$ de valeur finie.

Supposons-nous en régime permanent, seul cas réalisé dans les expériences. La différence des valeurs de $(\Delta \mathcal{F} \cdot N)$ sur les faces d'une surface de discontinuité produit une accumulation (positive ou négative) d'énergie sur la surface, d'où une variation de température, de même que l'accumulation d'énergie par compression d'un gaz élève sa température si, du moins, la compression est adiabatique. Et si l'on veut avoir une compression isotherme, il faut enlever une quantité de chaleur (positive ou négative, suivant les cas) précisément égale à l'apport d'énergie. De même pour les phénomènes thermoélectriques : Si de l'énergie vient s'accumuler sur une surface S , la température s'élève, mais grâce à la conductibilité il se produit une dissipation de chaleur et un régime permanent sera obtenu lorsque la dissipation de la chaleur équilibrera l'apport d'énergie.

1. P. DUHEM, *loc. cit.*, p. 490, équation (5). Par inadvertance, Duhem a laissé subsister dans ses équations deux termes se détruisant en vertu de la relation (57) $\frac{\partial \Theta}{\partial T} + H = 0$. Débarrassées de ces deux termes, les équations se réduisent à $\mathcal{R}u = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial \Theta(x, y, z, T)}{\partial x}$ et à deux équations analogues, ce qui est bien d'accord avec (58').

Considérons en particulier un contact isolant-conducteur. A l'extérieur du conducteur $\Delta \mathcal{F} = 0$. A l'intérieur $\Delta \mathcal{F} = T\theta i$, si le conducteur est isotrope. Comme $(i.N)$ est nul à la surface d'un conducteur, $(\Delta \mathcal{F}.N)$ est également nul : aucune accumulation d'énergie ne tend à se produire et aucun effet thermique ne se manifeste. Mais pour un conducteur cristallin, le vecteur $\Delta \mathcal{F} = T\theta^{\mu\nu}i$, n'a plus la direction du courant, $(\Delta \mathcal{F}.N)$ cesse d'être nul et un échauffement se produit jusqu'à ce que l'apport d'énergie $\Delta \mathcal{F}$ soit contrebalancé grâce au refroidissement par conductibilité.

Soit en particulier un cristal homogène, en forme de parallélépipède rectangle, dont la section soit ABCD, le courant étant normal au plan de la section. Supposons que les côtés BA, CD soient parallèles à la projection du vecteur $\Delta \mathcal{F}$ sur le plan de la section et de même sens. Le transport électrique d'énergie de BC vers AD élève la température de AD, abaisse celle de BC et, comme dans le problème du mur de Fourier, de la chaleur se transmet par conductibilité de AD vers BC. En régime permanent, la différence de température entre AD et BC sera telle que son produit par le coefficient de conductibilité s soit précisément égal au flux d'énergie $\Delta \mathcal{F}$ à équilibrer. On remarquera que le flux de chaleur est de sens contraire au flux d'énergie $\Delta \mathcal{F}$.

Le phénomène que nous venons d'analyser, prévu par W. Thomson (devenu plus tard lord Kelvin) et vérifié expérimentalement par Borelius (1), a reçu le nom de phénomène Kelvin-Borelius.

25. Comparaison des résultats obtenus ci-dessus. avec ceux obtenus par W. Thomson et par Verschaffelt.

J'extraits du mémoire reproduit au tome I des *Mathematical and Physical papers* de W. Thomson quatre relations caractéristiques.

En vue de faciliter la comparaison, je transcris ces relations avec mes notations et en appliquant les règles du calcul tensoriel. Les numéros des formules, ceux des paragraphes et pages sont les numéros du mémoire original (pour éviter une confusion avec le numérotage des formules du présent mémoire, je mets les numéros de W. Thomson entre crochets).

§ 157, p. 274. Expression de la quantité de chaleur traversant l'unité d'aire d'un plan $x = C^x$

$$Q^x = T\theta^{\nu}i. \quad [31]$$

§ 174, p. 287. Chaleur Q traversant dans la direction N l'unité d'aire d'un plan normal au vecteur unité N

$$Q = TN_p\theta^{\mu\nu}i. \quad [44]$$

1. BORELIUS et LINDH. *Annalen der Physik* 53, p. 97 (1917).

Tableau des modifications à apporter à différents termes de l'équation (23) pour tenir compte des phénomènes thermoélectriques.

1	2	3	4	5
A)	Modification de $\frac{d}{dt} \left[\left(\mathcal{F} - T \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} \right) d\tau \right]$.	$\left(\frac{dK}{dt} \rho - K \operatorname{div} i \right) d\tau$ (*).	o	o
B)	Modification de $p^{\nu\mu} \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} d\tau$ (ou $p^{\nu\mu} \delta_{\nu\mu} d\tau$).	$-\left(\frac{d\Theta}{dt} + H \frac{dT}{dt} \right) \rho d\tau$ (*).	o	o
C)	Modification de $-T \frac{dS}{dt}$ ou $T \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} d\tau \right)$.	$-T \left(\frac{dH}{dt} \rho - H \operatorname{div} i \right) d\tau$ (*).	o	o
D)	Distinction entre $\frac{dQ}{T}$ et dS Terme $\frac{-dQ + T dS}{dt}$ ou $-T \frac{du}{dt}$.	o	$-T D_\mu (\theta^{\mu\nu} i_\nu) d\tau$.	$-T \operatorname{div} \{ \theta i \} d\tau$.
E)	Introduction du terme $(\varepsilon \cdot i) d\tau$.	$-(\operatorname{grad} \Theta \cdot i) d\tau$.	$-\theta^{\mu\nu} i_\nu \frac{\partial T}{\partial x^\mu} d\tau$, d'où $\varepsilon^\nu = -\theta^{\mu\nu} \frac{\partial T}{\partial x^\mu}$.	$-(\theta i \cdot \operatorname{grad} T) d\tau$, $\varepsilon = -\theta \operatorname{grad} T$.
F)	Modification de \mathcal{F} : Terme $\operatorname{div} \Delta \mathcal{F} d\tau$.	$\operatorname{div} \{ \Theta i \} d\tau$.	$D_\mu [T \theta^{\mu\nu} i_\nu] d\tau$, d'où $\Delta \mathcal{F} = T \theta^{\mu\nu} i_\nu$.	$\operatorname{div} [T \theta i] d\tau$, $\Delta \mathcal{F} = T \theta i$.
(*) $H = -\frac{\partial \Theta}{\partial T}$, $K = \Theta + TH$				

§ 175, p. 287. Quantité de chaleur H (notation W. Thomson) absorbée par unité de temps et unité de volume

$$H = T D_{\mu} (\theta^{\mu\nu} i_{\nu}). \quad [43]$$

§ 175, p. 288

$$\varepsilon^{\nu} = - \theta^{\mu\nu} \frac{\partial T}{\partial x^{\mu}}. \quad [45]$$

La même formule que [45], avec des notations légèrement différentes, figure déjà sous le numéro [32] à la page 274 et sous le numéro [34] à la page 280.

La formule [31] ne constitue qu'un cas particulier de [44].

Comparons les résultats de W. Thomson avec ceux inscrits dans la colonne 4 du tableau ci-dessus.

La valeur de ε^{ν} donnée par [45] et celle du tableau sont identiques. Le facteur de N_{μ} au second membre de [44] est précisément la quantité $\Delta \mathcal{E}^{\mu}$ du tableau (col. 4). Enfin le second membre de [43] est identique à la valeur résultant pour $\frac{dQ}{dt d\tau}$ en régime permanent ($dS = 0$) de la valeur inscrite au tableau comme étant celle de $\frac{-dQ + T dS}{dt}$. La concordance paraît donc parfaite.

En réalité on doit noter chez W. Thomson une certaine confusion entre chaleur et énergie. W. Thomson désigne le flux [44] comme étant un flux de chaleur, tandis que notre quantité $N_{\mu} \Delta \mathcal{E}^{\mu}$ représente un flux d'énergie. Et la différence ne se réduit pas à une simple question de mots comme l'on va voir. En effet, si chaleur et énergie satisfont au principe de l'équivalence mutuelle, la chaleur, à l'exclusion des autres formes de l'énergie, satisfait seule au second principe de la thermodynamique et elle est la seule forme d'énergie dont la transmission dépende directement des températures (cf. Verschaffelt, *loc. cit.*, § 38).

Signalons encore un défaut dans le raisonnement de W. Thomson : W. Thomson calcule son H comme représentant la divergence du vecteur $T \theta^{\mu\nu} i_{\nu}$. Il devrait donc trouver comme valeur $D_{\mu} (T \theta^{\mu\nu} i_{\nu})$ au lieu de $T D_{\mu} (\theta^{\mu\nu} i_{\nu})$, qui est la valeur correcte, que T soit uniforme ou non. W. Thomson ne donne aucune explication sur la raison qui lui fait mettre T en dehors du signe de dérivation. La différence entre $D_{\mu} (T \theta^{\mu\nu} i_{\nu})$ et $T D_{\mu} (\theta^{\mu\nu} i_{\nu})$ est égale à $\theta^{\mu\nu} i_{\nu} \frac{\partial T}{\partial x^{\mu}}$, c'est-à-dire au terme $(\varepsilon \cdot i)$. On se rappelle que $(\varepsilon \cdot i)$ est l'excédent d'effet Joule résultant de la présence de la force électromotrice ε .

Le phénomène prévu par W. Thomson est souvent désigné dans les mémoires et traités de physique comme constituant un « transport électrique de la chaleur ». Les raisons que je viens d'exposer me font paraître cette dénomination comme défectueuse.

Pour la comparaison des résultats obtenus par S. E. Verschaffelt et moi-même, je me bornerai à indiquer la correspondance des notations. Le lecteur pourra ainsi vérifier facilement la concordance des résultats. Je parle seulement de la concordance des résultats et non de celle des raisonnements ou considérations servant à les obtenir, car raisonnements et considérations sont parfois assez différents.

}	Présent mémoire :	$r, i, E, \varepsilon,$	effet	$\text{Thomson}, \Theta, K, H, \theta^{\mu\nu}, \theta,$
	Mémoire Verschaffelt :	$r, \delta, h_e - \text{grad } V, h_i, -\tau, j, j - T \frac{\partial j}{\partial T}, -\frac{\partial j}{\partial T}, \frac{k_{\mu\nu}}{T}, \frac{k}{T}.$		

$A\Delta\mathcal{E}$ correspond chez M. Verschaffelt soit X , soit Δ , soit $X + \Delta$, suivant que l'on prend comme solutions les valeurs portées à la troisième colonne du tableau, ou à la quatrième, ou encore les sommes de ces valeurs.

Il est utile d'ajouter la remarque suivante qui évitera de se heurter à des contradictions apparentes entre certains résultats de M. Verschaffelt et ceux qu'on peut déduire de mes formules. Lorsqu'on ne considère pas un corps particulier, la fonction θ est indéterminée et n'est soumise à aucune condition. On peut donc tout aussi bien écrire $\theta + H$, ou $\theta - H$, quelle que soit la valeur donnée à H . En changeant θ en $\theta + H$ ou $\theta - H$, on obtient des formes en apparence incompatibles et qui en réalité ne le sont pas.

Mais si, au lieu de considérer un corps quelconque, on considère un corps déterminé, il est évident que les valeurs de θ pour ce corps se modifient suivant que l'on écrit $\theta + H$ ou $\theta - H$ au lieu de θ .

TABLE DES MATIÈRES DE CE MÉMOIRE

	Page
Introduction	1
Chap. I. Tensions à l'intérieur d'un corps aimanté ou polarisé	5
— II. Application aux théories de H. Lorentz et de Hertz	11
— III. Extension à des cas plus généraux	22
— IV. Étude des surfaces de discontinuité	29
— V. Phénomènes thermoélectriques	37
