Annales de la faculté des sciences de Toulouse

Henri Roure

Réduction aux fonctions eulériennes de quelques types d'intégrales définies

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 6 (1942), p. 107-110

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1942_4_6__107_0>

RÉDUCTION AUX FONCTIONS EULÉRIENNES
DE
QUELQUES TYPES D'INTÉGRALES DÉFINIES

Par M. Henri ROURE.
(Observatoire de Marseille.)

Lorsque les intégrales définies peuvent être ramenées aux fonctions eulériennes, leur calcul est relativement facile.

Nous nous proposons de montrer dans ce qui suit comment une telle réduction peut être opérée pour quelques types d'intégrales simples et d'intégrales multiples. Nous obtiendrons ainsi quelques formules intéressantes pour les applications.

Réduction des intégrales.

$$\mathrm{I} = \int_0^\infty e^{-mx}\, x^q f(x,\, a)\, dx.$$

Nous supposerons, dans ce qui suit, que les fonctions qui figurent sous le signe intégral sont développables en série uniformément convergente par la formule de Maclaurin, de plus, a est un paramètre. Nous aurons donc le développement par rapport à x :

$$f(x,\, a) = f(0,\, a) + \frac{x}{1} f'(0,\, a) + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0,\, a) + \ldots\ldots$$

En prenant pour variable auxiliaire :

$$y = mx,$$

nous pourrons écrire l'intégrale sous la forme :

$$\mathrm{I} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{f^{(n)}(0,\, a)}{n!\, m^{p+n}} \int_0^\infty e^{-y}\, y^{p+n-1}\, dy,$$

et ceci nous donne de suite la formule :

$$I = \sum \frac{f^{(n)}(0, a)}{n!\, m^{p+n}} \Gamma(p+n),$$

formule dans laquelle n est entier, p étant quelconque.

Si $p = 0$ et $m = 1$, nous obtiendrons la formule intéressante :

$$I = \int_0^\infty e^{-x} f(x, a)dx = f(0, a) + f'(0, a) + \ldots + f^{(n)}(0, a) + \ldots .$$

Réduction des intégrales.

$$I = \int_\alpha^\beta x^{p-1}(1-x)^{q-1} f(x, a)dx.$$

Le développement de $f(x, a)$ étant effectué, l'intégrale I prend la forme :

$$I = \sum_{n=0}^{n=\infty} \int_\alpha^\beta \frac{f^{(n)}(0, a)}{n!} x^{p+n-1}(1-x)^{q-1} dx.$$

Nous ramènerons les limites à être 0 et 1 par la substitution :

$$x = \alpha + (\beta - \alpha)t.$$

Les facteurs x et $1 - x$ deviendront :

$$[\alpha + (\beta - \alpha)t) \qquad \text{et} \qquad [1 - \beta + (\beta - \alpha)(1 - t)].$$

Nous les développerons suivant la formule du binôme généralisée et l'intégrale I pourra être écrite sous la forme :

$$I = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{f^{(n)}(0, a)}{n!} \int_0^1 \sum_{\mu=0}^{\mu=p+n-1} \sum_{\nu=0}^{\nu=q-1} C^\mu_{p+n-1} C^\nu_{q-1} \alpha^{p+n-1-\mu}(1-\beta)^{q-1-\nu}(\beta-\alpha)^{\mu+\nu} t^\mu (1-t)^\nu dt,$$

en conservant aux coefficients binomiaux leur signification.

Nous voyons donc que la valeur de l'intégrale I est donnée par la formule :

$$I = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{f^{(n)}(0, a)}{n!} \sum_{\mu=0}^{\mu=p+n-1} \sum_{\nu=0}^{\nu=q-1} C^\nu_{p+n-1} C^\nu_{q-1} \alpha^{p+n-1-\mu}(1-\beta)^{q-1-\nu}(\beta-\alpha)^{\mu+\nu} B(\mu+1, \nu+1).$$

Réduction des intégrales.

$$I=\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty e^{-\varphi(x,y,\ldots,z)}F(x,y,\ldots,z)dx,dy,\ldots,dz,$$

dans laquelle on a :

$$\varphi(x,y,\ldots,z)=ax+by+\ldots+cz,$$

F étant une formule algébrique de ces mêmes variables :

$$F(x,y,\ldots,z)=\sum A_{m,n,\ldots,p}x^m y^n\ldots x^p,$$

avec :

$$m+n+\ldots+p=M.$$

Les variables sont séparées et nous ramènerons l'intégrale I à la forme classique par la substitution :

$$ax=u,\qquad by=v,\qquad \ldots,\qquad cz=w;$$

de sorte que I peut être écrite sous la forme :

$$I=\sum\frac{A_{m,n,\ldots,p}}{a^{m+1}b^{n+1}\ldots c^{p+1}}\int_0^\infty e^{-u}u^m du\ldots\int_0^\infty e^{-w}w^p dw.$$

La valeur de l'intégrale I sera donc donnée par la formule :

$$I=\sum\frac{A_{m,n,\ldots,p}}{a^{m+1}b^{n+1}\ldots c^{p+1}}\cdot\frac{\Gamma(m+1)}{a^{m+1}}\cdots\frac{\Gamma(p+1)}{c_{p+1}}.$$

Intégrales.

$$I=\int_0^a\int_0^b\ldots\int_0^c f(x,y,\ldots,z)x^{p-1}(1-x)^{q-1}\ldots z^{r-1}(1-z)^{s-1}dx,\ldots,dz,$$

dans lesquelles la fonction f est développable en série de puissances uniformément convergente sous la forme :

$$f(x,y,\ldots,z)=\sum_{n=0}^{n=\infty}H^{(n)}_{i,j,\ldots,k}x^i y^j\ldots z^k,$$

avec :

$$i+j+\ldots+k=n.$$

Nous ramènerons les limites à être 0 et 1 par la substitution :

$$x=au, \qquad y=bv, \qquad \ldots, \qquad z=cw,$$

qui permet d'écrire l'intégrale I sous la forme :

$$\mathrm{I}=\sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{H}_{i,j,\ldots,k}^{(n)} a^{i+p} \ldots c^{k+r} \int_0^1 u^{i+p-1}(1-au)^{q-1}\,du \ldots \int_0^1 w^{k+r-1}(1-cw)^{s-1}\,dw.$$

Les facteurs $(1-au)$, ..., $(1-cw)$ peuvent s'écrire sous la forme :

$$(1-a)\left[1+\frac{a}{1-a}(1-u)\right], \ \ldots, \ (1-c)\left[1+\frac{c}{1-c}(1-w)\right];$$

et leurs puissances seront développées par la formule du binôme. Nous transporterons ces développements dans la formule (I) et nous remarquerons que. sous chaque signe intégral, chacun des termes est le produit d'un facteur numérique par une fonction eulérienne de première espèce. Nous obtiendrons ainsi la formule très générale :

$$\begin{aligned}\mathrm{I}=\sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{H}_{i,j,\ldots,k}^{(n)} & \Big[a^{i+p}(1-a)^{q-1}\mathrm{B}(i+p,1)+\ldots \\ & +\frac{(q-1)\ldots(q-\mu)}{1.2\ldots\mu}a^{i+p+\mu}(1-a)^{q-1-\mu}\mathrm{B}(i+p,1+\mu)\ldots\Big] \\ & \ldots\Big[c^{k+r}(1-c)^{s-1}\mathrm{B}(k+r,1)+\ldots \\ & +\frac{(s-1)\ldots(s-\nu)}{1.2\ldots\nu}c^{k+r+\nu}(1-c)^{s-1-\nu}\mathrm{B}(k+r,1+\nu)+\ldots\Big].\end{aligned}$$

On obtiendrait des formules intéressantes si F, au lieu d'être développable en série, était une forme algébrique des variables x, y, ..., z.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur ce sujet car on pourrait multiplier les types d'intégrales réductibles. Ce que nous avons dit suffit pour montrer que des considérations et des calculs très élémentaires permettent d'effectuer complètement les calculs de toutes ces intégrales.