

L. CAGNIARD

**Sur les phénomènes d'induction électromagnétique dans une
sphère conductrice. Applications géophysiques**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4^e série, tome 8 (1944), p. 59-88

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1944_4_8_59_0

© Université Paul Sabatier, 1944, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES PHÉNOMÈNES D'INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

DANS UNE SPHÈRE CONDUCTRICE

APPLICATIONS GEOPHYSIQUES

Par L. CAGNIARD

Maitre de Conférences à la Faculté des Sciences de Paris.

SOMMAIRE

Dans l'espoir d'expliquer le champ magnétique terrestre et ses variations séculaires, l'auteur propose d'approfondir une hypothèse qui n'est pas nouvelle et de supposer que la Terre fut placée, à certaine époque de son histoire, dans un champ magnétique qui disparut par la suite. Des courants d'induction s'établirent alors dans son noyau conducteur. Ils ne s'éteignent qu'avec une extrême lenteur et persistent encore aujourd'hui avec une intensité suffisante pour engendrer la plus grosse partie du champ magnétique actuel.

La solution du problème soulève de sérieuses difficultés mathématiques qui tiennent d'une part à la sphéricité de la Terre, d'autre part à sa rotation.

Pour sérier les difficultés, l'auteur, dans ce mémoire, n'a pas encore tenu compte de la rotation. Il n'a donc fait que reprendre d'anciens calculs de Lamb, souvent invoqués par les géophysiciens.

La présente solution marque cependant un très gros progrès par rapport à celle de Lamb car les formules finales, loin d'être inextricables, sont d'une simplicité inattendue et se prêtent très facilement à des calculs numériques qui permettent d'étudier le phénomène d'extinction dans tous ses détails.

Si incomplète qu'elle soit encore du fait qu'elle néglige la rotation terrestre, la théorie fait cependant apparaître un résultat fondamental des plus encourageants : le champ extérieur est identique à celui d'un aimant infiniment court placé au centre de la sphère. Or, l'on sait que telle est précisément la propriété essentielle du champ magnétique terrestre.

Il est clair que la théorie invoque trop de paramètres en partie arbitraires (conductibilité et rayon du noyau, intensité du champ magnétique excitateur originel, âge de la Terre) pour qu'on puisse parler d'un contrôle possible. A titre d'exemple, on satisfait aux conditions avec une Terre vieille de 2 milliards d'années; un champ originel de 25 gauss, un noyau terrestre non magnétique de 3.500 km. de rayon dont la conductibilité serait 490 fois plus grande que celle du cuivre!

L'auteur montre d'ailleurs que la théorie pourrait faire l'objet de vérifications cruciales si elle était réellement applicable, c'est-à-dire si la Terre était immobile. On en trouverait le moyen dans l'étude des courants électriques océaniques et l'on pourrait lever en partie l'incertitude qui affecte le choix des paramètres arbitraires.

Il n'est donc pas exclu d'espérer qu'une théorie plus complète pourra englober un jour dans un même système d'explication le magnétisme terrestre, les déplacements des pôles magnétiques, les variations séculaires, les courants telluriques, et marquer un progrès essentiel dans la connaissance des régions profondes de la Planète.

INTRODUCTION

L'étude analytique du champ magnétique terrestre montre que la plus importante fraction de ce champ (environ 94 %) est d'origine interne. Suivant l'opinion la plus répandue, sa cause essentielle résiderait dans l'existence de courants électriques intérieurs (1).

A l'appui de cette opinion, un résultat déjà ancien de Lamb (2) est fréquemment invoqué. Ce savant montra en effet, d'une façon tout à fait générale, que si des courants électriques quelconques ont été établis dans une sphère à une époque donnée, l'extinction du phénomène est extraordinairement lente, d'autant plus lente que la sphère est de plus grandes dimensions, que sa conductibilité électrique et que sa perméabilité magnétique sont plus élevées. Lamb calcula ainsi que, dans une sphère de cuivre ayant les dimensions terrestres, la constante de temps *pourrait* atteindre 10 millions d'années. Elle *pourrait* s'élever à 300 millions d'années si la sphère était constituée par du fer, doué de la conductibilité et de la perméabilité que ce métal présente à la température de 0° C.

(1). Cf. par ex. C. Maurain — *Magnétisme terrestre* (Actualités scientifiques et industrielles, fasc. 287) Hermann et Cie, Paris, 1935.

(2). H. Lamb. *Phil. Trans. R. Soc. London*. Vol 174 (2^{me} partie), 1883, 519.

Cependant les conclusions trop générales et trop sommaires du mémoire de Lamé me semblent bien insuffisantes pour servir de base à une théorie poussée de l'origine du magnétisme terrestre. Plutôt que de rester dans le vague, il me paraît nécessaire de préciser nettement un système possible de *conditions initiales* et d'examiner dans le détail, numériquement, *toutes les conséquences* de l'hypothèse.

Je propose par exemple de supposer que la Terre, à certaine époque de son histoire, fut placée dans un champ magnétique uniforme d'intensité H_0 , lequel *s'éteignit* rapidement par la suite; un phénomène dont la durée embrasse quelques centaines de milliers d'années peut d'ailleurs, le cas échéant, dans un problème de ce genre, être assimilé à un phénomène instantané.

La théorie s'avérera fructueuse si, par un choix plausible des paramètres arbitraires (Intensité H_0 , conductibilités et perméabilités des couches terrestres, ancienneté de l'instant origine relativement à l'époque contemporaine), elle parvient à rendre compte, dans ses grandes lignes, de la structure du champ terrestre actuel, de l'ordre de grandeur des variations séculaires, des déplacements des pôles magnétiques, de la distribution des courants telluriques moyens.

Ce programme ambitieux se heurte à des difficultés mathématiques de deux espèces. D'abord, il s'agit d'une sphère...! De plus, les équations de l'électromagnétisme doivent être intégrées en tenant compte du mouvement de la Terre, éventuellement en introduisant les conceptions relativistes.

Au premier examen, l'espoir d'obtenir une solution *utilisable* me semblait naguère chimérique. J'ai changé d'avis en examinant la question de plus près.

Viser d'emblée la solution la plus générale me paraît cependant, dans les questions de ce genre, une méthode exécrationnelle. Il faut sérier les difficultés lorsqu'elles sont grandes. Aussi me suis-je volontairement limité, pour aborder la question, au cas très particulier d'une sphère immobile, homogène et non magnétique. Ce cas particulier constitue de toute façon un test fondamental de la méthode et mérite, pour cette raison, d'être étudié en détail.

Du reste, tant que la sphère demeure immobile, les difficultés mathématiques ne sont pas accrues si l'on envisage n couches concentriques, de conductibilités et perméabilités quelconques. Les formules s'allongent, l'exposé devient plus pénible mais la méthode demeure identique. Si je dois invoquer un jour une généralisation de ce type, il me suffira de rapporter sans commentaires le résultat brut du calcul.

Les conséquences géophysiques de cette hypothèse trop particulière ne présenteront bien entendu qu'une portée très limitée. Il est clair, par exemple,

que nous ne saurions expliquer ainsi le déplacement des pôles magnétiques (1). Il apparaîtra cependant un résultat des plus encourageants : le champ magnétique extérieur à la sphère, durant le phénomène d'extinction, est identique à celui d'un aimant infiniment court placé au centre de la sphère. L'on sait que telle est précisément la propriété essentielle du champ terrestre lorsqu'on fait abstraction d'anomalies et de variations dont les causes, qui sont en dehors de la théorie présente, n'ont à l'heure actuelle plus rien de mystérieux.

Il importe de souligner que le problème particulier traité ci-dessous rentre dans le type général de ceux qu'étudia Lamb. Malheureusement la solution de Lamb ne peut être considérée que comme purement formelle puisqu'elle s'exprime par une série compliquée, convergeant on ne sait comment, d'intégrales de Fourier. Au contraire, la solution proposée ici est d'une extrême simplicité. On l'exprime par une série d'exponentielles dont la convergence est si rapide qu'il suffit toujours de se borner à son premier terme lorsqu'on ne désire pas une extrême précision.

Les résultats développés ci-dessous me semblent aussi intéressants à un tout autre point de vue. On sait que les problèmes relatifs à la propagation des ondes au sein d'une sphère (par exemple le grand problème géophysique de la propagation des ondes séismiques dans le Globe), ainsi que les problèmes de diffraction par une sphère (problèmes de l'arc-en-ciel, des couronnes provoquées par les brouillards, etc...) n'ont reçu jusqu'ici que des solutions générales qui, correctes et définitives pour le mathématicien, ne sauraient satisfaire pleinement le physicien. Le succès des méthodes appliquées ci-dessous laisse prévoir un succès similaire lorsqu'on vaudra les appliquer aux problèmes de propagation et de diffraction (2).

I

Énoncé du problème. Notations. — La sphère, de rayon T , est homogène, de conductibilité électrique et de perméabilité magnétique uniformes. Nous

(1). Je ne veux pas dire par là qu'une théorie plus générale fera apparaître nécessairement ce déplacement. Je n'ai pas encore fait cette théorie générale et ne saurais préjuger ses résultats.

(2). On peut prévoir une simplification du même ordre que celle que j'ai apportée naguère dans les formules de la diffraction d'une onde sphérique par un écran en forme de demi-plan. (*Journal de Physique*, 1935, pp. 310 et 369).

repérons un point M de l'espace par ses coordonnées sphériques R, θ, φ (fig. 1) :

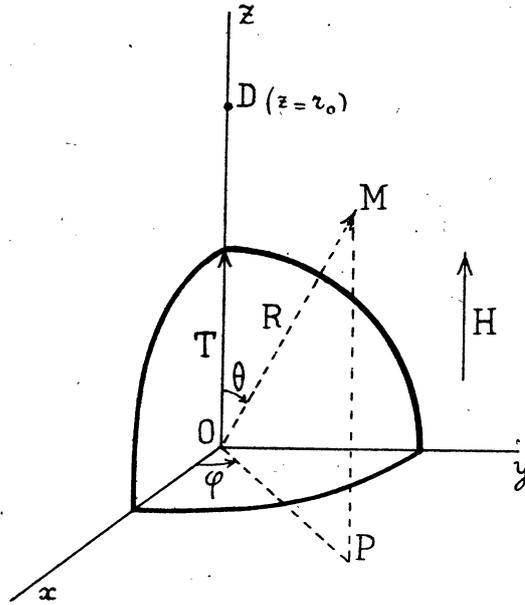


FIG. 1.

$$(1) \quad \begin{cases} x = R \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ y = R \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z = R \cos \theta \end{cases}$$

A l'origine des temps les champs et courants sont nuls dans tout l'espace (équilibre électromagnétique). Nous supposons qu'un champ magnétique \mathbf{H} , parallèle à Oz et uniforme à l'infini, est créé ultérieurement et évolue suivant la loi arbitraire du temps :

$$(2) \quad \mathbf{H} = H(t)$$

la fonction $H(t)$ et sa dérivée $H'(t)$ étant nulles pour $t = 0$.

Pour étudier les champs électrique et magnétique ainsi que les courants du régime transitoire, et pour parvenir à des formules qui permettent un calcul numérique pratique, j'emploierai la méthode de Carson (Calcul symbolique, calcul opérationnel) dont je me borne ici à rappeler très brièvement le principe. Pour une discussion et une justification complètes de la méthode,

le lecteur pourra se reporter au Chapitre III de mon ouvrage traitant de la propagation des ondes sismiques (1).

Dans cette méthode, on se pose d'abord le problème très particulier, à peu près dépourvu de toute signification physique, d'un état de régime exponentiel dans lequel la fonction excitatrice $H(t)$ est de la forme

$$(3) \quad H = e^{pt} \quad p \text{ réel} > 0.$$

Toute composante f d'un champ, d'une densité de courant, est alors de la forme

$$(4) \quad f = f_p(p, R, \theta, \varphi) e^{pt}$$

J'appelle f_p le *coefficient exponentiel* relatif à la grandeur f .

On détermine alors la transformée laplacienne $A(v)$ de la fonction $\frac{f_p}{p}$, c'est-à-dire on cherche une solution de l'équation intégrale de première espèce

$$(5) \quad \frac{f_p(p, R, \theta, \varphi)}{p} = \int_0^\infty e^{-pv} A(v, R, \theta, \varphi) dv.$$

La fonction A est dite *facteur de transmission* de la grandeur f .

Cela étant, la solution du problème posé au début de ce paragraphe s'exprime par une simple quadrature :

$$(6) \quad f = \int_0^t H'(t-v) A(v) dv.$$

En particulier si $H(t)$ présente l'expression *limite* suivante

$$(7) \quad H \begin{cases} = 0 & \dots\dots\dots \text{pour } t < 0 \\ = H_0 & \dots\dots\dots \text{pour } t > 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire si le champ constant H_0 , uniforme à l'infini, est créé instantanément à l'instant zéro, on a :

$$(8) \quad H = H_0 A(t)$$

ce qui précise sous une forme très simple la signification physique du facteur de transmission.

(1). L. Cagniard. *Reflexion et Réfraction des Ondes Sismiques Progressives*. Gauthier-Villars, Paris, 1939.

En fait, l'établissement *instantané* d'un champ magnétique se traduit par une opération physique concrète (fermeture du courant qui circule dans un solénoïde) mais ne correspond pas à une notion mathématique correcte. La même remarque s'applique aux hypothèses 2) ou 3) qui ne sont pas compatibles avec les équations de Maxwell. La méthode ci-dessous esquissée devra donc subir une nouvelle retouche : la fonction excitatrice choisie ne sera pas l'intensité d'un champ magnétique mais le moment d'un dipôle convenablement choisi que nous éloignerons indéfiniment de la sphère.

Equations de Maxwell. — Les unités sont électromagnétiques et nous écrirons les équations de Maxwell sous la forme vectorielle :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\mu \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{E} \\ 4\pi\sigma \mathbf{E} + \frac{1}{\mu} \frac{\dot{\mathbf{E}}}{V^2} = \text{rot } \mathbf{H} \\ \text{div } \mathbf{E} = \text{div } \mathbf{H} = 0 \end{array} \right.$$

avec les notations :

\mathbf{H} : champ magnétique

\mathbf{E} : champ électrique

σ : conductibilité électrique

μ : perméabilité magnétique

$V = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$: vitesse des ondes électromagnétiques dans un milieu de pouvoir

inducteur spécifique ϵ et de perméabilité μ .

Nous exprimerons leur solution à l'aide d'un vecteur de Hertz Π :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H} = \text{rot } \Pi \\ \mathbf{E} = -\mu \dot{\Pi} \end{array} \right.$$

avec les deux conditions

$$(11) \quad \text{div } \Pi = 0$$

$$(12) \quad \Delta \Pi - 4\pi\sigma\mu \dot{\Pi} - \frac{\ddot{\Pi}}{V^2} = 0.$$

Si les composantes Π_R, Π_θ sont nulles et si l'intensité de la composante Π_ϕ

est indépendante de φ , la condition (11) est remplie. Quant à la condition (12) elle sera satisfaite si

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \Pi_\varphi}{\partial R} \right) - \frac{\Pi_\varphi}{R^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Pi_\varphi}{\partial \theta} \right) \\ - 4 \pi \sigma \mu \dot{\Pi}_\varphi - \frac{\ddot{\Pi}_\varphi}{V^2} = 0. \end{array} \right.$$

Régime exponentiel. Solutions élémentaires. — Dans l'état de régime exponentiel, nous poserons

$$(14) \quad \Pi_\varphi = P(R, \theta) e^{pt}.$$

Les équations (10) deviennent

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_R e^{-pt} = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (P \sin \theta) \\ H_\theta e^{-pt} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RP) \\ H_\varphi = 0 \end{array} \right.$$

$$(15 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_R = E_\theta = 0 \\ E_\varphi e^{-pt} = -p\mu P. \end{array} \right.$$

et l'équation (13) devient

$$(16) \quad \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial P}{\partial R} \right) - \frac{P}{R^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) - K P = 0$$

en posant

$$(17) \quad K = 4 \pi \sigma \mu + \frac{p}{V^2}.$$

Cherchons une solution P de l'équation (13) qui soit le produit d'une fonction v de R seulement par une fonction u de θ seulement

$$(18) \quad P = v(R) u(\theta).$$

Il vient la condition

$$(19) \quad \frac{1}{v} \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dv}{dR} \right) + \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{du}{d\theta} \right) - K P - \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} = 0$$

qui sera satisfaite si l'on a, n désignant un entier

$$(20) \quad \frac{1}{v} \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dv}{dR} \right) - Kp - \frac{n(n+1)}{R^2} = 0$$

$$(21) \quad \frac{1}{u} \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{du}{d\theta} \right) - \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} + \frac{n(n+1)}{R^2} = 0$$

puisque, en ajoutant membre à membre (20) et (21), on retrouve l'équation (19).

L'équation (21), dans laquelle le facteur $\frac{1}{R^2}$ s'élimine, admet la solution

$$(22) \quad u = \frac{d}{d\theta} \left[P_n(\cos \theta) \right]$$

$P_n(x)$ désignant le polynôme de Legendre d'ordre n .

Dans l'équation (20) opérons le changement de fonction

$$(23) \quad v = w R^{-\frac{1}{2}}$$

puis le changement de variable

$$(24) \quad \xi = iR \sqrt{Kp} \quad i = \sqrt{-1}.$$

Il vient successivement

$$(25) \quad \frac{d^2 w}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dw}{dR} - w \left[Kp + \frac{(n + \frac{1}{2})^2}{R^2} \right] = 0$$

$$(26) \quad \frac{d^2 w}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dw}{d\xi} + w \left[1 - \frac{(n + \frac{1}{2})^2}{\xi^2} \right] = 0.$$

L'équation (26) admet pour solution la fonction générale de Bessel d'ordre $n + \frac{1}{2}$

$$(27) \quad w = Z_{n+\frac{1}{2}}(\xi).$$

D'où

$$(28) \quad v = \frac{1}{\sqrt{R}} Z_{n+\frac{1}{2}}(iR \sqrt{Kp}).$$

Conformément à ce résultat nous tenterons d'exprimer la solution générale de l'équation (16) sous forme d'une série dont le terme général sera du type

$$(29) \quad a_n uv = \frac{a_n}{\sqrt{R}} Z_{n+\frac{1}{2}}(iR \sqrt{Kp}) \cdot \frac{d}{d\theta} \left[P_n(\cos \theta) \right].$$

Les coefficients a_n seront choisis de façon que les conditions à l'infini et les conditions aux limites soient satisfaites.

Définition de l'excitation. — Pour nous affranchir de la petite difficulté théorique signalée plus haut, nous pouvons, par exemple procéder de la manière suivante :

Nous placerons sur l'axe des z , en un point D d'ordonnée $r_0 > 0$, un dipôle excitateur auquel nous ferons correspondre le vecteur de Hertz

$$(30) \quad \Pi_R = \Pi_\theta = 0 \quad \Pi_\varphi = -\frac{H_0 r_0^2}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r} e^{\rho} \left(t - \frac{r-r_0}{c} \right) \right]$$

en posant

$$(31) \quad r = \overline{MD} = \sqrt{r_0^2 + R^2 - 2Rr_0 \cos \theta}.$$

Le *facteur de transmission* du dipôle définit une onde dont le *front avant* est la sphère de rayon

$$(32) \quad r = r_0 + ct.$$

Ce front passe à l'origine O des coordonnées à l'instant zéro. Derrière ce front s'établit un pur champ magnétique⁽¹⁾, d'intensité constante, défini par le vecteur de Hertz

$$(33) \quad \Pi_R = \Pi_\theta = 0 \quad \Pi_\varphi = \frac{H_0 r_0^2}{2} \frac{R \sin \theta}{r^3}.$$

Quand r_0 est grand, on développe aisément l'expression des composantes de ce champ en série entière de $\frac{1}{r_0}$

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_\varphi = 0 \\ H_z = H_0 \left(1 + \frac{3z}{r_0} + \dots \right) \\ H_\rho = -\frac{3H_0}{2} \frac{\rho}{r_0} \left(1 + \frac{4z}{r_0} + \dots \right) \end{array} \right. \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Dans un volume donné enfermant l'origine, ce champ peut être considéré comme uniforme ($H_z = H_0$; $H_\rho = H_\varphi = 0$) avec l'approximation qu'on désire,

(1). C'est-à-dire non accompagné d'un champ électrique. Le champ électrique n'existe que sur le front d'onde.

à condition de supposer r_0 assez grand. Nous obtiendrons donc le champ uniforme désiré par un passage à la limite, en faisant croître indéfiniment r_0 . Ce champ uniforme ne s'établira pas instantanément dans l'espace mais il naîtra instantanément à l'arrivée d'un plan parallèle à celui des xy se déplaçant avec la vitesse $-c$ parallèle à Oz .

Transformation de l'expression de l'excitation. Passage à la limite pour r_0 infini. — Suivant un résultat classique, la fonction

$$(35) \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} e^{-\frac{pr}{c}} \right)$$

qui est une solution de (16) peut s'exprimer par une série du type (29) sous la forme

$$(36) \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} e^{-\frac{pr}{c}} \right) = \frac{\pi}{2} \frac{i}{\sqrt{Rr_0}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) J_{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{ipR}{c} \right) H_{n+\frac{1}{2}}^{(i)} \left(\frac{ipr_0}{c} \right) P_n(\cos \theta) \right]$$

ce développement étant valable pour $R < r_0$.

$J_{n+\frac{1}{2}}$ est la fonction normale de Bessel d'ordre $n + \frac{1}{2}$ de l'argument imaginaire pur $\frac{ipR}{c}$; $H_{n+\frac{1}{2}}^{(i)}$ est la fonction de Hankel d'ordre $n + \frac{1}{2}$ et de première espèce. En conséquence, pour $R < r_0$, nous mettrons l'excitation exponentielle sous la forme

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi_R = \Pi_0 = 0 \\ \Pi_p e^{-pt} = -i \frac{\pi H_0}{4} R^{-\frac{1}{2}} r_0^{\frac{3}{2}} e^{\frac{pr_0}{c}} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) J_{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{ipR}{c} \right) H_{n+\frac{1}{2}}^{(i)} \left(\frac{ipr_0}{c} \right) P_n(\cos \theta) \right] \end{array} \right.$$

Supposons maintenant que r_0 devient infini. Rappelons que $H_{n+\frac{1}{2}}^{(i)}(ix)$ s'exprime en toute rigueur, par la formule

$$(38) \quad H_{n+\frac{1}{2}}^{(i)}(ix) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-\frac{i\pi}{2}(n+\frac{3}{2})} e^{-x} S_{n+\frac{1}{2}}(2x)$$

avec

$$(39) \quad S_p(x) = 1 + \frac{4p^2 - 1}{1! 4x} + \frac{(4p^2 - 1)(4p^2 - 3^2)}{2! (4x)^2} + \dots$$

le développement de $S_{n+\frac{1}{2}}$ étant donc limité et ne comportant que $n+1$ termes.

Si donc, dans (37), nous remplaçons $H_{n+\frac{1}{2}}^{(4)}\left(\frac{ip r_0}{c}\right)$ par son expression (38), nous obtenons

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} \Pi_0 e^{-pt} &= -\frac{H_0}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{R}} \sqrt{\frac{c}{p}} e^{-\frac{i\pi}{4}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ r_0 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) e^{-\frac{ni\pi}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{ipR}{c}\right) P_n(\cos \theta) \right. \\ &+ \left. \frac{c}{2p} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) n(n+1) e^{-\frac{ni\pi}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{ipR}{c}\right) P_n(\cos \theta) + \dots \right\} \end{aligned} \right.$$

en négligeant d'écrire des termes dont la somme tend vers zéro quand r_0 devient infini.

N'oublions pas que, en vertu de (30), l'expression (40) est identique à

$$(41) \quad \Pi_0 e^{-pt} = -\frac{H_0 r_0}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r} e^{-\frac{p}{c}(r-r_0)} \right] = -\frac{H_0 r_0}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ e^{\frac{pR \cos \theta}{c}} \left(1 + \frac{M}{r_0} \right) \right\}$$

où M est borné quand r_0 devient infini.

Le terme en r_0 dans le développement (40) est donc identique à

$$(42) \quad -\frac{H_0 r_0}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(e^{\frac{pR \cos \theta}{c}} \right).$$

Or le facteur de transmission relatif au coefficient exponentiel (42) correspond à l'établissement, pour $t > -\frac{z}{c}$, d'un champ électrique et d'un champ magnétique *nuls*. Nous pouvons donc sans inconvénient supprimer dans (40) le premier terme en r_0 , au même titre que nous pouvons ajouter une constante arbitraire à un potentiel.

Expression définitive de l'excitation et des champs. — Enfin pour alléger l'écriture, nous supprimerons partout la dérivation $\frac{\partial}{\partial \theta}$ qui figure dans l'expression des vecteurs de Hertz et nous introduirons cette dérivation dans l'expression des champs. En définitive, l'excitation s'exprimera par

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} \Pi_0 &= \Pi_R = 0 \\ \Pi_0 e^{-pt} &= -\frac{H_0}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2R}} \left(\frac{c}{p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{i\pi}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) n(n+1) e^{-\frac{ni\pi}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{ipR}{c}\right) P_n(\cos \theta) \end{aligned} \right.$$

et les composantes des champs par

$$(44) \quad E_R = E_\theta = 0 \quad E_\varphi e^{-pt} = -p\mu \frac{\partial P}{\partial \theta}$$

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_R e^{-pt} = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \\ H_\theta e^{-pt} = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R \partial \theta} (RP) \\ H_\varphi = 0 \end{array} \right.$$

Forme générale de la solution de régime exponentiel. — Conformément aux résultats qui précèdent, nous tenterons d'exprimer la solution sous la forme des séries du type suivant :

1°) A l'extérieur de la sphère : $R > T$.

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} P = -\frac{H_0}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2R}} \left(\frac{c}{p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{i\pi}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(2n+1) e^{-\frac{ni\pi}{2}} P_n(\cos \theta). \\ \left[J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{ipR}{c}\right) + a_n H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}\left(\frac{ipR}{c}\right) \right] \end{array} \right.$$

2°) A l'intérieur de la sphère : $R < T$.

$$(47) \quad P = -\frac{H_0}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2R}} \left(\frac{c}{p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{i\pi}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[n(n+1)(2n+1) e^{-\frac{ni\pi}{2}} P_n(\cos \theta) \cdot b_n \cdot J_{n+\frac{1}{2}}(iR\sqrt{kp}) \right]$$

Le choix d'une fonction de Hankel de première espèce s'impose dans (46) car une telle fonction est la seule fonction générale de Bessel qui s'annule pour R infini. Le choix d'une fonction normale de Bessel s'impose dans (47) car une telle fonction est la seule fonction générale de Bessel qui demeure bornée pour $R = 0$.

Les coefficients a_n, b_n seront choisis de façon que les conditions aux limites à la surface de la sphère T soient vérifiées.

Sous réserve de questions de convergence et de convergence uniforme des séries (46) et (47) ainsi que des séries dérivées, questions qui devront être examinées après que les valeurs des a_n, b_n auront été précisées, la fonction P définie dans tout l'espace par (46) et (47) satisfait à l'équation indéfinie ainsi qu'aux conditions à l'infini (1).

(1). Ces questions de convergence ne présentent pas d'ailleurs de difficulté particulière et nous laisserons au lecteur le soin de les examiner.

Conditions aux limites. Détermination des coefficients a_n, b_n . — A la traversée de la sphère T, E_r et H_θ doivent être continus ainsi que μH_R . En vertu de (44) et (45), ces conditions reviennent à exprimer la continuité de μP et de $\frac{\partial(PR)}{\partial R}$. En préjugant la validité de la dérivation terme à terme des séries, on obtient donc deux équations linéaires pour déterminer les deux coefficients a_n, b_n .

Pour abrégier l'écriture de formules déjà longues, nous nous bornerons désormais au seul cas qui semble intéressant, celui de $\mu = 1$,

Il vient :

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_n = - \frac{J'(i\alpha) J(i\beta) - \frac{\beta}{\alpha} J(i\alpha) J'(i\beta)}{H'(i\alpha) J(i\beta) - \frac{\beta}{\alpha} H(i\alpha) J'(i\beta)} \\ b_n = \frac{H'(i\alpha) J(i\alpha) - H(i\alpha) J'(i\alpha)}{H'(i\alpha) J(i\beta) - \frac{\beta}{\alpha} H(i\alpha) J'(i\beta)} \end{array} \right.$$

en posant par abréviation

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha = \frac{pT}{c} & \beta = T \sqrt{kp} \\ J(ix) = J_{n+\frac{1}{2}}(ix) & J'(ix) = \left[\frac{d}{d\xi} J(\xi) \right]_{\xi=ix} \\ H(ix) = H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(ix) & H'(ix) = \left[\frac{d}{d\xi} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\xi) \right]_{\xi=ix} \end{array} \right.$$

La vitesse de la lumière est considérée désormais comme infinie. — Comme il est d'usage en ces questions, nous ferons désormais une approximation, au reste excellente si la conductibilité σ n'est pas extraordinairement petite (1) en posant $c = \infty$. En procédant ainsi nous simplifierons beaucoup les équations, et nous substituerons à un problème complexe de propagation d'ondes un problème beaucoup plus simple de propagation de *pseudo-ondes*.

A partir des expressions asymptotiques des fonctions de Bessel pour

(1). C'est-à-dire si la substance n'est pas un diélectrique à peu près parfait.

$\alpha = 0$, il apparaît que a_n, b_n sont des infiniment petits dont les parties principales sont respectivement

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^{n+1} \left[\frac{2^n \cdot n!}{(2n)!} \right] \alpha^{2n+1}}{2n+1} \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) J(i\beta) - i\beta J'(i\beta)}{\left(n + \frac{1}{2}\right) J(i\beta) + i\beta J'(i\beta)} \\ b_n &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2^n \cdot n!}{(2n)!} e^{\frac{i\pi}{2}(n+\frac{1}{2})} \alpha^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right) J(i\beta) + i\beta J'(i\beta)} \end{aligned} \right.$$

où K se réduit désormais à la constante, indépendante de p

$$(50 \text{ bis}) \quad K = 4\pi\sigma.$$

D'autre part, dans les séries (46) et (47), *seul le premier terme ne tend pas vers zéro* de sorte qu'il ne subsiste que des polynômes de Legendre du premier ordre $[P_1(x) = x]$ et des fonctions de Bessel d'ordre $\frac{3}{2}$. Il vient :

1°) A l'extérieur de la sphère, pour $R > T$

$$(51) \quad P = -\frac{H_0 R \cos \theta}{2} - \frac{H_0 T^3}{2 R^3} \cos \theta \frac{\frac{3}{2} J_{\frac{3}{2}}(i\beta) - i\beta J'_{\frac{3}{2}}(i\beta)}{\frac{3}{2} J_{\frac{3}{2}}(i\beta) + i\beta J'_{\frac{3}{2}}(i\beta)}$$

2°) A l'intérieur de la sphère, pour $R < T$

$$(52) \quad P = -3 H_0 T \sqrt{\frac{T}{R}} \cos \theta \frac{J_{\frac{3}{2}}(i\gamma)}{3 J_{\frac{3}{2}}(i\beta) + 2 i\beta J'_{\frac{3}{2}}(i\beta)}$$

avec

$$(53) \quad \gamma = R \sqrt{k\rho}.$$

Détermination des facteurs de transmission.

1°) Facteur de transmission du champ excitateur.

Le coefficient exponentiel correspondant étant

$$(54) \quad -\frac{H_0 R \cos \theta}{2}$$

le facteur de transmission relatif au vecteur de Hertz excitateur est

$$(55) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \dots\dots\dots \text{pour } v < 0 \\ -\frac{H_0 R \cos \theta}{2} \dots\dots\dots \text{pour } v > 0 \end{array} \right.$$

Les facteurs de transmission des composantes des champs, nuls pour $v < 0$, sont respectivement, en vertu de (44) et (45)

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \dots\dots \text{pour } E_R, E_\theta, E_\varphi, H_x, H_y \\ H_0 \dots\dots \text{pour } H_z \end{array} \right\} \text{pour } v > 0$$

Ils représentent l'établissement instantané, dans tout l'espace, à l'instant zéro, d'un pur champ magnétique uniforme et constant ($H_x = H_y = 0, H_z = H_0$).

Cette manière d'envisager l'établissement du champ magnétique, identique à celle qui est exposée en tête de cette étude, n'a de sens qu'en vertu de l'approximation faite entre temps, savoir que c est infinie.

2°) Facteur de transmission du vecteur de Hertz anomal, à l'extérieur de la sphère.

Le coefficient exponentiel correspondant est représenté par le second terme de (51).

Si nous remplaçons $J_{\frac{3}{2}}(i\beta)$ par son expression

$$(57) \quad J_{\frac{3}{2}}(i\beta) = -\frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi\beta}} \left[e^\beta \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) + e^{-\beta} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]$$

la fraction se réduit à

$$(58) \quad -\frac{3}{\beta^2} - 1 + \frac{3}{\beta} \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{e^\beta - e^{-\beta}} = \frac{3}{\beta} - \frac{3}{\beta^2} - 1 + \frac{6}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n\beta}$$

La technique du calcul opérationnel fait connaître immédiatement le facteur de transmission qui correspond au coefficient exponentiel $\frac{1}{\beta} e^{-2n\beta}$.

C'est

$$(59) \quad -\frac{1}{2s} \Phi'(2ns) - 2n \Phi(2ns) \text{ pour } v > 0$$

en posant

$$(60) \quad s = T \sqrt{\frac{\pi \sigma}{v}}$$

$\Phi(x)$ désigne le complément à l'unité de la *fonction des erreurs*.

$$(61) \quad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-x^2} dx.$$

Nous posons enfin

$$(62) \quad \Phi'(2ns) = \left[\frac{d}{dx} \Phi(x) \right]_{x=2ns} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-4n^2 s^2}.$$

En définitive, le facteur de transmission relatif au second terme de (51) est

$$(63) \quad -\frac{H_0}{2} \frac{T^3}{R^2} \cos \theta. A(v)$$

avec

$$(64) \quad A(v) \begin{cases} = 0 & \dots \dots \dots \text{pour } v < 0 \\ = \frac{3}{s\sqrt{\pi}} - \frac{3}{4s^2} - 1 - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{s} \Phi'(2ns) + 4n \Phi(2ns) \right] & \text{pour } v > 0. \end{cases}$$

Nous reviendrons sur le calcul des champs un peu plus loin.

3°) Facteur de transmission du vecteur de Hertz, à l'intérieur de la sphère.

On procède de façon identique et l'on obtient son expression sous la forme

$$(65) \quad \frac{3}{2} H_0 \frac{T^3}{R^2} \cos \theta. B(v)$$

avec, pour $v > 0$ [$B(v) = 0$ pour $v < 0$]

$$(66) \quad \left\{ \begin{aligned} B(v) = \sum_{n=0}^{\infty} & \left\{ \left[\frac{R}{T} \left(2n+1 - \frac{R}{T} \right) + \frac{1}{4s^2} + \frac{1}{2} \left(2n+1 - \frac{R}{T} \right)^2 \right] \Phi \left[s \left(2n+1 - \frac{R}{T} \right) \right] \right. \\ & - \left[-\frac{R}{T} \left(2n+1 + \frac{R}{T} \right) + \frac{1}{4s^2} + \frac{1}{2} \left(2n+1 + \frac{R}{T} \right)^2 \right] \Phi \left[s \left(2n+1 + \frac{R}{T} \right) \right] \\ & + \frac{1}{4s} \left(2n+1 + \frac{R}{T} \right) \cdot \Phi' \left[s \left(2n+1 - \frac{R}{T} \right) \right] \\ & \left. - \frac{1}{4s} \left(2n+1 - \frac{R}{T} \right) \cdot \Phi' \left[s \left(2n+1 + \frac{R}{T} \right) \right] \right\} \end{aligned} \right.$$

Autre expression des fonctions A(v) et B(v). — Pour les grandes valeurs de s c'est-à-dire pour les petites valeurs de v , la convergence des séries (64) et (66) est extrêmement rapide. Par exemple, pour $s > 1$, on peut presque se limiter au premier ou aux deux premiers termes si l'on ne désire pas une précision extrême. Comme il existe d'excellentes tables de Φ et de Φ' , le calcul numérique est aisé et très rapide.

Il n'en va pas de même pour le cas des petites valeurs de s , c'est-à-dire des grandes valeurs de v , qui est précisément le plus intéressant à étudier (comportement asymptotique de A et B pour v infini). Pour $s = 0,001$, on serait obligé de calculer plusieurs milliers de termes.

On lève cette difficulté à l'aide de calculs assez pénibles dont nous allons donner un exemple.

Soit la série

$$(67) \quad \sum_{n=0}^{\infty} F\left(n + \frac{1}{2} - m\right)$$

où m est une constante réelle de module $< \frac{1}{2}$, F certaine fonction réelle convenablement choisie pour que le raisonnement qui suit soit valable.

Par un artifice classique, nous transformerons cette série en une intégrale complexe (figure 2) prise le long du parcours $\Gamma = \Gamma', \Gamma''$ dans le plan de la

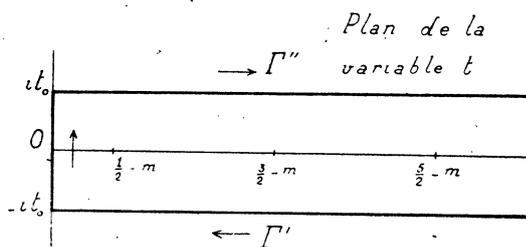


FIG. 2.

variable t . Sur le parcours Γ' , l'image de t suit une parallèle à l'axe réel jusqu'au point d'afixe imaginaire pure $-it_0$ et aboutit à l'origine par le segment $(-it_0, 0)$ de l'axe imaginaire. Le parcours Γ'' est symétrique de Γ' par rapport à l'axe réel. Désignons d'une manière générale par \Re, \Im respectivement la partie réelle et le coefficient de i d'un nombre complexe. En vertu du théorème des résidus, l'on aura généralement :

$$(68) \quad \int_{(\Gamma)} F(t) \cot \left[\pi \left(t + m - \frac{1}{2} \right) \right] dt = -2i \sum_{n=b}^{\infty} F\left(n + \frac{1}{2} - m\right)$$

ou

$$(69) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} F\left(n + \frac{1}{2} - m\right) &= -\Im \int F(t) \cot \left[\pi \left(t + m - \frac{1}{2} \right) \right] dt \\
 &= \Re \int_{\Gamma''} F(t) \frac{1 + e^{2i\pi \left(t + m - \frac{1}{2} \right)}}{1 - e^{2i\pi \left(t + m - \frac{1}{2} \right)}} dt \\
 &= \Re \int_{\Gamma''} F(t) dt + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Re \int_{\Gamma''} F(t) e^{2ni\pi \left(t + m - \frac{1}{2} \right)} dt \right] \\
 &= \Re \int_{\Gamma''} F(t) dt + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \Re \left[e^{2ni\pi m} \int_{\Gamma''} F(t) e^{2ni\pi t} dt \right] \right\}.
 \end{aligned} \right.$$

Toutes les séries figurant dans l'expression de $A(v)$ et $B(v)$ sont justifiables de la formule (69). Soit par exemple

$$(70) \quad F(t) = t^3 e^{-t^2 x^2}.$$

Il vient

$$(71) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} - m \right)^3 e^{-x^2 \left(n + \frac{1}{2} - m \right)^2} &= \Re \int_{\Gamma''} t^3 e^{-t^2 x^2} dt \\
 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \Re \left[e^{2ni\pi m} \int_{\Gamma''} t^3 e^{-t^2 x^2 + 2ni\pi t} dt \right] \right\}
 \end{aligned} \right.$$

D'où :

$$(72) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(n + \frac{1}{2} - m \right)^3 e^{-x^2 \left(n + \frac{1}{2} - m \right)^2} - \left(n + \frac{1}{2} + m \right)^3 e^{-x^2 \left(n + \frac{1}{2} + m \right)^2} \right] \\
 = -4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(2n\pi m) \cdot \Im \int_{\Gamma''} t^3 e^{-t^2 x^2 + 2ni\pi t} dt.
 \end{aligned} \right.$$

Or :

$$(73) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \Im \int_{\Gamma''} t^3 e^{-t^2 x^2 + 2ni\pi t} dt &= e^{-\frac{n^2 \pi^2}{x^2}} \Im \int_{\Gamma''} t^3 e^{-\left(tx - \frac{ni\pi}{x} \right)^2} dt \\
 &= \frac{1}{x^4} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{x^2}} \Im \left[\int_{-\frac{ni\pi}{x}}^0 \left(u + \frac{ni\pi}{x} \right)^3 e^{-u^2} du + \int_0^{\infty} \left(u + \frac{ni\pi}{x} \right)^3 e^{-u^2} du \right] \\
 &= \frac{1}{x^4} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{x^2}} \left[\frac{3n\pi}{x} \int_0^{\infty} e^{-u^2} u^2 du - \frac{n^3 \pi^3}{x^3} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \right] \\
 &= \frac{n\pi \sqrt{\pi}}{4} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{x^2}} \left(\frac{3}{x^5} - \frac{2n^3 \pi^3}{x^7} \right).
 \end{aligned} \right.$$

Donc :

$$(74) \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(n + \frac{1}{2} - m \right)^2 e^{-x^2 \left(n + \frac{1}{2} - m \right)^2} - \left(n + \frac{1}{2} + m \right)^2 e^{-x^2 \left(n + \frac{1}{2} + m \right)^2} \right] \\ & = -\pi \sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \cdot n \sin(2n\pi m) e^{-\frac{n^2 \pi^2}{x^2}} \left(\frac{3}{x^5} - \frac{2n^2 \pi^2}{x^7} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Cela étant, dans $B(v)$ intervient la série

$$(75) f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(2n+1 - \frac{R}{T} \right)^2 \Phi \left[s \left(2n+1 - \frac{R}{T} \right) \right] - \left(2n+1 + \frac{R}{T} \right)^2 \Phi \left[s \left(2n+1 + \frac{R}{T} \right) \right] \right\}$$

dont la dérivée par rapport à s s'exprime ainsi :

$$(76) \frac{df(s)}{ds} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(2n+1 - \frac{R}{T} \right)^2 e^{-s^2 \left(2n+1 - \frac{R}{T} \right)^2} - \left(2n+1 + \frac{R}{T} \right)^2 e^{-s^2 \left(2n+1 + \frac{R}{T} \right)^2} \right\}$$

donc, en vertu de (74) $\left[m = \frac{R}{2T}, x = 2s \right]$ s'écrit :

$$(77) \frac{df(s)}{ds} = \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n n \sin \left(\frac{n\pi R}{T} \right) e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4s^2}} \left(\frac{6}{s^5} - \frac{n^2 \pi^2}{s^7} \right) \right]$$

L'intégration terme à terme est aisée. Nous n'insisterons pas sur le calcul de la constante d'intégration et l'on obtient :

$$(78) f(s) = -\frac{R}{3T} \left(1 - \frac{R^2}{T^2} \right) - \pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \left(\frac{n\pi R}{T} \right) \cdot e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4s^2}} \left(\frac{4}{n^4 \pi^4} + \frac{1}{n^2 \pi^2 s^2} + \frac{1}{2s^4} \right)$$

Procédant de façon similaire pour toutes les séries, on obtient en définitive :

$$(79) A(v) = -\frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{n^2 \pi}{4\sigma T^2} v}$$

$$(80) \left\{ \begin{aligned} B(v) &= -\frac{R^3}{3T^3} + \frac{2R}{\pi^2 T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left(\frac{n\pi R}{T} \right) e^{-\frac{n^2 \pi}{4\sigma T^2} v} \\ &- \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin \left(\frac{n\pi R}{T} \right) e^{-\frac{n^2 \pi}{4\sigma T^2} v} \end{aligned} \right.$$

Les expressions (79) et (80) sont respectivement *identiques* aux expressions (64) et (66). Elles convergent très lentement pour les petites valeurs de ν mais d'une manière extrêmement rapide pour les grandes valeurs de ν . Par exemple, pour $s < 1$, on peut presque se limiter au premier terme si l'on ne désire pas une précision extrême.

L'usage des formules (64) et (66) d'une part ou des formules (79) et (80) d'autre part suivant les valeurs de ν qu'on considère, permet donc dans tous les cas un calcul numérique très rapide.

II

Extinction des champs et courants après suppression du champ exciteur. —

Les formules établies ci-dessus fournissent la solution générale du problème posé en tête de la première partie. Elles supposent, dans chaque cas particulier, la discussion ou le calcul numérique, toujours aisés à conduire, de quadratures du type (6). Dans cette deuxième partie, nous nous attacherons plus spécialement à un cas particulièrement intéressant, celui de l'extinction des champs et courants après qu'on a supprimé instantanément à l'origine des temps le champ magnétique exciteur uniforme. Le champ exciteur est supposé d'ailleurs avoir été établi à une époque suffisamment reculée dans le passé pour que l'équilibre électromagnétique ait été pratiquement assuré aux époques précédant immédiatement l'instant zéro (champs électriques et courants nuls, champ H constant et uniforme dans tout l'espace, y compris à l'intérieur de la sphère).

A partir de l'instant zéro, on a donc :

1°) A l'extérieur de la sphère ($R > T$)

$$(81) \quad \Pi_{\varphi} = \frac{H_0}{2} \frac{T^3}{R^2} \cos \theta. A(t).$$

2°) A l'intérieur de la sphère ($R < T$)

$$(82) \quad \Pi_{\varphi} = -\frac{H_0 R \cos \theta}{2} - \frac{3}{2} H_0 \frac{T^3}{R^2} \cos \theta. B(t).$$

Étude des champs à l'extérieur de la sphère. — En vertu de (81) et (45), les composantes du champ magnétique à l'extérieur ont pour expression

$$(83) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_{\varphi} = 0 \\ H_R = -H_0 \frac{T^3}{R^2} \cos \theta. A(t) \\ H_{\theta} = -\frac{H_0}{3} \frac{T^3}{R^2} \sin \theta. A(t). \end{array} \right.$$

Ce champ est donc identique à celui d'un aimant infiniment court situé au centre de la sphère et dont le moment magnétique, porté par Oz, aurait la valeur :

$$(84) \quad M_z = -\frac{H_0}{2} T^3 A(t).$$

Quant au champ électrique, il a pour valeur

$$(85) \quad E_\theta = E_R = 0 \quad E_\varphi = \frac{H_0}{2} \frac{T^3}{R^2} \sin \theta \frac{dA}{dt}$$

où

$$(86) \quad \frac{dA}{dt} = \frac{3}{2\pi\sigma T^3} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi}{4\sigma T^2} t} \equiv \frac{3}{2\pi} \frac{1}{st} \left(1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2s} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-4n^2 s^2} \right).$$

La fonction $-A(t)$ est constamment décroissante depuis 1 quand t est nul jusqu'à zéro, quand t est infini.

La courbe (1) de la figure 3 représente l'évolution de la fonction $A(t)$, plus

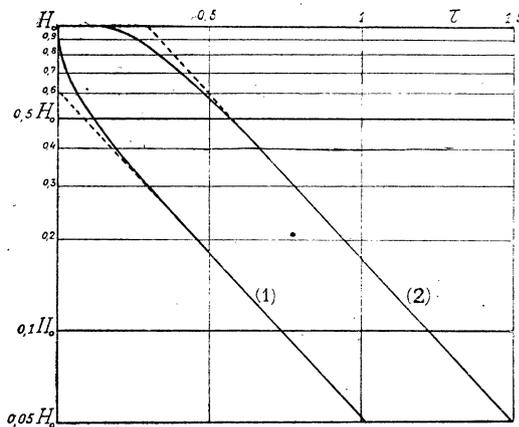


FIG. 3.

précisément l'évolution de H_R en un point situé au pôle de la sphère ($\theta = 0$, $R = T$). Nous avons adopté une échelle logarithmique des ordonnées et porté en abscisses le *temps réduit* τ

$$(87) \quad \tau = \frac{1}{s^2} = \frac{t}{\pi\sigma T^3}.$$

On voit que la décroissance du champ, d'abord particulièrement rapide, devient pratiquement exponentielle pour des valeurs de τ supérieures à 0,3.

A partir de ce moment, l'on peut se limiter au premier terme du développement

$$(88) \quad -A(t) \sim \frac{6}{\pi^2} e^{-\frac{\pi t}{4\sigma T^2}} = \frac{6}{\pi^2} e^{-\frac{\pi^2}{4}\tau}.$$

Étude des champs et courants à l'intérieur de la sphère. — En vertu de (82) et (45), les composantes du champ magnétique à l'intérieur ont pour expression :

$$(89) \quad \begin{cases} H_\varphi = 0 \\ H_R = H_0 \cos \theta \left[1 + 3 \frac{T^2}{R^2} B(t) \right] \\ H_\theta = -H_0 \sin \theta \left[1 + \frac{3}{2} \frac{T^2}{R^2} F(t) \right] \end{cases}$$

avec

$$(90) \quad \left\{ \begin{aligned} F(t) &= R \frac{\partial}{\partial R} B(t) - B(t) = -\frac{2R^2}{3T^2} - \frac{2R}{\pi^2 T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi R}{T}\right) e^{-\frac{n^2\pi}{4\sigma T^2} t} \\ &+ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{1}{n^2 \pi^2} - \frac{R^2}{T^2} \right) \sin\left(\frac{n\pi R}{T}\right) e^{-\frac{n^2\pi}{4\sigma T^2} t} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[(2n+1)^2 + \frac{R^2}{T^2} + \frac{1}{2s^2} \right] \left[\Phi \left[s \left(2n+1 + \frac{R}{T} \right) \right] - \Phi \left[s \left(2n+1 - \frac{R}{T} \right) \right] \right] \right\} \\ &+ \frac{1}{4s} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(2n+1 - \frac{R}{T} \right) \Phi' \left[s \left(2n+1 + \frac{R}{T} \right) \right] - \left(2n+1 + \frac{R}{T} \right) \Phi' \left[s \left(2n+1 - \frac{R}{T} \right) \right] \right\} \end{aligned} \right.$$

La fonction $B(t)$ décroît de 0 à $-\frac{R^2}{3T^2}$, la fonction $F(t)$ de 0 à $-\frac{2}{3} \frac{R^2}{T^2}$ quant t croît de zéro à l'infini. En conséquence, le champ, d'abord pratiquement uniforme ($H_z = H_0$; $H_x = H_y = 0$) pour les petites valeurs de t , tend vers zéro pour t infini. Pour les valeurs du temps réduit τ supérieures à quelques dixièmes, ses composantes s'expriment asymptotiquement par :

$$(91) \quad \begin{cases} H_R = \frac{6H_0 \cos \theta}{\xi^3} \left[-\xi \cos \xi + \sin \xi \right] \cdot e^{-\frac{\pi^2}{4}\tau} \\ H_\theta = -\frac{3H_0 \sin \theta}{\xi^3} \left[\xi \cos \xi + (\xi^2 - 1) \sin \xi \right] e^{-\frac{\pi^2}{4}\tau} \\ H_\varphi = 0 \end{cases}$$

en posant

$$(92) \quad \beta = \frac{\pi R}{T}$$

A titre d'exemple, la courbe (2) de la figure 3 montre l'évolution du champ au centre de la sphère. Ce champ est de direction Oz .

$$(93) \quad (H_z)_{R=0} = H_0 \left[1 - \frac{4s}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-s^2(2n-1)^2} \right] \equiv 2 H_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-\frac{n^2 \pi}{4\sigma T^2} t}$$

Le champ au centre demeure donc pratiquement égal à H_0 jusqu'à l'instant

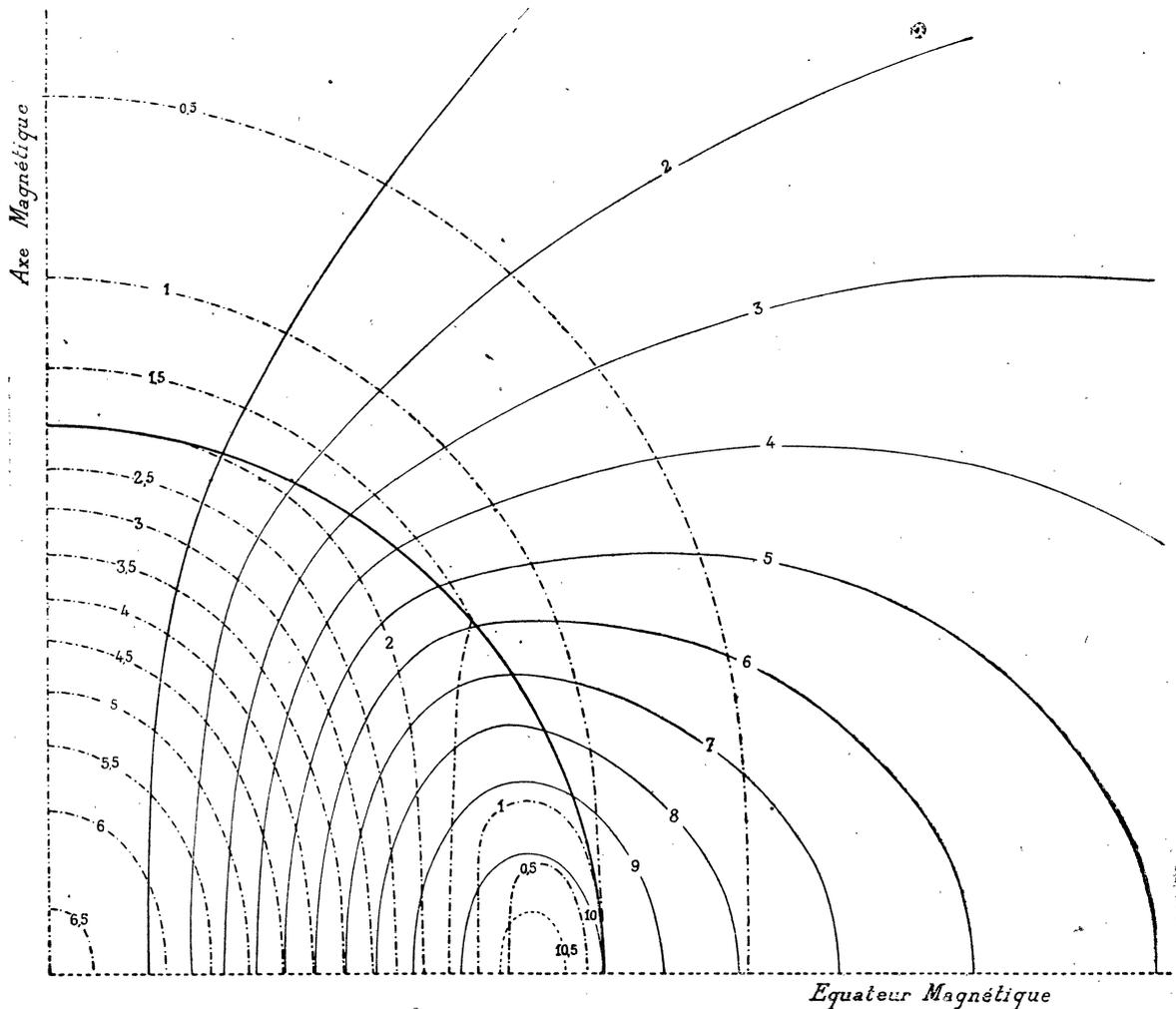


FIG. 4.

de temps réduit $\tau = 0,15$, époque qui marque l'arrivée, au centre O, de la pseudo-onde sphérique issue de la surface à l'instant zéro (1).

A partir du moment où les formules asymptotiques sont valables, toutes les grandeurs (champs, courants, etc.) sont proportionnelles et évoluent suivant la même loi en fonction du temps (facteur commun $e^{-\frac{\pi^2}{4}\tau}$).

Dans l'état asymptotique, les lignes de force qui coïncident, à l'extérieur de la sphère, avec les lignes de force d'un dipôle magnétique, satisfont, pour $R < T$ à l'équation :

$$(94) \quad \sin \theta = C^{te} \cdot \sqrt{\frac{\xi}{\sin \xi - \xi \cdot \cos \xi}}$$

Leur allure est donnée par la figure 4. Les cotes inscrites sur chaque courbe sont proportionnelles au flux du champ magnétique à travers le tube de force admettant cette courbe pour méridienne.

Les lignes de force se ferment autour d'un cercle d'axe Oz, de rayon 0,873 T. Sur ce cercle le champ est nul.

Du reste un réseau des lignes d'égale valeur du champ est construit aussi sur la figure 4 (courbes en trait mixte); on a pris pour unité l'intensité du champ sur l'équateur de la sphère T. Le champ est maximum au centre, où son intensité atteint 6,580.

Dans la région équatoriale, l'intensité du champ décroît d'abord rapidement quand on s'enfonce à l'intérieur de la sphère. Dans les régions polaires, elle croît constamment en suivant longtemps une loi pratiquement linéaire en fonction de la profondeur.

La seule composante non nulle du champ électrique est

$$(95) \quad E_r = -\frac{3}{2} H_0 \sin \theta \frac{T^2}{R^2} \frac{\partial B}{\partial t}$$

avec

$$(96) \quad \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{2\pi^2 \sigma T^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4} \tau} \left(\frac{1}{n} \sin n \xi - \xi \cos n \xi \right) \right\}$$

(1). Le mouvement du pseudo-front n'est pas uniforme, il se traduit par la loi $\tau = 0,15 \left(1 - \frac{R}{T}\right)^2$.

Je n'insiste pas ici sur cette notion si commode et d'une importance si grande, que j'ai maintes fois développée dans mes publications antérieures.

Sur la figure 5 sont représentées les lignes d'égale valeur de E_φ , c'est-à-dire d'égale valeur de la densité de courant, dans le plan méridien. Elles sont cotées en unités arbitraires, la valeur 10 correspondant à la densité de courant sur l'équateur de la sphère T. La densité de courant est maximum dans le plan équatorial, sur un cercle intérieur d'axe Oz dont le rayon est égal à 0,663 T.

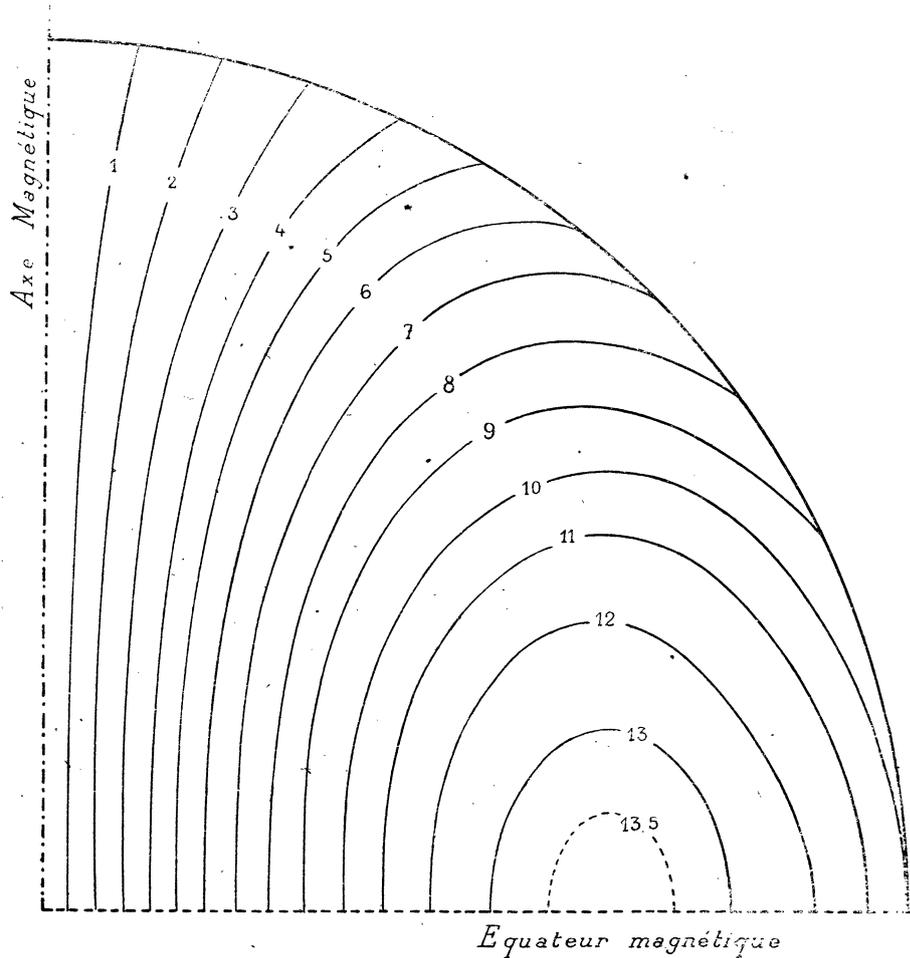


FIG. 5.

Enfin nous indiquerons la valeur de la puissance dissipée par effet Joule dans toute la sphère T en supposant atteint l'état asymptotique.

$$(97) \quad W = \frac{3}{4} \frac{H_{\text{ext}}^2 T}{\pi \sigma} e^{-\frac{\pi^2}{2} \tau} = \frac{\pi^2}{12} \frac{R^6}{\sigma T^3} H_{\text{équ.}}^2$$

$H_{\text{équ.}}$ désignant l'intensité du champ magnétique extérieur, dans le plan équatorial, à une distance $R > T$ du centre.

CONCLUSION

Ainsi que je l'ai dit dans l'Introduction, la théorie qui vient d'être exposée est *a priori* beaucoup trop particulière pour prétendre expliquer le Magnétisme terrestre. Il n'est cependant pas sans intérêt d'examiner ses conséquences dans l'hypothèse du Globe terrestre immobile.

L'instant initial est d'une ancienneté telle (ordre de grandeur plausible 2 milliards d'années) que, pour conserver des valeurs H_0 raisonnables, la conductibilité σ doit atteindre ou surpasser l'ordre de celle d'un métal c'est-à-dire être incomparablement plus grande que celle des matériaux de l'écorce.

Par suite, nous devons supposer l'existence d'un noyau très conducteur. Nous identifierons par exemple la sphère qui délimite ce noyau avec la grande surface de discontinuité placée par les séismologues vers 2.900 km. de profondeur. En conséquence nous poserons

$$(98) \quad T = 3500 \text{ Km.}$$

La conductibilité du noyau étant très grande par rapport à celle de l'écorce, tout se passe à peu près comme si la conductibilité de l'écorce était nulle. La théorie développée ci-dessus est donc valable, sans qu'il soit utile d'imaginer plusieurs couches concentriques de conductibilités diverses. Enfin nous poserons avec vraisemblance $\mu = 1$, car la température du noyau, qui atteint certainement plusieurs milliers de degrés (4000°C pour fixer les idées), est supérieure aux points de Curie de tous les corps ferromagnétiques connus.

Comme je l'ai déjà souligné, le résultat fondamental de la théorie, celui qui me semble extrêmement encourageant en vue des développements ultérieurs, réside dans l'identité du champ extérieur avec celui d'un aimant infiniment court placé au centre de la Terre.

Toutefois, malgré ce premier succès qualificatif, il faut avouer que la théorie serait définitivement ruinée s'il fallait admettre les évaluations de L. A. Bauer⁽¹⁾ concernant la diminution progressive de l'intensité du moment terrestre M_z . En discutant d'anciennes mesures cet auteur conclut à une diminution relative annuelle de l'ordre de $1/1.600$.

Or, en vertu de (84) et (88), l'on a :

$$(99) \quad \frac{1}{M_z} \frac{dM_z}{dt} = - \frac{\pi}{4\sigma T^2}.$$

D'autre part, l'intensité actuelle du champ magnétique à l'équateur

(1) L. A. Bauer — Terr. Magn. 8 (1903) 97; 9, 1904, 173; 19 (1914), 124; 28, 1923, 22.

($R = 6.370 \text{ km. ; } \theta = \frac{\pi}{2}$) étant de 0,33 gauss, les formules (83) et (88) donnent

$$(100) \quad H_0 = 0,11 \pi^2 \left(\frac{R}{T} \right)^3 e^{-\frac{\pi t}{4\sigma T^2}}$$

Choisissons l'estimation de Bauer pour évaluer $\frac{1}{M_z} \frac{dM_z}{dt}$ et adoptons une valeur aussi petite que possible pour t , disons même ridiculement petite :

$$t = 100.000 \text{ années.}$$

On obtient déjà $H_0 = 9,1 \cdot 10^{27}$ gauss! Un tel résultat condamnerait la théorie à une absurdité irrémédiable si l'on n'avait de bonnes raisons de douter des calculs de Bauer, faussés vraisemblablement par l'incertitude des mesures anciennes sur lesquelles ils se fondent. Notons en passant que cette valeur de $\frac{1}{M_z} \frac{dM_z}{dt}$ correspondrait à une conductibilité $\sigma = 3,24 \cdot 10^{-7} \text{ em CGS}$, plusieurs milliers de fois plus grande que celle d'une marne salée mais 1900 fois petite que celle du cuivre.

En somme, la théorie se heurte à un dilemne. Ou bien nous adoptons des conductibilités petites et H_0 prend des valeurs astronomiques, ou bien nous adoptons des valeurs raisonnables pour H_0 et la conductibilité présente des valeurs si élevées qu'elles peuvent sembler étranges.

Les nombres suivants constituent un compromis entre ces deux extrêmes. Posons $H_0 = 25$ gauss, ce qui paraît être l'intensité du champ solaire équatorial et correspond à une valeur initiale du champ équatorial, à la surface terrestre, de 2,7 gauss. Pour $t = 2$ milliards d'années, il vient $\sigma = 0,301$ soit environ 490 fois la conductibilité du cuivre. Dans ces conditions la puissance dissipée par effet Joule serait infime, n'atteignant que 1,2 kilowatts

Supposons que les forces électromotrices d'induction calculées plus haut sont la cause essentielle des courants telluriques de direction et d'intensité constantes⁽¹⁾, dont l'étude peut être faite à l'aide de moyennes calculées sur un intervalle de temps convenable. Une étude de ce genre apporterait aux habitants de notre Globe hypothétique immobile, à la fois un contrôle de premier ordre de la validité de la théorie et un procédé pour déterminer l'ordre de grandeur de la conductibilité du noyau.

Lorsqu'on se donne les forces électromotrices, le calcul *a priori* de la distribution des courants telluriques et celui des différences de potentiel qu'on

(1) Lorsqu'on néglige l'extinction *séculaire* du phénomène.

mesure dans la technique habituelle d'étude de ces courants est rendu compliqué par l'hétérogénéité électrique des couches superficielles. Il est insoluble en ce qui concerne les *continents* car on connaît très mal la structure géologique profonde de notre planète.

Au contraire, le calcul devient aisé et sûr s'il s'agit des *océans*. Leur conductibilité est en effet si grande en comparaison de celles des continents que l'on peut alors considérer que la conductibilité des terres est nulle. De plus, l'on connaît avec une précision suffisante les profondeurs et conductibilités des mers. Il est donc possible de se donner *a priori* une loi des forces électromotrices de la forme :

$$(101) \quad E_r = K \sin \theta \quad K = C^{\text{te}}$$

conformément à la relation (85) et d'intégrer graphiquement les équations du problème. Ce problème ne comporte d'ailleurs que deux dimensions car les profondeurs des mers sont toujours très petites par rapport à leurs dimensions transversales.

Si l'expérience s'avère d'accord avec le calcul, non seulement elle fournit un gros argument en faveur de la théorie, mais elle permet de connaître la valeur de K , laquelle est équivalente à la connaissance de σT^2 .

Ne quittons pas ce Globe d'Utopie sans remarquer que ses habitants, après avoir fondé leur hypothèse sur des bases solides par l'étude des courants électriques océaniques, disposeraient d'une méthode puissante pour étudier la répartition des conductibilités électriques dans l'écorce. Il leur suffirait d'étudier les courants telluriques continentaux et d'imaginer par tâtonnements et approximations successifs une structure de l'écorce rendant compte numériquement des effets constatés : ce travail serait l'équivalent d'une prospection électrique à très vaste échelle.

Notons encore que si l'on pose $\sigma = 0,30$, les forces électromotrices sont d'un ordre de grandeur extraordinairement petit. A l'équateur magnétique, où elles sont maxima, elles atteignent seulement $4,5 \cdot 10^{-11}$ volt/km. Elles sont naturellement beaucoup plus grandes si l'on pose $\sigma = 3,24 \cdot 10^{-7}$ pour rendre compte des estimations de Bauer. On trouve alors 4,29 microvolts par km. Il est toutefois très vraisemblable que la rotation du Globe engendre des forces électromotrices d'induction très supérieures à celles qui proviennent de la seule diminution du moment terrestre, supposé rigidement lié à la Planète.

La tâche essentielle est maintenant de généraliser l'hypothèse de base en introduisant la rotation de la Terre. Quel que soit le résultat des calculs, ils

seront l'occasion d'un joli problème mathématique. Ce problème mérite d'être résolu car sa solution peut être le point de départ de progrès importants en ce qui concerne l'origine du Magnétisme Terrestre, la distribution des courants telluriques, les conductibilités du noyau et de l'écorce, enfin l'histoire générale de la Terre.
