ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

HENRI ROURE

Sur une classe nouvelle de fonctions (Troisième mémoire)

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 9 (1945), p. 65-72

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1945_4_9__65_0>

SUR UNE CLASSE NOUVELLE DE FONCTIONS

(TROISIÈME MÉMOIRE)

par M. Henri ROURE

1. — Dans les deux mémoires antérieurs (*Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, années 1943 et 1945 et C. R., Vol. 214, page 783)*, nous avons démontré l'existence de fonctions à plusieurs séries de variables qui restent inaltérées lorsqu'on soumet chaque série aux substitutions d'un groupe linéaire portant sur ces mêmes variables, groupe qui transforme en elle-même une certaine forme quadratique à indéterminées conjuguées. Nous avons formé des séries qui représentent ces fonctions.

Nous avons démontré ensuite qu'un certain nombre de ces fonctions appartenant aux mêmes groupes, sont liées par une relation algébrique; que toute fonction de cette nature peut être exprimée rationnellement en fonction d'un nombre d'entre elles égal au nombre total des variables plus une, à condition qu'elles appartiennent aux mêmes groupes.

Nous avons démontré enfin que ces fonctions peuvent être obtenues par l'inversion des rapports de solutions communes aux équations d'un certain système d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. Nous avons proposé d'appeler ces fonctions ultra-automorphes.

Dans le présent mémoire, nous nous proposons de former des fonctions de même nature et analogues aux fonctions zétafuchsiennes.

2. — Soient deux groupes linéaires (G) et (G')

$$(G) \qquad \left(x, y;\ X = \frac{Ax + A'y + A''}{Cx + C'y + C''},\ Y = \frac{Bx + B'y + B''}{Cx + C'y + C''}\right)$$

$$(G') \qquad \left(z, t;\ Z = \frac{Dz + D't + D''}{Fz + F't + F''},\ T = \frac{Ez + E't + E''}{Fz + F't + F''}\right)$$

auxquels appartiennent des fonctions ultra-automorphes, et soit un groupe à n lettres que nous supposerons en isomorphisme holéodrique avec les groupes (G) et (G′), (G_1) $(u_1, u_2, \ldots, u_n\,;\, a^i_{11} u_1 + a^i_{12} u_2 + \ldots + a^i_{14} u_n \ldots\ldots$
$, a^i_{n1} u_1 + a^i_{n2} u_2 + \ldots\ldots + a^i_{nn} u_n)$

Si nous appelons X_i, Y_i ; Z_i, T_i, une substitution de chacun des groupes (G) et (G′) nous appellerons $\sum_i$ la substitution correspondante du groupe (G_1) et nous pourrons la représenter par le tableau de ses coefficients :

$$\begin{vmatrix} a^i_{11} & a^i_{12} & \ldots\ldots & a^i_{1n} \\ a^i_{21} & a^i_{22} & \ldots\ldots & a^i_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^i_{n1} & a^i_{n2} & \ldots\ldots & a^i_{nn} \end{vmatrix}$$

Si nous appelons A^i_{ii} le mineur correspondant à a^i_{ii} dans le déterminant précédent, nous savons que la substitution $\sum_i^{-1}$ sera représentée par le tableau

$$\begin{vmatrix} A^i_{11} & A^i_{12} & \ldots\ldots & A^i_{1n} \\ A^i_{21} & A^i_{22} & \ldots\ldots & A^i_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A^i_{n1} & A^i_{n2} & \ldots\ldots & A^i_{nn} \end{vmatrix}$$

Considérons maintenant n fonctions rationnelles :

$$R_i\,(x, y\,;\, z, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

et n séries :

$$H_i\,(x, y\,;\, z, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

Nous utiliserons les notations suivantes :

$$R_k\, \Sigma_i = a^i_{k1} R_1 + a^i_{k2} R_2 + \ldots\ldots + a^i_{kn} R_n$$
$$H_k\, \Sigma_i = a^i_{k1} H_1 + a^i_{k2} H_2 + \ldots\ldots + a^i_{k} \; H_n$$

Par analogie avec les fonctions thètaultra-automorphes nous pourrons écrire les séries H_i sous la forme :

$$\text{(A)} \qquad H_k\,(x, y, z, t) = \sum_i \Big[R_k\,(x_i, Y_i, Z_i, T_i) \Big]\, \Sigma_i^{-1} \left[\frac{D\,(X_i, Y_i, Z_i, T_i)}{D\,(x, y, z, t)} \right]^m$$

Nous supposerons tout d'abord que ces séries sont absolument convergentes et nous allons les étudier. Considérons successivement les substitutions X_i, Y_i, Z_i, T_i, et X_h, Y_h, Z_h, T_h, des groupes (G) et (G′) et appliquons-les successivement, nous pourrons écrire les séries (A) sous la forme :

$$\text{(B)} \quad H_k\,(x, y, z, t) = \sum_i \Big[R_k\,(X_\rho, Y_\rho, Z_\rho, T_\rho) \Big] \sum_i^{-1} \sum_h^{-1} \left[\frac{D\,(X_\rho, Y_\rho, Z_\rho, T_\rho)}{D\,(x, y, z, t)} \right]^m$$

avec la convention :

$$X_\rho = X_i\,(X_h),\; Y_\rho = Y_i\,(Y_h),\; Z_\rho = Z_i\,(Z_h),\; T_\rho = T_i\,(T_h)$$

Nous pourrons écrire aussi :

$$(C)\quad H_k(X_h, Y_h, Z_h, T_h) = \sum_i \Big[R_k(X_\varrho, Y_\varrho, Z_\varrho, T_\varrho)\Big]\sum_i^{-1} \left[\frac{D(X_\varrho, Y_\varrho, Z_\varrho, T_\varrho)}{D(X_h, Y_h, Z_h, T_h)}\right]^m$$

Nous pourrons écrire également :

$$(D)\quad \Big[H_k(x, y, z, t)\Big]\sum_h = \Big[R_k(X_\varrho, Y_\varrho, Z_\varrho, T_\varrho)\Big]\sum_i^{-1} \left[\frac{D(X_\varrho, Y_\varrho, Z_\varrho, T_\varrho)}{D(x, y, z, t)}\right]^m$$

La comparaison des formules (C) et (D) nous donnera enfin :

$$(E)\quad H_k(X_h, Y_h, Z_h, T_h) = \Big[H_k(x, y, z, t)\Big]\sum_k \left[\frac{D(x, y, z, t)}{D(X_h, Y_h, Z_h, T_h)}\right]^m$$

En revenant aux notations ordinaires, nous pourrons écrire la série (A) et la relation (E) sous la forme :

$$(F)\quad H_k(x, y, z, t) = \sum_i \sum_\nu A^i_{k\nu} R_\nu(X_i, Y_i, Z_i, T_i)\,(C_i x + C_i' y + C_i'')^{-3m}\,(F_i z + F_i' t + F_i'')^{-3m}$$

$$(H)\quad H_k(X_h, Y_h, Z_h, T_h) = \sum_\nu a^h_{k\nu} H_\nu(x, y, z, t)\,(C_i x + C_i' y + C_i'')^{3m}\quad F_i z + F_i' t + F_i'')^{3m}$$

3. — Nous devons maintenant étudier la convergence des séries H. Il nous suffira d'étudier la convergence absolue des deux séries :

$$A^i_{k\nu}\,(C_i x + C_i' y + C_i'')^{-3m}, \qquad A^i_{k\nu}\,(F_i z + F_i' t + F_i'')^{-3m}$$

D'ailleurs, étant données les conditions initiales imposées aux coefficients $C_i, C_i', C_i'', F_i, F_i', F_i''$, les deux séries seront convergentes ou divergentes en même temps.

Il y a plus. La série :

$$\sum_i A^i_{k\nu}\,(C_i x + C_i' y + C_i'')^{-3m}\quad (F_i z + F_i' t + F_i'')^{-3m}$$

peut être considérée comme le produit des deux séries :

$$\sum_i A^i_k\,(C_i x + C_i' y + C_i'')^{-3m}, \qquad \sum_i (F_i z + F_i' t + F_i'')^{-3m}$$

et nous savons que cette dernière série est convergente (*Annales de Toulouse année 1943, page 29*) pour $m \geqslant 2$. Nous sommes donc amenés à étudier seulement la série :

$$\sum_i A^i_{k,}\,C_i x + C_i' y + C_i'')^{-3m}$$

Pour cela, envisageons les substitutions fondamentales du groupe (G_1) et leurs inverses. Soit k le nombre des substitutions fondamentales, on aura $2\,kn^2$ coefficients, et soit M leur plus grand module.

Soit Σ_i une substitution quelconque du groupe (G_1) dont tous les coefficients soient inférieurs au nombre N : soit T une substitution fondamentale ou une des inverses. Les modules de tous les coefficients de la substitution $\Sigma_i T$ seront tous inférieurs à nMN. En effet, chacun des coefficients est une somme de n monômes et chaque monôme est le produit d'un coefficient de Σ_i par un coefficient de T.

Nous savons, d'autre part, qu'une substitution quelconque Σ_i du groupe (G_1) pourra toujours se mettre sous la forme :

$$\Sigma_i = T_1^{s_1} T_2^{s_2} \dots\dots T_j^{s_j}$$

les lettres T_1, T_2, ..., T_j, désignant chacune une substitution fondamentale ou une de leurs inverses, la même substitution pouvant se retrouver plusieurs fois dans la suite. Les exposants s_1, s_2, ..., s_j, sont des entiers positifs et nous savons qu'on appelle exposant de la substitution Σ_i la somme :

$$s = s_1 + s_2 + \dots\dots + s_j$$

Il résulte de cela que les modules des coefficients d'une substitution dont l'exposant est s sont inférieurs à :

$$(nM)^s$$

Le groupe (G_1) est en isomorphisme holcédrique avec les groupes (G) et (G′), l'exposant de la substitution Σ_i est donc le même que ceux des substitutions (X_i, Y_i) et (Z_i, T_i) des groupes (G) et (G′).

Considérons maintenant un point M_i transformé d'un point M et la distance Δ de M_i à l'origine, distance évaluée du point de vue de la géométrie non euclidienne, c'est-à-dire que, suivant la terminologie d'Henri Poincaré, Δ sera la L de la droite OM_i. Nous allons chercher une relation entre Δ et l'exposant s de la substitution transformant M en M_i. Supposons, pour simplifier, que l'origine et le point M soient tous deux intérieurs au domaine fondamental R_0. La droite OM_i traversera un certain nombre de domaines transformés R_0, R_1, ..., R_j et s sera égal au plus au nombre j de ces domaines. Il faut chercher la relation entre Δ et j.

Soit d'abord le domaine R_0. La L de tout arc de courbe joignant deux points de la frontière de ce domaine appartenant à deux faces différentes non adjacentes sera supérieure à une limite inférieure que nous appellerons l. Considérons maintenant un domaine R_1 adjacent à R_0 par une face et soit un arc de courbe joignant un point d'une face de R_0 à un point d'une face de R_1 en traversant la face commune. En supposant que ces trois faces n'aient ni point commun ni arête commune, la L d'un tel arc restera toujours supérieure à une certaine limite inférieure qne nous appellerons l'. Soit maintenant un arc de courbe coupant successivement diverses faces de plusieurs domaines R_i, toutes ces faces ayant une arête commune. Le nombre de ces faces sera fini et ne pourra pas dépasser une certaine limite supérieure k. La L de la droite OM_i sera donc toujours inférieure à :

$$\Delta\left(\frac{1}{l}+\frac{k}{l'}\right)$$

et l'on aura :

$$j<\Delta\left(\frac{1}{l}+\frac{k}{l'}\right)$$

ce qui pourra s'écrire :

$$j<\alpha\Delta \qquad \text{ou} \qquad s<\alpha\Delta$$

avec :

$$\alpha=\left(\frac{1}{l}+\frac{k}{l'}\right)$$

Reportons-nous maintenant à notre premier mémoire *(Annales de Toulouse, année 1943, pages 26 et suivantes)* nous voyons que nous avons trouvé que l'on a :

$$\text{mod.}\left(\frac{C_i}{C_i''}x+\frac{C_i'}{C_i''}y+1\right)<3$$

$$\text{Mod.}\left(\frac{C_i}{C_i''}x+\frac{C_i'}{C_i''}y+1\right)>\frac{1-(\text{mod}\,x+\text{mod}\,y)^2}{3}$$

et que si l'on écrit :

$$\text{mod}\,(C_i x+C_i' y+C_i'')=E\,(C_i'')$$

on aura :

$$\frac{1-(\text{mod}\,x+\text{mod}\,y)^2}{3}<E<3$$

avec :

$$\text{mod}\,x<1, \qquad \text{mod}\,y<1$$

c'est-à-dire que l'on aura :

$$\frac{1}{3}<\frac{1}{E}<\frac{3}{1-(\text{mod}\,x+\text{mod}\,y)^2}$$

Or, d'aprés ce que nous avons vu, on a :

$$\text{mod}\,A^i_{k'}<(nM)^s<(nM)^{\alpha\Delta}$$

d'où :

$$\text{mod}\left[A^i_{k'}(C_i x+C_i' y+C_i'')^{-3m}\right] < (nM)^{\alpha}\,\text{mod}\,(C_i x+C_i' y+C_i'')^{-3m}$$

ce qui peut s'écrire :

$$\text{mod}\left[A^i_{k'}(C_i x+C_i' y+C_i''^{-3m}\right]<(nM)^{\alpha\Delta}E^{-3m}C_i''|^{-3m}$$

et, d'après ce que nous avons vu plus haut, nous pourrons écrire :

$$\text{(L)}\ \frac{(nM)^{\alpha\Delta}}{3^{3m}|C_i''|^{3m}}<\text{Mod.}\left[A^i_{k'}(C_i x+C_i' y+C_i'')^{-3m}\right]<\frac{3^{3m}(nM)^{\alpha\Delta}|C_i''|^{-3m}}{\left[1-(\text{mod}\,x+\text{mod}\,y)^2\right]^{3m}}$$

Considérons maintenant l'intégrale quadruple :
étendue à un domaine δ_0 très petit et maintenant le point (x_0, y_0)

$$\int\int\int\int dx', dx'', dy', dy''$$

$$(x = x' + ix'', \quad y = y' + iy'').$$

nous voyons (page 28 du mémoire cité) que le terme général de la série étudiée correspondra au terme :

$$\frac{1}{|C_i''|^{3m}} \int\int\int\int \operatorname{mod} A^i_{k\nu} \frac{dx'\, dx''\, dy'\, dy''}{E^{3m}}$$

de la série des intégrales. D'après les limites données plus haut pour E, cette dernière intégrale sera comprise entre les limites :

$$\frac{(nM)^{\alpha\Delta}}{3^{3m}} \quad \text{et} \quad \frac{3^{3m}\,(nM)^{\alpha\Delta}}{\left[1-(\operatorname{mod}x + \operatorname{mod}y)^2\right]^{3m}}$$

qui sont finies et positives et dépendent de x_0 et y_0. Donc la série de terme général :

$$\frac{1}{|C_i''|^{3m}}$$

étendue à toute les substitutions du groupe est convergente pour $m \geqslant 2$. Donc la série de terme général :

$$\frac{\operatorname{mod} A^i_{k\nu}}{\operatorname{mod} (C_i x + C_i' y + C_i'')^{3m}}$$

est convergente pour $m \geqslant 2$, E étant limité comme il a été dit plus haut.

Comme, dans le mémoire cité, on démontre aussi convergence absolue de la série :

$$\sum_i (F_i z + F_i' t + E_i'')^{-3m}$$

pour $m \geqslant 2$, il en résulte la convergence absolue de la série :

$$\sum_i A^i_{k\nu} (C_i x + C_i' y + C_i'')^{-3m} \quad (F_i z + F_i' t + F_i'')^{-3m}$$

Si maintenant on suppose que les n fonctions $R_\kappa(x, y, z, t,)$ ne deviennent infinies qu'en un nombre limité de points singuliers dont nous désignerons l'ensemble par P, on peut trouver une limite supérieure de leurs modules. Les séries (F) sont donc absolument convergentes.

Soit maintenant une fonction thètaultra-automorphe $P(x, y, z, t,)$ appartenant aux groupes (G) et (G') et à l'entier m. On aura :

$$P(X_h, Y_h, Z_h, T_h) = (C_h x + C_h' y + C_h'')^{3m} \quad (F_h z + F_h' t + F_h'')^{3m} \quad P(x, y, z, t).$$

Si on divise les n fonctions H_k par la fonction P, on aura :

$$\frac{H_k(X_h, Y_h, Z_h, T_h)}{P(X_h, Y_h, Z_h, T_h)}=\frac{H_k(x, y, z, t)}{P(x, y, z, t)}=Z_k(x, y, z, t)$$

On obtient donc n fonctions Z_k jouissant de la propriété :

$$Z_k(X_h, Y_h, Z_h, T_h)=Z_k(x, y, z, t)$$

et de la propriété :

$$Z_k(X_h, Y_h, Z_h, T_h)=\sum_h a^h_{k\nu} Z_\nu(x, y, z, t)$$

Ce sont donc des fonctions analogues aux fonctions zétafuchsiennes et, pour cette raison, nous les appellerons fonctions zétaultra-automorphes.

Une conséquence découle de tout ceci : avec un système de groupes linéaires (G) et (G′) on peut former une infinité de systèmes de fonctions zétaultra-automorphes.

5. — Cherchons l'expression la plus générale d'un système de fonctions zétaultra-automorphes. Considérons $n+1$ fonctions ultra-automorphes Q_0, $Q_1, \ldots, Q_n$, et soit un système de n fonctions zétaultra-automorphes, Z_1, $Z_2, \ldots\ldots, Z_n$, considérons les expressions :

$$Q_0 Z_i + Q_1 D_{m_1 n_1 p_1 q_1} Z_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + Q_{n-1} D_{m_{n-1} n_{n-1} p_{n-1} q_{n-1}} Z_{n-1}$$

$$i=1, 2, \ldots\ldots, n$$

expressions dans lesquelles le symbole $D_{m_i n_i p_i q_i}$ est mis pour remplacer la dérivée partielle :

$$\frac{\partial^{m_i+n_i+p_i+q_i}}{\partial\xi^{m_i}\,\partial\eta^{n_i}\,\partial\xi'^{p_i}\,\partial\eta'^{q_i}}$$

Ces expressions formeront un système de fonctions zétaultra-automorphes. Soit U_i un pareil système et considérons les expressions :

$$U + Q_0 Z_1 + Q_1 D_{m_1 n_1 p_1 q_1} Z_1 + \ldots\ldots + Q_{n-1} D_{m_{n-1} n_{n-1} p_{n-1} q_{n-1}} Z_{n-1} = 0.$$

où : $i=1, 2, \ldots\ldots, n$

l'élimination de Q_0, $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$, nous donnera n équations de la forme :

$$\| Z^i, D_{m_1 n_1 p_1 q_1} Z^i, \ldots\ldots\ldots\ldots, U_{m_{n-2} n_{n-2} p_{n-2} q_{n-2}} Z_i, U_i \| = 0$$

obtenues en supprimant successivement chacune des n premières colonnes. Si x, y, z, t, subissent une substitution des groupes (G) et (G′), Z_i, $D_{m_i n_i p_i q_i}$ Z_i, U_i, subissent une substitution du groupe (G_1). Tous les mineurs relatifs aux éléments des déterminants obtenus sont multipliés par un même facteur qui est le déterminant de cette dernière substitution. Donc, le rapport de deux quelconques de ces mineurs reste inaltéré et ces rapports sont des fonctions ultra-automorphes, c'est-à-dire des fonctions rationnelles de ξ, η, ξ', η', où l'on a :

$$\xi = Q_1(x, y, z, t) \qquad \eta = Q_2(x, y, z, t)$$
$$\xi' = Q_3(x, y, z, t) \qquad \eta' = Q_4(x, y, z, t)$$

les fonctions Q_i étant des fonctions ultra-automorphes appartenant aux groupes (G) et (G') et au même nombre m, et étant, de ce fait, liées par une relation algébrique. L'expression cherchée sera donc :

$$T_i = Q_s Z_i + Q_1 D_{m_1, n_1, p_1, q_1} Z_i + \ldots + Q_{h-1} D_{m_{n-1} n_{n-1} p_{n-1} q_{n-1}} Z_i$$
$$i = 1, 2, \ldots, n$$

D'autre part, les $D_{m_n n_n p_n q_n} Z_i$ forment un système zétaultra-automorphe. On pourra donc former des équations linéaires aux dérivées partielles :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{m_n n_n p_n q_n} Z_i + Q_{n-1} D_{m_{n-1} n_{n-1} p_{n-1} q_{n-1}} Z_i + \ldots\ldots\ldots \\ \qquad + Q_1 D_{m_1 n_1 p_1 q_1} Z_i + Q_0 Z_i = 0 \end{array} \right.$$
$$i = 1, 2, \ldots, n$$

auxquelles devront satisfaire les fonctions Z_i, et dont les coefficients Q_0, Q_1, ..., Q_{n-1}, sont des fonctions rationnelles de $\xi, \eta, \xi'; \eta'$. Dans ces équations, on a :

$$m_n + n_n + p_n + q_n = n$$

les combinaisons $m_i + n_i + p_i + q_i$ dont les indices sont inférieurs à n ayant une valeur moindre que n.

On pourra donc former autant de systèmes de n équations que l'on pourra former de dérivées de tous les ordres inférieurs à n et égal à n avec les quatre variables ξ, η, ξ', η'. Tous ces systèmes admettent comme solutions communes les fonctions $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$. De plus, ces solutions jouissent des deux propriétés indiquées par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_k(X_h, Y_h, Z_h, T_h) = Z_k(x, y, z, t) \\ Z_k(X_h, Y_h, Z_h, T_h) = \sum_h a^h_{k\nu} \, Z \; (x, y, z, t \end{array} \right.$$