

JEAN COMBES

Sur quelques propriétés des fonctions algébroides

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4^e série, tome 12 (1948), p. 5-76

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1948_4_12__5_0

© Université Paul Sabatier, 1948, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANNALES
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,
POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS
ALGÈBROÏDES.

par Jean COMBES

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est l'étude de quelques propriétés des fonctions analytiques uniformes sur une surface de Riemann donnée, principalement dans le cas de la surface de Riemann d'une fonction algébroïde. Je précise dans ce cas l'expression des fonctions considérées.

L'étude de la distribution des valeurs conduit, comme pour les fonctions entières et méromorphes, à la considération de familles de fonctions. Les principaux résultats de la théorie des familles normales s'étendent aux familles de fonctions uniformes dans un même domaine non-simple, ou uniformes dans des domaines non-simples qui tendent vers un domaine limite; en les utilisant dans le cas de la surface de Riemann F d'une algébroïde entière qui satisfait à certaines conditions relatives à la distribution des points de ramification, j'établis pour les fonctions holomorphes sur F l'existence d'au plus une valeur exceptionnelle finie et l'existence de cercles de remplissage et de directions de Julia.

L'uniformisation des fonctions algébroïdes peut s'obtenir par des fonctions automorphes correspondant à des groupes fuchsoides (groupes de substitutions homographiques sur z , conservant le cercle $|z| < 1$, et dérivés d'une infinité de substitutions génératrices). Les propriétés des côtés et sommets des polygones rayonnés des groupes fuchsien s'étendent aux groupes fuchsoides, mais il existe en outre des sommets singuliers, points d'accumulation de sommets ordinaires : j'en distingue deux espèces dont l'une est toujours dénombrable et l'autre peut avoir la puissance du continu. Des exemples sont construits à l'aide d'une condition suffisante pour qu'un polygone à une infinité de côtés soit polygone générateur d'un groupe fuchsoides.

Pour l'uniformisation, j'emploie la méthode de représentation conforme sur le cercle $|z| < 1$ de la surface de recouvrement S^∞ obtenue à partir

d'une surface de Riemann donnée S en transformant S en une surface simplement connexe S' par un système convenable de coupures, et en reliant des exemplaires égaux à S' . Chaque exemplaire est représenté sur un polygone fuchsöide qui, dans la méthode de Koebe, n'a pas de sommets intérieurs au cercle $|z|=1$. Pour certaines surfaces de Riemann, j'emploie un autre système de coupures, qui conduit à des polygones fuchsöides admettant une infinité de sommets adventifs intérieurs au cercle $|z|=1$. Dans tous les cas, la représentation est faite par une fonction z , linéairement polymorphe sur S et qui peut ou bien ne pas admettre de points critiques sur S , ou bien admettre en des points donnés des points critiques algébriques ou logarithmiques correspondant à des sommets elliptiques ou paraboliques. Dans le premier cas les fonctions méromorphes sur S ne sont autres que les fonctions automorphes du groupe fuchsöide obtenu; dans le deuxième cas on doit adjoindre des conditions relatives au comportement des fonctions automorphes au voisinage des sommets paraboliques.

Des fonctions linéairement polymorphes du type précédent interviennent dans l'expression de la borne qui figure dans le théorème de Landau, pour le cas d'un ensemble quelconque de valeurs exceptionnelles. Je donne cette borne et j'applique la méthode du théorème de Landau aux fonctions non plus holomorphes mais algébroïdes dans un cercle.

J'établis ensuite par la méthode de l'uniformisation, sur certaines catégories de surfaces de Riemann, l'existence de fonctions holomorphes sauf en des points donnés, en nombre fini ou infini, qu'elles admettent pour pôles ou points essentiels isolés avec des parties principales données. Le résultat s'applique en particulier aux surfaces algébroïdes. Il nécessite l'emploi d'un lemme sur l'approximation des fonctions holomorphes dans un domaine plan par des fonctions holomorphes dans un domaine plus grand. De ce lemme résulte l'existence dans un domaine plan, dont la frontière comprend au moins un point, de fonctions méromorphes admettant des pôles et zéros donnés.

Je démontre enfin sur certaines classes de surfaces de Riemann, comprenant en particulier toutes les surfaces algébroïdes, l'existence d'intégrales abéliennes de première ou seconde espèce qui admettent des périodes données. Ce résultat avait été obtenu par Myrberg pour certaines surfaces algébroïdes entières. Je l'établis en considérant la surface de Riemann étudiée comme limite d'une suite de surfaces dont chacune est une portion de surface algébrique. De ce résultat découlent simplement l'existence de fonctions méromorphes sur une surface algébroïde quelconque et y admettant des pôles et zéros donnés, l'existence de solutions pour certaines équations entre fonctions méromorphes (par exemple : $A^2 - B^2 E = G$; E, G données, A et B inconnues), et une extension de la formule de Cauchy donnant la valeur d'une fonction holomorphe dans un domaine non-simple, limité par un nombre fini de courbes rectifiables, au moyen des valeurs sur la frontière.

CHAPITRE I

GÉNÉRALITÉS. — FAMILLES DE FONCTIONS ALGÈBROIDES

A. — Généralités.

1. — Fonctions analytiques uniformes sur une surface de Riemann :

Soit S une surface de Riemann quelconque étalée sur le plan complexe (x). Il est en général commode de la définir comme limite d'une suite de domaines S_n non simples, mais tels que chacun d'eux ait un nombre fini de feuillets, un ordre de connexion fini et soit limité par un nombre fini de courbes rectifiables, et que d'autre part $S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_n \subset \dots$; S est formée de points intérieurs qui sont des points simples ou des points de ramification d'ordre fini. On sait qu'il existe une infinité de fonctions analytiques $y(x)$ admettant S comme surface de Riemann (*cf.* par exemple Stoilow, [1], chap. II) ⁽¹⁾. Les fonctions analytiques $\mathcal{Y}(x)$, uniformes et régulières ⁽²⁾ sur S , forment une classe plus générale, puisqu'elles comprennent en particulier les fonctions méromorphes de x dans le domaine formé par les projections sur le plan (x) de tous les points de S .

L'étude d'une telle fonction au voisinage d'un point de la surface (appelé point analytique et désigné par un couple (x_0, y_0) ou simplement par M) se fait au moyen de la *variable d'uniformisation locale* τ définie comme suit (*cf.* par exemple Valiron, [2]), chap. II) :

$\tau = x - x_0$ en un point simple à distance finie;

$\tau = (x - x_0)^{1/\nu}$ en un point de ramification d'ordre $\nu - 1$ à distance finie, qui fait communiquer ν feuillets;

$\tau = \frac{1}{x}$ en un point simple à l'infini;

$\tau = \left(\frac{1}{x}\right)^{1/\nu}$ en un point de ramification d'ordre $\nu - 1$ à l'infini.

Au voisinage du point M_0 , \mathcal{Y} est développable en une série de la forme :

$$\mathcal{Y} = \sum_{i=n}^{+\infty} a_i \tau^i;$$

le point est dit pour \mathcal{Y} pôle d'ordre p , point ordinaire, ou zéro d'ordre p suivant que $n = -p$, $n = 0$, $n = p$ (p entier positif). Le résidu correspondant est par définition νa_{-n} pour un point à distance finie, $-\nu a_n$ pour un point à l'infini. \mathcal{Y} est dite holomorphe ou méromorphe sur S suivant qu'elle a ou n'a pas de pôles.

1. Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie qui termine le mémoire.

2. Les pôles ne sont pas regardés comme des points singuliers.

Si \mathcal{Y} est seulement holomorphe dans un voisinage de M_0 privé de M_0 , et si M_0 n'est pas un pôle, la série Σ comprend une infinité de termes à exposant négatif, et M_0 est un point singulier essentiel isolé. La définition du résidu est inchangée.

A l'aide des définitions ci-dessus, un certain nombre de propriétés valables pour les fonctions définies dans un domaine plan s'étendent aux fonctions définies dans un domaine appartenant à une surface de Riemann quelconque S . Leur démonstration fait intervenir soit des propriétés locales de la fonction, soit un découpage du domaine en portions planes. En particulier, soit un domaine D intérieur à l'un des S_n (donc à un nombre fini de feuilletés), limité par un nombre fini de courbes rectifiables C ; les lignes de passage seront supposées polygonales.

Si $\mathcal{Y}(x)$ est holomorphe dans D et continue dans $D + C$,

$$\int_C \mathcal{Y}(x) dx = 0;$$

si $\mathcal{Y}(x)$ est holomorphe dans D et sur C , le module maximum de \mathcal{Y} dans $D + C$ est atteint sur la frontière, à moins que \mathcal{Y} ne soit constante;

si $\mathcal{Y}(x)$ est holomorphe dans D sauf en un nombre fini de points qui sont des pôles ou des points singuliers essentiels isolés, et si \mathcal{Y} est continue dans $D + C$ privé des points singuliers,

$$\int_{C^+} \mathcal{Y}(x) dx = 2\pi i \times (\Sigma \text{ résidus});$$

si $\mathcal{Y}(x) = u + iv$ est holomorphe dans $D + C$ borné, $\int_{C^+} u dv > 0$ (à moins que \mathcal{Y} ne soit constante).

Remarquons que la dérivée d'une fonction $\mathcal{Y}(x)$ holomorphe dans un domaine n'est pas nécessairement holomorphe dans le domaine; mais le théorème sur le nombre des zéros s'étend, le résidu de $\frac{\mathcal{Y}'(x)}{\mathcal{Y}(x)}$ en un point de ramification qui est zéro de \mathcal{Y} étant encore égal à l'ordre de multiplicité du zéro.

Si, en effet $\mathcal{Y}(x) = a_n \tau^n + \dots$, $x - x_0 = \tau^\nu$, $a_n \neq 0$

$$\mathcal{Y}'(x) = (n a_n \tau^{n-1} + \dots) \frac{1}{\nu \tau^{\nu-1}}$$

$$\frac{\mathcal{Y}'(x)}{\mathcal{Y}(x)} = (n + \dots) \frac{1}{\nu \tau^\nu}$$

2. — Fonctions algébroides :

On appelle *fonction algébroïde* dans un domaine D du plan (x) une fonction $y(x)$ définie par une équation de la forme

$$(1) \quad \sum_{i=0}^{i=m} A_i(x) y^i = 0,$$

les A_i étant des fonctions de x holomorphes ou méromorphes dans D . Nous supposons que D est le plus grand domaine où cette propriété des A_i a lieu³. y est une fonction analytique multiforme de x dans D , à m branches, n'ayant comme singularités dans D que des points critiques algébriques.

Sa surface Riemann F est formée de m feuillets superposés, identiques à D , communiquant en des points de ramification d'ordre fini $\leq m - 1$, et réunis par des lignes de passage qu'on peut tracer d'une infinité de manières. Si x décrit un contour fermé C du plan (x) intérieur à D , deux branches de y ne peuvent se permuter que si C entoure la projection d'un point de ramification, ou bien si D n'est pas simplement connexe et si C entoure un point frontière de D (contour C non réductible à un point). Il y a donc deux familles de lignes de passage : les unes correspondent aux points de ramification et on peut supposer que chacune d'elles joint un point de ramification à la frontière de F ; les autres correspondent aux contours C non réductibles à des points : on supposera qu'elles joignent deux points frontière de F .

Pour préciser le tracé de ces lignes, dans le cas où D est d'ordre de connexion infini, il est commode de considérer D comme limite d'une suite de domaines D_n , d'ordre de connexion fini, limités par un nombre fini de courbes rectifiables et tels que $D_n \subset D_{n+1}$. On trace d'abord les lignes de passage sur la surface F_1 correspondant à D_1 . Passant à D_2 on prolonge les lignes déjà existantes et on en trace au besoin de nouvelles, mais sans modifier F_1 : on obtient F_2 . Et ainsi de suite :

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n$$

Il est permis de supposer que les lignes de passage sont polygonales et ne se rencontrent pas deux à deux. Remarquons qu'à priori, étant donnée l'équation (1), F peut comprendre plusieurs parties à moins de m feuillets et sans connexion entre elles.

Inversement, soit une surface F connexe, correspondant à un domaine D , à un nombre m et à une distribution de points de ramification quelconques, les projections de points de ramification sur le plan (x) n'ayant de points d'accumulation que sur la frontière de D , et les lignes de passage de première ou deuxième famille étant d'autre part tracées de manière quelconque; soit $y(x)$ une fonction admettant F comme surface de Riemann. $y(x)$ a m déterminations y_1, y_2, \dots, y_m . C'est une fonction algébroïde, les fonctions symétriques élémentaires des y_i étant des fonctions de x méromorphes dans D . L'équation vérifiée par y est de la forme (1), de degré m

3. Nous laissons de côté le cas où D est tout le plan (x), cas des fonctions algébriques.

et irréductibles ⁽⁴⁾, sinon (1) définirait plusieurs fonctions et la surface de Riemann correspondante ne pourrait être connexe.

Donc, à toute surface de Riemann connexe du type F précédent correspondent une infinité d'équations irréductibles de la forme (1). A une équation irréductible de la forme (1) correspond une surface de Riemann connexe F et une seule si on ne regarde pas comme distinctes deux surfaces ne différant que par le tracé des lignes de passage.

3. — Fonctions analytiques uniformes sur une surface de Riemann algébroïde F :

Toutes les fonctions uniformes et régulières sur F sont données par l'expression

$$(2) \quad \mathcal{Y} = \sum_{i=0}^{i=m-1} B_i(x) y^i,$$

y étant une fonction quelconque choisie parmi celles qui admettent F pour surface de Riemann, et les B_i étant méromorphes dans D.

En effet, si on pose pour chaque détermination \mathcal{Y}_p de \mathcal{Y}

$$\mathcal{Y}_p = B_0 + B_1 y_p + \dots + B_{m-1} y_p^{m-1},$$

les B_i , obtenus comme quotients de deux déterminants, sont des fonctions de x méromorphes dans D. Le déterminant du système ne peut être identiquement nul si (1) est irréductible, ce que nous supposons, puisque deux branches de y ne peuvent être constamment égales.

La forme (2) est valable pour les fonctions \mathcal{Y} non définies sur toute F, mais sur F privée de points isolés (qui sont pour \mathcal{Y} des points singuliers essentiels isolés). Les B_i sont alors des fonctions dont l'une au moins admet dans D un ou des points singuliers essentiels isolés.

Cette expression simple (2) a été obtenue en utilisant les deux hypothèses suivantes : le nombre de feuillets de F est fini; les m feuillets ont même projection sur le plan (x).

Sur une surface de Riemann algébroïde quelconque F, on peut déterminer une infinité de fonctions holomorphes admettant F comme surface de Riemann, ou seulement comme une partie de leur surface de Riemann ⁽⁵⁾. Par exemple, étant donnée z holomorphe sur F sauf en un seul point M_0 , projeté en x_0 , qui est pôle simple, $y = (x - x_0) z$ répond à la question. ⁽⁶⁾ Toutes les fonctions ainsi déterminées vérifient une équation du type (1) où on peut supposer les A holomorphes dans D et $A_m = 1$. L'une quelconque d'entre elles peut-être utilisée dans l'expression (2).

4. Son premier membre n'est pas décomposable en un produit d'expressions de même forme.

5. C'est suffisant pour la suite.

6. Voir Stoilow, référence citée. Le point à l'infini est supposé étranger à D.

Les fonctions définies par (2) avec des coefficients holomorphes dans D sont alors holomorphes sur F. Mais la réciproque n'est pas vraie en général. Elle l'est avec des hypothèses complémentaires pour y .

Théorème :

Si y , holomorphe sur F, ne prend pas la même valeur en deux points superposés de F, et si, au voisinage de tout point de ramification, y est de la forme $a_0 + a_1 \tau + \dots$ avec $a_1 \neq 0$, toutes les fonctions \mathcal{Y} holomorphes sur F sont obtenues par (2) avec des coefficients B holomorphes dans D.

$$\text{En effet : } B_i = \frac{\begin{vmatrix} 1 & y_1 & \dots & y_1^{i-1} & \mathcal{Y}_1 & y_1^{i+1} & \dots & y_1^{m-1} \\ 1 & y_2 & \dots & y_2^{i-1} & \mathcal{Y}_2 & y_2^{i+1} & \dots & y_2^{m-1} \\ \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & y_1 & \dots & y_1^{m-1} \\ 1 & y_2 & \dots & y_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

Δ , égal au signe près à $\prod_{j \neq k} (y_j - y_k)$, ne s'annule qu'aux points de ramification, par suite de l'hypothèse faite sur y . Soit x_0 sur lequel se projette un point de ramification M_0 d'ordre $\nu - 1$ (la démonstration serait la même si plusieurs points de ramification se projetaient en x_0). Il suffit de montrer que B_i , qui est une fonction méromorphe de x , reste borné quand x tend vers x_0 .

Soient par exemple y_1, y_2, \dots, y_ν les ν branches de y qui deviennent égales au point de ramification. Pour ces branches $y = a_0 + a_1 \tau + \dots$

$$\begin{aligned} \text{Donc pour une même valeur de } x, \quad & y_1 = a_0 + a_1 \tau + \dots \\ & y_2 = a_0 + a_1 e^{\frac{2i\pi}{\nu}} \tau + \dots \\ & \vdots \\ & y_\nu = a_0 + a_1 e^{\frac{2i\pi(\nu-1)}{\nu}} \tau + \dots; \end{aligned}$$

d'où résulte que Δ s'annule en x_0 comme $\tau^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}$. Les puissances de y admettent au voisinage de M_0 des développements de même forme, dont les coefficients b, c, \dots, f se calculeraient au moyen des a , et \mathcal{Y} admet un développement : $\alpha_0 + \alpha_1 \tau + \dots$;

d'où :

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} 1 & a_0 + a_1 \tau + \dots & \dots & c_0 + c_1 \tau + \dots & \dots & \alpha_0 + \alpha_1 \tau + \dots & \dots & f_0 + f_1 \tau + \dots \\ 1 & a_0 + a_1 e^{\frac{2i\pi}{\nu}} \tau + \dots & \dots & c_0 + c_1 e^{\frac{2i\pi}{\nu}} \tau + \dots & \dots & \alpha_0 + \alpha_1 e^{\frac{2i\pi}{\nu}} \tau + \dots & \dots & f_0 + f_1 e^{\frac{2i\pi}{\nu}} \tau + \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Retranchant la première ligne aux $\nu - 1$ suivantes, on fait apparaître dans chacune d'elles le facteur τ , donc dans $\Delta_i : \tau^{\nu-1}$. Après division par τ des termes de lignes 2, 3, ..., ν , il reste dans ces lignes des séries dont les pre-

miers termés sont proportionnels. En retranchant aux lignes 3, ..., ν les termes de la deuxième multipliés par un facteur convenable, on fait encore apparaître dans $\Delta_i : \tau^{\nu-2}$. Et ainsi de suite.

Δ_i est donc divisible par τ à la puissance :

$$\nu - 1 + \nu - 2 + \dots + 1 = \frac{\nu(\nu - 1)}{2}$$

et le théorème est établi.

Les conditions du théorème sont remplies par les algébroides de la

forme
$$y = \sqrt[m]{f(x)}, \quad f(x)$$

étant une fonction holomorphe dans D dont toutes les racines sont simples.

Il est facile de former des exemples où, les conditions du théorème étant en défaut, une fonction holomorphe \mathcal{Y} s'exprime avec des coefficients B non holomorphes. Un exemple banal s'obtient à partir d'une expression où les B sont holomorphes, en substituant $(x - x_0) y$ à y , x_0 étant choisi distinct des racines des B(x).

4. — Fonctions algébroides entières :

Lorsque le domaine D de définition d'une algébroïde y est tout le plan fini, on dit, suivant que y a ou n'a pas de pôles, que c'est une algébroïde *méromorphe* ou *entière*. Toute algébroïde entière est définie par une équation de la forme (1) où les A_i sont des fonctions entières et $A_m = 1$:

$$y^m + A_{m-1}(x) y^{m-1} + \dots + A_0(x) = 0.$$

On sait que si l'on désigne par $A(r)$ le maximum des quantités

$$\left| A_j(r e^{i\theta}) \right| \frac{1}{m-j} \quad \text{où } 0 < \theta \leq 2\pi \text{ et } j = 0, 1, \dots, m-1,$$

le maximum $M(r)$ de $|y|$ pour $|x| \leq r$, maximum qui est atteint sur $|x| = r$, vérifie :

$KA(r) < M(r) < K'A(r)$, K et K' étant des constantes dépendant seulement de m (Valiron, [3]); en particulier, $M(r)$ croît plus vite que toute puissance r^p . (S'il n'en était pas ainsi, les A_i se réduiraient tous à des polynômes et y serait une fonction algébrique).

F désignant dans la suite une surface de Riemann algébroïde entière (⁷), soit \mathcal{Y} une fonction holomorphe dans la portion G de F extérieure à $|x| = R$.

Supposons d'abord que G soit connexe et que deux quelconques de ses feuillets communiquent en une infinité de points de ramification. Si \mathcal{Y} n'a pas deux branches constamment identiques, \mathcal{Y} est une fonction algébroïde à m branches dans $R < |x| < +\infty$, définie par une équation de la forme :

$$\mathcal{Y}^m + A_{m-1} \mathcal{Y}^{m-1} + \dots + A_0 = 0,$$

7. Les surfaces de Riemann correspondant aux algébroides entières ne sont pas distinctes de celles qui correspondent aux algébroides méromorphes.

où les A sont holomorphes pour $R < |x| < +\infty$; \mathcal{Y} ayant une infinité de points critiques algébriques, l'un au moins des A a une singularité essentielle à l'infini et $|\mathcal{Y}|$ croît plus vite que toute puissance r^p . Si \mathcal{Y} a des branches identiques, mais au moins deux branches distinctes⁽⁸⁾, \mathcal{Y} vérifie encore une équation du type précédent mais de degré $< m$ et la conclusion est la même. Si les m branches sont constamment identiques, \mathcal{Y} se réduit à $B_0(x)$, et $|\mathcal{Y}|$ croît plus vite que toute puissance r^p , croît comme une puissance r^p ou reste borné suivant que B_0 a à l'infini un point essentiel, un pôle ou un point d'holomorphie.

Dans le cas où la portion G de F extérieure à $|x| = R$ n'est pas connexe, elle est formée d'assemblages de un ou plusieurs feuillets, et on a à considérer plusieurs fonctions \mathcal{Y} sans lien entre elles auxquelles on applique les résultats précédents. A une portion connexe à plusieurs feuillets, dont deux quelconques communiquent en une infinité de points de ramification, correspond une fonction algébroïde qui croît plus vite que toute puissance r^p ou une fonction uniforme de x . Mais à une portion connexe dont certains feuillets ne communiquent qu'en un nombre fini de points de ramification, ou sont réunis simplement par des lignes de passage, peut correspondre une fonction algébrique de x . A un feuillet isolé correspond une fonction uniforme de x .

Le théorème sur la croissance du module maximum des fonctions algébroides entières ne s'étend donc pas toujours aux fonctions holomorphes sur F ou sur G . Dans la suite nous placerons dans le cas où la portion G de F extérieure au cercle $|x| = R$ est connexe et où deux feuillets quelconques de F (ou G) communiquent en une infinité de points de ramification.

Dans ce cas :

Toute fonction holomorphe sur F a un module maximum $M(r)$ qui croît plus vite que toute puissance r^p ou se réduit à un polynôme $P(x)$; \mathcal{Y} étant une fonction holomorphe sur G et $M(r)$ son module maximum sur $|x| = r$, $M(r)$ croît plus vite que toute puissance r^p , ou bien \mathcal{Y} se réduit à $B_0(x)$, holomorphe pour $R < |x| < +\infty$, et méromorphe ou holomorphe à l'infini.

Ce dernier résultat s'étend évidemment au cas où F n'est plus la surface de Riemann d'une algébroïde entière, mais seulement d'une algébroïde holomorphe (ou méromorphe) à l'extérieur d'un cercle.

Remarquons enfin que, F étant une surface algébroïde entière quelconque, même avec un nombre fini de points de ramification, toute fonction \mathcal{Y}

8. Par exemple $\mathcal{Y} = B_0 + B_2 y^2$ pour $y = \sqrt[4]{f(x)}$, B_0 , B_2 et f étant des fonctions entières.

holomorphe et bornée sur F se réduit à une constante : les fonctions symétriques élémentaires des \mathcal{Y}_i sont en effet constantes.

B. — *Familles de fonctions uniformes dans un domaine non simple.*

5. — On peut étendre aux fonctions définies sur une surface de Riemann quelconque S les notions de continuité uniforme, d'égalité de continuité... Il est nécessaire pour cela d'introduire la *distance* (M, N) de deux points quelconques M et N de S .

La distance (M, N) est par définition la borne inférieure des longueurs des lignes rectifiables de S joignant M et N .

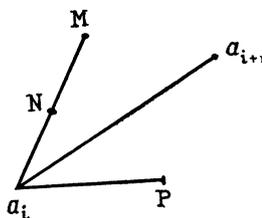


Fig.1

Sur la figure 1, M, N, P sont des points d'un même feuillet, fendu suivant a_i, a_{i+1}, a_i et a_{i+1} étant des points de ramification.

$$(M, N) = MN; (N, P) = Na_i + a_iP.$$

(M, N) ainsi définie est bien une distance : (M, N) est ≥ 0 ; (M, N) n'est nul que si M est confondu avec N ; et (M, N) vérifie l'inégalité du triangle $(M, Q) \leq (M, P) + (P, Q)$.

Le *voisinage* η d'un point M est par définition l'ensemble des points de S situés à distance de $M < \eta$. Ces points forment un domaine qui contient un cercle ordinaire de centre M si M est point simple, un cercle multiple si M est point de ramification. Ce voisinage sera appelé « *cercle* » de centre M et de rayon η . Conservant les définitions habituelles, on voit aisément que toute fonction continue sur un continu borné, intérieur à S , y est uniformément continue (car la démonstration de ce théorème ne fait intervenir que l'inégalité du triangle et le fait que le continu peut être recouvert par un nombre fini de « cercles »).

De même, D étant un domaine borné, intérieur à l'un des S_n ⁽⁹⁾, limité par un nombre fini de courbes rectifiables C :

— une limite uniforme de fonctions continues dans $D + C$ est continue dans $D + C$;

— si une suite \mathcal{Y}_n de fonctions holomorphes dans D et continues dans $D + C$ converge uniformément sur C , la suite \mathcal{Y}_n converge uniformément dans $D + C$ vers une limite \mathcal{Y} qui est holomorphe dans D .

9. S est toujours définie comme $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

La continuité (ou l'holomorphie) en un point M de D se démontre en considérant un voisinage assez petit de M , qui est un cercle ordinaire ou un cercle à plusieurs feuillets.

Remarquons que la convergence uniforme de la suite des dérivées d'ordre p des \mathcal{Y}_n vers la dérivée d'ordre p de \mathcal{Y} n'est vraie qu'après suppression dans D d'un voisinage arbitrairement petit de chacun des points de ramification qu'il contient.

6. — Familles normales :

Les notions et principaux résultats valables pour des domaines plans (Montel, [1]), s'appliquent encore pour un domaine D non simple. Nous n'utiliserons qu'un domaine D borné intérieur à l'un des S_n .

Pour qu'une famille de fonctions holomorphes (ou méromorphes) dans D soit normale dans D , il faut et suffit qu'elle soit normale en tout point M de D (c'est-à-dire dans un cercle de centre M , cercle ordinaire si M est point simple, cercle à ν feuillets si M est point de ramification d'ordre $\nu - 1$: on pose dans ce dernier cas $x - x_M = \tau^\nu$).

Et on a deux critères principaux de normalité, dont la validité résulte d'une étude locale :

a) Si des fonctions holomorphes dans D ont leurs modules bornés dans leur ensemble à l'intérieur de D , elles forment une famille normale dans D .

Réciproquement, si les fonctions holomorphes d'une famille normale dans D sont bornées en module en un point de D , elles sont bornées dans leur ensemble à l'intérieur de D .

Elles sont aussi également continues à l'intérieur de D .

b) Etant données des fonctions méromorphes dans D , si aucune d'elles ne prend trois valeurs distinctes (l'une des valeurs pouvant être l'infini), elles forment une famille normale.

7. — Application :

La méthode des familles normales permet d'obtenir des renseignements sur la distribution des valeurs des fonctions entières ou méromorphes, ou des fonctions méromorphes au voisinage d'un point qui est point singulier essentiel. On peut l'étendre dans certains cas à l'étude des valeurs d'une fonction \mathcal{Y} uniforme sur une surface de Riemann. Etant donnée une infinité de domaines $D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$ de S , représentables conformément sur D_1 , l'étude de \mathcal{Y} dans la suite de domaines se ramène à l'étude dans D_1 d'une suite de fonctions. Nous étudierons le cas simple de la surface de Riemann F de la fonction y définie par $y^m = f(x)$, $f(x)$ étant une fonction entière.

Théorème I : *Si parmi les zéros $a_1, a_2, \dots, a_n \dots$ de $f(x)$, rangés par ordre de module non décroissant ⁽¹⁰⁾, il existe une suite a_{n_i} telle que $\left| \frac{a_{n_i+1}}{a_{n_i}} \right| > 1 + \alpha$ ($\alpha > 0$) et que n_i soit premier avec m , les fonctions \mathcal{Y} holomorphes sur F et non constantes admettent au plus une valeur exceptionnelle finie.*

En effet, soit C_{n_i} une couronne de centre O , de rayons $R_{n_i} > |a_{n_i}|$ et

$$R'_{n_i} = \lambda R_{n_i} < |a_{n_i+1}| \quad ; \quad \lambda = Cte > 1.$$

n_i étant premier avec m , un tour sur une circonférence de centre O intérieure à la couronne fait passer d'une branche de y à une autre, et on ne revient à la branche initiale de y qu'après m tours. Comme domaine d'uniformité de y dans C_{n_i} on peut donc prendre un domaine C'_{n_i} , formé de m couronnes identiques à C_{n_i} , fendues et reliées suivant des lignes de passage qui se projettent sur un rayon quelconque (par exemple sur l'axe réel). Une homothétie convenable ramène C'_{n_i} sur C'_{n_i} .

Si \mathcal{Y} admettait deux valeurs exceptionnelles α et β , les fonctions correspondantes \mathcal{Y}_{n_i} dans C'_{n_i} formeraient une famille normale, ce qui est impossible : car si une suite de \mathcal{Y}_{n_i} convergerait vers une fonction limite qui ne soit pas la constante infinie, \mathcal{Y} serait bornée dans une infinité de couronnes, donc constante; et si une suite de \mathcal{Y}_{n_i} convergerait vers l'infini, on serait conduit à la même contradiction en considérant $\frac{1}{\mathcal{Y} - \alpha}$ qui est aussi holomorphe sur F ⁽¹¹⁾.

On a un théorème analogue pour les fonctions définies sur F seulement à l'extérieur de $|x| = R$:

Théorème II : *Dans les hypothèses du théorème précédent, une fonction holomorphe sur F pour $|x| \geq R$ prend, pour $|x| \geq R$, une infinité de fois toute valeur finie sauf une au plus, ou se réduit à une fonction holomorphe de x pour $R \leq |x| < \infty$, méromorphe ou holomorphe à l'infini.*

Si on suppose les fonctions méromorphes, le nombre de valeurs exceptionnelles peut être deux, mais l'une des valeurs peut être infinie.

Remarque : Dans le théorème II on peut supposer que la surface de Riemann considérée est celle de la fonction y définie par $y^m = f(x)$, f étant seulement holomorphe pour $R' < |x| < \infty$. La condition « n_i premier avec m » doit être alors remplacée par la suivante, à laquelle elle équivalait ci-dessus : les portions de surface de Riemann projetées sur les C_{n_i} sont connexes.

10. Nous supposons, pour fixer les idées, que f a une infinité de zéros, tous simples. Cette hypothèse n'est pas essentielle.

11. Nous avons supposé que les valeurs exceptionnelles α et β n'étaient jamais prises. Si on suppose que chacune d'elles peut être prise un nombre fini de fois, on trouve que \mathcal{Y} se réduit à une fonction uniforme de x qui est un polynôme.

Cette hypothèse de connexité a été introduite pour que l'on puisse affirmer que les m branches de la fonction limite sont bornées, ou que les m branches tendent vers l'infini. Elle n'est plus nécessaire si on se limite à l'étude de fonctions \mathcal{Y} de la forme $\mathcal{Y} = B(x) y^p$ puisque les différentes branches de \mathcal{Y} sont alors dans un rapport constant.

Appliquant ceci à la fonction $y = \sqrt{f(x)}$, où $f(x)$ est holomorphe pour $R \leq |x| < \infty$, a une singularité essentielle à l'infini, et admet une valeur exceptionnelle finie $\neq 0$, on voit que y admet deux valeurs exceptionnelles finies et que par suite les zéros a_n de f vérifient $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$. C'est un résultat connu, que l'on pourrait obtenir directement en considérant, dans le plan (x) , des couronnes d'épaisseur relative constante ne contenant pas de zéro de f .

Si on suppose seulement, dans le théorème I (ou II), l'existence de couronnes C_{n_i} d'épaisseur relative constante ne contenant pas de zéros, mais telles que les portions correspondantes de surface de Riemann peuvent ne pas être connexes, on extrait de la suite C_{n_i} une suite $C_{n'_i}$ pour laquelle les portions de surface de Riemann sont formées du même nombre p de parties connexes, sans lien entre elles, se transformant par homothétie par rapport au centre des couronnes lorsque l'indice n' , varie. C'est évidemment possible puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de manières de former une couronne à m feuillettes comme réunion de couronnes à moins de m feuillettes. Les lignes de passage sont toujours des segments projetés sur l'axe réel. Soit $C_{n'_i}$ une suite partielle conduisant à la plus petite valeur possible p . On a le théorème :

Théorème III : *Le nombre de valeurs exceptionnelles finies des fonctions holomorphes sur F et non constantes est au plus égal au plus grand des nombres 1 et $p - 1$.*

Le théorème est démontré pour $p = 1$.

Supposons $p > 1$ et soient $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ p valeurs exceptionnelles. Aux valeurs de \mathcal{Y} dans $C_{n'_i}$ correspondent dans $C_{n'_i}$ les valeurs de p fonctions, chacune des p familles ainsi définies étant une famille normale. Si on a une suite partielle donnant lieu dans les p familles à une fonction limite holomorphe; on voit que \mathcal{Y} se réduit nécessairement à une constante. Si dans l'une au moins des familles la fonction limite est la constante infinie, on substitue à \mathcal{Y} l'une des fonctions $\frac{1}{\mathcal{Y} - \alpha}, \frac{1}{\mathcal{Y} - \beta}, \frac{1}{\mathcal{Y} - \lambda}$ et on se ramène au cas précédent.

Fonctions méromorphes à valeur exceptionnelle.

La considération de familles normales dans un domaine non simple fournit aisément une propriété des fonctions $f(x)$ méromorphes pour

$R \leq |x| < \infty$, ayant une singularité essentielle à l'infini, et admettant une valeur exceptionnelle γ .

A l'aide d'une transformation homographique, on peut toujours supposer $\gamma = \infty$.

Soient a_n les racines de $f(x) - \alpha = 0$ ($|a_1| \leq |a_2| \leq \dots$) et soit une famille de domaines D_n satisfaisant aux conditions suivantes : D_n contient a_n et ne contient aucun point où $f(x) = \beta$ ($\beta \neq \alpha$ et $\beta \neq \gamma$) ; les D_n sont semblables et a_n semblablement placé dans les D_n . D_n sera par exemple un cercle de centre a_n , de rayon R_n , R_n étant soit le rayon maximum pour lequel D_n a la propriété requise, soit inférieur à ce maximum. Lorsque c'est possible on pourra prendre R_n constant.

La fonction $\mathcal{Y} = \sqrt{f(x) - \alpha}$ est holomorphe dans chacun des domaines D'_n formés par la réunion de deux feuillettes égaux à D_n , fendus suivant un segment de droite issu de a_n parallèle à l'axe réel, et reliés convenablement. Dans D'_n , \mathcal{Y} admet comme valeurs exceptionnelles les deux déterminations de $\sqrt{\beta - \alpha}$; d'autre part $\mathcal{Y}(a_n) = 0$.

En ramenant, par une transformation linéaire sur x , les domaines D'_n sur D'_1 , on obtient dans D'_1 une famille normale \mathcal{Y}_n dont les fonctions limites ne peuvent être que des fonctions holomorphes nulles en a_1 ou la constante 0. Et la même propriété est vraie pour les fonctions f_n dans D_1 qui correspondent à $f(x)$ dans D_n : en des points homologues d'une suite partielle de D_n , f prend des valeurs qui tendent uniformément vers une limite.

Un exemple évident est fourni par $f(x) = e^x$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, R_n constant quelconque : en des points homologues, f reprend la même valeur.

C. — Familles de fonctions uniformes dans des domaines qui admettent un domaine limite.

8. — L'étude faite ci-dessus des familles de fonctions uniformes dans un même domaine non simple peut être étendue aux familles de fonctions dont les domaines d'uniformité tendent vers un domaine limite. Nous nous bornerons au cas de fonctions algébroides.

Etant donné une famille d'algébroides à m branches dans un domaine D du plan (x), nous restreindrons la notion de convergence d'une suite \mathcal{Y}_n en imposant :

- a) les m valeurs prises en chaque point de D par les \mathcal{Y}_n tendent vers des valeurs limites ;
- b) les domaines à m feuillettes F_n sur lesquels les \mathcal{Y}_n sont uniformes tendent vers un domaine limite.

Pour définir la convergence des m valeurs prises en un point vers des valeurs limites, on pourrait utiliser les coefficients des équations qui définissent les \mathcal{Y}_n (Montel, [1]).

On peut aussi donner une définition directe.

Définition : Soient deux systèmes de m nombres u (u_1, u_2, \dots, u_m) et v (v_1, v_2, \dots, v_m), l'ordre des u_i ou v_j n'important pas. La *distance* (u, v) est par définition la somme $(u, v) = \sum |u_i - v_j|$ correspondant à l'association d'indices (ou l'une des associations d'indices) pour laquelle le second membre a sa valeur minimum. Chaque u_i et chaque v_j figurent au second membre une fois et une seule.

(u, v) est bien une distance : (u, v) est ≥ 0 et n'est nul que si les u_i sont identiques aux v_j à l'ordre près. D'autre part l'inégalité du triangle est satisfaite :

$$(u, v) + (v, w) = \sum |u_i - v_j| + \sum |v_j - w_k| \geq \sum |u_i - w_k| \geq (u, w).$$

Et on peut définir la continuité d'une fonction multiforme à m branches, l'égalité et l'uniforme continuité, la convergence, la convergence uniforme... Pour l'étude d'algèbroïdes méromorphes, on prendrait sur la sphère de Riemann des distances cordales $|u_i - v_j|$.

Quant à la *convergence des domaines* F_n il importe de remarquer que F_n n'est pas complètement déterminé par la connaissance de D et \mathcal{Y}_n : les lignes de passage peuvent être tracées d'une infinité de manières. Nous précisons la construction de F_n et c'est ce domaine précisé qui tendra vers une limite F . D sera supposé borné. Pour simplifier l'exposé nous supposerons qu'il est d'ordre de connexion fini et que sa frontière est formée d'un nombre fini d'arcs analytiques. Cette hypothèse non essentielle est suffisante pour les applications; si elle n'était pas satisfaite, il suffirait de considérer D comme limite d'une suite de domaines vérifiant les conditions indiquées.

Soient a_p^n les projections des points de ramification de F_n sur le plan (x). Les lignes de passage de première famille (issues des points de ramification) seront des segments de droite joignant les points de ramification à la frontière de F_n : on peut par exemple supposer que ces segments se projettent sur les droites $O a_p^n$, et dans le prolongement de $O a_p^n$, O étant choisi de manière que deux projections de points de ramification ne puissent être alignées avec lui, ce qui est loisible puisque les a_p^n sont en infinité dénombrable au plus. Dans le cas où certaines parties de la frontière se réduiraient à des segments de droite, on supposera aussi que O ne se trouve sur aucune des droites supports de ces segments. Il arrivera dans la suite que, lorsque $n \rightarrow \infty$, certains a_p^n tendent vers des points frontière bien déterminés de D : pour de tels points, au moins à partir d'une certaine valeur de n , nous prendrons pour lignes de

passage des segments projetés non plus sur Oa_r^n , mais sur le plus court segment issu de a_p^n et joignant a_p^n à la frontière de D , de sorte que les longueurs des lignes de passage correspondantes $\rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Le nombre des lignes de passage de deuxième famille, correspondant à des contours C de D non réductibles à des points, admet une borne supérieure indépendante de n ; ces lignes seront des segments de droite joignant deux points frontière de F_n , et on peut supposer que les lignes joignant deux points projetés sur deux courbes frontière C_i, C_j aient, pour tout n , même projection sur le plan (x) .

Pour que $F_n \rightarrow F$, domaine de même nature, il faut et suffit que les a_p^n tendent, quand $n \rightarrow \infty$, vers les a_p , projections des points de ramification de F , ou vers la frontière de D , que, pour chaque a_p^n qui tend vers un a_p , la liaison des feuillets de F_n autour de a_p^n soit la même à partir d'un certain rang que la liaison des feuillets de F autour de a_p , et enfin que, à partir d'un certain rang, les lignes de passage de deuxième famille associent dans F_n et dans F les mêmes feuillets, et de la même manière.

9. — Théorème : *Les fonctions algébroides à m branches, méromorphes dans D , n'y prenant pas trois valeurs distinctes a, b, c , et dont les points critiques algébriques dans le plan (x) sont à distance $> \delta > 0$ les uns des autres, forment une famille normale dans D .*

De toute suite de fonctions de la famille on peut extraire une suite de fonctions auxquelles correspondent des domaines d'uniformité F_n qui tendent vers un domaine limite F . Pour chaque point d'un domaine complètement intérieur à D , les valeurs des fonctions de la suite extraite tendent uniformément vers les valeurs d'une fonction limite, qui est uniforme et méromorphe dans le domaine limite. C'est donc une algébroïde à m branches, qui peut se réduire à une constante finie ou infinie, ou à plusieurs constantes si F n'est pas connexe.

En effet, étant donnée une suite de fonctions \mathcal{Y}_n , on en déduit par extractions successives une suite \mathcal{Y}_{n_p} telle que F_{n_p} tende vers un domaine limite F : par une première extraction on impose qu'un des points de ramification faisant communiquer les deux feuillets supérieurs (s'il y en a) tende vers un point limite. Et on renouvelle l'opération avec les différents groupes de feuillets. Cela nécessite un nombre fini d'extractions puisqu'il y a un nombre borné de points de ramification dans chaque F_n . On impose ensuite que la liaison des feuillets autour de chaque point de ramification dont la projection tend vers un point intérieur à D , et que la liaison due aux lignes de passage de deuxième famille, soient les mêmes pour tous les domaines de la suite, ce qui est possible puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de tels modes de liaison.

Ayant obtenu une suite de fonctions \mathcal{Y}_{n_p} , pour lesquelles $F_{n_p} \rightarrow F$, on fait une étude locale. Dans un voisinage assez petit d'un point x qui n'est

pas projection d'un point de ramification de F , les m branches de $\mathcal{Y}_{n,p}$, à partir d'un certain rang, sont m fonctions méromorphes de x et chacune admet trois valeurs exceptionnelles : on peut, par extractions successives, obtenir une nouvelle suite telle que chacune des branches tende uniformément vers une fonction limite. Soit a_i , limite de points a_i^n qui sont des projections de points de ramification faisant communiquer par exemple les deux feuillets supérieurs. Posant $x - a_i^n = t^2$, on voit que les deux branches correspondantes de $\mathcal{Y}_{n,p}$ sont données par une fonction $f_{n,p}$, méromorphe en t dans un certain cercle de centre $t=0$, où elle admet trois valeurs exceptionnelles. Les $f_{n,p}$ forment dans ce cercle une famille normale. D'autre part $x - a_i^n$ tend uniformément vers $x - a_i$. Une nouvelle extraction permet donc d'obtenir que, dans un certain cercle de centre a_i , les deux branches de $\mathcal{Y}_{n,p}$ correspondant aux deux feuillets supérieurs tendent uniformément vers les valeurs d'une fonction uniforme en $\sqrt{x - a_i}$. On opère de même, au voisinage de a_i , pour les autres branches de $\mathcal{Y}_{n,p}$.

Il ne reste qu'à appliquer le procédé diagonal.

Remarque : Si les portions des F_n projetées sur un même domaine Δ complètement intérieur à D sont connexes, F est évidemment connexe. Dans ce cas on est assuré que, si la fonction limite est constante, la limite est pour les m branches la même constante finie ou infinie; ou bien, dans le cas de fonctions holomorphes, la limite est une fonction algèbroïde holomorphe, dont les m branches sont bornées à l'intérieur de D .

10. — Application :

Théorème : Soit une algèbroïde entière dont la surface de Riemann F a la propriété suivante : il existe une suite infinie de couronnes C_n ($\sigma^{n,p} R_1, \sigma^{n,p} R_2$) avec $R_2 > R_1$, $\sigma > 1$, dans lesquelles les points de ramification se projettent sur le plan (x) à des distances mutuelles $\geq \sigma^{n,p} \delta$ ($\delta > 0$), et telles que les portions de surface de Riemann correspondant aux couronnes ($\sigma^{n,p} R'_1, \sigma^{n,p} R'_2$) soient connexes ($R_1 < R'_1 < R'_2 < R_2$). Dans ces conditions, toute fonction \mathcal{Y} , holomorphe sur F admet au plus une valeur exceptionnelle finie, ou se réduit à une constante⁽¹²⁾.

On ramène en effet par homothétie au cas d'une seule couronne C_n , et on applique le théorème précédent.

S'il y avait deux valeurs exceptionnelles a, b , on aurait dans C_n une famille normale. S'il existait une fonction limite qui ne soit pas la constante infinie, \mathcal{Y} serait bornée dans tout le plan, ce qui est impossible si \mathcal{Y}

12. On traiterait évidemment comme plus haut le cas où les valeurs exceptionnelles peuvent être prises un nombre fini de fois, le cas des fonctions méromorphes, le cas des fonctions définies sur F seulement pour $|x| \geq R$, et le cas où les portions de surface de Riemann ne sont pas connexes.

n'est pas constant. Si toutes les limites étaient l'infini, on considérerait $\frac{1}{\mathcal{Y}-a}$.

Les cas de 0 et 1 valeur exceptionnelle peuvent effectivement se présenter.

Un exemple simple de fonction sans valeur exceptionnelle est fourni par $y = \sqrt{f(x)}$, $f(x)$ étant une fonction entière sans valeur exceptionnelle dont les zéros sont tels que la surface de Riemann ait les propriétés requises.

Un exemple de fonction holomorphe sur F et n'y prenant pas une valeur que nous supposons être 0 est $e^{\mathcal{Y}}$, \mathcal{Y} désignant une fonction quelconque holomorphe sur F . Nous verrons plus loin que l'expression $e^{\mathcal{Y}}$ ne donne pas toutes les fonctions sans zéros sur F : l'expression générale est e^I , I désignant une intégrale abélienne de première espèce dont toutes les périodes sont multiples de $2\pi i$.

Cercles de remplissage : Dans les hypothèses du théorème précédent, la famille \mathcal{Y}_{n_p} que l'on doit étudier dans C_{n_1} peut-elle être normale?

Voici deux cas où l'on peut affirmer qu'elle ne l'est pas :

- a) \mathcal{Y} admet une valeur exceptionnelle a : il suffit pour le voir de reprendre la démonstration précédente.
- b) l'ensemble des couronnes C_{n_p} recouvre tout le plan (x) : dans ce cas, puisque des fonctions limites bornées de la suite \mathcal{Y}_{n_p} conduisent à contradiction, toutes les fonctions limites devraient être la constante infinie. Ceci exigerait que \mathcal{Y}_{n_p} tende uniformément vers l'infini avec n_p , c'est-à-dire que \mathcal{Y} tende uniformément vers l'infini avec x . Cette hypothèse est à rejeter si \mathcal{Y} ne se réduit pas à un polynôme en x .

Dans ces deux cas il existe au moins un point de C_{n_1} où la famille n'est pas normale, et par suite des *cercles de remplissage*, vus de l'origine sous un angle constant (arbitrairement petit) dans l'ensemble desquels \mathcal{Y} prend toute valeur sauf une au plus. Il en résulte l'existence de *directions de Julia*.

Il est à remarquer que les propriétés précédentes des fonctions \mathcal{Y} ne dépendent que de propriétés de la surface de Riemann F .

Elles s'appliquent aussi aux fonctions définies sur une surface de Riemann S qui admet localement les propriétés de F , c'est-à-dire où il existe m disques superposés communiquant entre eux par une infinité de points de ramification d'ordre fini $\leq m-1$, qui ne s'accroissent qu'au centre de chacun des disques. Le centre de chaque disque est point frontière de la surface de Riemann. Il suffit pour se ramener au cas précédent de faire une transformation homographique sur x envoyant le centre des disques à l'infini. Si les propriétés requises de distribution des points de ramification et de connexion sont remplies, toute fonction \mathcal{Y} méromorphe sur S a au plus deux valeurs exceptionnelles (dont l'une peut être la

valeur infinie) ou se réduit sur les m disques à une même fonction uniforme de x .

Notons enfin qu'on pourrait aisément étendre au cas des domaines non simples certains résultats de la théorie des familles *quasi-normales*.



CHAPITRE II

GROUPES FUCHSOIDES. — FONCTIONS AUTOMORPHES

A. — *Groupes fuchsoides.*

L'uniformisation des fonction algébriques peut s'obtenir au moyen de fonctions fuchsiennes. Pour les fonctions algébroides la méthode est susceptible d'extension, mais nécessite l'emploi de fonctions fuchsoides, correspondant à des groupes dérivés d'une infinité de substitutions génératrices. Nous allons d'abord étudier quelques propriétés de ces groupes. Certaines propriétés des groupes fuchsien subsisteront sans changement, les démonstrations qui les établissent restant valables (¹).

11. — **Domaine fondamental. Côtés. Sommets :**

On appelle *groupe fuchsöide* un groupe de substitutions homographiques sur z qui laissent fixe l'intérieur du cercle $|z| = 1$ (ou ce qui revient au même le demi-plan $\Im(z) > 0$), le groupe étant de plus proprement discontinu à l'intérieur du cercle $|z| = 1$ (ou dans le demi-plan $\Im(z) > 0$).

Le groupe contient au plus une infinité dénombrable de substitutions et dérive d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de substitutions génératrices. Dans le premier cas, le groupe est dit fuchsien, dans le deuxième fuchsöide. Des exemples de ce deuxième cas seront construits ultérieurement.

Nous raisonnerons soit dans le cercle $|z| < 1$ ou le demi-plan $\Im(z) > 0$, soit dans le plan de la géométrie projective de Cayley, à l'intérieur de l'ellipse fondamentale. Angles et distances auront leurs valeurs non euclidiennes.

Comme dans le cas des groupes fuchsien, la méthode du rayonnement, appliquée dans le plan de Cayley, permet d'obtenir un *domaine fondamental* du groupe : C_0 étant un point intérieur à l'ellipse, distinct des points fixes de substitutions elliptiques, et C_i ses équivalents, l'ensemble des points M qui vérifient : distance $C_0M \leq \text{dist. } C_iM$ forme un domaine fondamental, qui est un polygone convexe P_0 à une infinité de côtés. S'il n'y avait qu'un nombre fini de côtés, on sait qu'on aurait un groupe fuchsien.

Côtés : les côtés de *première espèce* (Fatou, [1], p. 107) ou intérieurs à l'ellipse sont rectilignes : ce sont des segments des médiatrices des $C_0 C_i$.

1. Dans ce chapitre il sera fait de fréquents renvois à Fatou, [1], chap. xiv et xv.

Les côtés de *deuxième espèce* (qui peuvent ne pas exister) sont des arcs de l'ellipse fondamentale. La frontière de P_0 comprend les côtés et leurs points d'accumulation⁽²⁾ qui peuvent n'appartenir à aucun côté, mais sont toujours situés sur l'ellipse.

On peut présenter de manière différente la construction de P_0 (Fatou, [1], p. 105) : de chaque point C_i comme centre, décrivons un cercle non euclidien de rayon r assez petit pour que ces cercles soient non empiétants, puis faisons croître r et arrêtons la croissance d'un rayon issu de C_i dès qu'il rencontre un rayon issu d'un autre centre. L'aire balayée par les rayons issus de C_i , quand on a fait croître r si nécessaire jusqu'à $+\infty$, est le polygone fondamental relatif à C_i ou *polygone rayonné* de centre C_i ; on obtient ainsi un pavage de l'ellipse par un réseau de polygones rayonnés de centres C_0, C_1, \dots , équivalents et non empiétants.

Les côtés de première espèce de P_0 sont deux à deux équivalents par les substitutions du groupe, et d'une seule manière⁽³⁾ : on peut les associer en couples de côtés équivalents. Remarquons que si AB est équivalent à $A'B'$, et si, parcourant AB de A vers B , on laisse P_0 à gauche, quand on parcourt $A'B'$ de A' vers B' , on laisse P_0 à droite.

Sommets⁽⁴⁾ : les sommets de *première espèce* ou intérieurs à l'ellipse sont les points de rencontre des côtés de première espèce de P_0 . Il n'y en a qu'un nombre fini dans tout domaine complètement intérieur à l'ellipse. Ils peuvent être *adventifs* (dépendant de C_0) ou *elliptiques* (points fixes de substitutions elliptiques).

L'étude des polygones équivalents assemblés autour d'un sommet adventif A montre que les sommets adventifs se répartissent en *cycles fermés* d'un nombre fini de sommets (en général 3), la somme des angles d'un cycle étant égale à 2π ; le centre C_0 de P_0 est équidistant des sommets d'un même cycle.

Toute classe de points fixes elliptiques possède au moins un représentant parmi les sommets de première espèce de P_0 : les sommets elliptiques de P_0 se répartissent en cycles fermés, la somme des angles d'un cycle étant égale à $\frac{2\pi}{v}$ si la substitution elliptique correspondante est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{v}$. Le nombre de sommets d'un tel cycle est fini et égal à 1 en général : dans ce cas, les deux côtés aboutissant au sommet elliptique sont conjugués l'un et l'autre.

Les sommets de seconde espèce ou situés sur l'ellipse peuvent être points de rencontre de deux côtés de première espèce, ou d'un côté de

2. Les points d'accumulation sont définis avec la métrique euclidienne.

3. En introduisant éventuellement des sommets non apparents, dans le cas de côtés dont les deux extrémités seraient permutées par une substitution elliptique de période 2.

4. Voir Fatou, [1], pages 108 et suivantes.

première espèce et d'un de seconde espèce : ils sont ou *adventifs*, ou points fixes de substitutions du groupe. On montre comme dans le cas des groupes fuchsien qu'ils ne peuvent être points fixes de substitutions hyperboliques : si T est une substitution hyperbolique du groupe fuchsien G , P_0 est intérieur au polygone rayonné de centre C_0 relatif au sous-groupe Γ de G formé par les puissances de T , et ce polygone rayonné est un quadrilatère laissant les points fixes A et B de T à son extérieur.

Toute classe de points fixes de substitutions paraboliques de G admet un représentant sur le périmètre de P_0 : soit A un *sommet parabolique*; en A aboutissent deux côtés rectilignes; les sommets équivalents à A sur le périmètre de P_0 forment un cycle fermé dont tous les angles sont nuls. On peut toujours obtenir par un choix convenable de C_0 , et nous supposerons cela réalisé dans la suite, que les cycles se réduisent à un seul élément : les deux côtés aboutissant en A sont alors conjugués.

Quant aux sommets de seconde espèce qui ne sont pas points fixes de substitutions paraboliques (sommets adventifs) on peut toujours supposer, en choisissant convenablement C_0 , qu'ils sont intersection d'un côté de première espèce et d'un de seconde espèce. Soit A un tel sommet

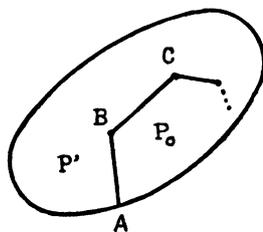


Fig. 2

adventif et AB le côté rectiligne qui y aboutit, et soit P' le polygone adjacent à P_0 le long de AB . A ne peut être par hypothèse pour P' intersection de deux côtés rectilignes, sinon la même circonstance se produirait pour un sommet de P_0 . Si dans P' aboutit en A un côté de deuxième espèce, on voit, en faisant la transformation qui change P' en P_0 , que P_0 possède un autre sommet adventif formant cycle avec A : on a un cycle ouvert à deux éléments dont chaque angle est égal à $\frac{\pi}{2}$.

Mais il peut arriver, comme nous allons le voir, que dans P' il n'aboutisse pas en A d'autre côté que BA , le sommet A étant singulier pour P' . S'il en est ainsi, dans P_0 , A doit être considéré comme formant un cycle à lui seul. Les sommets adventifs de seconde espèce forment donc, moyennant un choix convenable de C_0 , des cycles à un ou deux éléments, chaque angle du cycle étant égal à $\frac{\pi}{2}$.

En plus de ces sommets, qui ont des propriétés analogues à celles des sommets des groupes fuchsien, P_0 admet d'autres points frontière qui ne sont ni intérieurs à un côté, ni intersection de deux côtés consécutifs, et que nous appellerons *sommets singuliers*. Ce sont les points d'accumulation, au sens de la métrique euclidienne, des côtés ou sommets ordinaires de P_0 .

Parcourons le contour de P_0 dans un sens déterminé en partant d'un sommet A intérieur à l'ellipse; on décrit ainsi une ligne polygonale formée de côtés consécutifs de première ou de seconde espèce. Quand le nombre de côtés parcourus augmente indéfiniment, on voit, en raison de la convexité de P_0 , qu'on aboutit en un point S bien déterminé de l'ellipse. En S peut aboutir aussi : soit un côté déterminé de première ou seconde espèce, soit une ligne polygonale infinie analogue à la ligne AS ; ou aucune de ces hypothèses peut n'être réalisée.

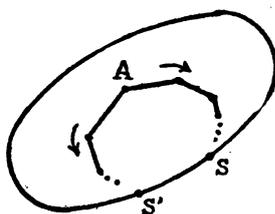


Fig. 3

Partant de A en sens contraire, on décrit, s'il ne reste qu'un nombre fini de côtés non utilisés, une ligne polygonale finie aboutissant en S , et dans le cas contraire, une ligne infinie AS' , S' pouvant être confondu avec S . Les lignes polygonales $S'AS$ étant évidemment en infinité dénombrable au plus, il en est de même de leurs extrémités S et S' .

Mais il existe des sommets singuliers de nature plus compliquée, qui ne sont ni extrémité d'un côté, ni extrémité d'une ligne polygonale infinie : ce sont des points d'accumulation S^* de sommets tels que S ou S' . Ils peuvent ne pas exister, être en nombre fini, en infinité dénombrable ou en infinité ayant la puissance du continu. Des exemples de ces différents cas seront donnés dans la suite.

Modifications permises. — A partir de P_0 on peut obtenir d'autres domaines fondamentaux en employant le procédé suivant : on supprime de P_0 une portion dont la frontière comprend un arc du périmètre de P_0 , et on ajoute une aire limitrophe équivalente à l'aire supprimée. Le procédé peut être répété. Mais nous exigerons que le nouveau domaine obtenu soit

simplement connexe et limité par des arcs analytiques. La convexité et la propriété qu'ont les côtés intérieurs d'être rectilignes ne sont pas essentielles. En particulier, on peut remplacer chaque côté rectiligne A B par un arc analytique assez voisin de A B et ayant mêmes extrémités, de manière à ne pas modifier les propriétés des sommets de première et seconde espèce, ou des sommets singuliers.

Si l'on exigeait seulement que P_0 reste connexe, on pourrait obtenir des domaines fondamentaux ayant des propriétés plus compliquées, par exemple présentant des côtés qui n'aboutiraient pas en un sommet déterminé, mais s'accumuleraient sur des arcs de l'ellipse.

12. — Obtention géométrique des groupes fuchsoides :

A tout groupe fuchsoides nous avons fait correspondre un domaine fondamental P_0 qui a les propriétés suivantes :

- a) P_0 est un polygone simplement connexe intérieur à l'ellipse;
- b) ses côtés intérieurs à l'ellipse (que nous supposons rectilignes) sont deux à deux conjugués; un domaine quelconque Δ complètement intérieur à l'ellipse n'est rencontré que par un nombre fini de ces côtés;
- c) les sommets intérieurs à l'ellipse forment des cycles fermés adventifs ou elliptiques à un nombre fini d'éléments; la somme des angles d'un cycle adventif est égale à 2π , la somme des angles d'un cycle elliptique à $\frac{2\pi}{\nu}$ (ν entier);

d) quant aux sommets non singuliers situés sur l'ellipse, on peut toujours obtenir par un choix convenable de C_0 (et nous supposons cette hypothèse réalisée dans la suite pour simplifier les discussions) qu'ils forment des cycles paraboliques réduits à un seul élément, ou des cycles adventifs à un ou deux éléments, dont chaque angle est égal à $\frac{\pi}{2}$.

La connaissance de P_0 détermine le groupe : toutes les substitutions s'obtiennent comme produits finis des substitutions qui conjuguent les côtés de première espèce (et qu'on suppose choisies s'il y a ambiguïté).

Les quatre conditions a, b, c, d, sont-elles nécessaires et suffisantes, autrement dit peut-on obtenir ainsi tous les groupes fuchsoides? On sait que la réponse est affirmative dans le cas d'un nombre fini de côtés, et on a alors un groupe fuchsien. Dans le cas d'une infinité de côtés, nous nous contenterons de former une condition suffisante, qui permettra de construire des exemples de groupes fuchsoides présentant les propriétés mentionnées plus haut; nous adjoindrons aux conditions a, b, c, d, la condition e) suivante :

e) la borne inférieure des distances non euclidiennes des points appartenant à deux côtés non consécutifs de P_0 est un nombre positif⁽⁵⁾ δ ;

5. Il en résulte que les longueurs des côtés sont $\geq \delta$.

la borne inférieure des angles de P_0 relatifs aux sommets intérieurs à l'ellipse est un nombre positif α .

Soit P_0 vérifiant a, b, c, d, e , et soient T_i les substitutions, deux à deux inverses l'une de l'autre, qui conjuguent les côtés de première espèce. Nous allons montrer, en adaptant la démonstration correspondante de Poincaré pour les groupes fuchsien, que le groupe G formé par les produits finis des T_i est proprement discontinu à l'intérieur de l'ellipse fondamentale. (Cf. Fatou, [1], p. 125.)

A une substitution U , produit fini des T_i , correspond une chaîne finie de polygones P_0, P_1, \dots, P_m , deux à deux adjacents suivant des côtés de première espèce et équivalents par rapport à G . Il faut montrer que tous ces polygones sont non empiétant et recouvrent l'ellipse.

Soit a intérieur à P_0 , et b quelconque intérieur à l'ellipse. Montrons que b appartient à un P_m . Sinon, parcourant ab de a vers b , on rencontrerait une infinité de polygones P_i , et on aurait sur ab une infinité de segments consécutifs s_i , s_i étant limité par le premier point de pénétration dans P_i quand on va de a vers b , et par le dernier point de sortie de P_i (6). La longueur l_i de $s_i \rightarrow 0$ quand $i \rightarrow \infty$. Soit n tel que, pour $i \geq n$, $l_i < \frac{\delta \sin \alpha}{2}$, et construisons l'homologue de ab par la substitution qui transforme P_n en P_0 .

s_n a pour homologue un segment $\varepsilon\varepsilon'$ dont les extrémités $\varepsilon, \varepsilon'$ se trouvent nécessairement sur deux côtés rectilignes consécutifs AB, BC de P_0 , puisque $\varepsilon\varepsilon' < \delta$.

Les segments consécutifs de s_n ont pour homologues $\varepsilon'\varepsilon'', \varepsilon''\varepsilon''', \dots$, et nous allons montrer que $\varepsilon\varepsilon', \varepsilon'\varepsilon'', \dots$ sous-tendent le même sommet B .

Nous utiliserons la propriété suivante : étant donné un segment $\varepsilon\varepsilon'$ de longueur l , sous-tendant un angle $\widehat{ABC} = \hat{B}$

avec $\hat{B} < \frac{\pi}{2}$, on a : $B\varepsilon' < \frac{l}{\sin \hat{B}}$ (Si $\hat{B} \geq \frac{\pi}{2}$, $B\varepsilon' < l$).

En effet : soit H' la projection de ε' sur AB ; la variation de la longueur h de $H'\varepsilon'$ quand ε' , repéré par $B\varepsilon' = s$, parcourt BC est donnée par la formule d'Huyghens (Valiron, [2], p. 398) :

$$dh = ds \cos \hat{\varepsilon}'.$$

Or : $\hat{\varepsilon}' = \frac{\pi}{2} - \hat{B} - \alpha$, α étant l'aire du triangle. Par suite :

$$dh = ds \sin (\hat{B} + \alpha) \geq ds \sin B; \text{ d'où :}$$

$$s = B\varepsilon' < \frac{h}{\sin \hat{B}} \leq \frac{l}{\sin \hat{B}}.$$

6. Ce point existe puisque, d'après la condition b), ab ne rencontre qu'un nombre fini de côtés de première espèce de P_0 , et par conséquent d'un polygone équivalent P_i .

Appliquons ceci au segment $\varepsilon\varepsilon'$ de longueur $< \frac{\delta \sin \alpha}{2}$. Si B est un sommet intérieur à l'ellipse, $\hat{B} > \alpha$, donc $B\varepsilon' < \frac{\delta}{2}$; si $\varepsilon'\varepsilon''$ sous-tendait, dans

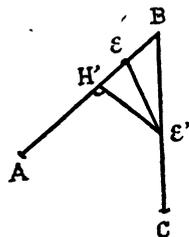


Fig. 4

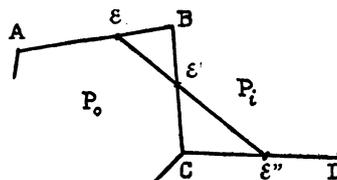


Fig. 5

le polygone P_i adjacent à P_0 le long de BC, le sommet C, on aurait : $\varepsilon''B \leq \varepsilon''\varepsilon' + \varepsilon'B < \delta$, ce qui est contraire à la condition (e).

Si B est sur l'ellipse, c'est nécessairement un sommet parabolique, les deux côtés qui y aboutissent étant conjugués. $\hat{B} = 0$, et la démonstration ci-dessus ne s'applique plus. Mais, si $\varepsilon'\varepsilon''$ sous-tendait C et que C soit sommet intérieur, on serait ramené au cas précédent pour les segments consécutifs de $\varepsilon'\varepsilon''$. Si C est sur l'ellipse, ce ne peut être pour P_0 un sommet parabolique, puisqu'il devrait y aboutir deux côtés conjugués et que le conjugué de BC est BA. C'est donc pour P_0 un sommet adventif, intersection d'un côté rectiligne et d'un côté de deuxième espèce, ou un sommet singulier. Il en est de même de A pour P_0 , et par suite de C pour P_i , puisqu'on passe de P_0 à P_i par la substitution qui amène AB en CB. Dans les deux cas on voit que dans P_i il n'aboutit en C d'autre côté rectiligne que BC, et $\varepsilon'\varepsilon''$ ne peut sous-tendre C.

En définitive, si b n'était pas intérieur à un P_m , il existerait une infinité de segments consécutifs, sous-tendant le même sommet B intérieur ou parabolique, et aboutissant en un point intérieur à l'ellipse : c'est impossible car, si B est intérieur, il n'y a qu'un nombre fini de polygones assemblés autour de B; si B est parabolique, les côtés issus de B tendent vers B.

Tout point intérieur à l'ellipse est donc intérieur à un polygone de la famille ou sur son contour.

Il reste à montrer que ces polygones sont non empiétants. Moyennant l'hypothèse e) la démonstration de ce fait donnée pour les polygones fuchsien peut être reprise sans changement. (Fatou, [1], p. 129.)

Remarque : Comme les groupes fuchsien, on partagera les groupes fuchsoides en deux classes : les groupes de la première classe sont ceux qui ne sont pas proprement discontinus sur l'ellipse, les groupes de la

deuxième classe ceux qui sont proprement discontinus sur certains arcs de l'ellipse.

Si P_0 admet des côtés de seconde espèce, le groupe correspondant G est nécessairement de seconde classe. La réciproque est vraie : si G est de seconde classe, son polygone rayonné P_0 admet au moins un côté de deuxième espèce (7).

Dans ce cas, en revenant au plan complexe (z), et supposant que G laisse Ox fixe, on sait que G est proprement discontinu dans le domaine formé par le plan (z) privé des points d'un ensemble parfait totalement discontinu situé sur Ox . P_0 devient un polygone situé dans $\mathfrak{J}(z) \geq 0$ et dont certains côtés sont des segments de Ox . L'ensemble de P_0 et du polygone symétrique par rapport à Ox forme un domaine fondamental pour le groupe G considéré dans le plan (z). Ce domaine est connexe, mais en général n'est pas simplement connexe.

13. — Exemples de groupes fuchsoides :

Nous raisonnerons dans le demi-plan $\mathfrak{J}(z) > 0$. Soient quatre points a, b, c, d , de Ox se succédant dans cet ordre, et soient les deux droites, non concourantes, $(ab), (cd)$. Il est clair que si $\frac{bc}{ab} > k$ (ou $\frac{bc}{cd} > k$), ab, bc, cd désignant les segments de Ox , la plus courte distance des deux droites $(ab), (cd)$ reste supérieure à un nombre positif $f(k) = \delta$.

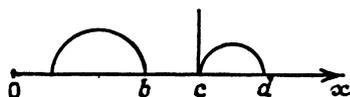


Fig. 6

En effet, laissant a, b, c , fixes, faisons varier d à droite de c : la plus courte distance minima est obtenue quand d est à l'infini et ne dépend que du rapport $\frac{bc}{ab}$: c'est une fonction croissante de ce rapport.

Soit dès lors une suite infinie $s_1, s_2, \dots, s_n \dots$ de segments consécutifs de Ox , s_1 ayant pour origine A , à distance finie; soit l_n la longueur de s_n . Supposons que $\sum l_n < \infty$ et que $\frac{l_{n+1}}{l_n}$ reste compris entre deux nombres positifs fixes k et k' . On peut prendre par exemple $l_n = \frac{C}{n^\alpha}$ ($\alpha > 1$). Les extrémités de s_n tendent vers un point limite S .

Considérons le polygone P_0 limité par les droites non euclidiennes construites sur $s_1, s_3, \dots, s_{2n+1}, \dots$, et par s_2, s_4, \dots et la portion de Ox extérieure à AS , qui forment les côtés de deuxième espèce; et faisons une

7. On le voit en adaptant la démonstration donnée dans Fatou pour les groupes fuchsien (Fatou, [1], p. 120-121). On utilisera la convexité du polygone rayonné.

convention de conjugaison pour les côtés de première espèce, par exemple celle indiquée sur la figure 7. P_0 n'a que des sommets adventifs et un

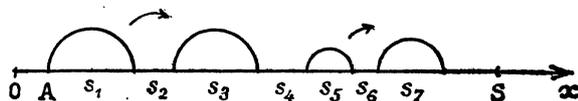


Fig. 7

sommet singulier S. La plus courte distance de deux côtés rectilignes quelconques étant supérieure à un nombre positif fixe, P_0 est polygone fondamental d'un groupe fuchsöide⁽⁸⁾. En S aboutissent à la fois un côté de seconde espèce et une ligne polygonale formée d'une infinité de côtés. Les figures ci-dessous, construites de la même manière, donnent des exemples de sommet S où aboutissent, soit une ligne polygonale et un côté de première espèce, soit deux lignes polygonales.

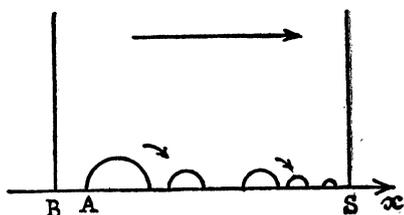


Fig. 8

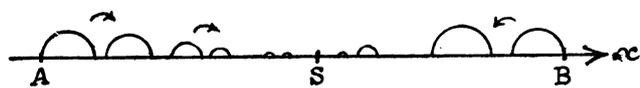


Fig. 9

La condition imposée au rapports de deux l_n consécutifs n'est pas nécessaire dans tous les exemples donnés : une étude directe montrerait simplement que, sans elle, les constructions indiquées *fig. 7, 8, 9, 11* conduisent à des domaines fondamentaux de groupes fuchsöides. La condition, qui est peu gênante, est introduite pour qu'on soit assuré du même résultat dans tous les cas (même lorsqu'il existe des sommets *intérieurs* et des sommets *paraboliques*).

Dans les figures 7, 8, 9, les extrémités des s_n sont des sommets adventifs et se répartissent en cycles ouverts à deux éléments.

Sur la figure 8 le point B, intersection d'un côté de première espèce et d'un côté de deuxième espèce, forme un cycle à lui seul, car le polygone adjacent à P_0 le long de $B \infty$ a en B un sommet singulier; le point à l'infini est un sommet parabolique formant un cycle à un seul élément.

8. Et même d'une infinité, puisqu'il existe une infinité de substitutions qui transforment le côté $(a_i b_i)$ en le côté $(d_i c_i)$, a_i, b_i, c_i, d_i étant sur Ox .

On peut former de même un polygone P_0 ayant une infinité de sommets paraboliques et de sommets adventifs : on prend pour côtés rectilignes les droites non euclidiennes construites sur s_{3n+1} , s_{3n+2} et pour côtés de seconde espèce les segments s_{3n} et la portion de Ox extérieure à AS ; deux côtés rectilignes consécutifs sont conjugués.

Les sommets paraboliques forment des cycles fermés à un seul élément, les sommets adventifs des cycles ouverts à deux éléments.

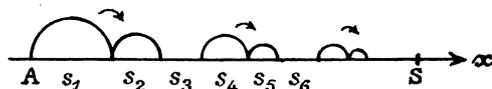


Fig. 10

Dans les exemples ci-dessus P_0 n'admet qu'un sommet singulier S . Nous allons donner des exemples de polygones admettant une infinité dénombrable de sommets du type S , et des sommets singuliers du type désigné au § 11 par S^* .

Soit un segment SS' de Ox et deux points A et B de SS' , l'ordre de succession des points étant $SAB S'$. Construisons comme plus haut une ligne polygonale infinie de côtés de première ou deuxième espèce issue de A et aboutissant en S , et une file issue de B et aboutissant en S' ; et soit sur Ox une infinité de segments $S_i S'_i$ non empiétants⁽⁹⁾, sur lesquels nous faisons des constructions analogues. La plus courte distance de deux côtés rectilignes non consécutifs tracés admet la borne inférieure positive δ . C'est évident par construction si les deux côtés rectilignes proviennent d'un même segment $S_i S'_i$. S'ils proviennent l'un de $S_i S'_i$, l'autre de $S_j S'_j$, on remarque qu'il y a entre $(a_i b_i)$ et $(a_j b_j)$ un côté rectiligne $(c_i d_i)$ de $S_i S'_i$ tel que, par construction, $\frac{b_i c_i}{a_i b_i} > k$. La plus courte distance de $(a_i b_i)$ à la droite $(c_i \infty)$, qui est la perpendiculaire euclidienne en c_i à Ox , est donc supérieure à $f(k) = \varepsilon$, et il en est a fortiori

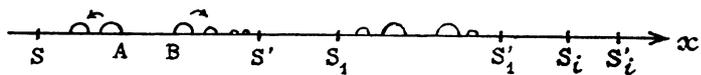


Fig. 11

de même de la plus courte distance de $(a_i b_i)$ à $(a_j b_j)$. Soit P_0 le polygone admettant comme côtés de première et deuxième espèce les côtés construits sur les segments $S_i S'_i$, et admettant aussi comme côtés de deuxième espèce les segments de Ox extérieurs à l'ensemble des $S_i S'_i$. P_0 est le polygone fondamental d'un groupe fuchsöide.

9. Les segments peuvent être consécutifs.

Il admet comme sommets singuliers du type S les extrémités en infinité dénombrable des segments S_i, S'_i , et comme sommets singuliers du type

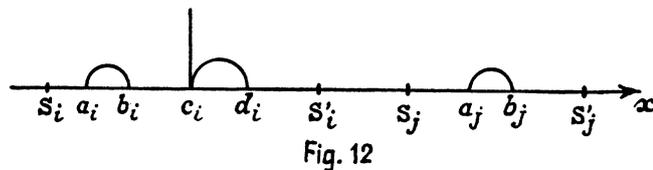


Fig. 12

S^* les points d'accumulation des S_i et S'_i . Ces derniers points peuvent être en nombre fini, en infinité dénombrable, ou former un ensemble qui a la puissance du continu. On a un exemple de ce dernier cas en prenant comme S, S' les segments enlevés de $(0,1)$ pour former l'ensemble triadique de Cantor.

On forme enfin facilement des exemples de groupes fuchsoides admettant des sommets intérieurs : il suffit, revenant par exemple à la figure 7, de tracer à l'intérieur de chacun des demi-cercles euclidiens, une suite finie de côtés de première espèce, les deux extrémités a_i, b_i de la suite étant sur Ox , et les côtés étant deux à deux conjugués dans chaque

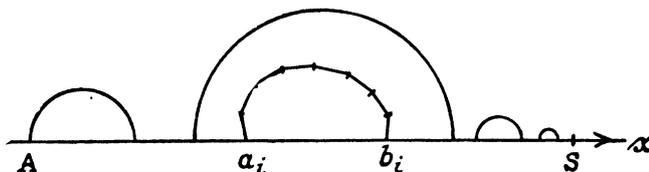


Fig. 13

suite, donc en nombre pair. On suppose de plus que les conditions relatives aux cycles, aux distances de deux côtés non consécutifs, et aux angles, sont vérifiées. Le polygone P_0 limité par ces côtés de première espèce, et ayant comme côtés de seconde espèce les portions de Ox non couvertes par les segments a_i, b_i , est le polygone fondamental d'un groupe fuchsoides.

14. — Extension par les substitutions du deuxième type. — Relations fondamentales :

On peut étendre les groupes fuchsoides, comme les groupes fuchsien, par l'adjonction de substitutions de la forme $\bar{z}' = f(z)$ ⁽¹⁰⁾, $f(z)$ permutant l'intérieur et l'extérieur du cercle $|z| = 1$ (ou les demi-plans $\Im(z) > 0$ et

10. Ces substitutions seront appelées substitutions du deuxième type, et celles considérées jusqu'ici substitutions du premier type.

$\Im(z) < 0$), et $\overline{z'}$ désignant le symétrique de z' par rapport au cercle $|z| = 1$ (ou par rapport à l'axe réel).

Le groupe étendu \overline{G} contient un groupe fuchsöide G qui, pour G , est *sous-groupe invariant d'indice 2*. La méthode du rayonnement permet encore de déterminer un polygone fondamental P_0 . Si G renferme des symétries, $\overline{P_0}$ admet des côtés appartenant à l'un au moins des axes de symétrie de chaque classe. (Fatou, [1], p. 132.) Les côtés intérieurs de $\overline{P_0}$, deux à deux conjugués, peuvent l'être par des substitutions du *premier ou deuxième type*, et on dira suivant le cas qu'ils sont intérieurs du premier ou du second type. Un côté porté par un axe de symétrie est son propre conjugué.

Si l'on adjoint à $\overline{P_0}$ le polygone $\overline{P'_0}$ adjacent le long d'un côté intérieur du second type, on obtient un polygone connexe P_0 qui est domaine fondamental pour le groupe G . Pour que le groupe étendu \overline{G} correspondant à P_0 soit proprement discontinu, il suffit que le polygone P_0 satisfasse aux conditions suffisantes de discontinuité propre d'un groupe fuchsöide, que nous avons établies plus haut.

On obtient enfin pour un groupe fuchsöide comme pour un groupe fuchsien les *relations fondamentales* qui lient les substitutions génératrices. A chaque cycle de sommets intérieurs correspond une relation fondamentale. Ces relations, qui peuvent être en nombre infini, sont indépendantes, et toute autre relation qu'on pourrait obtenir en serait une conséquence.

B. — *Fonctions automorphes générales.*

15. — G étant un groupe automorphe, fuchsien ou kleinéen, dont le polygone générateur a un nombre fini de côtés, et D un domaine du plan analytique invariant par les substitutions du groupe, on sait qu'on définit les fonctions automorphes correspondant au groupe G et au domaine D comme les fonctions possédant les trois propriétés suivantes :

a) : elles sont méromorphes dans D ; b) : elles prennent la même valeur en deux points quelconques de D équivalents par rapport à G ; c) : elles ne prennent une valeur donnée arbitrairement qu'en un nombre fini de points de D non équivalents par rapport à G .

Pour un groupe automorphe dérivé d'une *infinité* de substitutions génératrices, par exemple pour les groupes fuchsöides étudiés ci-dessus, il n'existe pas en général de fonctions possédant les trois propriétés *a, b, c*. Nous élargirons la définition en appelant *fonctions automorphes* toutes les fonctions qui possèdent *les deux propriétés a et b*.

On peut en obtenir comme quotients de *fonctions* Θ de Poincaré.

Soient $T_n z = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n}$ les substitutions de G .

On appelle fonction Θ appartenant à l'exposant m toute fonction méromorphe dans D vérifiant les équations fonctionnelles

$$\Theta(T_n z) = (c_n z + d_n)^{2m} \Theta(z).$$

Le procédé le plus simple de construction de fonctions Θ consiste à utiliser les *séries* Θ de Poincaré.

Supposons la frontière de D à distance finie. Soit $H(z)$ une fonction analytique uniforme (et non simplement rationnelle) dans le domaine D , y admettant un nombre fini de pôles et de points singuliers essentiels isolés, et qui reste bornée quand z tend vers les points de la frontière de D où le groupe n'est pas proprement discontinu.

La série :

$$\Theta(z) = \sum_{T_n} H(T_n z) \left(\frac{dT_n z}{dz} \right)^m \quad \text{avec } m \geq 2$$

converge uniformément dans tout domaine fermé Δ intérieur au domaine D et ne contenant aucun point équivalent à $z = \infty$, ni aucun point équivalent aux pôles ou points singuliers de $H(z)$. En effet, dans Δ les $H(T_n z)$ vérifient une inégalité $|H(T_n z)| < M$, et on sait que la série

$$\sum_{T_n} \left| \frac{dT_n z}{dz} \right|^m$$

converge uniformément dans Δ si $m \geq 2$.

Si z tend vers un point z_0 équivalent à un pôle ou un point singulier essentiel isolé de $H(z)$ (nous supposons ces points non équivalents à $z = \infty$), il n'y a dans la série Σ qu'un nombre fini de termes qui présentent une singularité, et il y en a un seul si z_0 n'est pas un point double d'une substitution de G , et si $H(z)$ n'admet pas deux points singuliers équivalents par rapport à G . Dans ce cas on est sûr que $\Theta(z)$ admet en z_0 un pôle ou un point singulier essentiel isolé; si la condition n'est pas remplie, plusieurs pôles ou points essentiels peuvent se détruire mutuellement.

On voit de même que les points équivalents à $z = \infty$ sont pour $\Theta(z)$ des pôles ou des points réguliers.

La série Θ définit donc une fonction analytique dans D , n'admettant dans tout domaine complètement intérieur qu'un nombre fini de pôles ou de points essentiels isolés; et, en choisissant convenablement les singularités de la fonction génératrice $H(z)$, on est assuré que les singularités de Θ ne se réduisent pas entre elles, et par suite que Θ n'est pas constante. On vérifie d'autre part que $\Theta(T_n z) = (c_n z + d_n)^{2m} \Theta(z)$.

Si $H(z)$ n'admet dans D comme singularités que des pôles, $\Theta(z)$ est méromorphe dans D . Donc, à l'aide de fonctions génératrices $H(z)$ méromorphes dans D , on peut construire une infinité de séries Θ qui sont des fonctions Θ appartenant à un exposant arbitraire $m \geq 2$.

Le quotient de deux fonctions Θ ainsi construites et appartenant au même exposant est une fonction automorphe de G dans D .

16. — Allure d'une fonction automorphe $x(z)$ au voisinage d'un sommet elliptique ou parabolique de P_0 ⁽¹¹⁾.

Soit α un point fixe elliptique de G ; les substitutions correspondantes sont des puissances de $\frac{z'-\alpha}{z'-\beta} = e^{\frac{2i\pi}{l} \frac{z-\alpha}{z-\beta}}$. Si on pose $\frac{z-\alpha}{z-\beta} = Z$, $\frac{z'-\alpha}{z'-\beta} = Z'$, $x(z)$ devient une fonction de Z méromorphe au voisinage de $Z=0$ et invariante par la substitution $Z' = e^{\frac{2i\pi}{l}} Z$. Donc $x(z)$ est développable en série suivant les puissances de $Z' = t$: $x(z) = t^\nu (a_0 + a_1 t + \dots)$. Si α est un sommet de P_0 ⁽¹²⁾ formant cycle à lui seul, la variable $t = \left(\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right)$ est la *variable principale* qui représente un petit triangle de P_0 , de sommet α , limité par les deux côtés conjugués issus de α et un arc de trajectoire de la substitution elliptique, sur un cercle du plan (t) centré à l'origine.

Pour étudier $x(z)$ au voisinage d'un sommet parabolique β de P_0 , formant cycle à lui seul, et correspondant à la substitution $\frac{1}{z'-\beta} = \frac{1}{z-\beta} + \gamma$, on utilise la variable principale $t = e^{\pm \frac{2i\pi}{\gamma} \frac{1}{z-\beta}}$, le signe $+$ ou $-$ étant choisi de manière qu'un petit triangle de P_0 , limité par les deux côtés issus de β et un arc de trajectoire de la substitution parabolique, ait pour image dans le plan (t) un petit cercle C de centre $t=0$. $x(z)$ devient par ce changement une fonction méromorphe $\varphi(t)$ dans le cercle C privé de son centre, mais $t=0$ peut être pour $\varphi(t)$ un point singulier essentiel.

17. — Étudions les groupes pour lesquels il existe des fonctions automorphes vérifiant la condition suivante analogue à la condition c) : toute valeur prise l'est en un même nombre fini de points non équivalents.

Soit $x(z)$, fonction automorphe de G , prenant μ fois chacune de ses valeurs dans P_0 , et soit Δ le domaine simple du plan (x) formé par les valeurs de la fonction. Soit $y(z)$ une fonction automorphe quelconque du groupe G .

A une valeur de x appartenant à Δ correspondent μ valeurs z_1, z_2, \dots, z_μ d'un domaine fondamental P_0 , donc μ valeurs y_1, y_2, \dots, y_μ . Les fonctions symétriques des y_i sont évidemment des fonctions analytiques de x , uniformes et méromorphes dans Δ . Donc x et y sont liés par une relation : $A_\mu(x)y^\mu + \dots + A_0 = 0$, les A désignant des fonctions méromorphes de x dans Δ ; y est une fonction algèbroïde, ou en particulier algébrique,

11. Voir Fatou, [1], p. 235 et suivantes.

12. P_0 est considéré dans le plan complexe; un point est désigné par la même lettre que son affixe.

de x . Mais toute fonction algébrique ou algébroïde de x n'est pas une fonction automorphe de G .

Théorème ⁽¹³⁾ : On peut trouver deux fonctions $x(z)$, prenant μ fois dans P_0 chacune de ses valeurs, et $y(z)$, telles que les fonctions automorphes du groupe G coïncident avec les fonctions méromorphes sur la surface de Riemann de la relation algébroïde (ou algébrique) qui lie y à x ⁽¹⁴⁾.

Soit $x(z)$, et soit x_0 une valeur de x à laquelle correspondent μ points z_1, z_2, \dots, z_μ distincts intérieurs à P_0 . Il est possible de construire à l'aide de fonctions Θ une fonction automorphe $y(z)$ prenant en ces μ points μ valeurs distinctes.

Considérons en effet la série $\Theta(z, \lambda) = \sum_{T_n} \left(\frac{dT_n z}{dz} \right)^m \frac{1}{\lambda - T_n z}$, $m \geq 2$.

Pour z constant, c'est une fonction méromorphe de λ dans la région D , ayant pour pôles simples les points $T_n z$, au moins quand z est distinct des points fixes elliptiques, car il ne peut y avoir alors de réduction entre les différents termes. $\Theta(z, \lambda)$ a donc au plus une infinité dénombrable de racines λ . Il est possible par conséquent de choisir λ' et λ'' tels que toutes les quantités $\Theta(z_i, \lambda)$, avec $i = 1, 2, \dots, \mu$, soient différentes de zéro et qu'on ne puisse avoir

$$\frac{\Theta(z_i, \lambda'')}{\Theta(z_i, \lambda')} = \frac{\Theta(z_k, \lambda'')}{\Theta(z_k, \lambda')} \quad \text{si } i \neq k.$$

La fonction $y(z) = \frac{\Theta(z, \lambda'')}{\Theta(z, \lambda')}$ prend μ valeurs distinctes aux points z_1, z_2, \dots, z_μ . x et y sont liés par une relation algébroïde (ou algébrique)

$\sum_{i=0}^{\mu} A_i(x) y^i = 0$, et, à un point analytique pris au hasard sur la surface de Riemann attachée à cette relation (voir renvoi 14), correspond un seul point dans P_0 . Cette surface de Riemann F est donc homéomorphe à la surface obtenue en réunissant l'un à l'autre les côtés homologues de P_0 . Toute fonction automorphe de z est donc une fonction analytique uniforme et régulière sur F et réciproquement ⁽¹⁵⁾.

z , considérée comme fonction du point analytique (x, y) de F , est une fonction *linéairement polymorphe* qui représente F sur le réseau des polygones équivalents à P_0 . τ désignant la variable d'uniformisation locale sur F , on montre (Fatou, [1], p. 271) qu'il existe une transformée homo-

13. Cf. Fatou, [1], p. 269.

14. Ou éventuellement sur la portion F de surface de Riemann qui se projette en Δ sur le plan (x) .

15. En ne considérant comme appartenant à P_0 que les points intérieurs au domaine D . Si, comme ci-dessous, on ajoute à P_0 ses sommets paraboliques, leurs homologues sont intérieurs à la surface F correspondante, et on doit considérer aussi les fonctions régulières sur F sauf en ces points, qu'elles peuvent admettre comme points singuliers essentiels isolés (cf. chap. III).

graphique z' de chaque branche de z , qui, au voisinage d'un point quelconque de la surface, admet un développement de la forme : $z' = \tau (1 + \alpha_1 \tau + \alpha_2 \tau^2 + \dots)$ pour un point de F qui ne correspond pas à un sommet elliptique ou parabolique;

$z' = \tau^{\frac{1}{l}} (1 + \beta_1 \tau + \dots)$ pour un point de F qui correspond à un sommet elliptique d'angle $\frac{2\pi}{l}$;

$z' = \log \tau + \gamma_1 \tau + \gamma_2 \tau^2 + \dots$ pour un point de F qui correspond à un sommet parabolique. Les sommets paraboliques correspondent bien à des points frontière isolés de F , qu'on peut rajouter à la surface et qui deviennent points intérieurs de F : en effet, t désignant la variable principale comme dans le § 16, la fonction $\varphi(t)$ qui représente $x(z)$ au voisinage du sommet parabolique est nécessairement méromorphe pour $t = 0$, puisqu'elle ne prend qu'un nombre fini de fois chacune de ses valeurs.

On voit donc que la représentation que fait z de F sur le réseau des polygones est conforme⁽¹⁶⁾, sauf aux points qui correspondent aux sommets elliptiques et paraboliques.

Ces remarques permettent de préciser les groupes pour lesquels il existe des fonctions $x(z)$ prenant μ fois dans P_0 toute valeur prise : F désignant une surface de Riemann algébrique ou algèbroïde quelconque et *signée*, c'est-à-dire sur laquelle on a marqué des points e_i qui doivent correspondre à des sommets elliptiques d'angle $\frac{2\pi}{l_i}$ ou à des sommets paraboliques, le groupe G de monodromie des fonctions linéairement polymorphes sur F , qui représentent F sur un réseau de polygones équivalents⁽¹⁷⁾, répond à la question, et tout groupe de la catégorie considérée peut être obtenu de cette manière.

Remarque : Nous avons supposé dans ce qui précède $\mu > 1$. Nous verrons au chapitre IV des exemples de fonctions automorphes prenant une seule fois dans P_0 chaque valeur prise.

Il est clair d'autre part que si certaines fonctions du groupe G prennent μ fois dans P_0 chaque valeur prise, il n'en est pas de même de toutes les fonctions automorphes de G .

18. — Les résultats précédents peuvent être retrouvés par une méthode applicable à tous les groupes automorphes.

$x(z)$ étant une fonction automorphe quelconque du groupe, considérons le domaine des valeurs prises par x quand z , *intérieur* à D , appartient à

16. Avec la définition élargie de la représentation conforme pour le cas des points de ramification : c'est le cercle à 1 feuillet du plan (z) qui est représenté conformément sur le plan (z).

17. Nous verrons plus loin l'existence de groupes fuchsoides de cette espèce.

18. Nous supposons z intérieur à D parce qu'il n'est pas fait d'hypothèse sur $x(z)$ au voisinage des sommets paraboliques. Avec des conditions de régularité, on peut ajouter à P_0 ces sommets et à S les points correspondants.

P_0 ⁽¹⁸⁾. Ce domaine recouvre le plan (x) en totalité ou en partie, un nombre fini ou infini de fois.

Faisons coïncider les points du domaine correspondant à des z équivalents (donc appartenant à des côtés homologues); on obtient ainsi une surface de Riemann S homéomorphe à la surface obtenue en réunissant l'un à l'autre les côtés homologues de P_0 .

Les fonctions automorphes du groupe sont les fonctions analytiques de x uniformes sur S . z , considérée comme fonction d'un point analytique de S , est une fonction linéairement polymorphe qui représente conformément S sur un réseau de polygones, la représentation cessant d'être conforme aux points de S qui correspondent à des sommets elliptiques, s'il y en a. z est pour S une variable uniformisante.

On sait que toute surface de Riemann est uniformisable par les fonctions automorphes. On voit que réciproquement tout groupe automorphe peut être considéré comme lié à l'uniformisation d'une surface de Riemann, et cela d'une infinité de façons, puisqu'on peut prendre pour $x(z)$ une fonction automorphe quelconque du groupe.

S étant une surface de Riemann quelconque signée, nous verrons au chapitre suivant qu'il existe des fonctions z linéairement polymorphes représentant S sur un réseau de polygones.

Ces fonctions linéairement polymorphes sur S vérifient une *équation différentielle du troisième ordre* : en effet, l'*invariant différentiel de Schwarz* $\Delta\left(\frac{z}{x}\right)$ est une fonction analytique uniforme sur S . Si on suppose que les points de ramification de S sont distincts des points à l'infini et des points qui correspondent aux sommets elliptiques ou paraboliques, on voit que les singularités de $\Delta\left(\frac{z}{x}\right)$ sur S sont les suivantes :

un pôle d'ordre 2ν en chaque point de ramification d'ordre $\nu - 1$, avec un terme principal $\frac{\nu^2 - 1}{2\nu^2} \tau^{-2}$;

un pôle d'ordre 2 en chaque point critique de z (point correspondant à un sommet elliptique ou parabolique). $\Delta\left(\frac{z}{x}\right)$ présente d'autre part un zéro du quatrième ordre en chaque point ordinaire à l'infini (Fatou, [1], p. 272).

Ces propriétés ne suffisent pas à déterminer la fonction analytique uniforme sur S qui est égale à $\Delta\left(\frac{z}{x}\right)$.

Par exemple, pour la surface algébrique hyperelliptique de

$$y^2 = \prod_{i=1}^{\infty} (x - a_i) e^{z(x)},$$

une fonction linéairement polymorphe sans points cri-

tiques vérifie une équation de la forme

$$\Delta\left(\frac{z}{x}\right) = M + \frac{N}{y}, \quad M \text{ et } N \text{ désignant des fonctions méromorphes de } x.$$

$\Delta\left(\frac{z}{x}\right)$ n'a pour pôles que les points a_i ; chaque point a_i est pôle d'ordre 4 avec un terme principal $\frac{3}{8}\tau^{-4}$ $(\tau = \sqrt{x - a_i})$.

On en déduit seulement que N est une fonction entière et que M admet les pôles $x = a_i$ avec pour terme principal $\frac{3}{8}(x - a_i)^{-4}$.

CHAPITRE III

UNIFORMISATION DES SURFACES ALGÈBROIDES (1)

Nous appliquerons aux surfaces algébroides F la méthode d'uniformisation basée sur la représentation conforme de la surface simplement connexe de recouvrement. Il nous faudra pour cela préciser le tracé d'un système de coupures transformant F en une surface simplement connexe F' , et le mode de réunion des exemplaires égaux à F' qui forment la surface de recouvrement F^∞ . Pour le cas général nous renverrons aux travaux de Koebe (2) : de la représentation de F^∞ sur le cercle $|z| < 1$ résulte la représentation de chaque exemplaire F' sur un polygone fuchsöide qui n'admet pas de sommets intérieurs au cercle $|z| = 1$. Nous traiterons en détail un cas particulier, pour lequel nous étudierons de manière plus précise les polygones fuchsöides obtenus : nous trouverons ainsi un exemple de polygones fuchsöides admettant une infinité de sommets adventifs intérieurs.

A. — *Surface de Riemann d'une fonction algébroïde dans un domaine simplement connexe.*

19. — Coupures canoniques :

Soit D le domaine simplement connexe du plan (x) dans lequel est définie une fonction algébroïde à m branches, et soit F la surface de Riemann correspondante. F est supposée connexe. On peut toujours supposer, à l'aide d'une représentation conforme préalable, que le domaine D est l'intérieur du cercle $|x| = R$. R peut être fini ou infini. Ce dernier cas est celui des surfaces de Riemann des fonctions algébroides entières.

F est une surface à m feuillets égaux projetés sur D et réunis en des points de ramification, en nombre en général infini. Les projections des points de ramification ne s'accumulent que sur la frontière de D . Nous considérons F comme la limite de la suite de surfaces F_n , F_n désignant la portion de F projetée sur le cercle $|x| \leq R_n$, et R_n une suite croissante qui tend vers R , telle que le cercle $|x| = R_n$ ne contienne pas de projection de point de ramification. On prendra pour lignes de passage des demi-droites ou segments joignant les points de ramification à la frontière de F , et tracés de manière que deux lignes de passage quelconques ne se

1. Nous employons cette expression abrégée au lieu de : uniformisation des fonctions analytiques uniformes sur une surface algébroïde.

2. Cf., par exemple, Fatou, [1], chap. xvi, et Koebe, [2], p. 93 et suivantes.

rencontrent pas, et que les lignes correspondant aux points de ramification projetés à l'extérieur du cercle $|x| = R_n$ ne pénètrent pas dans F_n .

On suppose de plus que F a la propriété suivante : il est possible de choisir la suite R_n de manière que la frontière de chaque F_n soit *formée d'une seule courbe* (qui se projette sur le cercle $|x| = R_n$ parcouru m fois). Pour une surface algébroïde à deux feuillets qui a une infinité de points de ramification, on ne restreint pas la généralité en supposant cette condition remplie : il ne pourrait y avoir exception que si, à partir d'un certain rang, les points de ramification se répartissaient en paires de points dont les projections seraient équidistantes de O : on ferait dans ce cas un changement d'origine dans le plan (x) si $R = \infty$, ou une représentation conforme du cercle $|x| < R$ sur lui-même si R est fini.

Chaque F_n est une surface à bord (munie de son bord) ou ce que Stoïlow appelle un *domaine polyédrique* (Stoïlow, [1], p. 81); et la suite F_n forme une suite de domaines polyédriques d'approximation de F (Stoïlow, [1], p. 87), puisque $F_{n+1} - F_n$ est formé d'un nombre de domaines (ici 1) égal au nombre de contours qui limitent F_n .

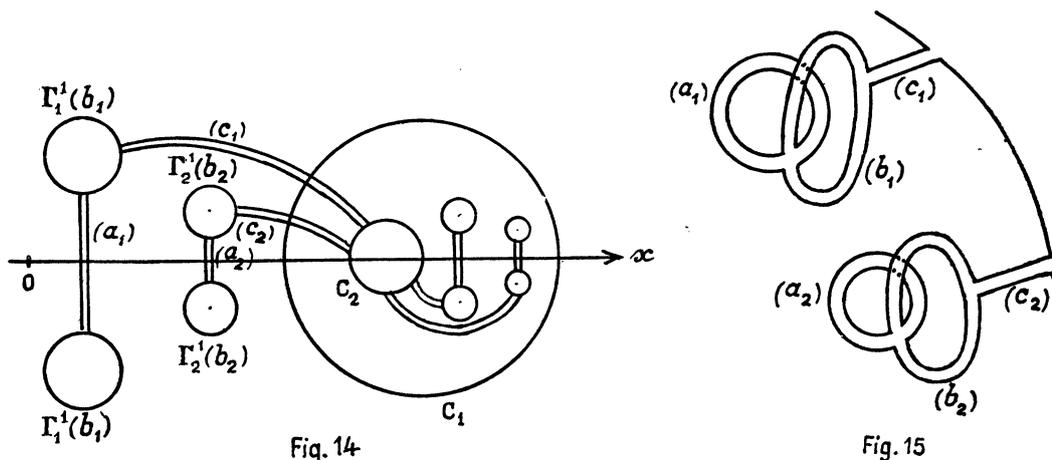
Appelons avec Stoïlow *genre* d'une surface à bords⁽³⁾ le nombre maximum p de courbes simples fermées disjointes que l'on peut tracer sur la surface sans la morceler. Une surface à bords limitée par l contours a pour ordre de connexion $N = 2p + l$. Cette définition du genre coïncide bien avec celle donnée habituellement pour les surfaces fermées : étant donnée une surface fermée, on y pratique une fenêtre pour lui donner un bord; la surface obtenue a un ordre de connexion impair N et on appelle genre le nombre $\frac{N-1}{2}$.

Au moyen de la suite F_n on peut obtenir une *représentation canonique* (Stoïlow, [1], p. 98) de la surface F . Partons de F_1 et soit p_1 son genre; traçons sur F_1 p_1 courbes simples fermées disjointes γ'_i qui ne le morcellent pas; on obtient ainsi une surface de genre 0, à $2p_1 + 1$ bords, qu'on représente sur un domaine plan contenant le point à l'infini et limité par $2p_1 + 1$ cercles extérieurs les uns aux autres : le cercle C_1 qui correspond au bord initial de F_1 est centré sur l'axe réel, les deux cercles Γ'_i qui correspondent aux deux bords d'une courbe γ'_i sont symétriques par rapport à l'axe réel, deux points de ces cercles symétriques par rapport à l'axe réel correspondant à deux points en regard sur les deux bords de γ'_i .

On représente ensuite d'une manière analogue $F_2 - F_1$ à l'intérieur de C_1 , et à l'extérieur d'un cercle C_2 correspondant au bord de F_2 , et ainsi de suite.

3. Cette définition peut se donner pour une surface quelconque. Cf. Stoïlow, [1], p. 84.

A l'aide de cette représentation canonique on peut définir de proche en proche un système canonique de coupures transformant F en une surface simplement connexe F' .



On commence par transformer F_1 en une surface simplement connexe F'_1 par p_1 systèmes de coupures (a, b, c) figurés sur la représentation canonique, *fig. 14*, et auxquels correspondent sur F_1 des systèmes représentés *fig. 15*, analogues à ceux utilisés par Riemann dans la théorie des fonctions algébriques (Appell et Goursat, [1], p. 226 et suivantes).

On transforme ensuite $F_2 - F_1$ en un domaine doublement connexe par des systèmes de coupures analogues aux précédents : sur la représentation canonique ces systèmes de coupures aboutissent tous à C_2 , puis on supprime C_1 et on prolonge jusqu'à C_2 les coupures qui y aboutissent.

F_2 est ainsi transformée en F'_2 simplement connexe par p_2 systèmes (a_i, b_i, c_i) , p_2 désignant le genre de F_2 (4). On peut les supposer numérotés de 1 à p_2 de telle sorte que les extrémités des coupures (c_i) se succèdent sur la frontière de F_2 parcourue dans un certain sens dans l'ordre des indices croissants.

Le même procédé peut être continué indéfiniment : pour passer d'une surface F_n à la suivante F_{n+1} , on ne modifie pas dans F_n les coupures déjà tracées ; on trace dans $F_{n+1} - F_n$ de nouvelles coupures, puis on prolonge les coupures déjà tracées dans F_n .

A la limite, F est transformée en une surface simplement connexe F' par un nombre en général infini de systèmes de coupures (a, b, c) . Le nombre n'est fini que si F a un nombre fini de points de ramification (5).

4. On vérifie sans peine (cf. chap. v) que le genre de F_2 est égal à la somme des genres de F_1 et $F_2 - F_1$.

5. Dans ce cas, F est une portion de surface algébrique.

20. — Construction de F^∞ : Pour définir la surface de recouvrement F^∞ , nous allons assembler des exemplaires égaux à F' à la manière des polygones d'un réseau de polygones fuchsoides.

Etant donné un système de coupures (a, b, c) , marquons ses trois sommets α, β, γ et numérotons les huit côtés dont il est formé. Construisons dans le demi-plan $\Im(z) > 0$ un polygone fuchsien de seconde classe, ayant huit côtés de première espèce associés entre eux comme les huit côtés du système (a, b, c) .

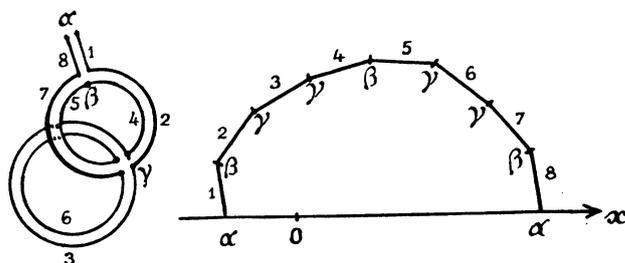


Fig. 16

Le côté (8) est le transformé de (1) par T_c , (4) de (2) par T (5) de (7) par T_b , et (6) de (3) par T_a . Les sommets marqués α forment un cycle adventif à deux éléments de sommets de seconde espèce, les sommets β un cycle adventif à trois éléments de sommets intérieurs, et les sommets γ un cycle adventif à 4 éléments.

Les quatre substitutions génératrices sont liées par deux relations fondamentales correspondant aux deux cycles de sommets intérieurs et qu'on obtient sans difficulté. (Fatou, [1], p. 198) :

$$\begin{aligned} T_{b'} &= T_a T_b T_a^{-1} \\ T_c &= T_a T_b^{-1} T_a^{-1} T_b \end{aligned}$$

La possibilité de construction du polygone s'établit par exemple en considérant une surface algébrique de genre 1, rendue simplement connexe par le système de coupures (a, b, c) , et sur laquelle on cherche une fonction linéairement polymorphe ayant en α un point critique qui correspond à un sommet parabolique. On sait qu'il existe une fonction linéairement polymorphe représentant la surface algébrique ainsi coupée sur un polygone fuchsien. Remplaçons dans ce polygone les 2 côtés aboutissant en α par 2 côtés aboutissant en des points distincts de Ox , et cela sans modifier la somme des angles du cycle β ; le polygone obtenu est encore un polygone fuchsien, puisque les côtés de première espèce vérifient les conditions de conjugaison et les conditions relatives aux cycles.

A l'aide de ces remarques nous allons maintenant construire un polygone fuchsioïde homéomorphe à F' . Nous emploierons la méthode du

§ 13. Soit sur Ox une infinité de segments $s_1, s_2, s_3 \dots, s_n \dots$, tous intérieurs à un segment AB , se succédant dans l'ordre de leurs indices, et tels que les « droites » non euclidiennes construites sur les s_n soient à distance $> \delta$ les unes des autres.

A l'intérieur du demi-cercle euclidien de diamètre s_n , construisons une file de huit côtés de première espèce, conjugués comme ci-dessus, qui seront les homologues des côtés du système (a_n, b_n, c_n) . On suppose de plus que les conditions suffisantes de discontinuité propre sont vérifiées.

On obtient ainsi un polygone fuchsien ou fuchsöide de seconde classe suivant que F a un nombre fini ou une infinité de points de ramification.

Soit P le polygone obtenu après transformation du demi-plan $\Im(z) \geq 0$ en le cercle $|z| \leq 1$. Ce polygone, ou plus exactement la partie de ce polygone située à l'intérieur du cercle $|z| = 1$, est homéomorphe à la surface coupée F' . Pour définir la correspondance entre les points du polygone et les points de F' , on considère F' comme la limite des surfaces F'_n, F'_{n+1} , rencontrées dans le tracé des coupures, et on définit de proche en proche une correspondance bicontinue et biunivoque de ces surfaces avec des portions $P_n, P_{n+1} \dots$ du polygone telles que $P_n \subset P_{n+1}$, et que la limite de la suite P_n soit P . On fait correspondre aux côtés du système de coupures (a_n, b_n, c_n) les côtés construits sur s_n .

Un bord d'une coupure de F' correspond ainsi à un côté intérieur bien déterminé de P . Il ne reste qu'à assembler des exemplaires identiques à F' , reliés entre eux suivant les bords des coupures comme sont reliés suivant les côtés intérieurs tous les polygones équivalents à P . P étant un polygone fuchsöide, le réseau des polygones couvre le cercle $|z| < 1$, et la surface de recouvrement obtenue, soit F^∞ , est simplement connexe⁽⁶⁾.

B. — Surfaces algébroides quelconques.

21. — Soit F une surface algébroides quelconque. Pour n'avoir pas de difficultés dans la construction d'une surface de recouvrement simplement connexe, nous emploierons le système de coupures indiqué par Kœbe pour une surface de Riemann quelconque (Kœbe, [2], p. 93 et suivantes). La méthode s'applique en particulier aux surfaces qui ont fait l'objet de la section A.

Considérant F comme limite d'une suite de surfaces F_n d'ordre de connexion fini, ou la transforme en une surface simplement connexe F' au moyen de coupures qui ne se terminent pas à l'intérieur de F , comme certaines coupures de la section précédente, mais dont au contraire les

6. La méthode exposée dans cette section A s'applique à toute surface de Riemann S qui peut être définie par $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, chaque S_n étant limitée par une seule courbe. On pourrait étendre ce procédé au cas d'une surface quelconque, mais nous nous contenterons, pour simplifier, d'employer dans ce cas la méthode de Kœbe.

extrémités tendent vers la frontière de F : c'est-à-dire que, lorsqu'un point M parcourt une coupure, dans un sens quelconque, M arrive à rester dans la portion de F extérieure à une surface quelconque F_n de la suite, si grand que soit son indice. Si l'on voulait établir comme dans A une correspondance entre F' et un polygone fuchsöide, on utiliserait un polygone n'ayant pas de sommets intérieurs. Mais cela n'est pas nécessaire ici : on assemble des exemplaires égaux à F' , reliés suivant les bords des coupures, chaque nouvel exemplaire étant relié à l'assemblage déjà obtenu suivant un bord libre et un seul. Cette convention rend évidente la simple connexité de la surface de recouvrement F^∞ ainsi formée.

Les surfaces de recouvrement précédemment construites suffisent pour établir la possibilité de l'uniformisation : elles permettent de représenter F sur un réseau de domaines fondamentaux d'un groupe automorphe par une fonction z , linéairement polymorphe sur F, et n'y admettant pas de points critiques.

On peut aussi, comme dans la théorie des surfaces algébriques, chercher à déterminer une fonction z linéairement polymorphe sur F, mais

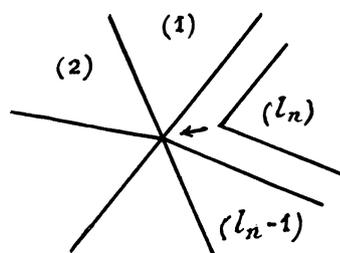


Fig. 17

admettant *des points critiques* en des points isolés donnés e_n de F, en nombre fini ou infini, qui deviendront par la représentation des sommets elliptiques d'angle $\frac{2\pi}{l_n}$ donné ou des sommets paraboliques. On utilisera pour cela les coupures définies dans la section B, auxquelles on adjoindra des coupures issues des points e_n et dont l'autre extrémité tend vers la frontière de F. Nous pouvons par exemple supposer les coupures formées d'arcs analytiques, chaque portion de coupure située dans F_n étant formée d'un nombre fini d'arcs. Dans la réunion des exemplaires égaux à F' , les coupures issues des points e_n correspondant à des sommets paraboliques ($l_n = \infty$) se comportent comme les coupures dont les deux extrémités tendent vers F. Pour les coupures issues des points e_n correspondant à des sommets elliptiques (l_n fini), on fait la convention suivante : lorsqu'on réunit à l'assemblage déjà formé un nouvel exemplaire le long d'un bord d'une telle coupure, on réunit aussi les $(l_n - 2)$ autres exemplaires,

comme sont assemblés entre eux, autour d'un sommet elliptique d'angle $\frac{2\pi}{l_n}$, l_n polygones d'un réseau fuchsien ou fuchsoïde. Le dernier exemplaire placé est réuni à l'assemblage déjà formé par deux bords de coupures à la fois; mais on voit que F^∞ reste simplement connexe.

Un point e_n correspondant à un sommet parabolique est pour F^∞ un point de ramification d'ordre infini; c'est donc un *point frontière*.

Un point e_n correspondant à un sommet elliptique d'angle $\frac{2\pi}{l_n}$ est un point de ramification de F^∞ . Si e_n est pour F point de ramification d'ordre $\nu - 1$, il est pour F^∞ point de ramification d'ordre $\nu l_n - 1$.

C. — Théorème fondamental.

22. — Théorème : *Sur une surface de Riemann S de genre > 1 , il existe une fonction linéairement polymorphe admettant des points critiques e_n isolés donnés, représentant la surface rendue simplement connexe par un système convenable de coupures sur un domaine fondamental d'un groupe fuchsoïde, et faisant correspondre aux points e_n des sommets elliptiques d'angle $\frac{2\pi}{l_n}$ donné ou des sommets paraboliques.*

La surface de Riemann S étant en effet transformée en une surface simplement connexe S' par le procédé indiqué dans la section B, ou dans la section A lorsque c'est possible, on définit la surface de recouvrement S^∞ et on en fait une représentation conforme sur le cercle $|z| < 1$. On ne peut avoir une représentation sur le plan entier ou le plan pointé, car on serait conduit à des groupes de genre 0 ou 1, et S devrait être de genre 0 ou 1 (7). D'ailleurs même pour une surface de genre 0 ou 1, mais où l'on a marqué un nombre suffisant de points critiques (8), on est assuré d'avoir une représentation de S^∞ sur le cercle $|z| < 1$.

S^∞ possède une infinité de transformations conformes et biunivoques en elle-même, formant un groupe Γ : on les obtient en faisant correspondre à un point d'un exemplaire S'_i , le point homologue dans un exemplaire S'_k et en étendant par continuité la correspondance à toute la surface S^∞ . Chaque exemplaire S'_i est représenté sur une portion P_i simplement connexe du cercle $|z| < 1$. Au groupe Γ correspond un groupe linéaire G de transformations du cercle en lui-même. Les P_i , équivalents entre eux par G , sont des domaines fondamentaux du groupe, qui est donc proprement discontinu à l'intérieur du cercle. G est un groupe fuchsien ou fuchsoïde. Si le genre de S est infini, ou si l'on a marqué sur S une

7. Cf. Fatou, [1], p. 207 et 454. La définition du genre dans l'énoncé du théorème est celle de Stoilow.

8. Cinq au moins si le genre est 0 ou au moins si le genre est 1.

infinité de points critiques e_n , on est assuré que G est un groupe fuchsöïde. La fonction z , uniforme sur S^∞ , qui fait la représentation, est sur S une fonction linéairement polymorphe. Elle est régulière sur S en tout point distinct des e_n , car elle est régulière en tout point intérieur de S^∞ ,

On montre, comme dans le cas des surfaces algébriques (Fatou, [1], p. 451-452), qu'une transformée homographique de chaque branche de z , admet au voisinage d'un point e_n de S un développement de la forme suivante, où τ désigne la variable d'uniformisation locale de S :

$$\begin{array}{ll} \tau^{1/n} (1 + \alpha_1 \tau + \dots) & \text{si } l_n \text{ est fini;} \\ \log \tau + \beta_1 \tau + \beta_2 \tau^2 + \dots & \text{si } l_n \text{ est infini.} \end{array}$$

Les points e_n correspondant à l_n fini sont transformés en des points intérieurs au cercle $|z| = 1$, puisque ce sont des points intérieurs de S^∞ . Aux deux bords de coupure partant de e_n correspondent deux arcs issus du point correspondant. Ces arcs sont analytiques si les coupures sont elles-mêmes analytiques; ils font entre eux un angle $\frac{2\pi}{l_n}$ et se déduisent l'un de l'autre par une substitution elliptique du groupe G . Le transformé de e_n est un sommet elliptique. On voit de même que si l_n est infini, e_n a pour transformé un point du cercle $|z| = 1$ qui est point fixe d'une substitution parabolique T_n du groupe G ; et aux deux bords de la coupure issus de e_n correspondent deux arcs transformés l'un de l'autre par T_n .

Avec les coupures utilisées dans la section B, on est donc conduit à une représentation de S sur un réseau de polygones fuchsöïdes, qui ne sont pas des polygones rayonnés, et dont les côtés sont des courbes analytiques ou formées d'arcs analytiques si les coupures le sont. Les seuls sommets intérieurs sont des sommets elliptiques, et les seules relations fondamentales entre les substitutions qui lient les côtés sont de la forme :

$$T^i = 1.$$

Avec les coupures utilisées dans la section A, on est conduit à des polygones fuchsöïdes admettant des sommets intérieurs qui forment des cycles adventifs à trois ou quatre éléments. A chaque cycle adventif correspond une relation fondamentale. La somme des angles d'un cycle est bien égale à 2π , puisque la représentation de S sur le réseau de polygones ne cesse d'être conforme qu'aux points e_n , qui sont des points critiques de z , et que, dans ce cas, il n'y a pas de points e_n ⁽⁹⁾. On a une idée de la forme de ces polygones en remarquant que la portion de chacun d'eux strictement intérieure au cercle $|z| = 1$ est homéomorphe à la portion intérieure à ce cercle du polygone fuchsöïde utilisé au § 20.

23. — La fonction uniformisante z , évidemment déterminée à une homographie près, dont nous avons démontré l'existence, pourrait à priori

9. On pourrait en introduire, les polygones obtenus ayant alors à la fois des sommets adventifs et des sommets elliptiques ou paraboliques.

dépendre des coupures utilisées et du mode de formation de S^∞ . Il n'en est rien.

Théorème d'unicité (Poincaré) : *Deux fonctions z et t , linéairement polymorphes sur S , y admettant les mêmes points critiques e_n affectés des mêmes nombres l_n , et représentant S sur un réseau de polygones fuchsoides, sont transformées homographiques l'une de l'autre.*

La démonstration est la même que pour les groupes fuchsien. Le théorème résulte de ce que les groupes correspondant à z et t sont isomorphes, et de ce qu'on a une représentation conforme du cercle $|z| < 1$ sur le cercle $|t| < 1$.

24. — Remarques : On construit aisément des exemples de surfaces de Riemann conduisant à des groupes fuchsoides de *seconde classe* en partant d'une surface S quelconque, et en y supprimant une ou plusieurs portions simplement connexes, intérieures à S , dont chacune est limitée par une courbe fermée de Jordan. Si l'on a percé p trous dans la surface coupée S' , il suffit, pour rétablir la simple connexion, d'adjoindre aux coupures tracées p nouvelles coupures dont une extrémité est sur le contour C d'un trou et l'autre tend vers la frontière de S .

Quand on assemble des exemplaires identiques, on n'en assemble pas le long des courbes C limitant les trous, qui sont des courbes frontière pour S' ainsi que pour S^∞ . Chacune de ces courbes est représentée sur un arc du cercle $|z| = 1$. Mais la surface de Riemann est prolongeable au delà des courbes C , de même que le polygone fuchsoides est prolongeable à l'extérieur du cercle $|z| = 1$ au delà de ses côtés de seconde espèce.

Nous avons vu qu'à tout groupe automorphe on peut associer une infinité de surfaces de Riemann, les fonctions automorphes du groupe n'étant autres que les fonctions méromorphes sur l'une de ces surfaces.

Inversement nous venons de montrer qu'à toute surface de Riemann *signée* S (c'est-à-dire sur laquelle on a marqué des points isolés e_n affectés de nombres quelconques l_n) correspond un groupe fuchsoides défini à une homographie près. Le nom de variable uniformisante donné à z est justifié par le fait que toute fonction méromorphe sur S est une fonction uniforme de z : c'est une fonction automorphe du groupe correspondant. Remarquons qu'en un sommet parabolique qui correspond à un point e_n , une fonction méromorphe sur toute S , même aux points e_n , devient avec la variable principale t du § 16, une fonction $\varphi(t)$ méromorphe dans un certain cercle de centre $t = 0$ et méromorphe aussi à l'origine.

Pour avoir un exemple de fonction automorphe du groupe pour laquelle le développement $\varphi(t)$ admette $t = 0$ comme point essentiel, il faut faire appel à une fonction uniforme sur S , mais admettant e_n comme point singulier essentiel. L'existence de telles fonctions sera établie ultérieurement dans le cas des surfaces de Riemann algébroides.

CHAPITRE IV

APPLICATIONS DE L'UNIFORMISATION

25. — Nous allons appliquer les résultats du chapitre précédent à une extension du théorème de Landau, ce qui permettra d'obtenir des inégalités vérifiées par certaines fonctions linéairement polymorphes faisant la représentation d'une surface de Riemann sur un réseau de polygones fuchsoides. Nous étudierons d'autre part, comme fonctions de la variable uniformisante z , les fonctions uniformes sur une surface algébroides donnée.

A. — Théorème de Landau-Carathéodory.

26. — La méthode des familles normales, qui permet de démontrer le théorème de Landau, s'applique a fortiori quand il y a *plus de deux valeurs exceptionnelles* : le rayon maximum R d'un cercle de centre O où une fonction $f(x)$, qui admet au voisinage de l'origine un développement de la forme $a_0 + a_1 x + \dots$ (a_0, a_1 donnés, $a_1 \neq 0$), est holomorphe et ne prend aucune valeur d'un certain ensemble E , satisfait à $R < B(a_0, a_1; E)$. E comprend au moins trois valeurs, dont la valeur infinie. Il peut être fini ou infini. Si les seules valeurs exceptionnelles de $f(x)$ dans le cercle $|x| < R$ sont celles de E , E est fermé et son complémentaire $C(E)$ dans un plan complexe auxiliaire (t) forme un domaine connexe D , domaine des valeurs prises.

Les rayons maxima correspondant à toutes les fonctions de la famille considérée admettent une *borne exacte* $A(a_0, a_1; E)$, et cette borne est *atteinte*, c'est-à-dire qu'il existe une fonction de la famille pour laquelle $R = A$.

Soit en effet f_n une fonction pour laquelle $R_n > A - \frac{1}{n}$. De la suite f_n on extrait une suite partielle qui converge vers une fonction limite f , nécessairement différente d'une constante, et pour laquelle $R = A$, car, dans tout cercle $|x| < A - \frac{1}{n}$, f est holomorphe et ne prend aucune valeur de l'ensemble E .

27. — *L'obtention de la borne exacte* est liée à un *problème d'uniformisation*. Nous supposons E fermé et son complémentaire D dans le plan complexe (t) connexe, ce qui ne restreint pas la généralité : si en effet $f(x)$ ne prend aucune valeur appartenant à un ensemble E non fermé,

elle ne prend non plus aucune valeur de la fermeture de E ; et si, E étant fermé, son complémentaire $C(E)$ est formé de plusieurs portions connexes, en nombre fini ou infini, les valeurs prises par f se trouvent toutes dans la portion connexe D qui contient a_0 . On peut remplacer E par $C(D)$. Les fonctions $f(x)$ considérées ont toutes leurs valeurs dans D , mais ne prennent pas nécessairement toute valeur de D .

On peut former, de plusieurs manières, une fonction $t = \chi(z)$, holomorphe dans le cercle $|z| < 1$, dont le domaine des valeurs, projeté sur le plan (t) , soit D , et dont la fonction inverse $z = \omega(t)$, linéairement polymorphe, n'ait pas de point critique dans D .

On peut par exemple rendre D simplement connexe au moyen du système de coupures du chapitre précédent, section B, former la surface simplement connexe de recouvrement D^∞ en reliant des exemplaires identiques le long des bords des coupures, chaque exemplaire n'étant relié à l'assemblage déjà formé que par un bord de coupure, et représenter, par $z = \omega(t)$, D^∞ sur le cercle $|z| < 1$. La possibilité d'une représentation sur le plan (z) pointé est à exclure puisque, E comprenant au moins trois points, il y a au moins trois points du plan (t) non recouverts par D^∞ , z est une fonction uniforme et régulière sur D^∞ ; considérée comme fonction de t dans D , z est linéairement polymorphe et sans point critique, puisque D^∞ n'admet pas de point de ramification (les points de ramification d'ordre infini qui correspondraient à des points isolés de E ne font pas partie de D^∞ : ce sont des points frontière). D est représenté par z sur un réseau de polygones fuchsoides, équivalents par rapport à un certain groupe G . $t = \chi(z)$ est une fonction automorphe du groupe G qui ne prend pas la même valeur en deux points non équivalents.

On peut aussi définir z comme fonction linéairement polymorphe sur une surface de Riemann, par exemple sur une surface algébroïde. Supposons que E contienne un ensemble \mathcal{E} de points isolés, et construisons une surface de Riemann algébroïde F à m feuillets égaux à $D + \mathcal{E}$, les points de ramification se projetant sur \mathcal{E} et aucun point ordinaire de la surface ne se projetant en un point de \mathcal{E} . Soit z une fonction linéairement polymorphe sur F , admettant en chaque point de ramification une singularité du type parabolique, et représentant F sur un réseau de polygones fuchsoides équivalents par rapport à un groupe Γ . z est aussi une fonction linéairement polymorphe de t dans D , et elle n'y admet aucun point critique, puisque ceux-ci ne peuvent provenir que des points de ramification de F ou des points critiqués de z sur F . $t = \chi(z)$ est une fonction automorphe du groupe Γ qui prend m fois chaque valeur de D dans un domaine fondamental.

Dans chacun de ces procédés la fonction z obtenue n'est définie qu'à une homographie près transformant le cercle $|z| < 1$ en lui-même. Mais de

plus les fonctions $z = \omega(t)$ ou $t = \chi(z)$ obtenues dans l'une ou l'autre méthode *ne sont pas distinctes* : Γ est un sous-groupe de G , et un domaine fondamental de Γ peut s'obtenir par la réunion de m domaines fondamentaux adjacents de G . Cela explique que $\chi(z)$ puisse intervenir, comme nous le constaterons, dans l'expression des fonctions $f(x)$ pour lesquelles la borne exacte est atteinte, et $\omega(t)$ dans l'expression de la borne. z n'étant définie qu'à une homographie près, nous pouvons supposer qu'une branche de z choisie est nulle pour $t = a_0$. Soit $z = \omega(t; a_0, E)$ la fonction multiforme ainsi définie. Pour simplifier l'écriture nous continuerons dans la suite à la désigner par $z = \omega(t)$, et à écrire $t = \chi(z)$ sa fonction inverse.

Théorème : *Si $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots$ (a_0 étranger à E ; $a_1 \neq 0$) converge dans un cercle de rayon R et n'y prend aucune valeur de l'ensemble E ,*

$$R \leq \frac{1}{|\omega'(a_0) \times a_1|}$$

En effet, la fonction $\Omega(x) = \omega(f(x))$ est holomorphe pour $|x| < R$: si x décrit un chemin fermé intérieur au cercle $|x| = R$, $f(x)$ décrit une courbe fermée du plan (t), intérieure à D et réductible à un point par déformation continue; donc la détermination de ω n'a pas changé. $\Omega(x)$ admet dans le cercle $|x| < R$ un développement de la forme $A_1 x + \dots$ et vérifie d'autre part $|\Omega(x)| < 1$. Donc $A_1 \leq \frac{1}{R}$. A_1 étant égal $\omega'(a_0) \times a_1$ le résultat énoncé est établi.

L'égalité n'est possible que si $\Omega(x)$ est de la forme $e^{i\theta} \frac{x}{R}$, R étant le rayon maximum, c'est-à-dire si $f(x) = \chi\left(e^{i\theta} \frac{x}{R}\right)$.

La borne exacte est donc atteinte par des fonctions automorphes dans le cercle $|x| < R$, et qui y admettent comme seules valeurs exceptionnelles les valeurs de E . Ceci prouve que si l'on a deux ensembles fermés E_1, E_2 , dont les complémentaires sont connexes, et tels que $E_1 \subset E_2$ au sens strict, les rayons maxima correspondants R_1 et R_2 vérifient l'inégalité $R_1 > R_2$. On vérifierait sans peine que, si l'on n'avait pas supposé $\omega(a_0) = 0$, on aurait obtenu pour R une borne supérieure qui n'est pas la borne exacte. Le résultat s'étend d'autre part aux séries de la forme $a_0 + a_n x^n + \dots$ (a_0 étranger à E , $a_n \neq 0$), pour lesquelles on obtient l'inégalité :

$$R \leq \frac{1}{\sqrt[n]{|\omega'(a_0) \times a_n|}}$$

28. — Application : Soit une famille de domaines simplement connexes D_λ , dépendant du paramètre λ , dont la frontière comprend plus d'un point, et qui contiennent le point x_0 . On peut les représenter conformément sur

un cercle de centre O par des fonctions $X = F_\lambda(x)$ de manière que x_0 ait pour homologue $X = 0$, et que $\left(\frac{dX}{dx}\right)_{x_0} = 1$. La fonction qui fait la représentation est déterminée de manière unique, ainsi que le rayon R_λ du cercle.

Si $f(x)$, égale au voisinage de x_0 à $a_0 + a_1(x - x_0) + \dots$ est holomorphe dans D_λ et n'y prend aucune valeur de l'ensemble E, $f(x)$ devient par la représentation $F(X) = a_0 + a_1 X + \dots$, qui est holomorphe dans un cercle de rayon R_λ et n'y prend aucune valeur de E. On a ainsi une inégalité pour R_λ , et par suite pour λ .

Prenons pour D_λ un angle de sommet O, d'ouverture 2λ , contenant $x_0 = r e^{i\varphi}$ sur sa bissectrice. On passe de x à X par les transformations

$$x_1 = x e^{-i\varphi}; \quad x_2 = x_1^{\pi/2\lambda}; \quad X = k \frac{x_2 - r_2}{x_2 + r_2}$$

avec $r_2 = r^{\frac{\pi}{2\lambda}}$. La dérivée $\frac{dX}{dx} = k \frac{2r_2}{(x_2 + r_2)^2} \frac{\pi}{2\lambda} (x_1)^{\frac{\pi}{2\lambda} - 1} e^{-i\varphi}$,
ce qui détermine $k = e^{i\varphi}$. $\frac{4\lambda r}{\pi}$ et $R_\lambda = \frac{4\lambda r}{\pi}$.

La valeur maximum de λ pour laquelle il existe une fonction $f(x)$ ayant les propriétés énoncées est donc $\frac{\pi}{4r} \cdot \frac{1}{|\omega'(a_0) \times a_1|}$. Le résultat peut s'interpréter même si le maximum trouvé est $> \pi$ en admettant que le domaine D_λ puisse se recouvrir. Le maximum est atteint pour des fonctions qui admettent des singularités sur les côtés de l'angle, et par suite pour des fonctions entières on a l'inégalité stricte $\lambda < \frac{\pi}{4r} \frac{1}{|\omega'(a_0) \times a_1|}$

Faisons varier x_0 sur la bissectrice de l'angle; on peut garder, comme nous l'avons vu, la même fonction ω , et on obtient :

$$\lambda \leq \underline{\text{Min.}} \frac{\pi}{4r} \frac{1}{|\omega'(f(re^{i\varphi})) \times f'(re^{i\varphi})|}$$

Il en résulte les conséquences immédiates suivantes :

les fonctions holomorphes dans un angle $(\alpha - \lambda, \alpha + \lambda)$ de sommet O et n'y prenant aucune valeur de E vérifient en tout point $r e^{i\varphi}$ de l'angle :

$$\frac{1}{r} \times \frac{1}{|\omega'(f(re^{i\varphi})) \times f'(re^{i\varphi})|} > \frac{4}{\pi} \text{Min.} \left\{ \begin{array}{l} |\alpha + \lambda - \varphi| \\ |\alpha - \lambda - \varphi| \end{array} \right\};$$

partant d'une fonction connue ne prenant aucune valeur de E, on en déduit une inégalité vérifiée par les fonctions $\omega(t)$ correspondant à l'ensemble E. Par exemple, si E (sauf le point à l'infini qui par hypothèse fait partie de E) est contenu dans le cercle $|t| < 1$, l'utilisation de e^x

montre que $\frac{1}{r |\omega'(e^x) \cdot e^x|} > \frac{4}{\pi} \text{Min.} \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{\pi}{2} - \varphi \right| \\ \left| \frac{\pi}{2} + \varphi \right| \end{array} \right\}$ lorsque $x = re^{i\varphi}$ et
que $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

29. — On remarque que la borne exacte a été obtenue par la théorie de l'uniformisation, donc en faisant intervenir la *représentation conforme*. Cela est dans la nature de la question : la formation de fonctions holomorphes dans un domaine simplement connexe C, et y prenant comme valeurs celles d'un domaine connexe D, est liée à un problème de représentation conforme. Une telle fonction représente en effet C sur un domaine simplement connexe, à un nombre fini ou infini de feuillets, qui se projette en D sur le plan complexe. Donc, étant donné D, la formation d'une fonction répondant à la question se ramène aux deux problèmes suivants : construction d'un domaine simplement connexe projeté sur D; représentation de ce domaine sur le domaine C.

Ce sont ces deux problèmes que nous avons résolus en construisant la surface de recouvrement D^∞ et en la représentant sur le cercle unité du plan (z).

30. — **Cas des fonctions multiformes** : La démonstration du théorème de Landau utilise le fait que, pour les fonctions $f(x)$ considérées, le domaine de variation de x est simplement connexe : c'est de là que résulte l'holomorphie de $\Omega(x) = \omega(f(x))$, chaque contour fermé décrit par x étant réductible à un point par déformation continue. Pour une *fonction multiforme*, qu'on considérera comme fonction uniforme d'un point de sa surface de Riemann, un chemin fermé tracé sur la surface de Riemann n'est plus toujours réductible à un point. On ne peut démontrer par la méthode précédente qu'un résultat plus restreint.

Théorème : Soit $f(x)$ une fonction algébroïde à m branches, holomorphe pour $|x| \leq R$. Si le domaine des valeurs de $f(x)$, projeté sur le plan complexe (t), n'entoure aucun point de l'ensemble $E^{(1)}$, on a l'inégalité (2) :

$$R \leq \frac{m}{\left| \sum_{i=1}^m \omega'(a_i) \cdot a_i \right|}$$
. Nous supposons qu'il n'y a pas de point de ramification projeté sur $x = 0$. Chaque branche de f admet au voisinage de $x = 0$ un développement de la forme $f_i(x) = a_i + a_i^1 x + \dots; i = 1, 2, \dots, m$.

La surface de Riemann F de $f(x)$ est formée de m feuillets circulaires, communiquant en des points de ramification, et est limitée par une ou plusieurs courbes projetées sur le cercle $|x| = R$. Il résulte des hypothèses faites que $\Omega(x) = \omega(f(x))$ est holomorphe sur la surface de Riemann et y vérifie $|\Omega| < 1$.

En intégrant $\frac{\Omega(x)}{x^{p+1}}$ le long de la frontière Γ de F , on obtient :

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma} \frac{\Omega(x)}{x^{p+1}} dx \right| = \left| \sum \text{résidus de } \frac{\Omega(x)}{x^{p+1}} \right| \leq \frac{m}{R^p}.$$

1. C'est-à-dire s'il est impossible de tracer dans ce domaine une courbe fermée qui ne soit pas réductible à un point par déformation continue dans C (E).

2. $\omega(t)$ désigne une fonction quelconque correspondant à E, pas nécessairement nulle en un point déterminé.

Or, au voisinage de l'origine, chaque branche de Ω est développable suivant

$$\Omega_i(x) = \omega(f_i(x)) = \omega(a_0^i) + \omega'(a_0^i) \cdot a_1^i x + \dots$$

Pour $p=0$, on trouve l'inégalité $\left| \sum_{i=1}^m \omega(a_0^i) \right| \leq m$, qui est évidente puisque chaque $|\omega|$ est < 1 .

Pour $p=1$,

$$\left| \sum_{i=1}^m \omega'(a_0^i) \cdot a_1^i \right| \leq \frac{m}{R} \quad \text{ou} \quad R \leq \frac{m}{\left| \sum_{i=1}^m \omega'(a_0^i) \cdot a_1^i \right|}$$

B. — *Fonctions méromorphes dans un domaine simple d'ordre de connexion quelconque.*

Nous allons démontrer quelques lemmes qui seront utilisés dans la suite.

31. — Lemme I : *Tout domaine simple D dont la frontière comprend au moins un point peut être obtenu comme limite d'une suite de domaines D_n vérifiant $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \dots$, chaque D_n étant d'ordre de connexion fini et limité par un nombre fini de cercles ou d'arcs de cercles centrés en des points étrangers à D.*

Il est loisible de supposer que le point à l'infini n'est pas intérieur à D. Supposons par exemple que ce soit un point frontière, et soit O un point quelconque de D. Soit R_n une suite croissante, qui $\rightarrow \infty$ si $n \rightarrow \infty$, et ε_n une suite décroissante qui $\rightarrow 0$. Considérons la partie Δ_n de D située à l'intérieur du cercle Γ_n , de centre O, de rayon R_n , la partie C_n du complémentaire C(D) de D située dans ce cercle ou sur son pourtour. L'ensemble fermé borné C_n peut être recouvert par un nombre fini de cercles γ_n , de rayon ε_n , centrés en des points de C_n . Si on retranche à Δ_n les points appartenant aux cercles fermés γ_n , on obtient un ou plusieurs domaines connexes, limités par des cercles en nombre fini centrés en des points étrangers à D, et par le cercle de rayon R_n , qu'on considère comme centré au point à l'infini. Soit D_n celui de ces domaines qui contient O; D_n existe dès que ε_n est assez petit; les points de sa frontière sont, ou bien sur le cercle Γ_n de rayon R_n , ou bien à distance n'excédant pas ε_n de points étrangers à D; il est visible que tout domaine fermé Δ complètement intérieur à D, donc borné, finit par être complètement intérieur à D_n . Donc $D_n \rightarrow D$.

En extrayant de la suite D_n ainsi obtenue une suite partielle, on peut évidemment satisfaire à la condition que chaque domaine, ainsi que sa frontière, soit intérieur au suivant⁽³⁾.

3. Si D est d'ordre de connexion fini, on peut le représenter conformément sur un domaine limité par des cercles.

Lemme II : Avec les notations du lemme précédent, toute fonction holomorphe dans le domaine fermé D_n peut être approchée d'aussi près qu'on veut dans le domaine fermé D_{n-1} par une fonction holomorphe dans tout D .

Soit $f(x)$ holomorphe dans le domaine fermé D_n limité par les cercles ou les arcs de cercle $\Gamma_n, \gamma_n^1, \gamma_n^2, \dots, \gamma_n^p$. En tout point intérieur à D_n , on a :

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \left[\int_{\Gamma_n^+} \frac{f(u) du}{u-x} + \int_{\gamma_n^1} \frac{f(u) du}{u-x} + \dots + \int_{\gamma_n^p} \frac{f(u) du}{u-x} \right]$$

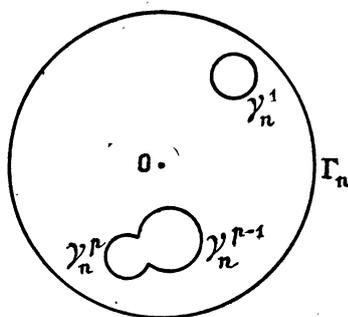


Fig. 18

Dans le domaine fermé D_{n-1} , dont la frontière est à distance positive de celle de D_n , chaque intégrale peut être développée en série absolument et uniformément convergent suivant la méthode employée dans la théorie des séries de Laurent (cf. par exemple Valiron [1], p. 387)

$$\int_{\Gamma_n^+} \frac{f(u) du}{u-x} = \int_{\Gamma_n^+} \frac{f(u)}{u} \left(1 + \frac{x}{u} + \frac{x^2}{u^2} + \dots \right) du$$

est une série entière en x qu'on approche par le polynôme formé par les premiers termes pris en nombre convenable. Soit a_n^1 le centre de γ_n^1 .

$$\int_{\gamma_n^1} \frac{f(u) du}{u-x} = \int_{\gamma_n^1} \frac{f(u) du}{u-a_n^1-(x-a_n^1)} = -\frac{1}{x-a_n^1} \int_{\gamma_n^1} f(u) \left(1 + \frac{u-a_n^1}{x-a_n^1} + \dots \right) du$$

et admet un développement en série suivant les puissances de $\frac{1}{x-a_n^1}$. On peut encore l'approcher d'aussi près qu'on veut par un polynôme en $\frac{1}{x-a_n^1}$.

On opère de même pour les autres intégrales. Finalement, ϵ étant donné, on voit qu'il est possible de construire une fonction $g(x)$ telle que, dans le domaine fermé D_{n-1} , $|f(x) - g(x)| < \epsilon$.

$g(x)$ qui est la somme de polynômes en x et en $\frac{1}{x-a_n^p}$, a_n^p désignant le centre de γ_n^p , est une fonction holomorphe dans tout D puisque ses seuls pôles, qui sont le point à l'infini et les a_n^p , sont étrangers à D .

Ce lemme permet d'établir simplement les deux résultats ci-dessous.

32. — Lemme III : *Il existe des fonctions méromorphes dans D, y admettant des pôles donnés avec des parties principales données.*

Ce résultat se démontre par la même méthode que le théorème de Mittag-Leffler dont il constitue une extension.

Soient b_p les pôles, et $P(x, b_p)$ les parties principales correspondantes. Les b_p sont évidemment des points isolés de D.

La série $\sum_{p=1}^{\infty} P(x, b_p)$ n'étant pas en général absolument et uniformément convergente dans un domaine intérieur à D et ne contenant pas de points b_p , on emploie le procédé suivant, qu'il suffit d'appliquer à partir d'une valeur quelconque de n .

Soient b_{p_1}, \dots, b_{p_q} les pôles contenus dans $D_n - D_{n-1}$ (on suppose, ce qui est loisible, qu'aucun pôle ne se trouve sur les frontières des D_n). La somme $f_n(x) = P(x, b_{p_1}) + P(x, b_{p_2}) + \dots + P(x, b_{p_q})$ qui est holomorphe dans D_{n-1} , peut être approchée à $\frac{1}{n^2}$ près dans D_{n-2} par $g_n(x)$ holomorphe dans tout D.

Dès lors la série $\sum_n' (f_n(x) - g_n(x))$ définit une fonction méromorphe dans D admettant les pôles voulus avec les parties principales requises⁽⁴⁾.

On traiterait de la même manière le cas où les b_p seraient des *points essentiels isolés*.

Lemme IV : *Il existe des fonctions holomorphes dans D, y admettant des zéros $a_1, a_2, \dots, a_p, \dots$ donnés⁽⁵⁾.*

Ce résultat étend le théorème de Weierstrass. Une fonction $f(x)$ répondant à la question sera obtenue comme produit de facteurs primaires, dont chacun ne s'annule qu'en un zéro déterminé.

Soient $a_{p_1}, a_{p_2}, \dots, a_{p_q}$ les zéros contenus dans $D_n - D_{n-1}$.

Si a_{p_1} par exemple est extérieur à Γ_{n-1} , $\log(x - a_{p_1})$ est uniforme dans D_{n-1} ; choisissant une de ses déterminations, on peut déterminer $g_{p_1}(x)$ holomorphe dans D tel que $|\log(x - a_{p_1}) + g_{p_1}(x)| < \frac{1}{(p_1)^2}$ dans D_{n-2} .
Le facteur primaire correspondant sera $e^{\log(x - a_{p_1}) + g_{p_1}(x)} = (x - a_{p_1}) e^{g_{p_1}(x)}$

Si a_{p_1} est par exemple intérieur à γ_{n-1}^1 , soit α_{p_1} un point quelconque, étranger à D, situé dans γ_{n-1}^1 , par exemple le centre de γ_{n-1}^1 ; $\log \frac{x - \alpha_{p_1}}{x - a_{p_1}}$ est

4. L'indice ' signifie que la substitution à f_n de $f_n - g_n$ peut n'être faite qu'à partir d'un certain rang.

5. Si un zéro est multiple, on le fait figurer dans la suite un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité.

uniforme dans D_{n-1} , et l'on définit un facteur primaire

$$e^{\log \frac{x-a_{p_1}}{x-\alpha_{p_1}} + g_{p_1}(x)} = \frac{x-a_{p_1}}{x-\alpha_{p_1}} e^{g_{p_1}(x)} \quad \text{tel que}$$

$$\text{dans } D_{n-2} : \left| \log \frac{x-a_{p_1}}{x-\alpha_{p_1}} + g_{p_1}(x) \right| < \frac{1}{(p_1)^2}.$$

Soit P_p le facteur primaire ainsi associé à chaque a_p .

Il est visible que le produit $\prod_{p=1}^{\infty} P_p$ converge absolument et uniformément dans tout domaine fermé intérieur à D , et définit une fonction holomorphe dans D , admettant comme zéros les a_p .

Remarquons que les lemmes III et IV sont évidents si D est d'ordre de connexion fini, comme on le voit en représentant conformément D sur un domaine limité par un nombre fini de cercles. Le lemme IV montre d'autre part l'existence de fonctions holomorphes admettant D comme domaine d'existence, et *non prolongeables* au delà : il suffit de choisir les a_p tels que tout point frontière de D soit point d'accumulation des a_p , et par suite point singulier pour $f(x)$.

C. — *Fonctions uniformes sur une surface de Riemann algébroïde.*

33. — Soit une surface algébroïde F que nous uniformisons à l'aide des fonctions fuchsoides. Nous représentons la surface de recouvrement F^∞ sur un réseau de polygones fuchsoides par une variable uniformisante z , linéairement polymorphe sur F . Si z est sans point critique sur F , à tout point de F correspondent une infinité de points z équivalents mais tous intérieurs au cercle $|z|=1$, et à tout point intérieur au cercle correspond un point de F . Les fonctions méromorphes sur F ne sont autres que les fonctions automorphes du groupe fuchsoides G formé par les substitutions que subit z .

Si z admet en des points e_n de F des singularités paraboliques, les points e_n ont pour homologues des sommets paraboliques, situés sur le cercle $|z|=1$, et les fonctions méromorphes sur F ne coïncident pas avec les fonctions automorphes les plus générales du groupe G : il faut imposer une condition relative au comportement des fonctions automorphes au voisinage d'un sommet parabolique.

Nous utiliserons donc une variable uniformisante z *sans point critique* sur F . L'étude des fonctions méromorphes sur F se ramène à l'étude des fonctions automorphes du groupe associé G .

On peut obtenir des fonctions automorphes de G comme quotients de séries Θ de Poincaré; mais les zéros d'une série Θ étant mal connus, on ne peut mettre en évidence dans les fonctions ainsi construites les pôles,

en nombre en général infini, introduits par les zéros du dénominateur. Pour éviter cette difficulté, nous emploierons dans la suite, au dénominateur, la fonction particulière $\frac{dx}{dz}$.

Le domaine D suivant lequel F se projette sur le plan complexe (x) ne peut comprendre tout le plan (x). Nous supposons que le point à l'infini n'en fait pas partie. x , affixe d'un point de F, est une fonction automorphe de z , holomorphe pour $|z| < 1$. Sa dérivée $\frac{dx}{dz}$, également holomorphe pour $|z| < 1$, vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\frac{d x (Tz)}{d (Tz)} = \frac{d x (z)}{dz} \cdot \frac{dz}{d (Tz)}$$
 C'est une fonction Θ appartenant à l'exposant 1. Ses zéros correspondent aux points de ramification de F : en effet, soit un point de ramification d'ordre $v_i - 1$, projeté sur x_i , et correspondant à z_i . La variable d'uniformisation locale τ , définie par $x - x_i = \tau^{v_i}$, est liée à $z - z_i$ par une relation de la forme :

$$z - z_i = \tau (\alpha_0 + \alpha_1 \tau + \dots) \quad \alpha_0 \neq 0.$$

$\frac{dx}{dz}$ admet donc en z_i un zéro d'ordre $v_i - 1$. Il est facile de former une fonction Θ appartenant à l'exposant 1, sans zéros, et admettant des pôles simples aux points qui proviennent des points de ramification de F ou des points superposés aux points de ramification. Soit $f(x)$ une fonction holomorphe dans D qui admet pour zéros simples les projections des points de ramification :

$\frac{dx}{f(x)}$ répond évidemment à la question. Remarquons que si F, à m feuillets, n'admet que des points de ramification d'ordre $m - 1$, on peut former une fonction Θ qui n'a ni zéros ni pôles : c'est $\frac{\left(\frac{dx}{dz}\right)^m}{(f(x))^{m-1}}$, qui appartient à l'exposant m .

34. — A l'aide des considérations précédentes il est facile de former une fonction \mathcal{Y} holomorphe sur F sauf en un point donné qu'elle admet pour pôle ou point singulier essentiel isolé avec une partie principale donnée. Soit M_0 le point de F, projeté sur x_0 , auquel correspond z_0 dans le polygone fuchsöide P. Tous les équivalents de z_0 sont distincts, puisque le groupe G ne contient pas de substitutions elliptiques. On obtient

une fonction répondant à la question par $\mathcal{Y} = \frac{(f(x))^m}{\left(\frac{dx}{dz}\right)^m} \Theta(z)$, $\Theta(z)$ dési-

gnant une série de Poincaré appartenant à l'exposant $m \geq 2$, formée à partir d'une fonction génératrice $\mathbf{H}(z)$ admettant en z_0 un pôle ou un

point essentiel et holomorphe en dehors de ce point dans le cercle $|z| \leq 1$.

\mathcal{Y} doit admettre au voisinage de M_0 un développement de la forme

$$\sum_1^{\infty} \frac{\alpha_n}{\tau^n} + \Phi(\tau), \quad \tau \text{ désignant la variable d'uniformisation locale et } \Phi(\tau) \text{ une}$$

fonction régulière en τ . Dans ce développement la série $\sum_1^{\infty} \frac{\alpha_n}{\tau^n}$ est connue.

Le cas du pôle correspond à des α_n tous nuls à partir d'un certain rang. \mathcal{Y} , considéré comme fonction de z , doit admettre au voisinage de z_0 un

développement de la forme $\sum_1^{\infty} \frac{\beta_n}{(z-z_0)^n} + \Psi(z-z_0)$, où la série $\sum_1^{\infty} \frac{\beta_n}{(z-z_0)^n}$

est déterminée, puisque $\sum_1^{\infty} \frac{\alpha_n}{\tau^n}$ est connue. Or, dans : $\Theta(z) = \sum_T H(Tz) \left(\frac{dTz}{dz} \right)^m$

seul le terme $H(z)$ admet une singularité en z_0 . L'égalité :

$$H(z) = \frac{\mathcal{Y} \left(\frac{dx}{dz} \right)^m}{(f(x))^m} - \sum' H(Tz) \left(\frac{dTz}{dz} \right)^m \quad \text{où } \sum' \text{ désigne la somme étendue}$$

à toutes les substitutions du groupe autres que la transformation identique, montre que $H(z)$ est déterminé, à une fonction près qui est régulière en z_0 et holomorphe pour $|z| \leq 1$.

Par addition, on peut obtenir des fonctions holomorphes sur F sauf en un nombre fini de points. Mais on peut aussi étendre le théorème de Mittag-Leffler, relatif à une infinité de points singuliers.

Théorème : *Il existe des fonctions holomorphes sur F sauf en des points isolés donnés b_p qu'elles admettent pour pôles ou points singuliers essentiels isolés, avec des parties principales données.*

On considérera le domaine D , projection de F sur le plan (x) , comme limite d'une suite de domaines D_n emboîtés et limités par des cercles centrés en des points étrangers à D . Il n'y a dans chaque D_n qu'un nombre fini de projections de points b_p . Soit y une fonction algèbroïde holomorphe sur F , et admettant F comme surface de Riemann, et soit $P(x, y, b_p)$ une fonction holomorphe sur F sauf au point b_p qu'elle admet pour pôle ou point essentiel avec la partie principale requise.

b_{p_1}, \dots, b_{p_q} désignant les pôles ou points essentiels projetés sur $D_n - D_{n-1}$, la somme $f_n(x, y) = P(x, y, b_{p_1}) + \dots + P(x, y, b_{p_q})$ est holomorphe dans la portion F_{n-1} de F projetée sur le domaine fermé \bar{D}_{n-1} . Elle y admet une expression de la forme ⁽⁶⁾ : $f_n(x, y) = A_0(x) + \dots + A_{\mu-1} y^{\mu-1}$, les A étant des fonctions de x qui peuvent être méromorphes. Chaque A n'admet dans le domaine fermé \bar{D}_{n-1} qu'un nombre fini de pôles, et peut

6. μ désigne le nombre de feuillets de F .

être approchée d'aussi près qu'on veut dans D_{n-1} par la somme des parties principales relatives à ses pôles et d'une fonction holomorphe dans tout D . Comme d'autre part y est borné dans F_{n-1} , on voit que $f_n(x, y)$ peut être approché à $\frac{1}{n^2}$ près dans F_{n-2} par une fonction $g_n(x, y)$ qui est holomorphe sur F .

La série $\sum_n (f_n(x, y) - g_n(x, y))$ fournit comme plus haut une fonction répondant à la question.

On obtiendrait évidemment toutes les autres par addition à celle-ci de fonctions quelconques holomorphes sur F .

35. — Certains des résultats ci-dessus s'appliquent à des surfaces de Riemann *plus générales* que les surfaces algébroides. Soit S une surface de Riemann, et D le domaine du plan complexe (x) formé par les points qui sont projection d'au moins un point de S . On pourra dans le cas suivant former une fonction Θ sans zéros appartenant à l'exposant 1 :

D ne comprend pas tout le plan (x) ; on suppose alors que le point à l'infini n'en fait pas partie. $\frac{dx}{dz}$ est holomorphe pour $|z| < 1$, comme $x(z)$, et s'annule aux points de ramification. Si les projections x_i des points de ramification sur le plan (x) ne s'accumulent que sur la frontière de D , il existe une fonction $f(x)$ holomorphe dans D et admettant les x_i pour

zéros simples. $\frac{dx}{f(x)}$ répond à la question.

On en déduit l'existence de fonctions holomorphes sur S sauf en un nombre fini de points donnés, qu'elles admettent comme pôles ou points essentiels avec des parties principales données.

INTÉGRALES ABELIENNES — APPLICATIONS

36. — La théorie des intégrales abéliennes sur une surface de Riemann ouverte a été principalement abordée par Nevanlinna et Myrberg. Nevanlinna a étudié le cas où la frontière idéale de la surface a une *mesure harmonique nulle*, et établi l'existence d'intégrales abéliennes de première espèce dont l'intégrale de Dirichlet a une valeur finie; toutes les intégrales de cette sorte sont données par l'expression $\sum_1^{\infty} c_n \varphi_n$, où les c_n sont des constantes arbitraires telles que $\sum_1^{\infty} |c_n|^2 < \infty$, et les φ_n forment un système orthogonal complet. (Nevanlinna, [2] et [3]). Myrberg, dans une série de publications, a étudié le cas des surfaces symétriques, en utilisant l'uniformisation de la surface par un groupe de seconde classe, et le cas des surfaces algébroides entières pour lesquelles la distribution des points de ramification satisfait à certaines hypothèses simplificatrices (Myrberg, [1], [2], [3] et [4]).

Nous allons ici démontrer, sur une surface algébroïde quelconque F, l'existence d'intégrales abéliennes de première ou seconde espèce qui admettent des périodes arbitrairement données, résultat déjà obtenu par Myrberg pour certaines surfaces algébroides entières. Nous en déduirons l'existence sur F de fonctions méromorphes admettant des zéros et pôles donnés avec des ordres de multiplicité donnés.

37. — **Généralités** : Soit S une surface de Riemann quelconque étalée sur le plan (x). On appelle *intégrale abélienne de première ou deuxième espèce* sur S l'intégrale $I = \int_{M_0}^M \mathcal{Y} dx$ d'une fonction \mathcal{Y} méromorphe sur S et à résidus nuls. L'intégrale est dite de première espèce si elle est partout régulière. Sa valeur en un point M dépend du chemin d'intégration, une fois fixée l'origine M_0 , et les diverses déterminations diffèrent entre elles de constantes appelées *modules de périodicité*.

Soit F une surface algébroïde à m feuillets, dont la projection sur le plan (x) est un domaine D. La frontière de D comprend au moins un point : nous supposons qu'elle comprenne le point à l'infini. Et, comme au chapitre IV, nous considérons D comme limite d'une suite de domaines limités chacun par un nombre fini de courbes formées d'un nombre fini de cercles ou d'arcs de cercles centrés en des points étrangers à D, et tels que D_n et sa frontière soient intérieurs à D_{n+1} ; D_n est limité par un contour extérieur Γ_n , à l'extérieur duquel se trouve le point à l'infini étranger à D,

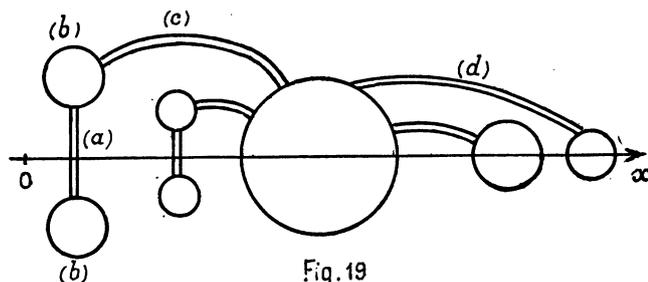
et par des contours intérieurs $\gamma_n, \gamma'_n, \gamma''_n \dots$: on suppose qu'à l'intérieur de chacun d'eux se trouve au moins un point étranger à D , sinon on supprimerait ceux pour lesquels la condition n'est pas réalisée.

Soit F_n la portion de surface F projetée, sur le domaine D_n et sa frontière; elle est connexe dès que n est assez grand, et on peut supposer qu'il en est ainsi dès F_1 . $F = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n$.

Chaque F_n est une surface à bords (munie de ses bords) ou ce que Stoïlow appelle un *domaine polyédrique* (1). Les points de F projetés sur un contour, par exemple γ_n , de D_n , forment une ou plusieurs courbes $\gamma'_n, \gamma''_n \dots$ en nombre au plus égal à m . F_n est ainsi limité par l_n courbes. Soit p_n son genre (nombre maximum de courbes simples fermées disjointes que l'on peut tracer sur F_n sans le morceler). L'ordre de connexion est $2p_n + l_n$.

Remarquons que la suite F_n ne forme pas en général une suite de domaines polyédriques d'approximation de F , le nombre de domaines qui composent $F_{n+1} - F_n$ n'étant pas en général égal au nombre de contours de F_n .

38. — Modules principaux pour F_n : Soit une fonction y_n , continue sur F_n et holomorphe à l'intérieur, sauf en un nombre fini de points qui sont des pôles à résidus nuls. L'intégrale $I_n = \int y_n dx$ présente des modules



de périodicité, dont nous allons établir qu'ils se calculent tous à partir de $2p_n + l_n - 1$ d'entre eux. On peut en effet faire une représentation canonique de F_n et utiliser les p_n systèmes de coupures (a, b, c) et les $l_n - 1$ coupures (d) représentées *fig. 19*. La figure est faite pour

$$p_n = 2, \quad l_n = 3$$

Les coupures utilisées sont les mêmes qu'au chapitre III, avec en plus des coupures (d) joignant les cercles images des contours de F_n , et qui n'existaient pas au chapitre III, puisqu'on avait alors $l_n = 1$.

On suppose que toutes les coupures (c) et (d) ont une extrémité sur un même cercle image d'un contour de F_n . Aux coupures (a, b, c) et (d)

1. Cf. chap. III et Stoïlow, [1].

correspondent sur F_n des coupures représentées fig. 20. F_n est ainsi transformée en une surface simplement connexe F'_n .

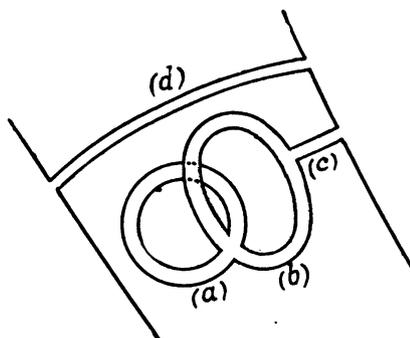


Fig. 20

I_n est uniforme sur F'_n ; et ses valeurs en deux bords opposés d'une coupure (a), (b), (c) ou (d) diffèrent d'une constante \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} ou \mathcal{D} . Il est visible que tous les modules de périodicité de I_n sur F_n (variations de I_n lorsque M décrit un contour fermé sur F_n) s'expriment comme fonctions linéaires à coefficients entiers de \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{D} .

Or, on peut montrer, comme dans la théorie des fonctions algébriques, (Appell et Goursat, [1], pp. 125 et 243), que tous les modules \mathcal{C} sont nuls, et que les modules \mathcal{A} et \mathcal{B} sont les valeurs de l'intégrale $\int \mathcal{Y}_n dx$ calculée le long de courbes fermées simples orientées qui sont respectivement un bord de la coupure (b) et un bord de la coupure (a). Remarquons que, d'après le tracé indiqué, (b) est une coupure ne morcelant pas F_n , et (a) une coupure « associée » joignant deux points en regard sur les deux bords de (b).

D'autre part les modules \mathcal{D} s'obtiennent en calculant $\int \mathcal{Y}_n dx$ le long des $l_n - 1$ contours de F_n auxquels n'aboutit qu'une coupure (d).

Nous avons donc mis en évidence sur F_n un système de $2p_n + l_n - 1$ courbes simples fermées orientées : les modules de périodicité qui leur correspondent permettent de calculer tous les modules de périodicité sur F_n ⁽²⁾; de tels modules sont appelés *modules principaux* ou *périodes principales*. En particulier si deux intégrales I_n, I'_n ont par rapport à ces courbes les mêmes modules de périodicité, la différence $I_n - I'_n$ est uniforme sur F_n .

Nous verrons qu'il existe des intégrales I_n pour lesquelles les modules principaux ont des valeurs données. Cela montre qu'on ne pouvait prendre, pour calculer les modules principaux, les l_n courbes frontière de F_n . En

⁽²⁾ Par une combinaison linéaire à coefficients entiers.

effet, d'après le théorème de Cauchy, $\int \gamma_n dx$, calculée dans le sens positif le long du contour total de F_n , est nulle.

Il est d'autre part évident qu'il y a une infinité de manières de choisir un système de courbes conduisant à des modules principaux.

39. — Modules principaux pour F : Nous allons maintenant montrer qu'on peut de proche en proche définir sur F un système infini de courbes fermées simples orientées, auxquelles correspondra une suite infinie de modules principaux pour F , tous les modules de périodicité d'une intégrale abélienne de première ou deuxième espèce sur F s'exprimant au moyen des modules principaux.

La méthode de démonstration est la suivante : soient les courbes donnant les modules principaux de F_1 ; nous passons à F_2 et nous montrons qu'on peut garder parmi les courbes donnant les modules principaux de F_2 les courbes déjà tracées dans F_1 . Et ainsi de suite. On a donc à la limite une suite infinie de courbes sur F . Comme toute courbe fermée tracée sur F est intérieure à F_n dès que n est assez grand, le module qui lui correspond est une combinaison linéaire à coefficients entiers d'un nombre fini de modules principaux de F .

Soient donc F_1 et les $2p_1 + l_1 - 1$ courbes qui lui correspondent : l_1 sont des courbes frontière, p_1 des courbes fermées simples ne morcelant pas F_1 , et les p_1 autres les courbes associées. Passons à F_2 . $F_2 - F_1$ est formé d'un nombre fini de domaines connexes. Soit G_1 l'un d'eux, qui se projette par exemple à l'intérieur du contour γ_1 de D_1 .

Il communique avec F_1 le long de k courbes $\gamma_1^1, \gamma_1^2, \dots, \gamma_1^k$, projetées sur γ_1 , et admet nécessairement au moins une autre courbe frontière projetée à l'intérieur de γ_1 , puisque γ_1 contient au moins un point étranger à D . Nous numérotons les courbes γ_1^i de telle sorte que si l'une d'elles n'a pas été prise dans F_1 comme courbe conduisant à un module principal, ce soit la courbe γ_1^k .

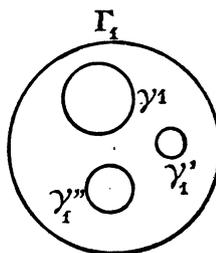


Fig. 21

Soit \mathcal{O} le genre de G_1 . Le genre de $F_1 + G_1$ est $p_1 + \mathcal{O} + k - 1$. En effet, nous avons déjà tracé dans F_1 p_1 courbes ne le morcelant pas; traçons de même dans G_1 \mathcal{O} courbes ne le morcelant pas, et traçons les

courbes $\gamma_1^1, \gamma_1^2, \dots, \gamma_1^{k-1}$. $F_1 + G_1$ n'est pas morcelé par ces courbes, puisque F_1 et G_1 communiquent encore le long de γ_1^k ; mais il est impossible de tracer une nouvelle courbe ne morcelant pas le domaine. En effet, après le tracé de ces $p_1 + \omega + k - 1$ courbes, munies chacune de deux bords, $F_1 + G_1$ apparaît comme réunion de deux domaines de genre zéro communiquant le long de γ_1^k . Et il est évident que deux domaines de genre 0 communiquant par un contour commun forment un domaine de genre zéro : il suffit de les représenter sur deux domaines plans, communiquant par un cercle qui est contour commun, un domaine étant représenté à l'intérieur du cercle et l'autre à l'extérieur.

Nous voyons d'autre part que, comme courbes conduisant aux modules principaux de $G_1 + F_1$, nous pouvons conserver : d'une part les p_1 courbes déjà tracées dans F_1 , ne le morcelant pas, et leurs p_1 courbes associées; d'autre part les $k - 1$ courbes $\gamma_1, \dots, \gamma_1^{k-1}$ qui ne morcellent pas $G_1 + F_1$. Reste γ_1^k , dans le cas où elle aurait été prise dans F_1 ; mais dans ce cas nous devons prendre comme courbes conduisant à des modules principaux de $G_1 + F_1$ toutes les courbes frontière de G_1 projetées à l'intérieur de γ_1 . Nous pouvons substituer à l'une d'elles la courbe γ_1^k , puisque, d'après le théorème de Cauchy, $\int y dx$ pris le long du contour total de G_1 est nulle.

On opère de même pour tous les domaines G qu'il faut ajouter à F_1 pour obtenir F_2 ; on obtient ainsi dans F_2 un système de courbes fermées qui comprend les courbes déjà tracées dans F_1 : ce système n'est peut-être pas celui qui résulterait de l'application directe à F_2 du procédé indiqué plus haut pour F_n (§ 38), mais il lui est équivalent : c'est encore un système conduisant à des modules principaux. Et ainsi de suite. Le résultat est donc établi.

40. — Existence dans F_n et dans F d'intégrales de première espèce ayant des modules principaux donnés (3).

Nous allons maintenant montrer qu'on peut construire une fonction I_n sur F_n , ayant le caractère d'une intégrale abélienne de première espèce, et dont les modules principaux ont des valeurs données. F_n peut être considérée comme portion de la surface algébrique F_n^* définie de la manière suivante : soient un contour, par exemple intérieur, de D_n , que nous désignons par γ_n , a_n un point intérieur à γ_n , $\gamma_n^1, \gamma_n^2, \dots$ les courbes frontière de F_n projetées sur γ_n . Ajoutons à F_n les domaines simplement connexes projetés sur l'intérieur de γ_n , limités par $\gamma_n^1, \gamma_n^2, \dots$ et présentant éventuellement des points de ramification a_n^1, a_n^2, \dots projetés sur a_n ; prolongeons les lignes de passage de première ou deuxième famille, s'il y

3. Depuis la rédaction de ce mémoire a paru dans les *Math. Annalen*, Band 120, 1949, p. 430-461, une démonstration due à ВЕННИКЕ et STEIN, de ce résultat pour toute surface de Riemann ouverte.

en a , qui aboutissent aux $\gamma_n^1, \gamma_n^2 \dots$ jusqu'en $a_n^1, a_n^2 \dots$, et recommençons l'opération pour tous les contours de F_n .

La surface algébrique F_n^* ainsi obtenue a même genre p_n que F_n ; en effet F_n s'obtient à partir de F_n^* en enlevant l_n portions simplement connexes; l'ordre de connexion de F_n^* est donc $2p_n + 1$ (c'est l'ordre de la surface F_n^* où l'on a pratiqué un trou, pour avoir une surface à bord).

F_n^* , où l'on a enlevé par exemple la portion limitée par γ_n^1 , est rendue simplement connexe par les p_n systèmes (a, b, c) déjà tracés dans F_n et supposés aboutir à γ_n^1 (4). Les intégrales abéliennes de première et seconde espèce sur F_n^* ont $2p_n$ modules de périodicité, qui correspondent aux coupures (a) et (b) , et on sait qu'on peut déterminer un *système fondamental* de ces intégrales, c'est-à-dire un système tel que le déterminant des périodes soit différent de 0 (Appell et Goursat, [1], p. 331). On supposera que les intégrales de seconde espèce qui appartiennent au système fondamental ont leurs pôles dans la partie de F_n^* extérieure à F_n . Par combinaison linéaire on peut donc former une fonction qui a sur F_n le caractère d'une intégrale abélienne de première espèce et dont les modules \mathcal{A} et \mathcal{B} ont des valeurs données. Ses modules \mathcal{D} sont nuls.

Soit (d_1) une coupure qui joint une courbe frontière, par exemple γ_n^2 , à γ_n^1 . Considérons une intégrale de troisième espèce de F_n^* , dont les deux pôles simples sont l'un dans le domaine de F_n^* contigu à F_n le long de γ_n^1 , l'autre dans le domaine contigu le long de γ_n^2 .

Considérée sur F_n , elle admet un module de périodicité relatif à (d_1) différent de zéro, des modules \mathcal{D} nuls sur les autres coupures (d) , et certains modules \mathcal{A}, \mathcal{B} . D'où la construction suivante : on commence, à l'aide d'une somme d'intégrales abéliennes de troisième espèce de F_n^* du type indiqué, par assurer aux modules \mathcal{D} les valeurs requises; il suffit alors d'ajouter une combinaison linéaire des intégrales formant le système fondamental pour obtenir une fonction I_n , régulière et non uniforme sur F_n , avec des modules $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{D}$ donnés, donc avec des modules principaux donnés.

Nous pouvons maintenant former une *intégrale I de première espèce sur F*, dont tous les modules principaux ont des valeurs données. Pour chaque surface de la suite F_n , nous formons comme ci-dessus l'intégrale I_n .

La différence $I_{n+1} - I_n$, après choix d'une détermination pour I_{n+1} et I_n , est une fonction holomorphe sur F_n . Soit y une algébroïde holomorphe dont F est la surface de Riemann.

$I_{n+1} - I_n$ est de la forme $\sum_{i=0}^{m-1} A_i(x) y^i$, les $A_i(x)$ étant holomorphes

4. Nous employons ici les systèmes de coupures et notations du § 38.

(ou méromorphes) dans D_n . Comme nous l'avons vu au chapitre IV, $I_{n+1} - I_n$ peut être approché à $\frac{1}{n^2}$ près dans F_{n-1} par une fonction

$$g_n(x, y) = \sum_{i=0}^{m-1} B_i(x) y^i \quad \text{qui est}$$

holomorphe sur toute F .

Dès lors la série $I = I_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (I_{n+1} - I_n - g_n)$ fournit l'intégrale abélienne de première espèce cherchée : dans un domaine fermé quelconque de F la série, amputée d'un certain nombre de termes au début, converge absolument et uniformément vers une fonction holomorphe; il suffit de

l'écrire $I_{q+1} - \sum_{i=1}^q g_n + \sum_{q+i}^{\infty} (I_{n+1} - I_n - g_n)$ pour voir que les modules principaux relatifs aux courbes situées dans F_q (q quelconque) ont les valeurs requises.

A partir de I , par addition de fonctions holomorphes sur F , ou de fonctions méromorphes admettant des pôles et des parties principales données, on peut former une infinité d'intégrales abéliennes de première ou deuxième espèce admettant les mêmes périodes. Une intégrale abélienne *n'est plus déterminée à une constante près par la donnée de ses périodes et de ses singularités* : cela résulte du fait que, F étant ouverte, il existe des fonctions holomorphes sur F ne se réduisant pas à des constantes. Pour que I soit déterminée à une constante près par ses singularités et ses périodes, il faut imposer des conditions supplémentaires : par exemple que l'intégrale de Dirichlet soit finie, dans le cas des surfaces à frontière nulle (Nevanlinna, [2], et Myrberg, [2], [3], [4]).

41. — Théorème : *Il existe des fonctions méromorphes sur F admettant des zéros et des pôles donnés avec des ordres de multiplicité donnés.*

Supposons connue une fonction y répondant à la question. Soit un point M_0 de F , projeté sur x_0 , pour lequel la variable d'uniformisation locale est τ défini par $x - x_0 = \tau^v$ si M_0 est point de ramification d'ordre $v - 1$. Si y admet au voisinage de M_0 un développement de la forme

$$y = \alpha \tau^n + \dots \quad (x \neq 0; n \geq 0), \quad \frac{y'}{y} = \frac{d^2 y}{d\tau^2} : \frac{dx}{d\tau}$$

a un développement de la forme

$$\frac{n}{\tau} (1 + \dots) \frac{1}{v \tau^{v-1}}.$$

Si \mathcal{Y} admet en M_0 un zéro d'ordre n , $\frac{\mathcal{Y}'}{\mathcal{Y}}$ admet en M_0 un pôle d'ordre ν avec le résidu n ; Si \mathcal{Y} admet un pôle d'ordre p , $\frac{\mathcal{Y}'}{\mathcal{Y}}$ admet en M_0 un pôle d'ordre ν avec un résidu $-p$; Si \mathcal{Y} est régulier et différent de 0, $\frac{\mathcal{Y}'}{\mathcal{Y}}$ admet un pôle d'ordre $< \nu$, et par suite un résidu nul.

D'autre part $\int \frac{\mathcal{Y}'}{\mathcal{Y}} dx$ est une intégrale abélienne⁽⁵⁾ admettant, outre les périodes principales (et celles qui en résultent), des périodes polaires : toutes les périodes sont multiples de $2\pi i$.

Inversement, si nous déterminons une fonction g possédant ces propriétés de $\frac{\mathcal{Y}'}{\mathcal{Y}}$, on voit aisément que $e^{\int g dx}$ répond à la question. Or on sait qu'il existe des fonctions méromorphes sur F admettant des pôles donnés avec des parties principales données. Soit g_1 une fonction qui admet les pôles et résidus correspondant aux zéros et aux pôles de la fonction cherchée, et qui peut admettre en outre des pôles d'ordre $\leq \nu - 1$ aux points de ramification d'ordre $\nu - 1$.

$\int g_1 dx$ admet des périodes polaires multiples de $2\pi i$, et certaines périodes principales. Il suffit de prendre $g = g_1 + g_2$, où $\int g_2 dx$ est une intégrale abélienne de première espèce admettant les mêmes périodes principales modulo $2\pi i$ que $-\int g_1 dx$.

Toutes les fonctions ayant mêmes zéros et mêmes pôles que \mathcal{Y} s'obtiennent en multipliant \mathcal{Y} par des fonctions \mathcal{Z} holomorphes sur F , n'y ayant ni zéros ni pôles. Ces fonctions \mathcal{Z} sont évidemment les fonctions $\mathcal{Z} = e^I$, I désignant une intégrale abélienne quelconque de première espèce dont toutes les périodes sont congrues à 0 modulo $2\pi i$.

Remarquons que, dans la démonstration précédente, on est conduit à écrire $\frac{\mathcal{Y}'}{\mathcal{Y}} = g_1 + g_2$. Si on écrit g_1 sous forme d'une série dont chaque terme correspond à un pôle, on voit qu'on obtient une décomposition de \mathcal{Y} en facteurs dont chacun présente un seul zéro, ou un seul pôle, mais n'est pas uniforme.

42. — Applications :

1) Il est facile de former une fonction holomorphe sur F et prenant des valeurs données C_1, C_2, \dots, C_n en des points donnés en nombre fini : M_1, M_2, \dots, M_n .

Soit \mathcal{Y}_i une fonction nulle en $M_1, \dots, M_{i-1}, M_{i+1}, \dots, M_n$ et égale à 1 en

$$M_i. \mathcal{Y} = \sum_{i=1}^n C_i \mathcal{Y}_i \text{ répond à la question.}$$

5. De troisième espèce.

2) **Lemme de Schwarz** ; F désigne maintenant une surface algébroïde (ou une portion connexe à m feuillets égaux de surface algébroïde) projetée sur le cercle $|x| < R$. Nous supposons pour simplifier que les points de la surface projetés sur $x=0$ sont simples.

Soit \mathcal{Y} une fonction holomorphe sur F, vérifiant $|\mathcal{Y}| < M$, et dont les m branches sont nulles à l'origine. On a pour tout point x tel que $|x| < R$: $|\mathcal{Y}| \leq |x| \frac{M}{R}$. L'égalité n'est possible que si \mathcal{Y} se réduit à kx ($|k| = \frac{M}{R}$)

Il suffit de considérer la fonction $\frac{\mathcal{Y}}{x}$.

3) **Théorème de Cauchy** : Soit M_0 un point quelconque d'une surface algébroïde F et $\nu - 1$ son ordre de ramification (le point est ordinaire si $\nu = 1$), et soit \mathcal{Z}_{M_0} une fonction holomorphe sur F, nulle au seul point M_0 et telle que $\frac{1}{\mathcal{Z}_{M_0}}$ admette M_0 pour pôle d'ordre ν avec le résidu 1.

Soit G un domaine quelconque de F limité par un nombre fini de courbes rectifiables Γ , et \mathcal{Y} une fonction holomorphe dans G et continue dans $G + \Gamma$.

On a :

$$\mathcal{Y}(M_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{Z}_{M_0}} dx$$

qui donne les valeurs de \mathcal{Y} aux points de G au moyen des valeurs de \mathcal{Y} sur le contour.

4) Appelons avec Myrberg *norme* d'une fonction méromorphe sur F le produit $N(\mathcal{Y}) = \mathcal{Y}_1 \cdot \mathcal{Y}_2 \dots \mathcal{Y}_m$ des m branches de \mathcal{Y} (Myrberg, [2] et [4]). $N(\mathcal{Y})$ est une fonction méromorphe de x dans D; et on a évidemment $N(\mathcal{Y}) \cdot N(\mathcal{Z}) = N(\mathcal{Y}\mathcal{Z})$. Si par exemple \mathcal{Y} est holomorphe, $N(\mathcal{Y})$ est holomorphe dans D et a pour seuls zéros les projections des zéros de \mathcal{Y} .

Supposons D *simplement connexe*. On peut alors prendre pour D l'intérieur d'un cercle de rayon fini ou infini.

Etant donné une fonction $f(x)$ holomorphe dans D, il est possible de construire des fonctions \mathcal{Y} holomorphes sur F telles que $N(\mathcal{Y}) = f(x)$.

On choisit les zéros de \mathcal{Y} de manière que $N(\mathcal{Y})$ ait les mêmes zéros que $f(x)$; $\frac{f(x)}{N(\mathcal{Y})}$ est alors une fonction sans zéros de la forme $e^{g(x)}$, et il suffit de substituer à \mathcal{Y} $e^{\frac{g(x)}{m}} \times \mathcal{Y}$.

On peut de même trouver des fonctions \mathcal{Y} méromorphes sur F dont la norme soit une fonction méromorphe donnée.

Il résulte de cela l'existence de solutions pour certaines équations entre fonctions méromorphes.

Supposons F définie comme surface de Riemann de l'algébroïde y donnée par

$$y^m + A_{m-1} y^{m-1} + \dots + A_0 = 0.$$

Toutes les fonctions méromorphes sur F sont de la forme $\mathcal{Y} = \sum_{i=0}^{m-1} B_i y^i$,

et $N(\mathcal{Y})$ s'exprime comme un polynôme en A et B :

$$N(\mathcal{Y}) = P(A_0, \dots, A_{m-1}; B_0, \dots, B_{m-1}).$$

Les deux problèmes : A_0, \dots, A_{m-1} et $f(x)$ étant donnés, résoudre l'équation (1) $P = f(x)$, aux inconnues $B_i(x)$, ou trouver sur F les fonctions \mathcal{Y} ayant une norme donnée, sont équivalents.

Pour la surface de Riemann de $y = \sqrt{A(x)}$, l'équation prend la forme simple : $B_0^2 - AB_1^2 = f(x)$ (équation de Pell).

Soient deux systèmes de solutions (B'_0, \dots, B'_{m-1}) et $(B''_0, \dots, B''_{m-1})$ de (1), et \mathcal{Y}' et \mathcal{Y}'' les fonctions correspondantes. $\frac{\mathcal{Y}''}{\mathcal{Y}'}$ a pour norme 1.

La résolution de l'équation (1) se ramène donc, dès qu'on connaît une solution particulière, à la résolution de l'équation $P = 1$.

43. — *Les résultats précédents peuvent s'interpréter dans la théorie des groupes fuchsoides.*

Les intégrales abéliennes sur une surface de Riemann quelconque S peuvent être étudiées, comme nous l'avons fait au chapitre IV pour les fonctions uniformes sur S , à l'aide de l'uniformisation de la surface par une variable z sans point critique.

Bornons-nous aux intégrales de première ou seconde espèce. On se ramène ainsi au problème suivant ;

étant donné un groupe fuchsoides G , étudier les fonctions $I(z)$, méromorphes pour $|z| < 1$, et vérifiant $I(Tz) = I(z) + \omega_T$.

On désigne par T les substitutions du groupe, et par ω_T des constantes.

Les fonctions $I(z)$ vérifiant ces conditions seront dites intégrales abéliennes attachées au groupe G , et de première ou seconde espèce suivant que $I(z)$ est ou n'est pas holomorphe pour $|z| < 1$.

Une intégrale abélienne de première ou seconde espèce $I(z)$ a pour dérivée une fonction méromorphe $\varphi(z)$ à résidus nuls, qui est une fonction Θ appartenant à l'exposant 1 : et réciproquement la primitive d'une telle fonction $\varphi(z)$ est une intégrale abélienne de première ou seconde espèce, ou en particulier une fonction automorphe. I est de première ou seconde espèce suivant que $\varphi(z)$ est ou n'est pas holomorphe pour $|z| < 1$.

A chaque substitution T de G correspond une période ω_T qui peut être nulle. Quelle que soit φ , ces périodes sont évidemment liées par des relations résultant des *relations de structure* du groupe. Soient $T_1, T_2, \dots, T_n \dots$ les substitutions génératrices, qui peuvent être ou non liées par des

relations fondamentales. Si $T = \prod T_i^{\alpha_i}$ est une substitution du groupe, i variant dans un certain ensemble fini d'indices et les α_i étant des entiers positifs ou négatifs, on a évidemment : $\omega_T = \sum \alpha_i \omega_{T_i}$. Si d'autre part les substitutions génératrices vérifient une relation fondamentale $\prod T_i^{\alpha_i} = 1$, on a : $\sum \alpha_i \omega_{T_i} = 0$. Par exemple si T_k est une rotation elliptique d'angle $\frac{2\pi}{v}$, $T_k^v = 1$ et $\omega_{T_k} = 0$.

Pour obtenir toutes les périodes d'une intégrale abélienne I , il suffit de connaître les *périodes principales* définies comme suit : soient $\omega_{T_1}, \omega_{T_2}, \dots, \omega_{T_n}, \dots$ les périodes correspondant aux substitutions génératrices. Enlevons de cette suite les périodes qui, d'après les relations fondamentales, sont identiquement nulles ou s'expriment comme fonctions linéaires des précédentes. Il reste une suite $\omega_{T_{p_1}}, \dots, \omega_{T_{p_n}}, \dots$ telle que toute autre période s'exprime comme un combinaison linéaire à coefficients entiers d'un nombre fini de $\omega_{T_{p_n}}$. Les coefficients de la combinaison dépendent non de l'intégrale I considérée, mais seulement du groupe. Pour que I se réduise à une fonction automorphe, il faut et suffit que toutes ses périodes principales soient nulles.

La formation d'intégrales abéliennes se ramène à la formation de fonctions Θ appartenant à l'exposant 1, dont on aura mis en évidence les pôles. Si le groupe G est de seconde classe, la série $\sum_T \left| \frac{dTz}{dz} \right|$ converge, et on peut prendre comme fonctions Θ des séries Θ de Poincaré appartenant à l'exposant 1 (Myrberg, [3] et [4]). Les exemple les plus simples d'intégrales abéliennes de première espèce correspondent aux séries Θ formées avec les fonctions génératrices $H(z) = 1, z, z^2, \dots$

Si G n'est pas de seconde classe, bornons-nous au cas où il provient de l'uniformisation d'une surface S remplissant les conditions indiquées au chapitre IV, grâce auxquelles on sait former la fonction Θ sans zéros, appartenant à l'exposant 1, $\frac{dx}{dz} : f(x)$.

On peut prendre pour $\varphi(z)$ une expression de la forme :

$$\varphi(z) = \frac{(f(x))^{m-1}}{\left(\frac{dx}{dz}\right)^{m-1}} \Theta_m(z), \quad \Theta_m(z) \text{ désignant une série } \Theta \text{ appartenant à}$$

l'exposant $m \geq 2$. On obtient des formes simples en construisant Θ_m à l'aide des fonctions génératrices

$$H(z) = 1, z, \dots, z^n, \dots \quad \text{ou} \quad H(z) = 1, \frac{z-a}{1-az}, \dots, \left(\frac{z-a}{1-az}\right)^n \dots \quad (|a| < 1).$$

Mais l'étude directe des propriétés de $I(z)$, même sur ces exemples simples, paraît difficile.

Il serait important de savoir si l'on peut former une famille d'intégrales abéliennes de première espèce linéairement indépendantes, et s'il existe des intégrales admettant des périodes principales arbitrairement données.

L'étude directe faite pour les surfaces algébroides donne la réponse pour les groupes fuchsoides correspondants.

44. — Remarquons en terminant que les raisonnements et résultats ci-dessus s'appliquent à une classe de surfaces de Riemann *plus générale* que celle des surfaces algébroides considérées jusqu'ici. Soit une suite de surfaces F_n analogues à celles du § 37, les F_n se projetant sur des domaines fermés D_n tels que D_n tende vers un domaine limite D ayant au moins un point frontière.

F_n a m_n feuillets égaux projetés sur D_n , mais le nombre de feuillets peut augmenter avec n . Nous supposons seulement que, lorsqu'on passe de F_n à F_{n+1} , les nouveaux feuillets introduits ne communiquent avec les précédents qu'à l'extérieur de F_n , et que les projections des points de ramification de $F = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n$ ne s'accroissent que sur la frontière de D . Dans ces conditions on sait former la fonction désignée au chapitre IV, C par $f(x)$; et une fonction holomorphe sur F_n a toujours une expression de la forme $\sum_{i=0}^{m_n-1} B_i(x) y^i$, y désignant une fonction holomorphe sur F admettant F comme surface de Riemann.

On voit qu'il existe sur F des intégrales abéliennes de première ou seconde espèce ayant des périodes principales données, des fonctions méromorphes à zéros et pôles donnés, et des fonctions méromorphes admettant des pôles donnés avec des parties principales données.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. APPELL et E. GOURSAT : Théorie des fonctions algébriques d'une variable. Paris : Gauthier-Villars (1930).
 - [1] W. BURNSIDE : On a class of automorphic functions. Proc. of the London Math. Soc, XXIII (1891).
 - [1] P. FATOU : Fonctions automorphes. Paris : Gauthier-Villars (1930).
 - [1] R. FRICKE et F. KLEIN : Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. Leipzig : Teubner, Band 1 (1897); Band 2 (1912).
 - [1] H. HORNICH : Integrale erster Gattung auf speziellen transzendenten Riemannschen Flächen. Monatshefte für Math. und. Physik, 40 (1933).
 - [1] JULIA : Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé. Paris : Gauthier-Villars (1924).
 - [1] P. KØBE : Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Physik Klasse, I (1907).
 - [2] P. KØBE : Allgemeine Theorie der Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Acta Mathematica, 50 (1927).
 - [1] P. LAASONEN : Beiträge zur Theorie der Fuchsoiden Gruppen und zum Typenproblem der Riemannschen Flächen. Annales Acad. Scient. Fennicae, ser. A, I, 25 (1944).
 - [1] P. MONTEL : Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications. Paris : Gauthier-Villars (1927).
 - [1] P. J. MYRBERG : Über transzendente hyperelliptische Integrale erster Gattung. Ann. Acad. Scient. Fennicae, A, I, 14 (1943).
 - [2] P. J. MYRBERG : Über analytische Funktionen auf transzendente zweiblättrigen Riemannschen Flächen mit reellen Verzweigungspunkten. Acta Math., Band 76 (1944).
 - [3] P. J. MYRBERG : Über Integrale auf transzendenten symmetrischen Riemannschen Flächen. Ann. Acad. Scient. Fennicae, A, I, 31 (1945).
 - [4] P. J. MYRBERG : Über analytische Funktionen auf transzendenten Riemannschen Flächen. X^e Congrès des Math. scandinaves, Copenhague (1946).
 - [1] R. NEVANLINNA : Eindeutige analytische Funktionen. Berlin : Springer (1936).
 - [2] R. NEVANLINNA : Quadratisch integrierbare Differentiale auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Ann. Acad. Scient. Fenn., A, I, 1 (1941).
 - [3] R. NEVANLINNA : Über das Anwachsen des Dirichletintegrals einer offenen Riemannschen Flächen. Ann. Acad. Scient. Fenn., A, I, 45 (1948).
 - [1] H. POINCARÉ : Théorie des groupes fuchsien. Acta Mathematica, 1 (1882).
 - [2] H. POINCARÉ : Sur les fonctions fuchsien. Acta Math., 2 (1882).
 - [3] H. POINCARÉ : Sur l'uniformisation des fonctions analytiques. Acta Math., 31 (1908).
 - [1] S. STOILOW : Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques. Paris : Gauthier-Villars (1938).
 - [1] G. VALIRON : Théorie des fonctions, Paris : Masson (1942).
 - [2] G. VALIRON : Équations fonctionnelles, applications. Paris : Masson (1945).
 - [3] G. VALIRON : Sur le domaine couvert par les valeurs d'une fonction algébroïde finie. Proceedings of the Physico-Math. Society of Japan, 3^e série, 12 (1930).
-

SOMMAIRE

J. COMBES. — Sur quelques propriétés des fonctions algébroides.....	1
Contribution à l'étude des fonctions analytiques uniformes sur une surface de Riemann donnée	5
I. — Emploi de la méthode des familles normales à l'étude du nombre de valeurs exceptionnelles des fonctions uniformes sur certains types de surfaces de Riemann algébroides	7
II. — Groupes et fonctions fuchsoides. Condition suffisante pour qu'un polygone à une infinité de côtés soit polygone générateur d'un groupe fuchsöide.	24
III. — Uniformisation par les fonctions fuchsoides.....	25
IV. — Applications de l'uniformisation à des extensions du théorème de Landau-Caratheodory, et à la formation, sur certaines surfaces de Riemann, de fonctions admettant des singularités (pôles ou points essentiels) données	51
V. — Intégrales abéliennes sur les surfaces de Riemann algébroides. Existence de fonctions analytiques uniformes sur ces surfaces admettant des pôles et zéros donnés. Applications. Extension à des types plus généraux de surfaces de Riemann	63
