

ÉMILE DURAND

## Les fonctions discontinues de l'électrostatique et de la magnéto­statique

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4<sup>e</sup> série*, tome 19 (1955), p. 161-174

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1955\\_4\\_19\\_\\_161\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1955_4_19__161_0)

© Université Paul Sabatier, 1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# LES FONCTIONS DISCONTINUES DE L'ELECTROSTATIQUE ET DE LA MAGNÉTOSTATIQUE

par Emile DURAND

Faculté des Sciences de Toulouse — Physique théorique

## I. — FORMULES GÉNÉRALES

### 1. DISCONTINUITÉ DE L'INTÉGRALE DE SURFACE

FAISANT INTERVENIR LE GRADIENT DE  $1/r$ .

a) Point  $M_0$  sur la surface  $S$ , mais en dehors de la courbe  $C$  qui limite  $S$ .  
Considérons l'intégrale

$$(1) \quad \vec{j} = -\frac{1}{4\pi} \int_S f(\xi, \eta, \zeta) \cdot \vec{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) \cdot dS = \frac{1}{4\pi} \int f \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot dS$$

où  $r$  est la distance du point  $M$  de la surface au point  $P$  de coordonnées  $x, y, z$ ;  $\vec{r}$  est le vecteur  $\vec{MP}$  de longueur  $r$ .  $f(\xi, \eta, \zeta)$  est une fonction des coordonnées du point  $M$  ( $\xi, \eta, \zeta$ , ne sont pas des variables indépendantes puisqu'elles sont reliées par l'équation de la surface  $S$ ). Le gradient est pris par rapport aux coordonnées  $x, y, z$  (fig. 1).

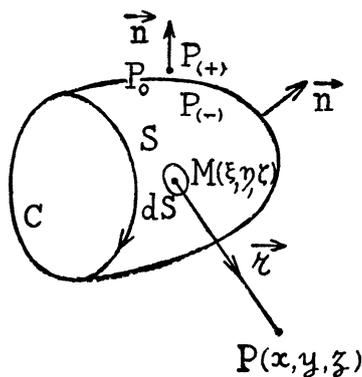


FIG. 1.

Si l'on veut étudier la discontinuité  $\{\vec{J}_{(+)} - \vec{J}_{(-)}\}$  de cette intégrale en deux points  $P_{(+)}$  et  $P_{(-)}$  situés sur la normale  $n$  à la surface, de part et d'autre d'un point  $M_0$  ( $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$ ), on décompose  $S$  en deux parties  $S'$  et  $S''$ . On prend pour  $S'$  un cercle de centre  $M_0$  et de rayon "a" aussi petit qu'on le veut,  $S''$  étant le reste de la surface  $S$ .

L'intégrale relative à  $S''$  ne présente aucune discontinuité à la traversée de  $S$  et l'on a par conséquent

$$(2) \quad \vec{J}_{(+)}'' - \vec{J}_{(-)}'' = 0 \qquad \vec{J}_{(0)}'' = \frac{1}{2} \{ \vec{J}_{(+)}'' + \vec{J}_{(-)}'' \}$$

L'intégrale  $\vec{J}'$  est étendue à la surface du cercle et il suffit de la calculer sur l'axe  $Oz$  du cercle (fig. 2a). Comme le rayon "a" est supposé aussi

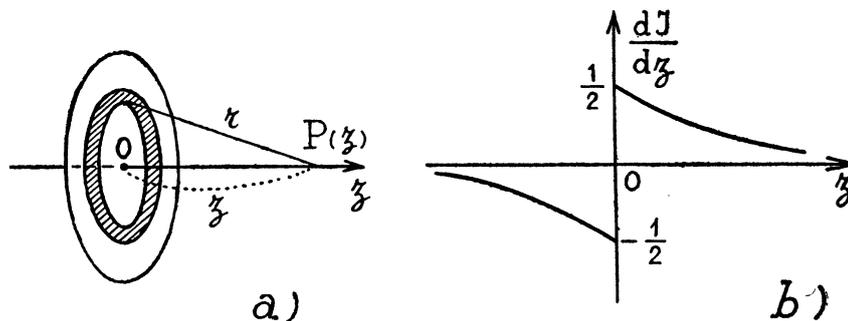


FIG. 2.

petit qu'on le veut et que la fonction  $f(\xi, \eta, \zeta)$  est supposée continue, on peut la faire sortir du signe somme avec la valeur qui correspond au point  $M_0$  et il reste

$$(3) \quad f(M_0) \cdot \frac{1}{4\pi} \int \frac{z}{r^3} dS = \frac{f(M_0)}{2} \cdot z \int_0^a \frac{R \cdot dR}{(z^2 + R^2)^{2/3}} = f(M_0) \cdot \frac{z}{2} \int_0^a \frac{d}{dR} \left( \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \\ = f(M_0) \cdot \frac{z}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}} - \frac{1}{|z|} \right] = \frac{f(M_0)}{2} \left[ \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} - (\pm) 1 \right]$$

avec (+) si  $z > 0$  et (—) si  $z < 0$ .

La variation le long de  $Oz$  est donc celle qui est indiquée sur la figure 2b, avec une discontinuité de  $f(M_0)$  au point  $z = 0$ .

Au point  $z = 0$  lui-même, on a  $\vec{J}_z = 0$ , comme on le voit en associant les éléments d'intégration deux à deux symétriquement par rapport à l'origine.

Les composantes normales à l'axe  $z$  sont toujours nulles par raison de symétrie et elles sont par conséquent continues. On a donc

$$(4) \quad (\mathcal{J}'_z)_{(+)} - (\mathcal{J}'_z)_{(-)} = f(M_0) \quad (\mathcal{J}'_z)_{(0)} = \frac{1}{2} \left\{ (\mathcal{J}'_z)_{(+)} + (\mathcal{J}'_z)_{(-)} \right\}$$

et comme les composantes perpendiculaires à  $Oz$  sont continues, on peut mettre ces relations sous la forme vectorielle

$$(5) \quad \vec{\mathcal{J}}'_{(+)} - \vec{\mathcal{J}}'_{(-)} = f(M_0) \cdot \vec{n} \quad \mathcal{J}'_{(0)} = \frac{1}{2} \left\{ \vec{\mathcal{J}}'_{(+)} + \vec{\mathcal{J}}'_{(-)} \right\}$$

Comme l'intégrale  $\vec{\mathcal{J}}$  est égale à  $(\vec{\mathcal{J}}' + \vec{\mathcal{J}}'')$ , de (2) et (5) on en déduit

$$(6) \quad \vec{\mathcal{J}}_{(+)} - \vec{\mathcal{J}}_{(-)} = f(M_0) \cdot \vec{n} \quad \vec{\mathcal{J}}_{(0)} = \frac{1}{2} \left\{ \vec{\mathcal{J}}_{(+)} + \vec{\mathcal{J}}_{(-)} \right\}$$

Ce sont les relations cherchées.

Si l'on avait des intégrales analogues à (1) où  $f$  serait remplacé par un vecteur  $\vec{A}(\xi, \eta, \zeta)$ , avec multiplication scalaire ou vectorielle, soit

$$(7) \quad \mathcal{J} = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left( \vec{A} \cdot \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) \right) \cdot dS$$

$$(8) \quad \vec{\mathcal{J}} = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left[ \vec{A} \times \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) \right] \cdot dS$$

un raisonnement tout à fait analogue au précédent conduirait aux résultats

$$(9) \quad \mathcal{J}_{(+)} - \mathcal{J}_{(-)} = (\vec{A} \cdot \vec{n})$$

$$(10) \quad \vec{\mathcal{J}}_{(+)} - \vec{\mathcal{J}}_{(-)} = [\vec{A} \times \vec{n}]$$

la deuxième relation (6) étant toujours satisfaite.

*Exemple.* — Angle solide sous lequel, de  $P$ , on voit  $S$ .

$$(11) \quad \Omega = - \int_S \left( \vec{n} \cdot \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) \right) \cdot dS$$

d'après (7) et (9) où  $\vec{A} = \vec{n}$ , on a, avec  $(\vec{n} \cdot \vec{n}) = 1$

$$(12) \quad \Omega_{(+)} - \Omega_{(-)} = 4\pi \quad \Omega_{(0)} = \frac{1}{2} [\Omega_{(+)} + \Omega_{(-)}]$$

REMARQUE. — Tout ce qui précède concerne un point régulier  $M_0$  de la surface, mais il peut aussi y avoir des points coniques, des arêtes. En un point conique le champ devient infini.

b) *Point  $M_0$  sur la courbe  $C$  qui limite la surface  $S$ .*

Pour étudier le comportement de l'intégrale (1) au voisinage du point  $M_0$  de  $S$  situé sur la courbe  $C$  qui limite la surface, il suffit de considérer

l'intégrale étendue à une aire rectangulaire aussi petite qu'on le veut autour de  $M$ . (fig. 3), qui peut donc être considérée comme plane. La fonction

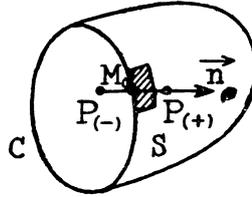


FIG. 3.

$f(M)$  qui est continue peut alors sortir du signe somme en prenant la valeur  $f(M_0)$ . Il nous reste donc à étudier l'intégrale

$$(13) \quad \int_S \frac{\vec{r}}{r^3} dS = \text{grad} \int_S \frac{dS}{r}$$

étendue à une plaque rectangulaire (fig. 4). Examinons d'abord ce qui se

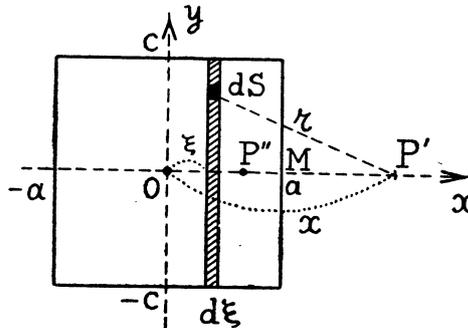


FIG. 4.

passé sur la droite  $Ox$  passant par le centre  $O$  de la plaque et normale, dans son plan, à l'un de ses côtés. On a alors

$$(14) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_S \frac{dS}{r} &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-a}^{+a} \int_{-c}^{+c} \frac{d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-a}^{+a} \text{Log} \left\{ \frac{\sqrt{c^2 + (x-\xi)^2} + c}{\sqrt{c^2 + (x-\xi)^2} - c} \right\} d\xi \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-(a+x)}^{(a-x)} \text{Log} \left\{ \frac{\sqrt{c^2 + u^2} + c}{\sqrt{c^2 + u^2} - c} \right\} du = - \left\{ \text{Log} \frac{\sqrt{c^2 + u^2} + c}{\sqrt{c^2 + u^2} - c} \right\} \begin{matrix} (a-x) \\ -(a+x) \end{matrix} \end{aligned}$$

Sur cette expression (14) on voit que c'est égal à  $\pm \infty$  suivant que  $x = -(\pm)a$ . La figure 5 donne l'allure de la variation de  $J_x$ . On peut dire

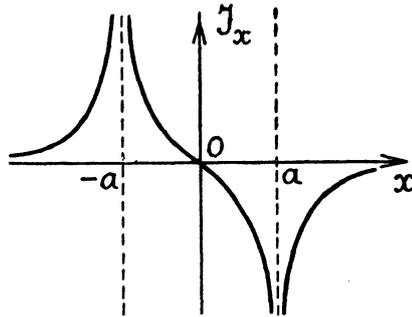


FIG. 5.

qu'il n'y a pas de discontinuité, mais que la valeur devient infinie sur les bords. En fait, dans les calculs numériques où l'on remplace les dérivées par les différences finies, on a une bonne approximation en ces points en écrivant que la dérive suivant  $Ox$  des deux côtés du point  $M$ , est continue.

Examinons maintenant la variation  $J_x$  le long de la droite  $Ox$  normale à la plaque et passant par son bord (fig. 6). Pour la bande  $AB$  d'épais-

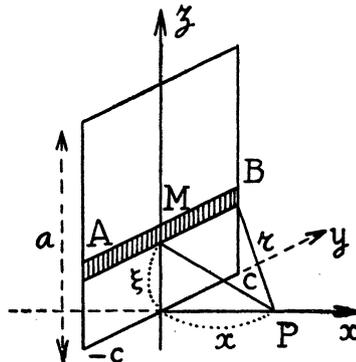


FIG. 6.

seur  $d\xi$ , on a la même expression que précédemment, d'où

$$\begin{aligned}
 (15) \quad \frac{\partial}{\partial x} \int_s \frac{dS}{r} &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^a \text{Log} \frac{\sqrt{x^2+c^2+\xi^2} + c}{\sqrt{x^2+c^2+\xi^2} - c} \cdot d\xi = -2cx \int_0^a \frac{d\xi}{(x^2+\xi^2)\sqrt{x^2+\xi^2+c^2}} \\
 &= 2 \left\{ \text{arc tg} \left[ \frac{cx}{(\xi^2+x^2)+\xi\sqrt{\xi^2+x^2+c^2}} \right] \right\}_0^a = 2 \left\{ \text{arc tg} \left[ \frac{cx}{(a^2+x^2)+a\sqrt{a^2+x^2+c^2}} \right] \right. \\
 &\quad \left. - \text{arc tg} \left( \frac{c}{x} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Quand  $x \rightarrow 0$ , on a donc  $-\pi$ . On a une valeur égale et opposée pour  $x < 0$ , ce qui fait une différence  $(+) - (-) = -2\pi$ . Pour revenir à l'intégrale (1), il faut multiplier (15) par  $-4\pi \cdot f(M_0)$ , d'où

$$(16) \quad \vec{J}_{(+)} - \vec{J}_{(-)} = \frac{\vec{n}}{2} \cdot f(M_0)$$

En comparant (16) et (6) on voit qu'il y a le facteur  $\vec{n}/2$  au lieu de  $\vec{n}$ . La deuxième formule (6) n'a plus de sens puisque  $\vec{J}$  devient infinie.

Ce résultat, obtenu pour la plaque rectangulaire, est aussi valable pour le bord d'une surface quelconque comme celle de la figure (3), comme nous l'avons dit au début de ce paragraphe.

## 2. DISCONTINUITÉ DE L'INTÉGRALE CURVILIGNE FAISANT INTERVENIR LE GRADIENT DE $\text{Log } r$ .

Il s'agit de l'intégrale

$$(17) \quad \vec{J} = \frac{1}{2\pi} \int_C f(\xi, \eta) \cdot \text{grad}(\text{Log } r) \cdot dl = \frac{1}{2\pi} \int_C f \cdot \frac{\vec{r}}{r^2} \cdot dl$$

où  $r$  est la distance du point  $M(\xi, \eta)$  au point  $P(x, y)$  dans le plan (fig. 7).

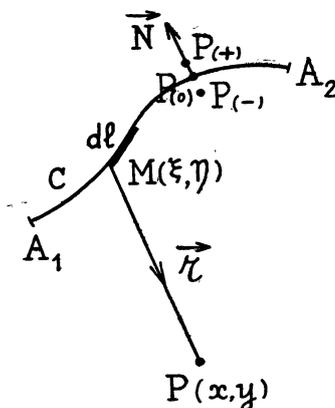


FIG. 7.

$\vec{r}$  est le vecteur  $\vec{MP}$  de longueur  $r$  et  $f(\xi, \eta)$  est une fonction continue des coordonnées du point  $M$  sur la courbe  $C$ ; le gradient est pris par rapport aux coordonnées  $x, y$ .

Si nous voulons étudier la discontinuité normale de  $\vec{J}$  de part et d'autre d'un point  $M_0$ , on peut limiter l'intégrale à une droite aussi petite que l'on veut et qui peut par conséquent se confondre avec l'élément  $dl$  de la courbe au point  $M_0$ ; la fonction  $f$  peut alors sortir de l'intégrale et prendre la valeur  $f(M_0)$ .

On a donc étudié l'intégrale

$$(18) \quad \vec{J} = \frac{f(M_0)}{2\pi} \int_c \frac{\vec{r}}{r^2} dl$$

qui correspond à la figure (8). Elle se décompose en deux intégrales qui s'écrivent

$$(19) \quad \begin{cases} J_x = \frac{f(M_0)}{2\pi} \int_{-b}^{+b} \frac{x}{(y-\xi)^2 + x^2} d\xi \\ J_y = \frac{f(M_0)}{2\pi} \int_{-b}^{+b} \frac{(y-\xi)}{(y-\xi)^2 + x^2} d\xi \end{cases}$$

Le calcul donne successivement

$$(20) \quad \begin{aligned} J_x &= \frac{f(M_0)}{2\pi} \int_{-(b+x)}^{b-x} \frac{x du}{u^2 + x^2} = \frac{f(M_0)}{2\pi} \left[ \text{arc tg} \left( \frac{u}{x} \right) \right]_{-(b+x)}^{b-x} = \frac{f(M_0)}{2\pi} (\alpha_2 - \alpha_1) \\ J_y &= -\frac{f(M_0)}{2\pi} \int_{-(b+x)}^{b-x} \frac{u du}{u^2 + x^2} = -\frac{f(M_0)}{2\pi} \left[ \text{Log} \sqrt{u^2 + x^2} \right]_{-(b+x)}^{b-x} \\ &= \frac{f(M_0)}{2\pi} \text{Log} \left( \frac{r_2}{r_1} \right) \end{aligned}$$

Sur  $Ox$ , on a  $J_y = 0$  et  $J_x = \frac{f(M_0)}{2\pi} \cdot \theta$ ; comme  $\theta = \pi$  pour  $x = 0 + \varepsilon$

et  $\theta = -\pi$  pour  $x = 0 - \varepsilon$ , on peut écrire

$$(21) \quad \vec{J}_{(+)} - \vec{J}_{(-)} = f(M_0) \cdot \vec{N}$$

et cette formule est identique à celle que nous avons obtenue pour (1).

Sur une parallèle à  $Ox$  passant par l'une des extrémités  $A_1$  ou  $A_2$  de la bande (en  $A_1$  par exemple) on a  $\alpha_1 = 0$  et

$$\begin{aligned} \text{quand } x = 0 - \varepsilon \quad & \alpha_2 = \pi/2 \quad \alpha_1 = \pi \quad \alpha_2 - \alpha_1 = \pi/2 \\ \text{quand } x = 0 + \varepsilon \quad & \alpha_2 = \pi/2 \quad \alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 - \alpha_1 = -\pi/2 \end{aligned}$$

d'où

$$(22) \quad (J_x)_{(+)} - (J_x)_{(-)} = \frac{1}{2} f(M_0).$$

$\mathfrak{J}_y$  devient infini comme  $\text{Log } r$ , mais la différence en deux points symétriques par rapport à  $A_1$  étant nulle, on peut écrire au lieu de (22)

$$(23) \quad \vec{\mathfrak{J}}_{(+)} - \vec{\mathfrak{J}}_{(-)} = \frac{\vec{N}}{2} \cdot f(M_0)$$

et ceci est identique à la relation (16).

Comme nous l'avons dit, tous ces résultats obtenus pour le segment de droite de la figure 8 sont encore valables pour la courbe C de la figure 7.

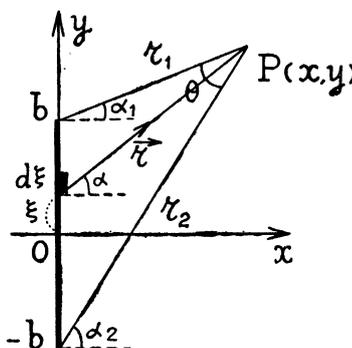


FIG. 8.

L'expression (23), en particulier, est valable pour les points  $A_1$  et  $A_2$  de cette courbe.

REMARQUE. — Les résultats précédents sont valables pour un point régulier de la courbe C; si C présente un brusque changement de direction, toutes les composantes de  $\vec{\mathfrak{J}}$  sont infinies. On déduit cela de la valeur de  $\vec{\mathfrak{J}}$  pour les deux portions de droite faisant un angle  $2\varphi$  (fig. 9). On

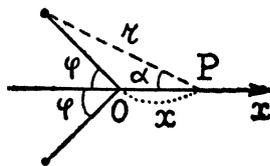


FIG. 9.

trouve en effet

$$(24) \quad \mathfrak{J}_r = 2 \left\{ \alpha \sin \varphi + \text{Log} \left( \frac{r}{x} \right) \cdot \cos \varphi \right\}$$

On peut obtenir (24) par intégration directe ou par superposition des composantes (20). Pour  $\vec{J}_y$  on trouve un résultat analogue et l'on voit bien que toutes les composantes de  $\vec{J}$  deviennent infinies quand  $x \rightarrow 0$ .

## II. — LES DISCONTINUITÉS DE L'ÉLECTROSTATIQUE

### 1. DISTRIBUTIONS SUPERFICIELLES DE CHARGES.

Le champ électrique de ces distributions est donné par

$$(25) \quad \vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \sigma(\xi, \eta, \zeta) \cdot \vec{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) \cdot dS$$

D'après (1) (6) et (16) on en déduit les relations

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_{(+)} - \vec{E}_{(-)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \vec{n} \\ \vec{E}_{(0)} = \frac{1}{2} [\vec{E}_{(+)} + \vec{E}_{(-)}] \end{array} \right\} \text{ pour un point } M_0 \text{ à l'intérieur de } S$$

$$(27) \quad \vec{E}_{(+)} - \vec{E}_{(-)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{n}}{2} \text{ pour un point } M_0 \text{ sur la courbe } C \text{ qui limite } S.$$

REMARQUE. — Le champ  $\vec{E}$  produit par une distribution volumique de charges entre deux plans  $-a, +a$  varie en fonction de  $x$  comme l'indique la figure 10. On a en particulier

$$E_x = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \cdot 2x$$

à l'intérieur. Si on passe à la limite pour obtenir une distribution superficielle sur le plan  $x = 0$ , on fait  $a \rightarrow 0, \rho \rightarrow 0$  mais  $2a\rho = \sigma$ ; à l'extérieur

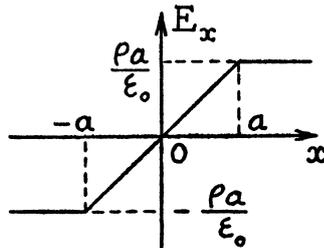


FIG. 10.

on trouve donc  $\pm \sigma/2\epsilon_0$ , qui est conforme à la première relation (26); mais à l'intérieur on peut s'attendre à toutes les valeurs comprises entre  $\pm \sigma/2\epsilon_0$ ; effectivement si on maintient  $x/a$  constant dans le passage à la limite  $x \rightarrow 0, a \rightarrow 0$  on a bien l'indétermination prévue.

Mais en fait, la distribution superficielle ne doit pas être considérée comme obtenue par un passage à la limite à partir d'une distribution volumique; elle a une existence indépendante et son champ est donné par une intégrale de surface; il n'y a donc aucune indétermination de  $\vec{E}$ , qui est bien égal à la demi-somme des valeurs de part et d'autre de S.

Si l'on a une distribution de charges sur une surface cylindrique, les relations (26) (27) sont encore valables d'après (17) (21) (23) puisque  $\vec{E}$  a pour expression

$$(28) \quad \vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_c \sigma \vec{\text{grad}} (\text{Log } r) \cdot dl$$

## 2. DISTRIBUTIONS SUPERFICIELLES DE DIPÔLES.

Le potentiel de ces distributions est donné par

$$(29) \quad V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \left( \vec{\tau} \cdot \vec{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) \right) dS$$

D'après (9) on en déduit que V présente la discontinuité

$$(30) \quad V_{(+)} - V_{(-)} = (\vec{\tau} \cdot \vec{n}) / \epsilon_0 \quad \text{et que} \quad V_{(0)} = \frac{1}{2} [V_{(+)} + V_{(-)}]$$

Le potentiel-vecteur  $\vec{A}^*$  est donné par

$$(31) \quad \vec{A}^* = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left[ \vec{\tau} \times \vec{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) \right] dS$$

et d'après (10) on a

$$(32) \quad \vec{A}^*_{(+)} - \vec{A}^*_{(-)} = [\vec{\tau} \times \vec{n}]$$

Quant aux champs  $\vec{E}$  et à l'induction  $\vec{B}^*$  il deviennent infinis sur S même, mais gardent des valeurs finies de part et d'autre. On a (\*)

$$(33) \quad \epsilon_0 [\vec{E}_{(+)} - \vec{E}_{(-)}] = -\vec{\text{grad}}' (n \cdot \tau) - \text{rot}' [n \times \tau]$$

On notera que dans cette dernière formule le rotationnel primé est pris sur la surface et que c'est par conséquent un vecteur normal.

## 3. DISTRIBUTIONS VOLUMIQUES.

On sait que le potentiel des distributions volumiques est continu à la traversée de la surface S qui limite le volume  $v$ . Nous allons voir que

(\*) Voir : E. Durand, Electrostatique et Magnétostatique, Masson, éditeur, Paris, 1953.

les dérivées premières sont aussi continues, mais qu'il n'en est pas de même pour les dérivées secondes.

Le potentiel de la distribution occupant le volume  $v$  (fig. 11) a pour

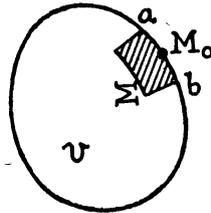


FIG. 11.

expression

$$(34) \quad V = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_v \rho \frac{dv}{r}$$

Quand on étudie les discontinuités au voisinage du point  $M$ , on peut remplacer le volume  $v$  par le volume du cylindre hachuré pris aussi petit qu'on le veut; on peut alors faire sortir  $\rho$  de l'intégrale en lui donnant la valeur  $\rho(M_o)$ , d'où la nouvelle expression

$$(35) \quad V_{(1)} = \frac{\rho(M_o)}{4\pi \epsilon_0} \int_v \frac{dv}{r}$$

En prenant la gradient de (35) et tenant compte de  $\vec{\text{grad}}(1/r) = -\text{grad}'(1/r)$ , on a

$$\vec{\text{grad}} V_{(1)} = - \frac{\rho(M_o)}{4\pi \epsilon_0} \int_v \vec{\text{grad}}' \left( \frac{1}{r} \right) dv = - \frac{\rho_o}{4\pi \epsilon_0} \int_S \frac{\vec{n}}{r} dS$$

où  $S$  est toute la surface du petit cylindre; on peut remplacer cette dernière par la surface de base  $ab$  puisque le reste ne produit aucune discontinuité en  $M_o$ ;  $\vec{n}$  est alors constant et on peut le faire sortir de l'intégrale. En multipliant par  $\vec{n}$ , il vient

$$(36) \quad (\vec{n} \cdot \vec{\text{grad}}) V_{(2)} = - \frac{\rho_o}{4\pi \epsilon_0} \int_{ab} \frac{dS}{r}$$

On obtient donc pour la dérivée normale de  $V_{(2)}$  une intégrale analogue à  $V$ ; elle est donc continue à la traversée de la surface  $ab$ .

Appliquons de nouveau  $(\vec{n} \cdot \vec{\text{grad}})$  à (36); il vient

$$(37) \quad (\vec{n} \cdot \vec{\text{grad}})^2 V_{(2)} = - \frac{\rho_o}{4\pi \epsilon_0} \cdot \vec{n} \cdot \int \vec{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) dS = \frac{\rho_o}{\epsilon_0} (\vec{n} \cdot \vec{j})$$

d'où, en vertu de la propriété (6) de  $\vec{j}$

$$(38) \quad (n. \text{ grad})^2 \{V_{(+)} - V_{(-)}\} = \rho_0/\epsilon_0$$

C'est la relation cherchée qui donne la valeur de la discontinuité des dérivées secondes du potentiel suivant la normale.

Il y a aussi la discontinuité du laplacien de  $V$ , puisque

$$(39) \quad \Delta V_{(+)} = 0 \quad \Delta V_{(-)} = -\rho_0/\epsilon_0$$

REMARQUE. — Il arrive souvent que l'on se donne une fonction continue  $\rho_1(\xi, \eta, \zeta)$  pour la densité dans un volume  $v$  et une autre fonction continue  $\rho_2(\xi, \eta, \zeta)$  pour la densité dans un autre volume contigu (fig. 12). On ne

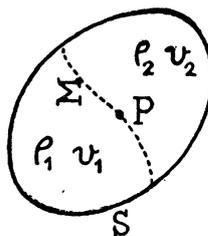


FIG. 12.

dit rien en général sur la valeur que l'on se donne sur la surface  $\Sigma$  qui sépare  $v_1$  de  $v_2$ . A priori on peut se donner n'importe quelle valeur; cependant si l'on veut que l'équation  $\Delta V = -\rho/\epsilon_0$  soit vérifiée aussi en tout point de  $\Sigma$ , il faut prendre

$$(40) \quad \rho(\Sigma) = \frac{1}{2}[\rho_1 + \rho_2]$$

On a en effet

$$(41) \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_{v_1} \frac{\rho_1}{r} dv + \int_{v_2} \frac{\rho_2}{r} dv \right\}$$

En prenant le laplacien des deux membres, on a

$$(42) \quad (\Delta V)_\Sigma = -\frac{1}{2\epsilon_0}(\rho_1 + \rho_2)$$

ce qui est bien l'équation de Poisson, en prenant la définition (40). On a supposé que  $P$  était un point régulier de  $\Sigma$ , sinon il faudrait faire intervenir l'angle solide des tangentes.

REMARQUE 2. — Pour les distributions volumiques cylindriques, (38) est encore valable et se démontre à partir de

$$(43) \quad V = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_S \rho \cdot \text{Log } r \cdot dS$$

en utilisant (17) et (21).

### III. — LES DISCONTINUITÉS DE LA MAGNÉTOSTATIQUE

Il y a d'abord à considérer les distributions de masses magnétiques et de dipôles magnétiques; leur étude est tout à fait analogue à celle des distributions de charges et de dipôles électriques, sauf que  $\mu_0$  remplace  $\epsilon_0$  et que les grandeurs  $\vec{E}$ ,  $\rho$ , ... sont remplacées par les grandeurs étoilées  $\vec{E}^*$ ,  $\rho^*$ , ...

Nous allons donc nous limiter aux distributions de courants.

#### 1. DISTRIBUTIONS SURFACIELLES.

Le potentiel-vecteur a pour expression

$$(44) \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{k}}{r} \cdot dS$$

Pour étudier ses discontinuités en un point  $M_0$ , on peut se limiter à un petit cercle entourant  $M_0$  et faire sortir  $\vec{k}$  de l'intégrale en lui donnant la valeur  $\vec{k}(M_0)$ , soit

$$(45) \quad A_{(0)} = \frac{\mu_0 \vec{k}(M_0)}{4\pi} \int_S \frac{dS}{r}$$

En prenant la dérivée normale des deux membres de (45), il vient avec

$$\partial/\partial n := (\vec{n} \cdot \vec{\text{grad}})$$

$$\frac{\partial A}{\partial n} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \vec{k} \left( \vec{n} \cdot \int_S \vec{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) \cdot dS \right) = -\mu_0 k(M_0) \cdot (\vec{n} \cdot \vec{J})$$

d'où les relations

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{A}_{(+)} }{\partial n} - \frac{\partial \vec{A}_{(-)} }{\partial n} = -\mu_0 \cdot \vec{k}(M_0) \\ \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial n} \right)_{(0)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \vec{A}_{(+)} }{\partial n} + \frac{\partial \vec{A}_{(-)} }{\partial n} \right] \end{array} \right.$$

L'induction magnétique d'une distribution superficielle s'écrit

$$(47) \quad \vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \left[ \vec{k} \times \vec{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) \right] dS$$

D'après (10) on a donc

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{B}_{(+)} - \vec{B}_{(-)} = \mu_0 [\vec{k} \times \vec{n}] \\ \vec{B}_{(0)} = \frac{1}{2} [\vec{B}_{(+)} + \vec{B}_{(-)}] \end{array} \right.$$

## 2. DISTRIBUTIONS VOLUMIQUES.

$\vec{A}$  et  $\vec{B}$  sont continus à la traversée de la surface qui limite une distribution volumique de courants, mais les dérivées de  $\vec{B}$  sont discontinues. On a une expression tout à fait analogue à (38), soit

$$(49) \quad (\vec{n} \cdot \text{grad})^* (\vec{A}_{(+)} - \vec{A}_{(-)}) = \mu_0 \vec{i}$$

De plus il y a toujours la discontinuité du laplacien de  $\vec{A}$ , puisque

$$(50) \quad \Delta \vec{A}_{(+)} = 0 \quad \Delta \vec{A}_{(-)} = -\mu_0 \vec{i}$$


---