

ÉMILE DURAND

**Essai sur une théorie classique de la création et de
l'annihilation des charges électriques**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4^e série, tome 20 (1956), p. 99-110

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1956_4_20__99_0

© Université Paul Sabatier, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Essai sur une théorie classique de la création et de l'annihilation des charges électriques

par Emile DURAND

Professeur de Physique Théorique à la Faculté des Sciences de Toulouse

1. — INTRODUCTION

La plupart des phénomènes de l'électromagnétisme classique s'expliquent par des déplacements de charges électriques; ces dernières ne peuvent ni être créées ni disparaître, et c'est pourquoi nous dirons que l'électromagnétisme classique est conservatif.

On sait cependant que les charges électriques peuvent être créées par paires à partir d'un photon (par exemple création d'un électron positif et d'un électron négatif, d'un proton positif et d'un proton négatif) et que, inversement, deux charges (+) (—) peuvent disparaître en donnant un ou plusieurs photons. Il est donc assez naturel de rechercher les équations fondamentales d'un électromagnétisme qui ne serait pas conservatif.

Des équations de Maxwell résulte l'équation de conservation

$$(1) \quad \operatorname{div}(\rho \vec{v}) + \partial_t \rho = 0.$$

où $\rho(x, y, z, t)$, $\vec{v}(x, y, z, t)$ sont respectivement la densité et la vitesse moyenne de l'électricité. Avec les notations d'Univers, $\vec{J} = \rho \vec{v}$, $J^4 = ic \rho$, $x^4 = ict$, (1) s'écrit

$$(2) \quad \partial_q J^q = 0.$$

en convenant de faire usage de la règle de sommation de 1 à 4 sur les indices muets.

Quand il n'y a plus conservation de l'électricité, l'équation (2) n'est plus valable, et il en est de même des équations de Maxwell. Avant de généraliser (2), rappelons brièvement les équations fondamentales de l'électromagnétisme classique sous la forme quadridimensionnelle.

2. — L'ÉLECTROMAGNÉTISME CLASSIQUE

On peut décrire les phénomènes avec un quadripotential A^p où p est un indice qui peut prendre les valeurs 1, 2, 3, 4, et qui obéit aux équations

$$(3) \quad \partial_q \partial^q A^p = -\mu_0 J^p$$

$$(4) \quad \partial_p A^p = 0$$

L'équation (4) du premier ordre est connue sous le nom de « condition de Lorentz »; q est aussi un indice qui peut varier de zéro à quatre; ∂_q est une écriture abrégée de $\partial/\partial x_q$ et l'on utilise le système d'unité m.k.s.C. rationalisé.

En appliquant l'opérateur ∂_p aux deux membres de (3) et en tenant compte de (4), on en déduit l'équation de conservation (2). On voit ainsi que la condition de Lorentz pour les potentiels est directement reliée à la conservation de l'électricité et nous verrons qu'elle disparaîtra dans un électromagnétisme non conservatif.

Du potentiel A^p on tire le tenseur de champ B^{pq} par la relation de définition

$$(5) \quad B^{pq} = \partial^p A^q - \partial^q A^p$$

Dans ces conditions, si l'on applique l'opérateur ∂_q à (5) et à sa duale et si l'on tient compte de (3) (4), on en déduit les équations de Maxwell

$$(6) \quad \partial_q B^{pq} = \mu_0 J^p$$

$$(7) \quad \partial_q \overline{B^{pq}} = 0$$

La densité volumique f^p de la force que le champ exerce sur les charges (force de Lorentz), a pour expression

$$(8) \quad f^p = J_q B^{pq}$$

On sait enfin que si l'on définit le tenseur de Maxwell T^{pq} par

$$(9) \quad 2 \mu_0 \cdot T^{pq} = \{ \overline{B^{pq}} \overline{B^{pq}} - B^{pq} B^{pq} \}$$

la densité de force a pour expression

$$(10) \quad f^p = \partial_q T^{pq}$$

En particulier

$$(11) \quad T^{44} = \frac{1}{2} \{ \mu_0^{-1} B^2 + \epsilon_0 E^2 \}$$

est la densité de l'énergie électromagnétique localisée dans l'espace et

$$(12) \quad \text{ic } T^{4\omega} = \mu_0^{-1} [E^\omega B^4 - E^4 B^\omega]$$

est le vecteur de Poynting.

3. — L'ÉQUATION DE CONTINUITÉ ET LE DÉBIT DES SOURCES D'ÉLECTRICITÉ

La charge totale Q contenue dans un volume fixe de l'espace limité par une surface S , a pour expression

$$(13) \quad Q = \int_v \rho \, dv$$

Pendant le temps dt l'augmentation dQ est donc telle que

$$(14) \quad \frac{dQ}{dt} = \int_v \partial_t \rho \cdot dv$$

Écrivons que cette augmentation est égale à la charge Q_1 créée dans v , moins la charge Q_2 qui s'échappe de v à travers S dans le même temps dt ; ces dernières ont pour expression

$$(15) \quad \frac{dQ_1}{dt} = \int_v \mathcal{D} dv \quad \frac{dQ_2}{dt} = \int_s \rho \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \int_v \text{div.} (\rho \vec{v}). ds$$

on a donc

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ_1}{dt} - \frac{dQ_2}{dt}$$

ce qui donne

$$\int_v \left\{ \text{div.} (\rho \vec{v}) + \partial_t \rho - \mathcal{D} \right\} dv = 0$$

Comme ceci doit être vrai pour tout volume v aussi petit qu'on le veut et même pour un élément de volume, on en déduit que l'expression sous le signe somme doit être nulle, soit

$$(16) \quad \text{div.} \rho \vec{v} + \partial_t \rho = \mathcal{D}$$

D'après sa définition (15), \mathcal{D} est le débit des sources volumiques d'électricité. Sous la forme quadridimensionnelle (16) s'écrit

$$(17) \quad \partial_p J^p = \mathcal{D}$$

C'est l'équation de continuité qui relie le quadri-courant J^p au débit des sources.

Dans le cas particulier d'une source ponctuelle q fixe, mais variable dans le temps, on a simplement

$$(18) \quad \frac{dq}{dt} = \mathcal{D}$$

Nous allons maintenant donner les équations d'un électromagnétisme non conservatif qui s'appuiera sur l'équation (17) et qui redonnera l'électromagnétisme de Maxwell-Lorentz quand on y fera $\mathcal{D} = 0$.

4. — LES ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME NON CONSERVATIF

On peut décrire les phénomènes en partant d'un quadripotential A^p qui obéit aux mêmes équations que dans la théorie classique, soit

$$(19) \quad \partial_q \partial^q A^p = -\mu_0 J^p$$

Avec ce potentiel A^p , on définit toujours un tenseur de champ B^{pq} antisymétrique par

$$(20) \quad B^{pq} = \partial^p A^q - \partial^q A^p$$

mais nous définirons aussi un autre tenseur de champ Ω qui sera un invariant pour une transformation de Lorentz, par l'expression

$$(21) \quad \Omega = \partial_p A^p$$

Il est facile de voir que ce nouveau champ est lié au débit des sources et qu'il peut être pris à zéro s'il y a conservation de l'électricité. En effet, en appliquant l'opérateur ∂_p à (19) et en tenant compte de (21), on en déduit

$$(22) \quad \partial_q \partial^q \Omega = -\mu_0 \mathcal{D}$$

on a donc la solution particulière

$$(23) \quad \Omega = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v [\mathcal{D}] \frac{dv}{r};$$

les crochets indiquent les grandeurs retardées prises au temps retardé $t-(r/c)$; à cette solution on peut toujours ajouter une solution de Dalember-tien nul.

Appliquons l'opérateur ∂_q à (20) ou à sa duale et tenons compte de (19) et (21) il vient

$$(24) \quad \partial_q B^{pq} - \partial^p \Omega = \mu_0 J^p$$

$$(25) \quad \partial_q \bar{B}^{pq} = 0$$

qui généralisent les équations (6) (7) de Maxwell.

Le nouveau champ Ω agit sur les charges et la nouvelle expression de la densité de force qui généralise (8) (et qui reste une forme bilinéaire mixte densité-champ) s'écrit

$$(26) \quad f^p = J_q B^{pq} - \Omega J^p$$

Enfin le tenseur de Maxwell généralisé peut s'écrire

$$(27) \quad 2\mu_0 T^{pq} = \left\{ [B^{\bar{p}r} B^{\bar{q}}_r - B^{pr} B^q_r] - 2\Omega B^{pq} + \Omega^2 \delta^{pq} \right\}$$

C'est toujours une forme bilinéaire des composantes du nouveau champ B^{pq} , Ω , a 7 composantes. On montre facilement à l'aide de (18) que l'on a

$$(28) \quad f^p = \partial_q T^{pq}$$

En dehors des charges cette équation exprime la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie électromagnétique. Pour l'équation de conservation de l'énergie on a

$$(29) \quad \partial_w T^{tw} + \partial_t T^{tt} = 0$$

avec

$$(30) \quad T^{tt} = \frac{1}{2} \left\{ \mu_0^{-1} B^2 + \epsilon_0 E^2 \right\} + \frac{\Omega^2}{2\mu_0}$$

$$(31) \quad \text{ic } T^{tw} = \mu_0^{-1} \left\{ [E^w B^t - E^t B^w] + \Omega E^w \right\}$$

Comme cas particulier, si les champs sont fixes, mais variables dans le temps, on a $A_w = 0$ d'où $B_w = 0$ et (29) se simplifie suivant

$$(32) \quad \partial_w (\Omega E^w) + \frac{1}{2} \partial_t (\Omega^2 + \epsilon_0 \mu_0 E^2) = 0$$

5. — POTENTIELS ET CHAMPS
D'UNE CHARGE PONCTUELLE VARIABLE ET EN MOUVEMENT

Le quadripotentiel a pour expression

$$(33) \quad A^p = - \frac{c \mu_0}{4 \pi} \left\{ \frac{q V^p}{R_x V^s} \right\}_\tau$$

La seule différence de (33) avec la formule classique de Liénard-Wiechert c'est que q qui varie en fonction du temps doit être prise au temps retardé $t-(r/c)$.

Calculons le nouveau champ Ω ; on trouve, avec la formule (21) de définition

$$(34) \quad \Omega = - \frac{c \mu_0}{4 \pi} \frac{1}{R_x V^s} \left(\frac{dq}{d\lambda} \right)_\tau; \quad d\lambda = \sqrt{1 - \beta^2} dt.$$

Cela peut s'écrire

$$(35) \quad \Omega = \frac{\mu_0}{4 \pi} \left\{ \frac{1}{r} \frac{1}{(1 - \alpha_n \beta^n)} \frac{dq}{dt} \right\}_\tau$$

Dans le cas particulier d'une charge ponctuelle au repos, (35) donne

$$(36) \quad \Omega = \frac{\mu_0}{4 \pi r} \left(\frac{dq}{dt} \right)_{t - \frac{r}{c}} = \frac{\mu_0}{4 \pi r} \varrho \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

On a aussi, dans ce cas

$$(37) \quad V = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r}, \quad \Omega = \epsilon_0 \mu_0 \partial_t V$$

car le potentiel A est nul.

6. — CRÉATION D'UNE CHARGE PONCTUELLE FIXE

Donnons nous par exemple, la loi de variation de q en fonction du temps qui est représentée sur la figure 1 a : la charge qui n'existe pas avant $t = 0$ est créée linéairement dans l'intervalle de temps $0 < t < \theta$.

On a donc

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{ll} q(t) = 0 & \text{quand } t < 0 \\ q(t) = q_0 \frac{t}{\theta} & \text{« } 0 < t < \theta \\ q(t) = q_0 & \text{« } t > \theta \end{array} \right.$$

Le potentiel V est donné par (37), soit

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{ll} V_1 = 0 & \text{quand } r > ct \\ V_2 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_0}{c\theta} \left\{ \frac{ct}{r} - 1 \right\} & \text{« } c(t - \theta) < r < ct \\ V_3 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_0}{r} & \text{« } r < c(t - \theta) \end{array} \right.$$

La figure 1 *b* représente la variation de V en fonction de r pour une certaine valeur du temps $t < \theta$. Quand $t > \theta$ la branche V_3 constante du potentiel

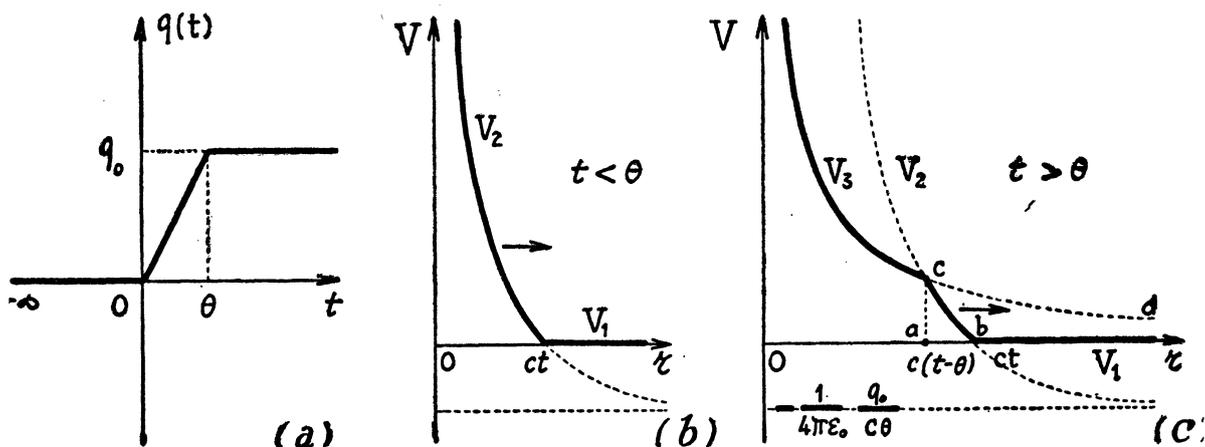


FIG. 1.

fait son apparition, comme le montre la figure 1 *c*. Les points ab distants de $c\theta$ se déplacent à la vitesse de la lumière vers $r \rightarrow \infty$. Quand $t \rightarrow \infty$ on tend donc, comme il se doit, vers le potentiel coulombien de la charge ponctuelle.

Pendant la création de la charge, le champ Ω qui n'existe que dans la couche sphérique ab emporte une énergie constante égale, d'après (30) à

$$(40) \quad W = \int_{c(t-\theta)}^{ct} \frac{\Omega^2}{2 \psi_0} 4 \pi r^2 dr$$

et en tenant compte de l'expression (39) de V_2 et de (37) qui donne

$$\Omega = \frac{1}{c^2} \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_0}{\theta r}$$

On trouve en portant dans (40), que l'on a

$$(41) \quad W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_0^2}{c\theta}$$

Cette énergie s'échappe définitivement du point où l'on crée la charge et se dilue dans une couche sphérique d'épaisseur constante mais de rayon croissant indéfiniment. On notera que si $\theta \rightarrow 0$, c'est-à-dire si la charge est créée brusquement, $W \rightarrow \infty$. Ceci est à rapprocher du fait que l'énergie électrostatique d'une charge ponctuelle est aussi infinie.

7. — ANNIHILATION D'UNE CHARGE PONCTUELLE FIXE

Examinons maintenant dans des conditions analogues, le cas de la disparition d'une charge ponctuelle q . Si $q(t)$ est représenté en fonction du temps par la courbe de la figure 2 a, c'est-à-dire si l'on a

$$(42) \quad \begin{cases} q(t) = q_0 & \text{quand } t < 0 \\ q(t) = q_0 \left(1 - \frac{t}{\theta}\right) & \text{« } 0 < t < \theta \\ q(t) = 0 & \text{« } t > \theta \end{cases}$$

le potentiel donné par (37) s'écrit

$$(43) \quad \begin{cases} V_1 = 0 & \text{quand } r < c(t - \theta) \\ V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{c\theta} \left\{ 1 - \frac{c(t - \theta)}{r} \right\} & \text{« } c(t - \theta) < r < ct \\ V_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r} & \text{« } r > ct \end{cases}$$

La courbe du potentiel V_2 en se déplaçant fait disparaître derrière elle le potentiel coulombien de la charge ponctuelle. Quand $t < \theta$ ce potentiel V_2

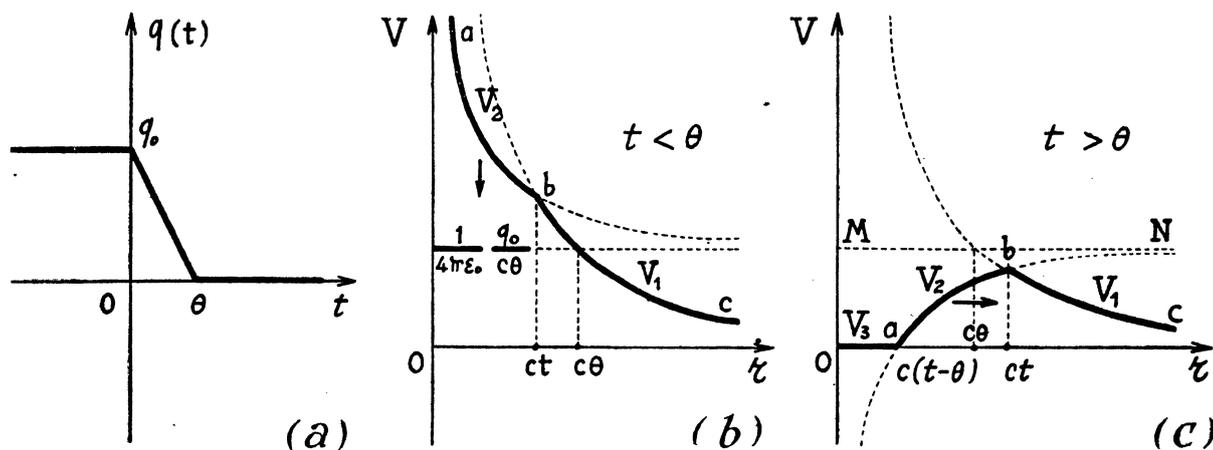


FIG. 2.

est une courbe descendante comme le montre la figure 2 b. Quand $t > \theta$ c'est une courbe ascendante et le potentiel V_3 nul commence à faire son apparition (Fig. 2 c). Le point « a » se déplace à la vitesse de la lumière le long d'un rayon issu de l'origine et au bout d'un temps infini le potentiel coulombien initial a complètement disparu. Quand $t = \theta$ le potentiel V_2 se réduit à la droite MN.

La couche sphérique d'épaisseur $c\theta$ à l'intérieur de laquelle le champ Ω est différent de zéro, emporte encore une énergie qui donnée par (41).

8. — CRÉATION D'UNE COUCHE SPHÉRIQUE ET UNIFORME D'ÉLECTRICITÉ STATIQUE

D'après (19) si l'on a une couche sphérique uniforme de densité variable $\sigma(t)$, le potentiel scalaire est donné par la figure 3 a.

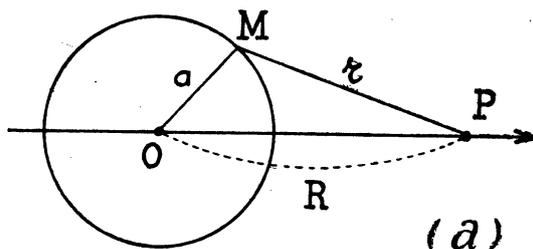


FIG. 3.a

$$(44) \quad V = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int_s \sigma \left(t - \frac{r}{c} \right) \frac{ds}{r} = \frac{a}{2R\varepsilon_0} \int \sigma \left(t - \frac{r}{c} \right) dr$$

La somme sur r va de $(R-a)$ à $(R+a)$ si le point P est à l'extérieur ($R > a$). Elle va de $(a-R)$ à $(a+R)$ si le point P est à l'intérieur. Posons $\tau = t - (r/c)$; on a alors

$$(45) \quad V_{\text{ext.}} = - \int_{t - \frac{(R-a)}{c}}^{t - \frac{(R+a)}{c}} \sigma(\tau) d\tau = \frac{ac}{2R\varepsilon_0} \left\{ F \left[t - \frac{(R-a)}{c} \right] - F \left[t - \frac{(R+a)}{c} \right] \right\}$$

$$(46) \quad V_{\text{int.}} = - \frac{a}{2\varepsilon_0 R} \int_{t - \frac{(a-R)}{c}}^{t - \frac{(a+R)}{c}} \sigma(\tau) d\tau \\ = \frac{ac}{2R\varepsilon_0} \left\{ F \left[t - \frac{(a-R)}{c} \right] - F \left[t - \frac{(a+R)}{c} \right] \right\}$$

en introduisant la primitive de $\sigma(\tau)$, soit

$$(47) \quad F(u) = \int_0^u \sigma(\tau) d\tau$$

On voit qu'à l'intérieur, il y a une onde convergente et une onde divergente; il s'agit d'ailleurs de la même onde qui est passée par le centre O en changeant de signe. A l'extérieur, il y a deux ondes divergentes décalées de $2a/c$ dans le temps. Il y a l'onde directe et l'onde d'abord convergente qui est devenue divergente à l'intérieur de la sphère de rayon a ; elle sort à travers cette dernière et se propage alors à l'extérieur. Quand $r = a$ on a $V_{\text{int}} = V_{\text{ext}}$, mais les dérivées normales sont discontinues et correspondent bien à une densité $\sigma(t)$.

Considérons le cas où l'on crée brusquement σ ; on a alors la variation de $\sigma(t)$ comme l'indique la figure 3 b. Analytiquement cela s'écrit

$$(48) \quad \begin{cases} \sigma(t) = 0 & \text{quand } t < 0 \\ \sigma(t) = \sigma_0 & \text{« } t > 0 \end{cases}$$

et l'on en déduit

$$(49) \quad \begin{cases} F(u) = 0 & \text{quand } u < 0 \\ F(u) = \sigma_0 u & \text{« } u > 0 \end{cases}$$

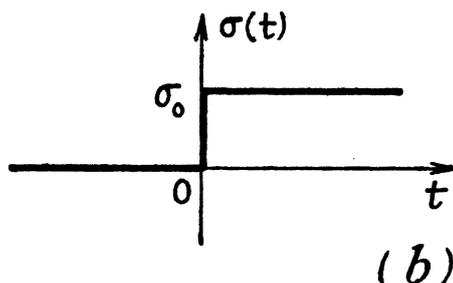


FIG. 3 b

Nous distinguerons trois cas, suivant que ct est compris dans l'un des trois intervalles $0, a; a, 2a; 2a, \infty$.

PREMIER CAS. *Figure 4.* ($0 < ct < a$). L'onde $F\left(t - \frac{aR+}{c}\right)$ est nulle par-

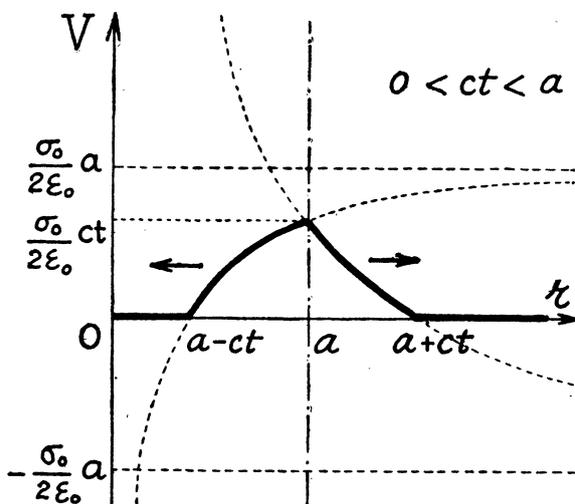


FIG. 4.

tout à l'extérieur et à l'intérieur. On a donc

$$(50) \quad V_{\text{int.}} = \begin{cases} 0 & \text{si } R < (a - ct) \\ \frac{a \sigma_0}{2 \epsilon_0} \left\{ 1 - \frac{(a - ct)}{R} \right\} & \text{si } R > (a - ct) \end{cases}$$

$$(51) \quad V_{\text{ext.}} = \begin{cases} 0 & \text{quand } R > (ct + a) \\ \frac{a \sigma_0}{2 \epsilon_0} \left\{ \frac{ct + a}{R} - 1 \right\} & \text{« } R < (ct + a) \end{cases}$$

La figure 4 représente V en fonction de r pour une valeur donnée du temps; les deux flèches indiquent le sens du déplacement des courbes quant t croît.

DEUXIÈME CAS. *Figure 5.* ($a < ct < 2a$). A l'intérieur on a toujours (51) qui est valable car la deuxième onde n'a pas encore eu le temps d'arriver.

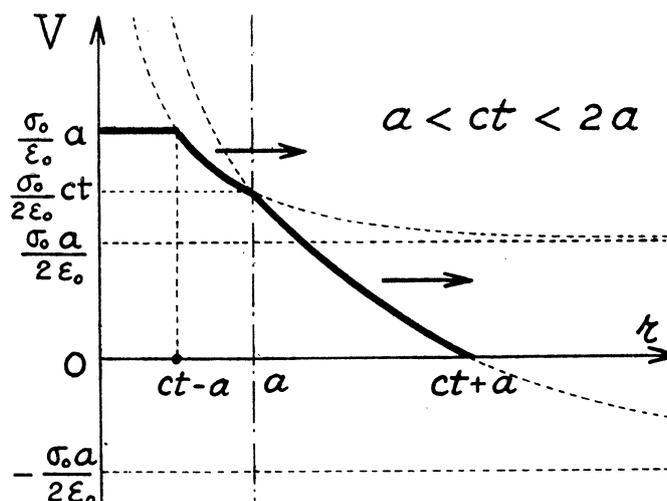


FIG. 5.

A l'intérieur le front de la deuxième onde est au point $r = (ct - a)$ et se déplace vers la droite avec la vitesse c . Quand $r < (ct - a)$ on a donc superposition des deux ondes, ce qui donne

$$(52) \quad V_{\text{int.}} = \frac{a \sigma_0}{\epsilon_0} = c t^e$$

Quand $r > (ct - a)$ et toujours à l'intérieur de la sphère on a toujours (50) qui est valable, mais c'est devenu une courbe descendante, alors qu'elle était montante vers la droite dans la figure précédente.

TROISIÈME CAS. *Figure 6.* ($2a < ct < \infty$). Le front de l'onde qui est passée par le centre est toujours au point $r = ct - a$; on a donc pour $a < r < (ct - a)$, une superposition des deux ondes, ce qui donne

$$(53) \quad V_{\text{ext.}} = \frac{a^2 \sigma}{\epsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{R}$$

On tend donc vers le potentiel coulombien : constant pour $r < a$ et décroissant comme $1/R$ à l'extérieur de la sphère.

La seule partie variable du potentiel se trouve donc dans l'espace compris entre les deux sphères de rayon $(ct - a)$ et $(ct + a)$; son expression est donnée par (51). Il est intéressant de calculer l'énergie qui se trouve dans cette couche et qui s'échappe définitivement de la surface $r = a$. Le champ

électrique décroît comme $1/R^2$ et l'énergie électrostatique correspondante tend vers zéro. Il reste le nouveau champ Ω qui décroît comme $1/R$ et qui

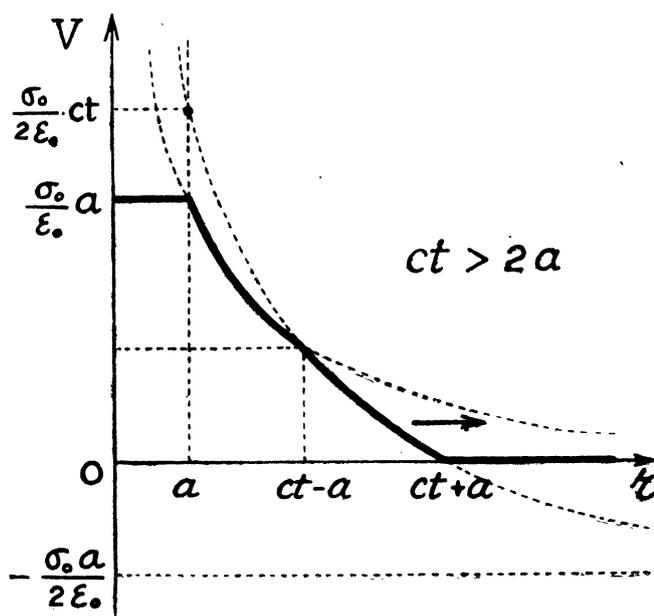


FIG. 6.

emporte une énergie constante, soit

$$(54) \quad W_e = \frac{1}{2\mu_e} \int \Omega^2 dv = \frac{1}{4\pi \epsilon_e} \frac{Q^2}{4a} \quad \left(\text{car } \Omega = c^{-1} \partial_t V = \frac{a \sigma_0}{2c \epsilon_e R} \right)$$

où $Q = 4\pi a^2 \sigma_0$ est la charge totale de la couche.

Rappelons que l'énergie du champ électrostatique de cette couche sphérique finale σ_0 a pour valeur

$$(55) \quad W_e = \frac{1}{4\pi \epsilon_e} \cdot \frac{Q^2}{2a}$$

L'énergie de création W_e est donc du même ordre de grandeur que l'énergie électrostatique.

9. — CONCLUSION

On a mis en évidence le fait que lorsque les charges ne se conservent plus, il y a un nouveau champ Ω qui est un invariant; il contribue à l'énergie et à la quantité de mouvement électromagnétique et modifie la force de Lorentz.

Toutefois, il est certain que dans le cadre de la théorie classique, on ne peut rendre compte des faits expérimentaux que l'on observe dans la création des paires (+) (—) ou dans leur disparition. C'est seulement dans le cadre de la théorie quantique des champs que les nouvelles formules prendront toute leur valeur. La théorie quantique actuelle doit être incomplète car elle ne tient pas compte du champ Ω .