PHILIPPE BÉNILAN
MICHEL PIERRE

**Inéquations différentielles ordinaires avec obstacles irréguliers**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série*, tome 1, nº 1 (1979), p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1979_5_1_1_1_0>

Annales Faculté Sciences Toulouse
Vol I N° 1 - Page 1 à 8

# INEQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINAIRES AVEC OBSTACLES IRREGULIERS

**Philippe Bénilan** (1) **et Michel Pierre** (2)

*(1) Faculté des Sciences et Techniques, Route de Gay — 25030 Besançon Cedex.*
*(2) Centre Universitaire de Lorient — 1, rue de Londres — 56100 Lorient.*

**Résumé :** Nous trouvons pour des problèmes de la forme :

$$\frac{du}{dt} + a(u) \geqslant 0, u \geqslant \Psi \ , \ (\frac{du}{dt} + a(u))\ (u - \Psi) = 0, u(0) = u_o \ ,$$

avec un «obstacle» $\Psi$ seulement s.c.s. à droite, existence et unicité d'une solution u continue à droite et à variation bornée. On étudie également le problème bilatéral.

**Summary :** For problems of the type :

$$\frac{du}{dt} + a(u) \geqslant 0, u \geqslant \Psi \ , \ (\frac{du}{dt} + a(u))\ (u - \Psi) = 0, u(0) = u_o \ ,$$

with an «obstacle» $\Psi$ only u.s.c. from the right, we find existence and uniqueness of a solution u continuous from the right and of bounded variation. We also study the bilateral problem.

## Introduction

Considérons le problème différentiel :

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{du}{dt} + a(u) \geqslant 0 \\ u \geqslant \Psi \\ (\dfrac{du}{dt} + a(u))\ (u - \Psi) = 0 \\ u(0) = u_o \end{array} \right.$$

où a, $\Psi$, $u_o$, sont donnés et u est une fonction inconnue de [0, T[ dans R.

Moyennant des hypothèses de lipschitzianité ou monotonie sur a, pour un «obstacle» $\Psi$ régulier, par exemple absolument continu, on peut montrer l'existence et l'unicité d'une solution forte de (I), c'est-à-dire d'une fonction u absolument continue vérifiant les relations de (I) pour p.p.t : c'est un cas très particulier des résultats de [2].

Pour un $\Psi$ seulement mesurable majoré, comme cas très particulier des méthodes de [4] nous pouvons montrer l'existence d'une solution faible de (I) c'est-à-dire d'une (classe de) fonction u $\in L^\infty(0,T)$ vérifiant :

$$\begin{cases} u(t) \geqslant \Psi(t) \text{ p.p.t} \\ \displaystyle\int_0^T \left(\frac{dv}{dt} + a(u)\right)(v-u) + \frac{1}{2}(v(0)-u_0)^2 \geqslant 0 \text{ pour tout v absolument continu avec } v \geqslant \Psi. \end{cases}$$

Mais en général il n'y a pas unicité d'une telle solution.

Nous montrons ici que pour un $\Psi$ s.c.s. à droite, on a existence d'une solution u vérifiant :

$$\begin{cases} \text{u est continue à droite et à variation bornée.} \\ u(0) = u_0 \text{ et } u(t) \geqslant \Psi(t) \text{ pour tout t} \\ \text{la mesure } \dfrac{du}{dt} + a(u) \text{ est positive et portée par } (u = \Psi). \end{cases}$$

D'une manière plus générale nous étudions le problème différentiel avec obstacle en dessous et au dessus. Dans la partie A nous énonçons le résultat général et démontrons un théorème de comparaison ; la partie B est consacrée au problème unilatéral (I) ; dans la partie C nous démontrons le résultat général.

## A - LE RESULTAT GENERAL

On se donne $T > 0$ et une multiapplication,

$a : ]0,T[ \times R \rightarrow \mathcal{P}(R)$ vérifiant :

(1) Il existe $\omega \in L^1(0,T)$ tel que pour p.p.t $\in ]0,T[$, la multiapplication $r \rightarrow a(t,r) + \omega(t)\,r$ soit maximale monotone (*) ;

(2) Pour tout $r \in R$, la fonction $t \rightarrow \inf a(t,r)$ est intégrable (**).

On se donne d'autre part

(3) $\Psi_1 : [0,T[ \rightarrow [-\infty, \infty[$ , $\Psi_2 : [0,T[ \rightarrow ]-\infty,\infty]$ , vérifiant :
$\Psi_1$ (resp. $\Psi_2$) est s.c.s. (resp. s.c.i.) à droite ;

(4) Il existe $\Psi_0 : [0,T[ \rightarrow R$ à variation bornée tel que
$\Psi_1(t) \leqslant \Psi_0(t) \leqslant \Psi_2(t), \forall t \in [0,T[$ .

On se donne enfin :

$u_0 \in [\Psi_1(0), \Psi_2(0)] \cap R$, $\mu$ mesure de Radon bornée sur $]0,T[$ .

On a alors le :

THEOREME 1. *Sous les hypothèses précédentes il existe une* *__unique__* *fonction* $u : [0,T[ \rightarrow R$ *vérifiant :*

*(i)* *u est continu à droite et à variation bornée,*

*(ii)* $u(0) = u_0$ et $\Psi_1(t) \leqslant u(t) \leqslant \Psi_2(t) \quad \forall t \in [0,T[$ ,

*(iii)* *Il existe* $w \in L^1(0,T)$ *tel que :* $w(t) \in a(t,u(t))$ p.p.t $\in ]0,T[$ *et la mesure de Radon* $\nu = \dfrac{du}{dt} + w - \mu$ *soit de partie positive* $\nu^+$ *portée par* $\{t \in ]0,T[ \,;\, u(t) = \Psi_1(t)\}$ *et de partie négative* $\nu^-$ *portée par* $\{t \in ]0,T[ \,;\, u(t) = \Psi_2(t)\}$ .

---

(*) Pour la définition d'une multiapplication maximale monotone, on peut consulter [1]. La propriété est en particulier vérifiée si a est une application de $]0,T[ \times R$ dans R telle que pour p.p.t $\in ]0,T[$ , l'application $r \rightarrow a(t,r) + \omega(t)\,r$ soit croissante continue.

(**) Ce qui implique que pour tout $r \in R$, p.p.t $\in ]0,T[$ , $a(t,r) \neq \phi$.

Nous dirons qu'une fonction u vérifiant (i), (ii) et (iii) est solution du PD $(a, \Psi_1, \Psi_2, u_o, \mu)$. L'unicité de la solution est un corollaire immédiat du résultat suivant :

PROPOSITION 2. *Soient* $\hat{a}, \hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, \hat{u}_o, \hat{\mu}$ *vérifiant les mêmes hypothèses.*

*On suppose que* $\inf a(t,r) \leqslant \inf \hat{a}(t,r)$, p.p.$t \in ]0, T[$, $\forall r \in R$, $\hat{\Psi}_i(t) \leqslant \Psi_i(t)$ $\forall t \in [0, T[$, $\hat{u}_o \leqslant u_o$ et $\hat{\mu} \leqslant \mu$ *au sens des mesures.*

*Soient* u(resp. û) *solutions de* PD $(a, \Psi_1, \Psi_2, u_o, \mu)$(resp. PD $(\hat{a}, \hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, \hat{u}_o, \hat{\mu})$. *Alors :*

$\hat{u}(t) \leqslant u(t)$ $\forall t \in [0, T[$.

La démonstration de la proposition 2 utilise essentiellement le lemme suivant :

LEMME 3. *Soit* $v = [0, T[ \to R$ *continue à droite et à variation bornée. On a :*

$$\frac{1}{2} v^+(t)^2 \leqslant \frac{1}{2} v^+(0)^2 + \int_{]0,T]} v^+ \frac{dv}{dt}, \ \forall t \in [0, T[.$$

*Démonstration du lemme 3.* Notons d'abord que d'après [5] (corollaire 5c), nous avons

$$\frac{1}{2} v^+(t)^2 \leqslant \frac{1}{2} v^+(0)^2 + \int_{]0,t]} v^+ \frac{dv^+}{dt}$$

(il est immédiat que $v^+$ est aussi continue à droite et à variation bornée). D'après la continuité à droite, $\{t \in ]0, T[\ , v(t) > 0\}$ est une réunion au plus dénombrable d'intervales ouverts à droite.

Si $I = (t_1, t_2[$ est un tel intervalle, nous avons puisque $v = v^+$ sur $]t_1, t_2[$,

$$\int_{]t_1,t_2[} v^+ \frac{dv^+}{dt} = \int_{]t_1,t_2[} v^+ \frac{dv}{dt}.$$

D'autre part si $t_1 \in I$, c'est-à-dire $v(t_1) > 0$,

$$\int_{\{t_1\}} v^+ \frac{dv^+}{dt} = v^+(t_1)(v^+(t_1) - v^+(t_1^-)) \leqslant v(t_1)(v(t_1) - v(t_1^-)) = \int_{\{t_1\}} v \frac{dv}{dt}$$

(en effet par définition de I ; $v(t_1^-) \leqslant 0 \leqslant v^+(t_1^-)$); le lemme s'en déduit.

*Démonstration de la proposition 2.* Posons $v = \hat{u} - u$. D'après le lemme 3, on a :

$$\frac{1}{2} v^+(t)^2 \leqslant \int_{]0,t]} v^+ \frac{dv}{dt} \leqslant \int_{]0,t]} v^+ (\hat{\nu} - \nu) - \int_0^t (\hat{w}(s) - w(s))\, v^+(s)\, ds.$$

où w, $\nu$(resp. $\hat{w}, \hat{\nu}$) sont les données correspondantes à u(resp. û) dans la condition (iii) (on a utilisé $v^+(0) = (\hat{u}_o - u_o)^+ = 0$ et $v^+(\hat{\mu} - \mu) \leqslant 0$ au sens des mesures).

L'ensemble $\Omega = \{s \in ]0, t] \ ; v(s) > 0\}$ est contenu dans $\{s \in ]0, T[ \ ; \hat{\Psi}_1(s) < \hat{u}(s)$ et $u(s) < \Psi_2(s)\}$. Donc :

$$\int_{]0,T]} v^+(\hat{\nu} - \nu) = - \int_{\Omega} v^+(\hat{\nu}^- + \nu^+) \leqslant 0.$$

D'autre part pour p.p. $s \in \Omega$,

$$\hat{w}(s) + \omega(s)\hat{u}(s) \geqslant \inf(\hat{a}(s, \hat{u}(s)) + \omega(s)\hat{u}(s)) \geqslant \inf(a(s, \hat{u}(s)) + \omega(s)\hat{u}(s))$$
$$\geqslant \sup(a(s, u(s)) + \omega(s)u(s)) \geqslant w(s) + \omega(s)u(s).$$

(la troisième inégalité résulte de la monotonie de $r \to a(s, r) + \omega(s)r$) ; donc

$v^+(s)(\hat{w}(s) - w(s)) \geqslant -\omega(s)v(s)v^+(s) = -\omega(s)v^+(s)^2$ p.p.$s \in ]0, T[$,

et

$$\frac{1}{2} v^+(t)^2 \leqslant \int_0^t \omega(s) v^+(s)^2\, ds, \quad \forall t \to [0, T[.$$

Par le lemme de Gronwall, on en déduit $v^+(t) = 0$, c'est-à-dire $\hat{u}(t) \leqslant u(t)$ pour tout $t \in [0, T[$.

*Remarque 4.* Par changement de fonctions, on peut toujours se ramener au cas où $\omega = 0$ et $\mu = 0$. En effet :

1) Réduction à $\mu = 0$ – Posons pour tout $t \in [0, T[$, $\phi(t) = \int_{]0,T]} \mu$, $\hat{\Psi}_i(t) = \Psi_i(t) - \phi(t)$ $(i = 0, 1, 2,)$ , $\hat{a}(t,r) = a(t, r + \phi(t))$.

On vérifie facilement que $\hat{a}$ satisfait (1) et (2) ($\phi$ étant borné, pour $r \in R$, il existe $\hat{r}_1, \hat{r}_2 \in R$ tels que $\hat{r}_1 \leqslant r + \phi(t) \leqslant \hat{r}_2$ pour tout $t \in [0, T[$ ; on a alors $\omega(t)(\hat{r}_1 - \hat{r}_2) + \inf a(t,\hat{r}_1) \leqslant \inf \hat{a}(t,r) \leqslant \omega(t)(\hat{r}_2 - \hat{r}_1) + \inf a(t, \hat{r}_2)$ et que $\hat{\Psi}_i$ , satisfait (3) et (4) ($\phi$est continue à droite et à variation bornée). Il est immédiat que u est solution de PD $(a, \Psi_1, \Psi_2, u_0, \mu)$ ssi $\hat{u} = u - \phi$ est solution de PD $(\hat{a}, \hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, u_0, 0)$.

2) Réduction à $\omega = 0$ – Posons pour tout $t \in [0, T[$ .

$\Omega(t) = \int_0^t \omega(s)ds$ , $\hat{\Psi}_i(t) = e^{-\Omega(t)} \Psi_i(t)$ $(i = 0, 1, 2,)$ ,

$\hat{a}(t,r) = e^{-\Omega(t)} a(t, e^{\Omega(t)} r) + \omega(t) r$.

On vérifie facilement que $\hat{a}$ vérifie (1) avec $\hat{\omega} = 0$ ; il vérifie (2) et $\hat{\Psi}_i$ vérifie (3) et (4). Alors u est solution de PD $(a, \Psi_1, \Psi_2, u_0, 0)$ ssi $\hat{u}(t) = e^{-\Omega(t)} u(t)$ est solution de PD $(\hat{a}, \hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, u_0, 0)$.

B - LE PROBLEME UNILATERAL

Démontrons d'abord la proposition suivante :

PROPOSITION 5. *Soient* $a : ]0, T[ \times R \to \mathcal{P}(R)$ *vérifiant (1) (avec* $\omega = 0$*) et (2),* $\Psi : [0, T[ \to [-\infty, \infty[$ s.c.s. *à droite et majorée,* $u_0 \geqslant \Psi(0)$. *Alors il existe* $u : [0, T[ \to R$ *vérifiant :*

*(i')* *u est continue à droite, à variation bornée et s.c.s.*

*(ii')* $u(0) = u_0$ et $u(t) \geqslant \Psi(t)$, $\forall t \in [0, T[$ ,

*(iii')* *Il existe* $w \in L^1(0, T)$ *tel que* $w(t) \in a(t, u(t))$ p.p.$t \in ]0, T[$ *et la mesure du Radon* $\nu = \frac{du}{dt} + w$ *est positive et portée par* $\{t \in ]0, T[ \; ; u(t) = \Psi(t)\}$.

Nous utiliserons le lemme suivant correspondant à $a \equiv 0$ :

LEMME 6. *Soient* $\Psi : [0, T[ \to [-\infty, \infty[$ s.c.s. *à droite et majorée, et* $u_0 \geqslant \Psi(0)$. *Alors la fonction*

$u = \tau(\Psi, u_0)$ *définie par :*

$u(t) = \max\,(u_0, \sup \Psi(s) \; ; s \in [0, T])$

*satisfait :*

*u est croissante majorée et continue à droite,*

$u(0) = u_0$ et $u(t) \geqslant \Psi(t)$, $\forall t \in [0, T[$ ,

*la mesure* $\nu = \frac{du}{dt}$ *est portée par* $\{t \in ]0, T[ \; ; u(t) = \Psi(t)\}$.

Nous utiliserons également le lemme suivant qui est un cas particulier des résultats de [3] :

LEMME 7. *Soit* $a : ]0, T[ \times R \to \mathcal{P}(R)$ *vérifiant (1) et (2). Alors il existe une unique fonction u absolument continue vérifiant :*

$u(0) = 0$, $u'(t) + a(t, u(t)) \ni 0$ p.p.$t \in ]0, T[$ .

*Démonstration du lemme 6.* Il est immédiat que u est croissante majorée, $u(0) = u_0$ et $u(t) \geqslant \Psi(t)$ pour tout $t \in [0, T[$ .

La continuité à droite résulte très simplement de la semi-continuité supérieure à droite de $\Psi$. La mesure $\nu$ est positive ; montrons que $\int_{\{u > \Psi\}} \nu = 0$

Remarquons que u est continue en tout point de $\{u > \Psi\}$: elle est en effet continue à droite et si $t \in ]0, T[ \cap \{u > \Psi\}$, puisque $u(t) = \max(u(t^-), \Psi(t))$ par définition de u, $u(t) = u(t^-)$.

D'autre part, $\{u > \Psi\}$ est ouvert à droite et u est, localement à droite, constante sur $\{u > \Psi\}$. Il en résulte que u est constante sur les composantes connexes de $\{u > \Psi\}$ qui forment une famille au plus dénombrable d'intervalles ouverts à droite.

Etant donné un tel intervalle $(t_1, t_2[$, que $t_1$ appartienne ou non à l'intervalle, on a donc $\displaystyle\int_{(t_1,t_2[} \frac{du}{dt} = 0$. D'où le résultat.

*Démonstration de la proposition 5.* On décompose le problème en un «système» :

$$(P)\begin{cases} u_1 = \tau(\Psi + u_2, u_0), \\ u_2 \text{ absolument continue, } u_2(0) = 0 \text{ et} \\ u_2'(t) \in a(t, u_1(t) - u_2(t)) \text{ p.p. } t \in ]0, T[. \end{cases}$$

Si $(u_1, u_2)$ est solution de (P), alors $u = u_1 - u_2$ est solution de (i'), (ii'), (iii'). En effet (i') et (ii') sont immédiats ; pour (iii'), il suffit de poser $w = u_2'$ ; on a alors $\nu = \frac{du_1}{dt}$ qui est une mesure positive portée par $\{u_1 = \Psi + u_2\} = \{u = \Psi\}$.

Pour résoudre (P), considérons l'application S qui à $v_2$ s.c.s. à droite majorée avec $v_2(0) = 0$ fait correspondre la solution $u_2$ de

$$\begin{cases} u_2 \text{ est absolument continue, } u_2(0) = 0 \\ u_2'(t) \in a(t, \tau(\Psi + v_2, u_0)(t) - u_2(t)) \text{ p.p. } t \in ]0, T[ ; \end{cases}$$

( $(t,r) \to - a(t, \tau(\Psi + v_2, u_0)(t) - r)$ vérifie (1) et (2) ; on peut appliquer le lemme 7).

Résoudre (P) revient à trouver un point fixe de S. Or l'application S est croissante ; en effet : $v_2 \to \tau(\Psi + v_2, u_0)$ est croissante.

(cela est immédiat directement ou résulte de la Proposition 2, puisque $\tau(\Psi + v_2, u_0)$ est solution de PD $(0, \Psi + v_2, +\infty, u_0, 0)$ ; donc si $v_2 \leqslant \hat{v}_2$, utilisant la monotonie de $a(t, \cdot)$ :

$\inf - a(t, \tau(\Psi + v_2)(t) - r) \geqslant \inf - a(t, \tau(\Psi + \hat{v}_2)(t) - r)$ p.p. t, $\forall r$ ; la croissance de S résulte de la Proposition 2 (la solution u de $u(0) = 0$, $u' + a(\cdot, u) \ni 0$ est solution de PD $(a, -\infty, +\infty, 0, 0)$ ).

D'autre part considérons $\phi(t) = \int_0^t (\inf a(s, \tau(\Psi, u_0)(s))^+ ds$. On a $S(\varphi) \leqslant \phi$ : en effet, puisque $\phi$ est croissante et $\phi(0) = 0$, $\tau(\Psi + \phi, u_0) \leqslant \phi + \tau(\Psi, u_0)$, $(\phi + \tau(\Psi, u_0)$ est solution de PD $(0, \Psi + \phi, +\infty, u_0, \frac{d\phi}{dt})$ ) ; notons $\Omega = \{S(\phi) > \phi\}$; pour $t \in \Omega$, on a donc $\tau(\Psi + \varphi, u_0)(t) - S(\phi)(t) < \tau(\Psi, u_0)(t)$ d'où pour p.p. $t \in \Omega$, d'après la monotonie de $a(t, \cdot)$, $S(\varphi)'(t) \leqslant \inf a(t, \tau(\Psi, u_0)(t)) \leqslant \phi'(t)$. On en déduit que $\frac{d}{dt}(S(\phi) - \phi)^{+2} \leqslant 0$ p.p., d'où $S(\phi) \leqslant \phi$. Donc S applique l'ensemble : $I = \{v_2$ s.c.s. à droite, $v_2(0) = 0$, $v_2 \leqslant \phi\}$ dans lui-même. L'enveloppe inférieure $u_2$ de $I_+ = \{v_2 \in I ; S(v_2) \leqslant v_2\}$ est dans I et satisfait $S(u_2) = u_2$ (cf. [7]).

Utilisant la remarque 4, on a donc le corollaire :

COROLLAIRE 8. *Soient* $a : ]0, T[ \times R \to \mathcal{P}(R)$ *vérifiant (1) et (2),* $\Psi = [0, T[ \to [-\infty, \infty[$ s.c.s. *à droite et majorée,* $u_0 \geqslant \Psi(0)$, $\mu$ *mesure de Radon bornée sur* $]0, T[$ *. Alors, il existe une unique solution de PD* $(a, \Psi, +\infty, \mu, u_0)$.

Par construction, $\tau(\Psi, u_0)$ est la plus petite fonction croissante majorant $\Psi$ en tout $t \in ]0, T[$ et majorant $u_0$ en $t = 0$. Plus généralement nous avons :

PROPOSITION 9. *Sous les hypothèses du corollaire 8, la solution de PD* $(a, \Psi, +\infty, \mu, u_0)$ *est la plus petite fonction* $u = [0, T[ \to R$ *vérifiant*

*(i)* *u est continue à droite et à variation bornée*

*(ii")* $u(0) \geqslant u_0$, $u(t) \geqslant \Psi(t)$, $\forall t \in ]0, T[$,

$$\text{(iii")}\begin{cases} \textit{Il existe } w \in L^1(0, T) \textit{ tel que} \\ w(t) \in a(t, u(t)) \text{ p.p. } t \in ]0, T[ \\ \textit{et } \frac{du}{dt} + w \geqslant \mu \textit{ au sens des mesures.} \end{cases}$$

*Démonstration de la Proposition 9.* Soit u vérifiant (i) (ii") (iii"). La mesure $\nu = \frac{du}{dt} + w - \mu$ est positive et u est solution de PD $(a, \Psi, \infty, u(0), \mu + \nu)$.
D'après la Proposition 2, u majore la solution de PD $(a, \Psi, \infty, u_0, \mu)$.

Sous les hypothèses de la Proposition 5, nous avons obtenu une solution s.c.s. : plus généralement nous avons :

PROPOSITION 10. *Sous les hypothèses du corollaire 8, supposons de plus que la partie négative de la mesure $\mu$ est sans atomes. Alors :*

*1) la solution de PD $(a, \Psi, \infty, u_0, \mu)$ est s.c.s.,*

*2) les solutions de PD $(a, \Psi, \infty, u_0, \mu)$ et PD $(a, \widetilde{\Psi}, \infty, u_0, \mu)$ sont égales, où $\widetilde{\Psi}$ est la plus petite fonction s.c.s. majorant $\Psi$.*

*Démonstration de la Proposition 10.* Le second point résulte immédiatement du premier et de la Proposition 9. Pour le premier point il suffit d'utiliser la Proposition 5 et les réductions de la Remarque 4 : la réduction à $\omega = 0$ respecte la semi-continuité ; pour la réduction à $\mu = 0$, nous faisons le changement de fonction $\hat{u} = u - \phi$ où $\phi(t) = \int_{]0,T]} \mu$. D'après la Proposition 5, $\hat{u}$ est s.c.s. ; si $\mu^-$ est sans atomes, $\phi$ est également s.c.s : donc $u = \hat{u} + \phi$ est s.c.s.

Remarquons que la condition $\mu^-$ sans atomes est nécessaire : la solution de PD $(0, -\infty, \infty, u_0, \mu)$ est en effet $u(t) = u_0 + \int_{]0,t]} \mu$ qui est s.c.s. ssi $\mu^-$ est sans atomes.

Pour achever cette partie, précisons $\{u = \Psi\}$ lorsque $\Psi$ est s.c.s. :

PROPOSITION 11. *Sous les hypothèses du corollaire 8, supposons de plus $\Psi$ s.c.s. et que la partie positive de $\mu$ est sans atomes. Soit u la solution de PD $(a, \Psi, \infty, \mu, u_0)$, l'ensemble $\{t \in [0, T[\ ; u(t) = \Psi(t)\}$ est fermé.*

*Démonstration de la Proposition 11.* Faisons d'abord les réductions de la Remarque 4 : la réduction à $\omega = 0$ ne pose pas de problèmes ; pour la réduction à $\mu = 0$, nous faisons le changement d'obstacles $\hat{\Psi} = \Psi - \phi$ où $\phi(t) = \int_{]0,T]} \mu$ ; si $\mu^+$ est sans atomes, $\hat{\Psi}$ est s.c.s.

Il suffit donc de se placer sous les hypothèses de la Proposition 5 avec $\Psi$ s.c.s.

Reprenant la démonstration de la Proposition 5, nous avons obtenu $u = u_1 - u_2$ où $(u_1, u_2)$ est solution (P). L'ensemble $\{u = \Psi\}$ est égal à $\{u_1 = \Psi + u_2\}$ ; puisque $\Psi + u_2$ est s.c.s., il suffit de montrer que pour $\Psi$ s.c.s. l'ensemble $\{\tau(\Psi, u_0) = \Psi\}$ est fermé. Or reprenant la démonstration du lemme 6, puisque $u = \tau(\Psi, u_0)$ est continu en tout point de $\{u > \Psi\}$, $\Psi$ étant s.c.s., cet ensemble est ouvert.

Avec les mêmes méthodes on peut obtenir d'autres renseignements sur la solution de PD $(a, \Psi, \infty, u_0, \mu)$ : par exemple étudier la continuité, l'absolue continuité, etc... en fonction des propriétés de $\Psi$ et $\mu$.

C - LE PROBLEME BILATERAL :

*Démonstration du théorème 1.* Pour démontrer le théorème 1, nous utilisons la méthode de NAKOULIMA [6] ramenant le problème bilatéral à un système d'«I.Q.V.» unilatérales :

Soient $u_0^1, u_0^2$ tels que $u_0^1 - u_0^2 = u_0$.

Nous nous plaçons dans le cas réduit $\omega = 0$, $\mu = 0$.

Considérons le système d'I.Q.V. :

$$(P) \begin{cases} u_1 \text{ solution de PD } (a^1(u_2), u_2 + \Psi_1, \infty, u_0^1, 0) \\ u_2 \text{ solution de PD } (a^2(u_1), u_1 - \Psi_2, \infty, u_0^2, 0), \end{cases}$$

où pour $v : ]0, T[ \to R$,
$a^1(v)(t,r) = a(t, r - v(t))^+$, $a^2(v)(t,r) = a(t, v(t) - r)^-$ (si v est mesurable bornée, $a^1(v)$ et $a^2(v)$ vérifient (1) et (2)).

Si $(u_1, u_2)$ est solution de (P), $u = u_1 - u_2$ est solution de PD$(a, \Psi_1, \Psi_2, u_o, 0)$. En effet u vérifie (i) et (ii) ; maintenant si $(w_i, \nu_i)$ sont les données correspondantes dans (iii') à $u_i$ $(i = 1,2)$, $w = w_1 - w_2 \in L^1(0, T)$ et $w(t) \in a(t, u_1(t) - u_2(t))^+ - a(t, u_1(t) - u_2(t))^- = a(t, u(t))$ p.p. $t \in ]0, T[$ ; enfin $\nu = \frac{du}{dt} + w = \nu_1 - \nu_2$ est de partie positive $\nu^+ \leqslant \nu_1$, donc aussi portée par $\{u_1 = u_2 + \Psi_1\} = \{u = \Psi_1\}$ et de partie négative $\nu^- \leqslant \nu_2$ portée par $\{u_2 = u_1 - \Psi_2\} = \{u = \Psi_2\}$.

Résoudre (P) revient à trouver un point fixe pour l'application S qui à $(v_1, v_2)$ couple de fonctions de $[0, T[$ dans R, s.c.s. à droite bornées avec $v_i(o) = u_o^i$ $(i = 1, 2)$ fait correspondre $(u_1, u_2)$ solution de :

$$\begin{cases} u_1 \text{ est solution de PD } (a^1(v_2), v_2 + \Psi_1, \infty, u_o^1, 0) \\ u_2 \text{ est solution de PD } (a^2(v_1), v_1 - \Psi_2, \infty, u_o^2, 0) \end{cases}$$

(cette solution existe et est unique d'après la partie B).

L'application S est croissante d'après la Proposition 2 et la monotonie de $a^1, a^2$. Montrons que S applique dans lui même l'intervalle :

$$I = \left\{(v_1, v_2) \; ; v_i \text{ s.c.s. à droite, } v_i(o) = v_o^i, \underline{u}_i \leqslant v_i \leqslant \bar{u}_i \; (i = 1, 2)\right\}$$

où $\underline{u}_i, \bar{u}_i$ sont définis ci-dessous. Il en résultera alors d'après [7], l'existence d'un point fixe pour S.

On peut toujours supposer que la fonction $\Psi_o$ intervenant dans la condition (4) est continue à droite et $\Psi_o(0) = 0$. Ainsi il existe $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ croissantes, continues à droite telles que $\Psi_o = \bar{u}_1 - \bar{u}_2$ et $\bar{u}_i(0) = u_o^i$ $(i = 1, 2)$. Vérifions que $S(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \leqslant (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ : en effet $\bar{u}_1 = \Psi_o + u_2 \geqslant \Psi_1 + \bar{u}_2$ et posant $w_1(t) = \inf a(t, u(t, \Psi_o(t)))^+$ on a $w_1(t) \in a^1(\bar{u}_2)(t, \bar{u}_1(t))$ p.p. t et $\frac{d\bar{u}_1}{dt} + w_1 \geqslant 0$ ($\bar{u}_1$ est supposée croissante) ; d'après la Proposition 9, $\bar{u}_1$ est donc supérieure ou égale à la solution de PD $(a^1(\bar{u}_2), \bar{u}_2 + \Psi_1, \infty, u_o^1, 0)$ ; symétriquement, $\bar{u}_2$ est supérieure ou égale à la solution de PD $(a^2(\bar{u}_1), \bar{u}_1 - \Psi_2, \infty, u_o^2, 0)$.

Enfin soit $\underline{u}$ la solution de (cf. lemme 7) :

$\underline{u}'(t) + a(t, \underline{u}(t)) \ni 0, \underline{u}(0) = u_o$.

Soient $\underline{u}_1(t) = u_o^1 - \int_0^t \underline{u}'(s)^- ds$, $\underline{u}_2(t) = u_o^2 - \int_0^t \underline{u}'(s)^+ ds$ ; on a $\underline{u}_i'(t) + a^i(\underline{u}_j)(t, \underline{u}_i(t))$ 0 p.p.t, c'est-à-dire $\underline{u}_i$ est solution de PD $(a^i(\underline{u}_j), -\infty, \infty, u_o^i, 0)$ $(i \neq j = 1, 2)$.

D'après la Proposition 2, $S(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \geqslant (\underline{u}_1, \underline{u}_2)$.

## REFERENCES


[1] H. BREZIS. *«Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert»* North Holland. Math. studies (1973).

[2] H. BREZIS. *«Un problème d'évolution avec contrainte unilatérale»*. C.R. Acad. Sc. Paris 274 (1972) pp. 310-313.

[3] A. LASOTA and OPIAL. *«An application of the Kakutani-Ky Fan theorem in the theory of ordinary differential equations»*. Bull. Ac. Pol. Sc. 13 (1965) pp. 781-786.

[4] F. MIGNOT et J.P. PUEL. *«Inéquations d'évolution paraboliques avec convexes dépendant du temps. Applications aux inéquations quasi-variationnelles d'évolution»*. Arch. for Rat. Mech. and Ana. Vol 64, N° 1. (1977) pp. 59-91.

[5] J.J. MOREAU. *«Sur les mesures différentielles des fonctions vectorielles à variation localement bornée»*. Séminaire d'Analyse convexe. Montpellier 1976. exposé n° 17.

[6] O. NAKOULIMA. *«Etude d'une inéquation variationnelle bilatérale et d'un système d'inéquations quasi-variationnelles unilatérales associées»*. Thèse 3ème cycle. Bordeaux (1977).

[7] L. TARTAR. *«Inéquations quasi-variationnelles abstraites»*. C.R. Acad. Sci. Paris 278. pp. 1193-1196.


(Manuscrit reçu le 23 mai 1978)