

KAZUNARI HAYASHIDA

**Sur l'unicité du prolongement des systèmes elliptiques dont la valeur initiale s'annule sur un sous-ensemble de mesure positive**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5<sup>e</sup> série*, tome 1, n<sup>o</sup> 1 (1979), p. 33-44

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1979\\_5\\_1\\_1\\_33\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1979_5_1_1_33_0)

© Université Paul Sabatier, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**SUR L'UNICITE DU PROLONGEMENT DES SYSTEMES  
ELLIPTIQUES DONT LA VALEUR INITIALE S'ANNULE SUR UN  
SOUS-ENSEMBLE DE MESURE POSITIVE**

Kazunari Hayashida<sup>(1)</sup>

(1) *Department of Mathematics, Faculty of Science, 1-1 Maruno-Uchi, Kanazawa 920 Japan.*

**Résumé :** Le but de cet article est d'étudier l'unicité du prolongement des systèmes elliptiques de premier ordre dans un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ , sous l'hypothèse que la valeur initiale s'annule sur un sous-ensemble de  $\partial D$  de mesure positive.

**Summary :** The aim of this paper is to study the unique continuation property for elliptic systems of first order in a domain  $D$  of  $\mathbb{R}^2$ , under the assumption that the initial data vanishes on a subset of  $\partial D$  with positive measure.

1. Soit  $\Omega$  un domaine muni de son bord  $\partial\Omega$  dans le plan  $(x,y)$ . On suppose que  $\partial\Omega$  contient un segment  $\overline{AB}$  de l'axe des  $x$ .

Considérons dans  $\Omega$  le système elliptique

$$(1.1) \quad \partial f_j / \partial \bar{z} = \sum_{\ell=1}^n (\alpha_{j\ell} f_\ell + \beta_{j\ell} \bar{f}_\ell) \quad j = 1, \dots, n,$$

où les coefficients  $\alpha_{j\ell}$ ,  $\beta_{j\ell}$  sont tous bornés et mesurables dans  $\overline{\Omega}$ . On désigne par  $\partial / \partial \bar{z}$  l'opérateur  $1/2 (\partial / \partial x + i \partial / \partial y)$ .

Soit  $E$  un sous-ensemble fermé de l'intérieur de  $\overline{AB}$  de mesure positive ( $|E| > 0$ ). On considère alors le problème suivant :

(P.1) Soient  $\{f_j\}_{j=1}^n$  des solutions de (1.1) qui sont dans  $C^0(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ . Si toutes les  $f_j$  s'annulent sur  $E$ , alors sont-elles identiquement nulles dans  $\Omega$  ?

Lorsque tous les coefficients sont égaux à zéro, la réponse à (P.1) est affirmative par un théorème du type de Fatou dans la théorie des fonctions, plus précisément le théorème de Fatou et Riesz.

Dans le cas de  $n = 1$ , il est connu que la solution  $f$  de  $\partial f / \partial \bar{z} = \alpha f + \bar{\beta} \bar{f}$  s'exprime comme un produit d'une fonction holomorphe et d'une fonction continue qui ne s'annule jamais (voir Chapitre 4 dans [2]). Cela revient donc au résultat précédent.

Si  $E$  contient un point intérieur, (P.1) n'est rien autre que le résultat bien connu sur l'unicité du prolongement.

En général, soit  $E$  un ensemble compact dans  $\mathbb{R}^1$ , on désigne par  $a_0$  (resp.  $b_0$ ) sa borne inférieure (resp. supérieure), c'est-à-dire que  $[a_0, b_0]$  est le plus petit intervalle contenant  $E$ . Si  $E$  vérifie la condition suivante pour deux nombres positifs  $K$  et  $m$ , on dit que  $E$  satisfait  $(C_{K,m})$  :

$(C_{K,m})$  : Pour tout  $\xi$  tel que  $0 < \xi \leq K(b_0 - a_0)$ , on a

$$\text{Min} \left( \frac{|E \cap [a_0, a_0 + \xi]|}{\xi}, \frac{|E \cap [b_0 - \xi, b_0]|}{\xi} \right) \geq m,$$

en particulier, si  $K = 1$ , on désigne simplement par  $(C_m)$  la condition ci-dessus,

*Remarque.* Si  $E$  satisfait  $(C_m)$ , il vérifie alors  $(C_{K,m/K})$  pour tout  $K \geq 1$ .

En effet, si  $0 < \xi \leq b_0 - a_0$ ,  $\frac{|E \cap [a_0, a_0 + \xi]|}{\xi} \geq m \geq m/K$ .

Ensuite, si  $b_0 - a_0 < \xi \leq K(b_0 - a_0)$ ,  $\frac{|E \cap [a_0, a_0 + \xi]|}{\xi} \geq \frac{|E \cap [a_0, b_0]|}{K(b_0 - a_0)} \geq m/K$ .

De même pour  $\frac{|E \cap [b_0 - \xi, b_0]|}{\xi}$ .

En outre, on définit la condition  $(D_{K,m})$ .

$(D_{K,m})$  : Soit  $\epsilon > 0$  donné, il y a alors un intervalle fermé  $[a, b]$  tel que  $a, b \in E$ ,  $0 < b - a < \epsilon$  et  $E \cap [a, b]$  satisfait  $(C_{K,m})$ .

Pour simplifier,  $(D_{1,m})$  s'écrit  $(D_m)$ . Notre but est de démontrer le théorème suivant :

**THEOREME 1.** Soient  $\{f_j\}_{j=1}^n$  des solutions de (1.1) appartenant à  $C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ . On suppose  $m > 0$  donné et que  $E$  satisfait  $(D_m)$ . Alors  $f_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) s'annulent identiquement dans  $\Omega$ , si toutes  $f_j$  sont nulles sur  $E$ .

C'est-à-dire, que la réponse à (P.1) est affirmative, lorsque  $E$  satisfait  $(D_m)$  pour un certain  $m > 0$ . Notre méthode est une inégalité du « type de Carleman » ayant été exploitée par Carleman [1]. La démonstration du Théorème 1 va s'achever après l'énoncé du Théorème 2 dont le contenu est une inégalité du type de Carleman.

Comme le Théorème 1 est déjà connu dans le cas où  $E$  aurait un point intérieur, nous allons donner à la Section 2 un exemple de l'ensemble compact satisfaisant  $(D_m)$  tel qu'il n'a aucun point intérieur.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur T. NISHIDA pour les nombreuses discussions que j'ai eues avec lui.

Ce travail a été fait pendant le séjour de l'auteur à Paris sous la direction de M. le Professeur H. BREZIS. L'auteur désire le remercier chaleureusement pour ses encouragements constants.

2. On élimine de l'intervalle  $[0,1]$  un intervalle ouvert de centre  $1/2$  et de longueur  $k/3$  ( $0 < k < 1$ ). Et puis, on élimine deux intervalles ouverts tels que leur longueur est  $k/3^2$  et leurs centres sont respectivement ceux des deux intervalles fermés qui sont restés.

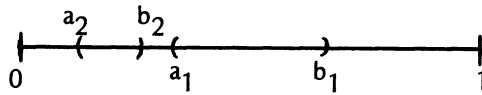
En répétant une telle opération, on voit que la somme des longueurs des intervalles éliminés est égale à

$$\frac{k}{3} + \frac{2k}{3^2} + \frac{2^2k}{3^3} + \dots = k.$$

Il reste donc un ensemble fermé  $E$  de mesure positive ( $|E| = 1 - k$ ). Naturellement,  $E$  ne contient aucun point intérieur.

Soit  $m = \frac{1}{6} (3 - k) (1 - k) (> 0)$ . On va démontrer alors que  $E$  satisfait  $(D_m)$ . Pour cela, on va vérifier d'abord que  $E$  satisfait  $(C_m)$ . Comme  $E$  est symétrique, il suffit de montrer

$$(2.1) \quad \frac{|E \cap [0, \xi]|}{\xi} \geq m \quad (0 < \xi \leq 1).$$



(Fig. 1)

Soit  $(a_1, b_1)$  l'intervalle ouvert qui a été éliminé au début. Si  $a_1 \leq \xi \leq 1$ , on a

$$\frac{|E \cap [0, \xi]|}{\xi} \geq \frac{|E \cap [0, a_1]|}{a_1}.$$

D'autre part, il est clair que  $|E \cap [0, a_1]| \geq \frac{1}{2} (1 - \frac{k}{3}) |E|$ .

On obtient donc

$$(2.2) \quad \frac{|E \cap [0, \xi]|}{\xi} \geq m \quad (a_1 \leq \xi \leq 1).$$

Ensuite soit  $(a_2, b_2)$  l'intervalle ouvert ayant été éliminé après et situé dans  $[0, a_1]$  (voir Fig. 1).

On a  $|E \cap [0, \xi]| / \xi \geq \frac{|E \cap [0, a_1]|}{a_2}$ , si  $a_2 \leq \xi \leq a_1$ .

On répète une telle opération. Soit  $(a_j, b_j)$  l'intervalle ouvert le plus près de l'origine qui est éliminé

pour  $i^{\text{ième}}$  fois, on voit alors que  $a_i \rightarrow +0$  et  $|E \cap [0, \xi]| / \xi \geq \frac{|E \cap [0, a_i]|}{a_{i-1}}$  ( $a_i \leq \xi < a_{i-1}$ ). D'autre part on vérifie sans peine que  $\frac{|E \cap [0, a_i]|}{a_{i-1}} \geq 1/2(1 - \frac{k}{3})|E|$ . Il en résulte (2.1). C'est-à-dire que E satisfait  $(C_m)$ .

Pour  $\epsilon > 0$  donné on prend l'intervalle ci-dessus  $(a_i, b_i)$  tel que  $0 < a_i < \epsilon$ . Puisque  $E \cap [0, a_i]$ , lui aussi, satisfait  $(C_m)$ , E satisfait donc la condition  $(D_m)$ .

3. Soit E le même ensemble que dans le Théorème 1. On peut supposer que  $\Omega \subset \{y > 0\}$ . En posant  $M = \sup_{j, \ell, \Omega} (|\alpha_{j\ell}|, |\beta_{j\ell}|)$ , on prend un nombre positif fixé  $R_0$  tel que

$$(3.1) \quad 8nMR_0 < 1$$

et pour tout  $Q \in [a_0, b_0] \times \{y = 0\}$

$$(3.2) \quad \{P = (x, y) \mid |P - Q| \leq R_0\} \cap \{y > 0\} \subset \Omega.$$

De plus, soit  $\epsilon_0 > 0$  fixé tel que

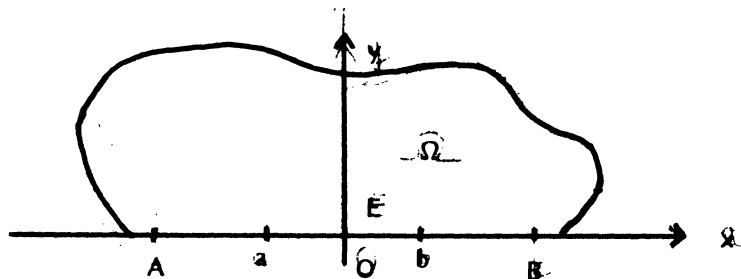
$$(3.3) \quad \epsilon_0 < \text{Min} \left( \frac{R_0}{4(K^2 + 2)^2}, \frac{mR_0}{2((K+1)^2 + 1)} \right)$$

et pour  $r \geq R_0, |\eta| < \epsilon_0 / 2$

$$(3.4) \quad \frac{r^2}{2} \leq (x - \eta)^2 + y^2,$$

où  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  et K est un nombre positif que l'on fixera après.

En posant  $\epsilon = \epsilon_0$  dans la définition de  $(D_m)$ , on va prendre le même intervalle fermé  $[a, b]$ . On peut supposer que le centre de  $[a, b]$  est l'origine (voir Fig. 2).



(Fig. 2)

Pour simplifier la notation,  $E \cap [a, b]$  s'écrit E. Alors E satisfait  $(C_m)$  ( $m > 0$ ). On va fixer un nombre quelconque K tel que  $K > 1$  (par exemple,  $K = 2$ ). D'après la Remarque de la Section 1, E satisfait la condition  $(C_{K, m/K})$ .  $m/K$  s'écrit alors m.

Comme la situation est un peu compliquée, nous allons ranger le fait ci-dessus comme suit :

- (1)  $a$  (resp.  $b$ ) est l'extrémité gauche (resp. droite) de  $E$ .
- (2)  $b - a < \epsilon_0$ .
- (3) l'origine est le centre de  $[a, b]$ .
- (4)  $E$  satisfait la condition  $(C_{K,m})$  pour deux nombres fixés  $K > 1$  et  $m > 0$ .

On définit la fonction

$$\Phi_E(x,y) = \int_E \frac{y}{(x-\eta)^2 + y^2} d\eta.$$

Et le domaine  $D_1$  se définit :

$$D_1 = \{(x,y) \mid a - K^2(b-a) \leq x \leq b + K^2(b-a), K(b-a) \leq y \leq (K^2 + 2)(b-a)\}.$$

De plus, on désigne par  $S_R$  le cercle ouvert de rayon  $R$ , et de centre  $O$ . On a alors le

LEMME 1.  $\sup_{S_{R_0}^c} \Phi_E < \min(\inf_{D_1} \Phi_E, \frac{m}{(K+1)^2+1})$

où  $S_{R_0}^c$  est l'ensemble complémentaire de  $S_{R_0}$ .

*Démonstration.* Si  $\eta \in E$ , on a naturellement  $a \leq \eta \leq b$ . Il vient donc pour  $(x,y) \in D_1$  et  $\eta \in E$

$$|x - \eta| \leq (K^2 + 1)(b - a).$$

On en déduit

$$\Phi_E(x,y) \geq \int_E \frac{y}{(K^2 + 1)^2(b-a)^2 + y^2} d\eta \geq \frac{K}{(K^2 + 1)^2 + (K^2 + 2)^2} \frac{|E|}{b-a}.$$

donc

$$(3.5) \quad \inf_{D_1} \Phi_E \geq \frac{1}{2(K^2 + 2)^2} \frac{|E|}{b-a}.$$

D'autre part, (3.4) donne

$$\begin{aligned} \sup_{S_{R_0}^c} \Phi_E &\leq 2 \int_E \frac{y}{x^2 + y^2} d\eta \\ &\leq \frac{2}{R_0} |E|. \end{aligned}$$

En notant que  $b - a < \epsilon_0$ , on en déduit

$$(3.6) \quad \sup_{S_{R_0}^c} \Phi_E \leq \frac{2\epsilon_0}{R_0} \frac{|E|}{b-a} \quad \text{ou} \quad \frac{2\epsilon_0}{R_0}.$$

Combinant (3.3), (3.5) et (3.6), on achève la démonstration.

4. Nous allons continuer à rechercher des propriétés de  $\Phi_E$ . Le domaine  $D_1$  est déjà défini. Les autres domaines sont définis comme suit (voir Fig. 3) :

$$D_2 = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, 0 < y \leq K(b-a)\},$$

$$D_3 = \{(x,y) \mid x \leq a, K^{-1}(a-x) < y \leq K(b-a)\},$$

$$D'_3 = \{(x,y) \mid a - K^2(b-a) \leq x \leq a, 0 < y \leq K^{-1}(a-x)\},$$

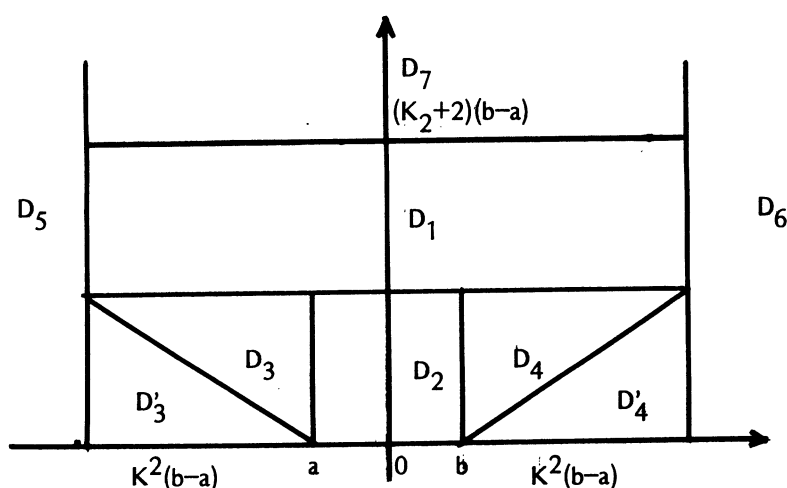
$$D_4 = \{(x,y) \mid b \leq x, K^{-1}(x-b) < y \leq K(b-a)\},$$

$$D'_4 = \{(x,y) \mid b \leq x \leq b + K^2(b-a), 0 < y \leq K^{-1}(x-b)\},$$

$$D_5 = \{(x,y) \mid x \leq a - K^2(b-a), y > 0\},$$

$$D_6 = \{(x,y) \mid x \geq b + K^2(b-a), y > 0\},$$

$$D_7 = \{(x,y) \mid a - K^2(b-a) \leq x \leq b + K^2(b-a), y \geq (K^2 + 2)(b-a)\}.$$



(Fig. 3)

LEMME 2. On a  $D_x \Phi_E > 0$  dans  $D_5$  et  $D_x \Phi_E < 0$  dans  $D_6$ .

*Démonstration.* Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - E$  il vient

$$(4.1) \quad D_x \Phi_E = -2 \int_E \frac{(x-\eta)y}{\{(x-\eta)^2 + y^2\}^2} d\eta.$$

Si  $x \leq a - K^2(b-a)$ , on a

$$x - \eta \leq -K^2(b-a) < 0.$$

Par ailleurs, si  $x \geq b + K^2(b-a)$ , on a

$$x - \eta \geq K^2(b-a) > 0.$$

De ces inégalités et (4.1) il résulte le Lemme 2.

LEMME 3.  $D_y \Phi_E < 0$  dans  $D_7$

*Démonstration.* Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - E$  on a

$$(4.2) \quad D_y \Phi_E = \int_E \frac{(x-\eta)^2 - y^2}{\{(x-\eta)^2 + y^2\}^2} d\eta.$$

Il est clair que si  $a - K^2(b-a) \leq x \leq b + K^2(b-a)$ ,

$$|x - \eta| \leq (1 + K^2)(b-a)$$

et donc on a sur  $D_7$

$$|x - \eta| - y \leq -(b-a) < 0.$$

C'est-à-dire

$$(x - \eta)^2 - y^2 < 0.$$

D'après (4.2) le lemme en résulte.

LEMME 4. Si  $0 < y \leq K^{-1}(a-x)$ , ou si  $0 < y \leq K^{-1}(x-b)$ , on a alors  $0 \leq |D_x \Phi_E| / D_y \Phi_E \leq \frac{2}{K-1}$ .

*Démonstration.* Si  $0 < y \leq K^{-1}(a-x)$ , on a

$$|x - \eta| \geq a - x \geq Ky.$$



Donc

$$(x-\eta)^2 - y^2 \geq \{(x-\eta)^2 + y^2\}^{1/2} (K-1)y.$$

De (4.2) et de cette inégalité on déduit

$$(4.3) \quad D_y \Phi_E \geq (K-1)y \int_E \frac{d\eta}{\{(x-\eta)^2 + y^2\}^{3/2}} > 0$$

D'autre part, (4.1) entraîne

$$(4.4) \quad |D_x \Phi_E| \leq 2y \int_E \frac{d\eta}{\{(x-\eta)^2 + y^2\}^{3/2}}.$$

De (4.3) et (4.4) on achève la démonstration dans le premier domaine, la démonstration dans le second identique.

LEMME 5. Dans  $D_3 \cup D_4$  on a  $\Phi_E \geq \frac{m}{(K+1)^2 + 1}$ .

*Démonstration.* Soit  $x \leq a$  et  $K^{-1}(a-x) < y \leq K(b-a)$ . On pose alors  $E_y = E \cap [a, a+y]$ . Si  $\eta \in E_y$ , on a

$$0 \leq \eta - x \leq (K+1)y.$$

Donc

$$\begin{aligned} \Phi_E &\geq \int_{E_y} \frac{y}{((K+1)y)^2 + y^2} d\eta \\ &= \frac{1}{(K+1)^2 + 1} \frac{|E_y|}{y} \end{aligned}$$

D'autre part d'après la condition  $(C_{K,m})$  on a

$$|E_y| / y \geq m.$$

d'où le résultat pour  $D_3$ . La démonstration dans  $D_4$  est identique.

5. D'après le Lemme 1 on peut prendre un nombre fixé  $k_0$  tel que

$$(5.1) \quad \sup_{\substack{SC \\ R_0}} \Phi_E < k_0 < \text{Min}(\inf_{D_1} \Phi_E, \frac{m}{(K+1)^2 + 1}).$$

Naturellement,  $k_0 > 0$ .

On désigne par  $L$  le segment d'extrémités  $(a, 0)$  et  $(b, 0)$ .

PROPOSITION. Il existe une courbe continue  $\Gamma$  qui est simple et satisfait les propriétés suivantes :

(i) L'origine (resp. l'extrémité) de  $\Gamma$  est  $(b, 0)$  (resp.  $(a, 0)$ ).

- (ii)  $\Gamma$  est contenu à  $S_{R_0} \cap \{y \geq 0\}$ .
- (iii) La longueur de  $\Gamma$  est finie 1).
- (iv)  $\Phi_E = k_0$  sur  $\Gamma$ .

Par suite le plan est divisé par  $\Gamma \cup L$  en deux parties. On a alors

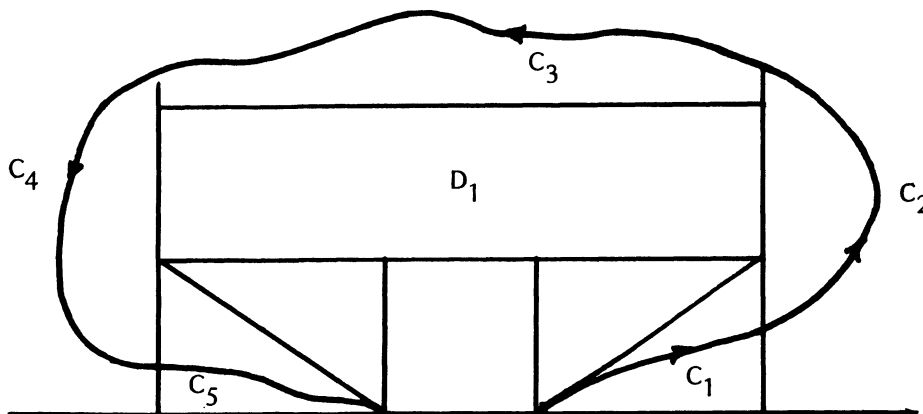
- (v) Dans l'intérieur de la partie bornée limitée par  $\Gamma \cup L$  il y a au moins un point où  $\Phi_E > k_0$

*Démonstration.* On va appliquer souvent le théorème des fonctions implicites. En notant que  $\Phi_E = 0$  sur  $\{x > b, y = 0\}$ , on utilise le Lemme 5 et le théorème de la valeur intermédiaire. Il y a alors une courbe continue  $C_1$  (où  $\Phi_E = k_0$ ) dans  $D'_4$  qui part du point  $(b, 0)$  et se termine en un point quelconque situé sur  $x = b + K^2(b - a)$  (voir Fig. 4). D'après le Lemme 4,  $C_1$  est simple et sa longueur est finie.

De (5.1) et le Lemme 2 il y a une courbe continue  $C_2$  dans  $D_6$  telle que  $\Phi_E = k_0$  sur  $C_2$  et son origine (resp. son extrémité) est l'extrémité de  $C_1$  (resp. un point quelconque de  $\partial D_7 \cap \{x = b + K^2(b - a)\}$ ).  $C_2$ , elle aussi, est simple et sa longueur est finie.

Ensuite on va utiliser (5.1) et le Lemme 3. Alors on peut trouver une courbe continue simple (où  $\Phi_E = k_0$ ) sur  $D_7$  dont la longueur est finie et dont les extrémités sont l'extrémité de  $C_2$  et un point quelconque de  $\partial D_7 \cap \{x = a - K^2(b - a)\}$ .

En continuant, on trouve deux courbes continues simples  $C_4 (\subset D_5)$  et  $C_5 (\subset D'_3)$  telles que  $C_4$  est liée à  $C_5$  et l'extrémité de  $C_5$  est  $(a, 0)$ , de plus  $\Phi_E = k_0$  sur  $C_4 \cup C_5$  (voir Fig. 3 et 4).



(Fig. 4)

On désigne par  $\Gamma$  la courbe  $C_1 \cup \dots \cup C_5$ . Alors les propriétés (i), (iii) et (iv) sont claires de ci-dessus. (ii) se vérifie avec (5.1) et (iv). On déduit aisément (v) d'après (iv) et le Lemme 5. Ce qui achève la démonstration.

1) Plus précisément,  $\Gamma$  est une union finie des courbes différentiables à l'exception des extrémités de  $\Gamma$ .

6. Soit  $G$  le domaine borné ouvert de bord  $\Gamma \cup L$ . On va alors

**THEOREME 2.** *Sous l'hypothèse du Théorème 1, on a pour tout  $\lambda > 0$*

$$\sum_{j=1}^n \iint_G |f_j| \exp(\lambda \Phi_E) dx dy \leq \frac{2R_0}{1-8nMR_0} \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma \cup L} |f_j| \exp(\lambda \Phi_E) d\sigma.$$

En supposant le Théorème 2, on va démontrer le Théorème 1.

*Démonstration du Théorème 1.* D'après (v) de la Proposition il y a un domaine  $G_1$  dans  $G$  et un nombre  $k_1 > k_0$  tels que  $\Phi_E > k_1$  sur  $G_1$ . On a donc

$$(6.1) \quad e^{\lambda k_1} \iint_{G_1} |f_j| dx dy \leq \iint_G |f_j| \exp(\lambda \Phi_E) dx dy.$$

D'autre part, puisque  $f_j = 0$  sur  $E$ , on voit

$$\int_{\Gamma \cup L} |f_j| \exp(\lambda \Phi_E) d\sigma = \int_{\Gamma} |f_j| \exp(\lambda \Phi_E) d\sigma + \int_{L-E} |f_j| \exp(\lambda \Phi_E) d\sigma.$$

De la Proposition,  $\Phi_E = k_0$  sur  $\Gamma$ . Et naturellement  $\Phi_E = 0$  sur  $L - E$ . Il en résulte

$$\int_{\Gamma \cup L} |f_j| \exp(\lambda \Phi_E) d\sigma \leq e^{\lambda k_0} \int_{\Gamma \cup L} |f_j| d\sigma.$$

De cette inégalité et (6.1) on déduit

$$\sum_{j=1}^n \iint_{G_1} |f_j| dx dy \leq \frac{2R_0}{1-8nMR_0} e^{\lambda(k_0 - k_1)} \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma \cup L} |f_j| d\sigma,$$

où on a utilisé (3.1). Ici on peut laisser  $\lambda$  tendre vers  $+\infty$ . Alors  $f_j = 0$  dans  $G_1$ . En utilisant le résultat bien connu sur l'unicité du prolongement, on en déduit que toutes les  $f_j$  sont identiquement nulles dans  $\Omega$ . Ce qui achève la démonstration.

Ensuite on va démontrer le Théorème 2.

*Démonstration du Théorème 2.* On pose  $z = x + iy$  et  $\varphi(z) = \exp\left(\int_E \frac{i}{z-\eta} d\eta\right)$ . Il est clair que  $|\varphi(z)| = \exp \Phi_E(x,y)$ . De plus on pose  $g_{j\lambda}(z) = f_j(z) \varphi(z)^\lambda$ , où les  $f_j$  sont les solutions de (1.1) et où  $\lambda$  est strictement positif. On vérifie aisément que  $\varphi$  est uniformément bornée et  $g_{j\lambda} \in C^1(G)$ . En outre on a  $g_{j\lambda} \in C^0(\bar{G})$ .

En effet, puisque  $\varphi$  est continue sur  $\{y > 0\} \cup \{(x,0) \mid x \notin E\}$ ,  $g_{j\lambda}$  y est aussi continue. D'autre part,  $g_{j\lambda}$  est continue sur  $\{y > 0\} \cup \{(x,0) \mid x \in E\}$ , parce que  $f_j \in C^0(\bar{\Omega})$ ,  $f_j = 0$  sur  $E$  et  $\varphi$  est uniformément bornée. De plus, il est clair que  $g_{j\lambda}$  est continue sur  $y = 0$ . Cela entraîne que  $g_{j\lambda} \in C^0(\bar{G})$ .

Comme  $\varphi$  est holomorphe dans  $\Omega$ , de (1.1) on a le système suivant :

$$(6.1) \quad \partial g_{j\lambda} / \partial \bar{z} = \sum_{\ell=1}^n (\alpha_{j\ell} g_{\ell\lambda} + \beta_{j\ell} \left(\frac{\varphi}{\varphi}\right)^\lambda \bar{g}_{\ell\lambda})$$

D'après (ii) de la Proposition  $G \subset S_{R_0}$ . On a donc pour  $z \in G$

$$(6.2) \quad \iint_G \frac{dudv}{|z-\varphi|} \leq \iint_{|\varphi-z| \leq 2R_0} \frac{dudv}{|z-\varphi|} \leq 4\pi R_0,$$

où  $\varphi = u + iv$ .

Puisque  $\Gamma \cup L$  est une courbe de Jordan de longueur finie (d'après la Proposition), on peut appliquer la formule de Green sur  $G$ . On vérifie donc que si  $\varphi \in G$

$$g_{j\lambda}(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \cup L} \frac{g_{i\lambda}(z)}{z-\varphi} dz - \frac{1}{\pi} \sum_{\ell=1}^n \iint_G (\alpha_{j\ell} g_{\ell\lambda} + \beta_{j\ell} \left(\frac{\varphi}{\varphi}\right)^\lambda \bar{g}_{\ell\lambda}) \frac{1}{z-\varphi} dx dy.$$

Donc

$$|g_{j\lambda}(\varphi)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma \cup L} \frac{|g_{i\lambda}(z)|}{|z-\varphi|} d|z| + \frac{2M}{\pi} \sum_{\ell=1}^n \iint_G \frac{|g_{i\lambda}(z)|}{|z-\varphi|} dx dy.$$

En intégrant des deux côtés par rapport à  $\varphi$ , on somme sur les indices  $j$ . On a alors à partir de (6.2)

$$(1 - 8nMR_0) \sum_{j=1}^n \iint_G |g_{j\lambda}(\varphi)| dudv \leq 2R_0 \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma \cup L} |g_{j\lambda}(z)| d|z|$$

Ce qui achève la démonstration du Théorème 2.

## REFERENCES

- [1] T. CARLEMAN. «*Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables*», C. R. Acad. Sci. Paris. 197 (1933) p. 471-474.
  
- [2] R. COURANT and D. HILBERT. «*Methods of mathematical physics, II*», Interscience, 1962.

(Manuscrit reçu le 23 mai 1978)