ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

ROBERT BÉJIAN

Minoration de la discrépance à l'origine d'une suite quelconque

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 1, n^o 3 (1979), p. 201-213
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1979_5_1_3_201_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol. 1, 1979, P. 201 à 213

MINORATION DE LA DISCREPANCE A L'ORIGINE D'UNE SUITE QUELCONQUE

Robert Béjian (1)

(1) Université de Provence, Place Victor-Hugo - 13331 Marseille Cédex 3.

Résumé : Nous démontrons que pour toute suite ω du tore on a

$$\limsup_{N \to +\infty} \frac{D^*(N, \omega)}{\text{Log } N} \geqslant \frac{1}{12 \text{ Log } 4} = 0{,}060 \ldots$$

Summary : We prove that for any infinite sequence ω in $\mathbb{T}$ we have

$$\limsup_{N \to +\infty} \frac{D^*(N, \omega)}{\text{Log } N} \geqslant \frac{1}{12 \text{ Log } 4} = 0{,}060 \ldots$$

1 - INTRODUCTION

En réponse à une question posée en 1935 par Van der Corput [6] sur l'existence de suites dont la discrépance (1) à l'origine $D^*(N)$ soit bornée, Madame Van Aardenne-Ehrenfest [5] a montré en 1949 qu'il existe une constante universelle C_1 et une infinité d'entiers N vérifiant

$$D^*(N) > \frac{C_1 \text{ Log Log } N}{\text{Log Log Log } N}.$$

Par la suite, K.F. Roth [3] a établi la minoration

$$D^*(N) > C_2 (\text{Log } N)^{1/2} \quad \text{pour une infinité d'entiers,}$$

---

(1) La définition de la discrépance figure à la fin de ce paragraphe.

et en 1972 W.M. Schmidt [2], [4] a obtenu la meilleure minoration en ce qui concerne le logarithme. Plus précisément, il a montré l'existence d'une constante universelle $C > 10^{-2}$ telle que pour toute suite on ait

$$\limsup_{N \to +\infty} \frac{D^*(N)}{\operatorname{Log} N} \geqslant C.$$

On établit ici le résultat suivant :

THEOREME. *Pour toute suite ω du tore, on a*

$$\limsup_{N \to +\infty} \frac{D^*(N,\ )}{\operatorname{Log} N} \geqslant \frac{1}{12 \operatorname{Log} 4} = 0{,}060 \ldots \ .$$

Par ailleurs, H. Faure [1] a prouvé l'existence d'une suite associée à un système de numération pour laquelle

$$\limsup_{N \to +\infty} \frac{D^*(N)}{\operatorname{Log} N} = \frac{1919}{3454 \operatorname{Log} 12} = 0{,}223 \ldots \ .$$

Il en résulte pour la constante de Schmidt l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{12 \operatorname{Log} 4} = 0{,}060 \ldots \leqslant C \leqslant 0{,}223 \ldots = \frac{1919}{3454 \operatorname{Log} 12}.$$

La démonstration du théorème repose essentiellement sur deux lemmes dont le premier est dû à W.M. Schmidt. Dans le paragraphe 2 nous énonçons ces lemmes et donnons la démonstration du théorème. Le paragraphe 3 est exclusivement consacré à la démonstration du lemme 2.

Etant donné une suite $\omega = (x_\nu)_\nu$ sur le tore, $[x,y[$ un intervalle sur le tore et N un entier au moins égal à 1, on note $A([x,y[\,, N, \omega)$ le nombre d'entiers ν positifs inférieurs à N pour lesquels x_ν appartient à l'intervalle $[x,y[$; l'écart correspondant est défini par $E([x,y[\,, N, \omega) = A([x,y[\,, N, \omega) - N(y-x)$ et la discrépance à l'origine par $D^*(N) = \sup_{0 < x \leqslant 1} | E([o,x[\,, N, \omega) |$

2 - LEMMES PRELIMINAIRES ET DEMONSTRATION DU THEOREME

Soit K un intervalle d'entiers, c'est-à-dire un ensemble fini d'entiers consécutifs et soit x dans $\mathbb{T}$; on pose $h_K(x) = \max_{n \in K} E([o,x[\,, n, \omega) - \min_{n \in K} E([o,x[\,, n, \omega)$.

Soient L et L' deux intervalles d'entiers contenus dans K, x et y dans $\mathbb{T}$. On pose :

$$h(L,L',x,y) = \max \left\{ \min_{n \in L} E([x,y[\,, n, \omega) - \max_{n \in L'} E([x,y[\,, n, \omega) \; ; \; \min_{n \in L'} E([x,y[\,, n, \omega) - \max_{n \in L} E([x,y[\,, n, \omega) \right\}$$

LEMME 1. *Soient* L, L' *et* K *trois intervalles d'entiers avec* L *et* L' *contenus dans* K ; *soient* x *et* y *dans* $\mathbb{T}$, *alors on a :*

$$h_K(x) + h_K(y) \geqslant \frac{1}{2}\left\{h_L(x) + h_{L'}(x) + h_L(y) + h_{L'}(y)\right\} + h(L,L',x,y).$$

LEMME 2. *Soient* t *et* p *deux entiers positifs ou nuls. On pose :*

$$K = \left\{ p+1, p+2, \dots, p+4^{t+1}\right\}$$
$$L = \left\{ p+1, p+2, \dots, p+4^{t}\right\}$$
$$L' = \left\{ p+3.4^t+1, p+3.4^t+2, \dots, p+4^{t+1}\right\}$$

Alors on a :

$$\int_0^1 h_K(x)dx \geqslant \frac{1}{2}\int_0^1 h_L(x)dx + \frac{1}{2}\int_0^1 h_{L'}(x)dx + \frac{1}{6}.$$

COROLLAIRE. *Soient* t *un entier naturel et* K *un ensemble de* 4^t *entiers naturels consécutifs ; on a :*

$$\int_0^1 h_K(x)dx \geqslant \frac{t}{6}.$$

La démonstration du corollaire à partir du lemme 2 se fait par récurrence sur t ; pour t = 1 nous posons

$$K = \{p+1, p+2, p+3, p+4\},\quad L = \{p+1\},\quad L' = \{p+4\}$$

Les fonctions $x \to h_L(x)$ et $x \to h_{L'}(x)$ sont identiquement nulles et le lemme 2 donne $\int_0^1 h_K(x)dx \geqslant \frac{1}{6}$ ce qui est la propriété à l'ordre 1. On passe de l'ordre t à l'ordre t + 1 en utilisant le lemme 2 dans lequel on minore les intégrales $\int_0^1 h_L(x)dx$ et $\int_0^1 h_{L'}(x)dx$ grâce à l'hypothèse de récurrence. Nous sommes en mesure de donner la démonstration du théorème. Soient t un entier positif et $K = \{1,2,3,\dots,4^t\}$.

D'après le corollaire du lemme 2 on a

$$\int_0^1 h_K(x)dx \geqslant \frac{t}{6}.$$

Donc il existe $x \in [0,1[$ tel que $h_K(x) \geqslant \frac{t}{6}$.

Par ailleurs, il existe deux entiers p et q dans K tels que

$$h_K(x) = E([o,x[\,, p, \omega) - E([o,x[\,, q, \omega)$$

on a donc

$$\frac{t}{6} \leqslant h_K(x) = E([o,x[\,, p, \omega) - E([o,x[\,, q, \omega) \leqslant |E([o,x[\,, p, \omega)| + |E([o,x[\,, q, \omega)|$$

L'un au moins de ces deux écarts est en module supérieur à $\frac{t}{12}$, c'est-à-dire qu'il existe un entier m (m = p ou q) tel que $|E([o,x[\,, m, \omega)| \geqslant \frac{t}{12}$. D'où

$$D^*(m) \geqslant |E([o,x[\,, m, \omega)| \geqslant \frac{t}{12}$$

Comme m appartient à K on a $m \leqslant 4^t$ et donc pour tout entier positif t il existe $m \leqslant 4^t$ tel que

$$D^*(m) \geqslant \frac{\mathrm{Log}(4^t)}{12\,\mathrm{Log}\,4} \geqslant \frac{\mathrm{Log}\,m}{12\,\mathrm{Log}\,4}\,;$$

ceci prouve que l'ensemble des m vérifiant $D^*(m) \geqslant \frac{\mathrm{Log}\,m}{12\,\mathrm{Log}\,4}$ n'est pas fini et que $\limsup_{m \to +\infty} \frac{D^*(m)}{\mathrm{Log}\,m} \geqslant \frac{1}{12\,\mathrm{Log}\,4}$.

3 - DEMONSTRATION DU LEMME 2

3.1 Minorations d'intégrales.

Soient L, L', et K trois intervalles d'entiers avec L et L' contenus dans K ; on envisage une partition du tore par une famille finie $(I\alpha)_\alpha$ d'intervalles et une famille finie de couples d'intervalles $(J_\beta,K_\beta)_\beta$ telle que pour tout β, J_β et K_β soient de même longueur.

Posons $h^+(L,L',x,y) = \max \{0, h(L,L',x,y)\}$.

PROPOSITION 1. *On a*

$$\int_0^1 h_K(x)dx \geqslant \frac{1}{2}\int_0^1 h_L(x)dx + \frac{1}{2}\int_0^1 h_{L'}(x)dx + \frac{1}{2}\sum_\alpha \int_{I_\alpha} h^+(L,L',x,2m_\alpha - x)dx$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_\beta \int_{J_\beta \cup K_\beta} h^+(L,L',x,2n_\beta - x)dx$$

où m_α *est le milieu de* I_α *et* n_β *un point par rapport auquel les intervalles* J_β *et* K_β *sont symétriques.*

Démonstration. Etant donné un intervalle $I_\alpha = [a_\alpha, b_\alpha]$ du tore et m_α son milieu, on établit d'abord la minoration

$$\int_{I_\alpha} h_K(x)dx \geqslant \frac{1}{2}\int_{I_\alpha} h_L(x)dx + \frac{1}{2}\int_{I_\alpha} h_{L'}(x)dx + \frac{1}{2}\int_{I_\alpha} h^+(L,L',x,2m_\alpha - x)dx.$$

Pour cela, on fait un changement de variable qui ramène l'intégration sur l'intervalle $[m_\alpha, b_\alpha]$ à une intégration sur l'intervalle $[a_\alpha, m_\alpha]$, l'argument essentiel qui intervient dans ce calcul étant la symétrie

$$h(L,L',x,y) = h(L,L',y,x).$$

On procède de même pour les couples d'intervalles (J_β,K_β) et une sommation sur les minorations précédentes donne le résultat.

Dans les trois propositions qui suivent, K désigne un ensemble de 4^{t+1} entiers naturels consécutifs ; $K = \{p+1, p+2, \dots, p+4^{t+1}\}$.

On pose $L = \{p+1, p+2, \dots, p+4^t\}$

$L' = \{p+3.4^t+1,\ p+3.4^t+2, \dots\ p+4^{t+1}\}$.

Notons $\omega = (x_\nu)_\nu$ la suite arbitraire du tore, dont on étudie la discrépance ; soit T l'ensemble des x_ν pour lesquels ν appartient à $K - L \cup L'$; on pose $N = 4^{t+1}$.

PROPOSITION 2. *Soit* [a,b] *un intervalle centré en un point* x_ν *de* T *et tel que :*

$$]a,b[\ \cap\ T = \{x_\nu\}\ ;$$

Si $b-a \geqslant \frac{1}{N}$, $\displaystyle\int_a^b h^+(L,L',x,2x_\nu-x)dx \geqslant \frac{1}{2N}$.

Si $b-a \leqslant \frac{1}{N}$, $\displaystyle\int_a^b h^+(L,L',x,2x_\nu-x)dx \geqslant (b-a) - \frac{N(b-a)^2}{2}$

PROPOSITION 3. *Soit*]a,b[*un intervalle du tore ne contenant aucun point* x_ν *de la suite* ω *pour* ν *dans* K *et soit* m *le milieu de*]a,b[*; alors :*

$$\int_a^b h^+(L,L',x,2m-x)dx \geqslant \frac{N(b-a)^2}{4}\ .$$

PROPOSITION 4. *Soient*]a,b[*et*]c,d[*deux intervalles du tore, disjoints et de même longueur. Soient* m *le milieu de l'intervalle*]b,c[*et* h *le nombre de points de* T *dans cet intervalle ; alors :*

$$\frac{1}{2}\int_{[a,b]\cup[c,d]} h^+(L,L',x,2m-x)dx \geqslant N(b-a)^2 + (b-a)\,[h-N(d-a)]$$

Démonstration de la proposition 2.

Soit $x \in\ ]a,x_\nu[$; posons $y = 2x_\nu - x$;

$$h^+(L,L',x,y) \geqslant h(L,L',x,y) \geqslant \min_{n'\in L'} E([x,y[\,,n',\omega) - \max_{n\in L} E([x,y[\,,n,\omega)$$

Il existe n et n' respectivement dans L et L' qui réalisent le maximum et le minimum des écarts ;

$$h^+(L,L',x,y) \geqslant E([x,y[\,,n',\omega) - E([x,y[\,,n,\omega) \geqslant A([x,y[\,,n',\omega) - A([x,y[\,,n,\omega) - (n'-n)(y-x)$$

Il résulte de l'hypothèse imposée à l'intervalle [a,b[que

$$A([x,y[\,,n',\omega) - A([x,y[\,,n,\omega) \geqslant 1\ ;$$

par ailleurs $n'-n \leqslant N$, d'où :

$$h^{+}(L,L',x,y) \geqslant 1 - N(y-x)\ .$$

Soit $x \in \,]x_{\nu},b[$; comme $h(L,L',x,y) = h(L,L',y,x)$, un calcul identique donne $h^{+}(L,L',x,y) \geqslant 1 - N(x-y)$.

Pour résumer les deux cas, si x est dans l'intervalle]a,b[,

$$h(L,L',x,y) \geqslant 1 - N\,|y-x|\,;$$

On a la minoration :

$$h^{+}(L,L',x,2x_{\nu}-x) \geqslant 1 - 2N\,|x_{\nu}-x|$$

Par intégration, on obtient la proposition 2.

Démonstration de la proposition 3.

Soient $x \in \,]a,m[$ et $y = 2m - x$

$$h^{+}(L,L',x,y) \geqslant \min_{n\in L} E([x,y[\,,n,\omega) - \max_{n'\in L'} E([x,y[\,,n',\omega);$$

Soient n dans L et n' dans L' les entiers qui réalisent le minimum et le maximum des écarts ;

$$h^{+}(L,L',x,y) \geqslant (n'-n)(y-x) \geqslant \frac{N}{2}(y-x) = N(m-x).$$

Soit $x \in \,]a,b[$; alors $h^{+}(L,L',x,2m-x) \geqslant N\,|m-x|$.

Par intégration on obtient la proposition 3.

Démonstration de la proposition 4.

Soient $x \in \,]a,b[$ et $y = 2m-x$

$$h^{+}(L,L',x,y) \geqslant \min_{n'\in L'} E([x,y[\,,n',\omega) - \max_{n\in L} E([x,y[\,,n,\omega)$$

Soient n et n' les entiers qui réalisent le maximum et le minimum des écarts :

$$h^+(L,L',x,y) \geqslant A([x,y[\ n',\omega) - A([x,y[\ ,n,\omega) - (n'-n)(y-x)$$

$$h^+(L,L',x,y) \geqslant h - N(y-x) = h - 2N(m-x)$$

et si $x \in\ ]a,b[\ \cup\ ]c,d[$, alors :

$$h^+(L,L',x,y) \geqslant h - 2N\ |m-x|$$

et par intégration on obtient la proposition 4.

3.2 Démonstration du lemme 2 dans un cas simple.

A une partition du tore en intervalles et couples d'intervalles on sait associer une minoration

$$\int_0^1 h_K(x)dx \geqslant \frac{1}{2}\left\{\int_0^1 h_L(x)dx + \int_0^1 h_{L'}(x)\right\} + \frac{1}{2}\sum_\alpha \int_{I_\alpha} h^+(L,L',x,2m_\alpha - x)dx$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_\beta \int_{J_\beta \cup K_\beta} h^+(L,L',x,2n_\beta - x)dx.$$

Le problème est de trouver une partition du tore pour laquelle

$$\int_0^1 h_K(x)dx \geqslant \frac{1}{2}\left\{\int_0^1 h_L(x)dx + \int_0^1 h_{L'}(x)dx\right\} + \theta$$

où la quantité θ soit la plus grande possible.

Etant donné un nombre $x \in [0,1[$, on suppose que les $\frac{N}{2}$ points de T sont isolés par x, c'est-à-dire que si on centre en chacun de ces $\frac{N}{2}$ points un intervalle de longueur x, les $\frac{N}{2}$ intervalles ainsi obtenus sont tous disjoints ; soit ($\mathcal{P}$) une partition du tore contenant au moins les $\frac{N}{2}$ intervalles précédents.
Il résulte de la proposition 2 que la contribution de ces $\frac{N}{2}$ intervalles pour déterminer θ est au moins

$$\frac{N}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x\left(1 - \frac{Nx}{2}\right) \quad \text{si} \quad x \leqslant \frac{1}{N} .$$

Le complémentaire dans $\mathbb{T}$ des $\frac{N}{2}$ intervalles précédents est une union finie d'intervalles disjoints ; ceux-ci et les $\frac{N}{2}$ points de la suite ω , hors de T définissent ν intervalles $]a_i,b_i[$ ne contenant aucun des N points $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{p+4^{t+1}}$ de ω et on a $1 \leqslant \nu \leqslant N$; on considère la partition ($\mathcal{P}$) du tore réalisée par les ν intervalles $]a_i,b_i[$ et les $\frac{N}{2}$ intervalles de longueur x ; on cherche la contribution fournie par les ν intervalles $]a_i,b_i[$ pour déterminer un minorant de θ .

Soient m_i le milieu de $]a_i,b_i[$ et λ_i sa longueur.

D'après la proposition 3 on a

$$\frac{1}{2}\int_{a_i}^{b_i} h^+(L,L',x,2m_i-x)dx \geqslant \frac{N\lambda_i^2}{8}.$$

Il intervient donc dans θ la quantité $\frac{N}{8}\sum_{i=1}^{\nu}\lambda_i^2$. On a

$$\sum_{i=1}^{\nu}\lambda_i = 1-\frac{N}{2}x.$$

La somme des carrés est minimale quand tous les λ_i sont égaux. Donc

$$\sum_{i=1}^{\nu}\lambda_i^2 \geqslant \nu.\frac{1}{\nu^2}\left(1-\frac{Nx}{2}\right)^2 \geqslant \frac{1}{N}\left(1-\frac{Nx}{2}\right)^2$$

d'où

$$\frac{N}{8}\sum_{i=1}^{\nu}\lambda_i^2 \geqslant \frac{1}{8}\left(1-\frac{Nx}{2}\right)^2.$$

Par suite on a

$$\theta \geqslant \frac{Nx}{4}\left(1-\frac{Nx}{2}\right)+\frac{1}{8}\left(1-\frac{Nx}{2}\right)^2.$$

Posons $u = Nx$; θ est minoré par le trinôme $\varphi(u) = \frac{1}{32}(2-u)(3u+2)$ qu'on étudie sur l'intervalle $[o,1]$; son maximum est donné par $\varphi(\frac{2}{3}) = \frac{1}{6}$. Par suite si les $\frac{N}{2}$ points de T sont isolés par la distance x pour $x \in [\frac{2}{3N},\frac{1}{N}]$ on a $\theta \geqslant \frac{1}{6}$.

3.3 Démonstration du Lemme 2 dans le cas général.

a) Définition d'un intervalle I.

On suppose que les $\frac{N}{2}$ points de T ne sont pas isolés par une distance $x \geqslant \frac{2}{3N}$ sinon, on se trouve dans le cas déjà étudié. Ces $\frac{N}{2}$ points se répartissent en groupes de points non isolés par $\frac{2}{3N}$; pour les groupes se réduisant à un seul point isolé, on centre en celui-ci un intervalle de longueur $\frac{2}{3N}$ et la contribution correspondante pour la minoration de θ est $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3N}\left(1-\frac{2}{6}\right)$ comme dans le cas précédent.

Soit k un entier compris entre 1 et $\frac{N}{2}$ et envisageons un groupe de points de T, on isolés par $\frac{2}{3N}$ et formé exactement de k points ; ceci implique que les distances $x_{\nu_{i+1}} - x_{\nu_i}$ entre points consécutifs sont toutes inférieures à $\frac{2}{3N}$ et de plus quand on porte la distance $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3N}$ de part et d'autre des points extrêmes x_{ν_1} et x_{ν_k} on ne rencontre pas de points de T ; soit I l'intervalle ainsi obtenu ; sa longueur est $\sum_{i=1}^{k-1}(x_{\nu_{i+1}}-x_{\nu_i})+\frac{2}{3N}$.

b) Partition de I en intervalles $(I\alpha)_\alpha$ et couples d'intervalles $(J_\beta, K_\beta)_\beta$.

Soient $\ell_1 \leqslant \ell_2 \leqslant \ldots \leqslant \ell_{k-1} \leqslant \frac{2}{3N}$ les distances ordonnées des intervalles $(x_{\nu_i}, x_{\nu_{i+1}})$. Par commodité, nous posons $\ell_k = \frac{2}{3N}$ de sorte que la longueur de I est $\sum_{i=1}^{k} \ell_i$. Il existe une partition de I en k intervalles de longueur ℓ_1, (k–1) paires d'intervalles de longueur $\frac{\ell_2-\ell_1}{2}$, ... , (k–p+1) paires d'intervalles de longueur $\frac{\ell_p-\ell_{p-1}}{2}$, ... , 1 paire d'intervalles de longueur $\frac{\ell_k-\ell_{k-1}}{2}$.

On peut, sans nuire à la généralité de la démonstration supposer que $\ell_1 < \ell_2 < \ell_3 < \ldots < \ell_{k-1} < \ell_k = \frac{2}{3N}$, et définir la partition de la manière suivante :

1ère étape : En chacun des points x_{ν_i}, on centre un intervalle de longueur ℓ_1 ; ceci détermine k intervalles tous disjoints sauf deux qui ont une extrémité commune, ce qui donne (k–1) intervalles fermés $I_j^{(1)}$ dont la somme des longueurs est $k\ell_1$.

2ème étape : On agrandit chacun des $I_j^{(1)}$ en portant de part et d'autre la longueur $\frac{1}{2}(\ell_2-\ell_1)$; ce qui fait au total (k–1) paires d'intervalles de longueur $\frac{1}{2}(\ell_2-\ell_1)$. Les (k–1) intervalles $I_j^{(1)}$ sont agrandis en (k–1) intervalles $I_j'^{(1)}$ tous disjoints, sauf deux qui ont une extrémité commune ; ce qui détermine au total (k–2) intervalles fermés $I_j^{(2)}$ disjoints dont la somme des longueurs est $k\ell_1 + (k-1)(\ell_2-\ell_1)$.

3ème étape : On agrandit chacun des intervalles $I_j^{(2)}$ en portant de part et d'autre la longueur $\frac{1}{2}(\ell_3-\ell_2)$; d'où (k–2) nouveaux intervalles $I_j'^{(2)}$ disjoints, sauf deux qui ont une extrémité commune, ce qui donne (k–3) intervalles fermés disjoints $I_j^{(3)}$ dont la somme des longueurs est
$k\ell_1 + (k-1)(\ell_2-\ell_1) + (k-2)(\ell_3-\ell_2) = \ell_1 + \ell_2 + (k-2)\ell_3$.

pème étape : Si on a (k–p+1) intervalles fermés disjoints $I_j^{(p-1)}$ dont la somme des longueurs est $k\ell_1 + (k-1)(\ell_2-\ell_1) + \ldots + (k-p+2)(\ell_{p-1} - \ell_{p-2})$, comme on a supposé
$\ell_1 < \ell_2 < \ldots < \ell_{p-1} < \ell_p < \ldots \ell_{-1} < \ell_k$, on peut agrandir les (k–p+1) intervalles $I_j^{(p-1)}$ en (k–p+1) intervalles $I_j'^{(p-1)}$ en portant de chaque côté la longueur $\frac{1}{2}(\ell_p-\ell_{p-1})$.

Les $I_j'^{(p-1)}$ sont encore tous disjoints, sauf deux qui ont une extrémité commune, ce qui fait (k–p) intervalles fermés disjoints dont la somme des longueurs est

$$k\ell_1 + (k-1)(\ell_2-\ell_1) + \ldots + (k-p+1)(\ell_p-\ell_{p-1}) = \ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_{p-1} + (k-p+1)\ell_p.$$

L'opération s'achève après k étapes ; les k intervalles de la première étape et les paires d'intervalles introduites dans les étapes suivantes réalisent une partition de I ; si on a $\ell_1 \leqslant \ell_2 \leqslant \ldots \leqslant \ell_{k-1} \leqslant \ell_k$ l'opération précédente est encore possible et comporte moins d'étapes, en particulier si $\ell_{p-1} = \ell_p$, on passe directement de la (p–1)ème étape à la (p+1)ème.

c) Minoration associée à cette partition de I.

Notons $(I\alpha)_\alpha$ les k intervalles de longueur ℓ_1 et $(J_\beta,K_\beta)_\beta$ les paires d'intervalles qui interviennent dans la partition de I ; on cherche un minorant de la quantité

$$\frac{1}{2}\sum_\alpha \int_{I_\alpha} h^+(L,L',x,2m_\alpha-x)dx + \frac{1}{2}\sum_\beta \int_{J_\beta \cup K_\beta} h^+(L,L',x,2n_\beta-x)dx.$$

Il résulte de la proposition 2 que

$$\frac{1}{2}\sum_\alpha \int_{I_\alpha} h^+(L,L',x,2m_\alpha-x)dx \geqslant \frac{k}{2}(\ell_1 - \frac{N\ell_1^2}{2}).$$

Soit $[a_i,b_i]$, $[c_i,d_i]$ un couple d'intervalles de longueur $\frac{1}{2}(\ell_p-\ell_{p-1})$ intervenant dans la partition de I soient m_i le milieu de $[b_i,c_i]$ et h_i le nombre de points de T dans $[b_i,c_i]$. Il résulte de la proposition 4 que

$$\frac{1}{2}\int_{[[a_i,b_i]\cup[c_i,d_i]} h^+(L,L',x,2m_i-x)dx \geqslant \frac{N}{4}(\ell_p-\ell_{p-1})^2 + (\frac{\ell_p-\ell_{p-1}}{2})\,[h_i-N(d_i-a_i)]$$

Aux (k−p+1) paires d'intervalles de longueur $\frac{\ell_p-\ell_{p-1}}{2}$ correspond le minorant

$$(k-p+1)\,\frac{N}{4}(\ell_p-\ell_{p-1})^2 + (\frac{\ell_p-\ell_{p-1}}{2})\sum_{i=1}^{k-p+1}[h_i-N(d_i-a_i)]$$

On a par ailleurs $\sum_{i=1}^{k-p+1} h_i = k$ et

$$\sum_{i=1}^{k-p+1}(d_i-a_i) = \ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_{p-1} + (k-p+1)\ell_p.$$

Le minorant relatif à ces paires d'intervalles est donc

$$(k-p+1)\frac{N}{4}(\ell_p-\ell_{p-1})^2 + \frac{(\ell_p-\ell_{p-1})}{2}\,[k - N\{\ell_1+\ell_2+\ldots+\ell_{p-1}+(k-p+1)\ell_p\}]$$

Le minorant associé à la partition de I est donc

$$\frac{k\ell_1}{2}(1-\frac{N\ell_1}{2}) + \frac{N}{4}\sum_{p=2}^{k}(k-p+1)(\ell_p-\ell_{p-1})^2 + \sum_{p=2}^{k}(\frac{\ell_p-\ell_{p-1}}{2})\,[k-N\{\ell_1+\ell_2+\ldots+\ell_{p-1}+(k-p+1)\ell_p\}]$$

Ce minorant dépend seulement des longueurs $\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_{k-1}$ et non de l'ordre des points x_{ν_i} ; on peut donc le noter $f_k(\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_{k-1})$.

On remarque que si $\ell_1 = \ell_2 = \ldots = \ell_{k-1} = \ell_k = \frac{2}{3N}$ on a $f_k(\frac{2}{3N},\frac{2}{3N},\ldots,\frac{2}{3N}) = \frac{k}{2}\,\frac{2}{3N}\,(1-\frac{2}{6})$, résultat qu'on peut obtenir directement.

d) Une propriété des fonctions f_k.

La distance critique $\frac{2}{3N}$ est notée ℓ dans ce qui suit.

PROPOSITION. *Soit* k *un entier supérieur ou égal à* 2. *Si*

$$0 \leqslant \ell_1 \leqslant \ell_2 \leqslant \ldots \leqslant \ell_{k-1} \leqslant \ell$$

alors

$$f_k(\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_{k-1}) \geqslant f_k(\ell,\ell,\ldots,\ell)$$

La démonstration se fait par récurrence sur k ; pour k = 2 on a trivialement $f_2(\ell_1) - f_2(\ell) = \frac{N}{4}(\ell-\ell_1)^2$, donc $f_2(\ell_1) \geqslant f_2(\ell)$. Pour k supérieur à 2, étant donné un groupe de k points $x_{\nu_1}, x_{\nu_2},\ldots,x_{\nu_k}$ non isolés par la distance critique ℓ, la contribution de ces k points est $f_k(\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_{k-1})$; il existe un indice j entre 1 et k−1 tel que la distance entre x_{ν_1} et x_{ν_2} soit exactement ℓ_j ; si on éloigne suffisamment le point x_{ν_1} des (k−1) autres points x_{ν_i}, jusqu'à ce qu'il soit isolé par la distance ℓ, la contribution du nouveau système de k points ainsi obtenu est $\frac{1}{2}(\ell - \frac{N\ell^2}{2}) + f_{k-1}(\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_{j-1},\ell_{j+1},\ldots,\ell_{k-1})$.

Etablissons la minoration

$$f_k(\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_{k-1}) \geqslant \frac{1}{2}(\ell - \frac{N\ell^2}{2}) + f_{k-1}(\ell_1,\ldots,\ell_{j-1},\ell_{j+1},\ldots,\ell_{k-1})$$

ce qui permet de démontrer la proposition par une simple récurrence.

Envisageons la différence :

$$\delta_j = f_k(\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_{k-1}) - \left\{\frac{1}{2}(\ell - \frac{N\ell^2}{2}) + f_{k-1}(\ell_1,\ldots,\ell_{j-1},\ell_{j+1},\ldots,\ell_{k-1})\right\}.$$

Un calcul élémentaire montre que pour tout j = 1,2,...,k−1 on a $\delta_j = \frac{N}{4}(\ell-\ell_j)^2$. Il suffit pour cela d'expliciter les sommations qui interviennent dans les expressions $f_k(\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_{k-1})$ et $f_{k-1}(\ell_1,\ldots,\ell_{j-1},\ell_{j+1},\ldots,\ell_{k-1})$. Comme la contribution des k points ne dépend pas de leur ordre, mais seulement des distances $\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_{k-1}$, il suffit pour établir la propriété de montrer l'égalité $\delta_j = \frac{N}{4}(\ell-\ell_j)^2$ pour une valeur particulière arbitraire de j entre 1 et k−1, par exemple pour les valeurs extrêmes j = 1 et j = k−1 qui facilitent quelque peu le calcul.

e) Démonstration du lemme 2.

Si les $\frac{N}{2}$ points de T ne sont pas isolés par une distance $x \geqslant \frac{2}{3N}$ soit un groupe de k points de T non isolés par $\frac{2}{3N}$. La contribution de ces k points pour la minoration de θ est au moins égale à ce qu'elle serait s'ils étaient isolés par $\frac{2}{3N}$ d'après d) et la portion de tore utilisée pour les intégrations est $\ell_1+\ell_2+\ldots+\ell_{k-1}+\ell \leqslant k\ell$ et ceci est vrai pour tout entier k compris entre 1 et $\frac{N}{2}$. La contribution pour la minoration de θ ne provenant pas des $\frac{N}{2}$ points de T est au moins égale à qu'elle serait si ces $\frac{N}{2}$ points étaient isolés, et donc $\theta \geqslant \frac{1}{6}$.

Remarque. Dans la démonstration du lemme 2, k est un ensemble de 4^{t+1} entiers consécutifs dont L et L' sont le premier et le dernier quart. On peut choisir pour k un ensemble de a^{t+1} entiers consécutifs, et pour obtenir la meilleure minoration, on est conduit d'une part à prendre pour L et L' les a^t premiers et les a^t derniers éléments de K, et d'autre part à prendre a = 4 ; le choix de a entier n'est pas indispensable à condition de prendre $K = \left\{ p+1,\dots, [p+a^{t+1}] \right\}$.

On obtient alors $\sup\limits_{a>2} \dfrac{a-2}{8(a-1)\operatorname{Log} a}$ comme minorant au lieu de $\dfrac{1}{12 \operatorname{Log} 4}$ et le gain ne porte que sur la 5ème décimale.

REFERENCES

[1] FAURE H. *«Discrépance des suites associées à un système de numération»*. (à paraître).

[2] KUIPERS L. et NIEDERREITER H. *«Uniform distribution of sequences»*. J. Wiley and sons, p. 107-109, 1974.

[3] ROTH K.F. *«On irregularities of distribution»*. Mathematika I., 1954.

[4] SCHMIDT W.M. *«Irregularities of distribution VII»*. Acta Arith, Warszawa, t. 21, p. 45-60, 1972.

[5] VAN AARDENNE-EHRENFEST T. *«Proof of the impossibility of a just distribution»*. Indag. Math. 11, p. 264-269, 1949.

[6] VAN DER CORPUT J.G. *«Verteilungsfunktionnen»*. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. 38, 1935.

(Manuscrit reçu le 23 septembre 1979)