Francis Cagnac

Problème de Cauchy sur un conoïde caractéristique

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 2, nº 1 (1980), p. 11-19
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1980_5_2_1_11_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol II, 1980, P. 11 à 19

PROBLEME DE CAUCHY SUR UN CONOIDE CARACTERISTIQUE

Francis Cagnac (1)

(1) Département de mathématiques, Faculté des Sciences, B.P. 812, Yaoundé - Cameroun.

Résumé : Soit V une variété de dimension 4.

Soit L un opérateur différentiel linéaire hyperbolique du 2ème ordre sur V.

Soit $\mathcal{C}_0$ un conoïde caractéristique de l'opérateur L.

Soit φ une fonction donnée sur $\mathcal{C}_0$.

On se propose de montrer que le problème

$$\begin{cases} Lu = f \\ \text{sur } \mathcal{C}_0, u = \varphi \end{cases}$$

a une solution et une seule sous des hypothèses assez générales.

Pour cela on utilise les résultats de Leray [1].

Le résultat essentiel de notre travail est le théorème qui est énoncé au § IV.

Summary : Let V be a 4-dimensional manifold, L a hyperbolic differential operator of order 2 on V, $\mathcal{C}_0$ a caracteristic conoid of L, ϕ a given function on $\mathcal{C}_0$, we are showing that the Cauchy-problem :

$$\begin{cases} Lu = f \\ u(x) = \phi(x) \text{ for } x \in \mathcal{C}_0 \end{cases}$$

has a unique solution under some conditions of differentiability. We are using the results of Leray. Our main result is the theorem stated at the end of this paper.

I - RAPPEL DES RESULTATS DE LERAY

Hypothèses :

a) V est une variété de classe C^3 au moins

b) L est hyperbolique au sens de Leray, c'est-à-dire :

1) L est hyperbolique en tout point $x \in V$. Ceci signifie que :

Si dans une carte locale en x, L a pour expression :

$$Lu = A^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + B^\alpha \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} + Cu \qquad (\alpha, \beta = 1,\ldots,4)$$

le 2-tenseur contravariant $A^{\alpha\beta}$ définit dans $T_x^*(V)$, deux cônes réels convexes d'intérieurs non vides, opposés, Γ_x et Γ_x^-, formés des vecteurs covariants ξ_α tels que :

$$A^{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta \geqslant 0.$$

2) Parmi les 2 cônes opposés définis en chaque point x par L, on peut choisir Γ_x de façon que Γ_x dépende continuement de x sur V.

On désigne par $C_x \subset T_x(V)$, le cône dual de Γ_x.

Les vecteurs de C_x sont dits temporels.

L'hypothèse 2) est équivalente à la suivante : il existe un champ continu de vecteurs temporels.

Un chemin $C : I \to V$, où I est un intervalle de R et C une application continue est dit temporel, si l'ensemble de ses demi-tangentes positives en tout point x est contenu dans C_x.

3) La réunion des chemins temporels joignant 2 points quelconques y et z de V est compacte ou vide.

c) Les $A^{\alpha\beta}$ sont de classe C^1 ;

les B^α, et C sont continus à dérivées 1ères localement bornées. Soit K une partie de V. On désigne par $\mathcal{E}$ (K) l'émission de K, c'est-à-dire la réunion des chemins temporels issus des points de K.

d) Soit K une hypersurface lipschitzienne de V, orientée dans l'espace ou caractéristique pour l'opérateur L, telle que $\mathcal{E}$ (K) a K pour frontière.

Soit w une fonctions définie sur $\mathcal{E}$ (K), telle que :

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha)\ w \in H^3_{\ell oc}, \text{ c'est-à-dire W a des dérivées jusqu'à l'ordre 3 qui sont des fonctions localement de carré intégrable} \\ \beta)\ \text{sur K, } Lw = 0. \end{array}\right.$$

Conclusion : Le problème de trouver une fonction u définie sur $\mathscr{E}(K)$ telle que :

$$\begin{cases} u \in H^2_{\ell oc} \\ \text{dans } \mathscr{E}(K),\ Lu = f \\ \text{sur } K,\ u-w = 0 \text{ et } \nabla(u-w) = 0 \end{cases}$$

a une solution et une seule, qui est donnée par :

$$u = L^{-1}\left\{ L\overline{w} - [Lw] + f \right\}$$

où : $\overline{w}$ est la fonction définie sur V, égale à w sur $\mathscr{E}(K)$, et à 0 sur $\complement\,\mathscr{E}(K)$
$[Lw]$ est la fonction égale à Lw sur $\mathscr{E}(K)$ et à 0 dans $\complement\,\mathscr{E}(K)$
L^{-1} est l'opérateur inverse de L défini par Leray.

II - APPLICATION AU CAS D'UN CONOIDE CARACTERISTIQUE

Nous supposons que $\mathscr{C}_0$ est un conoïde caractéristique de sommet 0 qui n'a pas d'autre point singulier que 0.

Appliquer les résultats de Leray pour résoudre le problème posé, revient à construire une fonction w définie sur $\mathscr{E}(\mathscr{C}_0)$ telle que :

$$\begin{cases} 1)\ w \in H^3_{\ell oc} \\ 2)\ \text{sur } \mathscr{C}_0,\ w = \varphi \\ 3)\ \text{sur } \mathscr{C}_0,\ Lw = 0 \end{cases}$$

$\mathscr{C}_0$ étant caractéristique les conditions 2) et 3) ci-dessus, entraînent que sur $\mathscr{C}_0$, ∇w est déterminé s'il est connu en un point de chaque bicaractéristique de $\mathscr{C}_0$.

En fait, nous allons montrer que la *condition que* w *soit de classe* C^1 *au point* 0 *détermine de façon unique* ∇w *sur* $\mathscr{C}_0$.

Soit N un champ de vecteurs temporels sur V de classe C^3 (l'hypothèse 2 sur L, entraîne l'existence d'un tel champ de vecteurs). $\forall x \in \mathscr{C}_0$, posons $N_x \cdot \nabla w = \chi(x)$.
$\forall x \in \mathscr{C}_0$, utilisons une carte locale $\mathscr{U}$ en x, telle que en tout point :

$$\frac{\partial M}{\partial x^4} = N$$

Alors $\mathscr{C}_0$ admet une équation $x^4 - S(x^i) = 0 \quad (i = 1,\dots,3)$. Nous supposons que $\mathscr{C}_0$ et S sont de classe C^2 au moins, sauf au point 0.

Posons $q_i = -\dfrac{\partial S}{\partial x^i}$. Alors les conditions : sur $\mathscr{C}_o$ $\left\{\begin{array}{l} w = \varphi \\ Lw = 0 \end{array}\right.$ sont équivalentes à :

$$(1) \quad \left\{\begin{array}{l} \text{sur } \mathscr{C}_o, \; w = \varphi \text{ et} \\ 2([A^{4i}] + [A^{ij}]q_j)\dfrac{\partial \chi}{\partial x^i} + [A^{ij}]\dfrac{\partial q_i}{\partial x^j} + [A^{ij}]\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} + [B^i]\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x^i} + q_i\,\chi\right) \\ \qquad + [B^4]\,\chi + [C]\varphi = 0 \end{array}\right.$$

($[A^{\lambda\mu}]$, ... représente la restriction de $A^{\lambda\mu}$ à $\mathscr{C}_o$).

(1) est une équation différentielle en χ sur chaque bicaractéristique de $\mathscr{C}_o$. Montrons que cette équation a une solution et une seule qui soit continue en 0. Pour cela nous utilisons une carte locale $\mathscr{U}_o$ en 0, du type précédent, mais telle que en outre, en 0 :

$$A^{44} = 1, \; A^{4i} = 0, \; A^{ij} = -\delta^{ij}.$$

La singularité de $\mathscr{C}_o$ en 0 entraîne que $\dfrac{\partial q_j}{\partial x^j}$ qui figure dans (1) n'est pas borné au voisinage de 0.

D'autre part une hypothèse raisonnable à faire sur φ est qu'elle soit la trace sur $\mathscr{C}_o$ d'une fonction v, de classe C^2 au moins, définie sur V. Ceci entraîne que φ est de classe C^2 sur $\mathscr{C}_o - \{0\}$, mais que au voisinage de 0, les $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j}$ ne sont pas bornés.

Nous ferons donc sur φ l'hypothèse suivante :

(2)

- φ est de classe C^2 sur $\mathscr{C}_o - \{0\}$
- au voisinage de 0, dans la carte locale $\mathscr{U}_o$, φ admet un développement limité :
$$\varphi(x^i) = a_o + a_i x^i + a_4 S + \frac{1}{2}\left\{a_{ij}x^i x^j + 2a_{i4}x^i S + a_{44}S^2\right\} + o(s^2)$$
où les $a_o, a_i, \ldots$ sont des constantes et $s = \sqrt{\Sigma (x^i)^2}$
- Les dérivés 1ères et 2èmes de φ admettent les développements limités dérivés de (2).

Ceci étant, on a montré que l'équation (1) a une solution χ et une seule qui soit bornée au voisinage de 0. Cette solution est continue au point 0 et y prend la valeur a_4 (cf [2] p. 388 et [3]).

La fonction χ ainsi déterminée dans le domaine de la carte locale $\mathscr{U}_o$, peut ensuite être prolongée de façon unique sur toutes les bicaractéristiques de $\mathscr{C}_o$ au moyen de l'équation différentielle (1).

Dans toute la suite χ désignera cette fonction unique dont nous venons de montrer l'existence.

III - CONSTRUCTION DE w

Il suffit de définir w dans un voisinage de $\mathscr{C}_o$:

Pour avoir une fonction w remplissant les conditions 1, 2, 3, du § II, nous poserons, dans chaque carte locale $\mathscr{U}$:

$$w(x^\alpha) = \varphi(x^i) + (x^4 - S(x^i))\, \chi(x^i) + \frac{1}{2}\, b\, (x^4 - S(x^i))^2 \tag{3}$$

où la constante b sera déterminée dans la suite.

Toute fonction de la forme (3) vérifiera les conditions 2, et 3, imposées à w. Il reste à voir si la condition 1) : $w \in H^3_{\ell oc}$ est vérifiée.

a) Pour que $w \in H^3_{\ell oc}$, il faut que S, φ et χ appartiennent à $H^3_{\ell oc}$.
Afin que les solutions χ de l'équation (1) aient des dérivées 3èmes qui soient des fonctions, nous sommes amenés à faire les hypothèses suivantes :

$$\mathscr{C}_o - \{0\} \text{ est de classe } C^5 \text{ et } \varphi \text{ est de classe } C^5 \text{ sur } \mathscr{C}_o - \{0\}.$$

Ce qui oblige à supposer que V est de classe C^5.
Si les hypothèses ci-dessus sont vérifiées, la fonction w définie par (3) sera de classe C^3 dans $\mathscr{E}(\mathscr{C}_o) - \Delta$, où Δ est la courbe temporelle du champ de vecteur N qui passe par 0.

b) Au voisinage de Δ, nous utilisons la carte locale $\mathscr{U}_o$.
Nous faisons l'hypothèse qu'au voisinage de 0, les dérivées de φ jusqu'à l'ordre 5 admettent les développents limités dérivés de (2). Alors on montre [3] que, au voisinage de 0, χ admet un développement limité de la forme :

$$\chi(x^i) = a_4 + X_1 + o(s)$$

où X_1 est une fraction rationnelle homogène de d^o 1 en x^i, s, dont le dénominateur est une puissance de s ; et on montre que les dérivées de χ jusqu'à l'ordre 3 admettent les développements limités dérivés. Quand on calcule les dérivées de w on trouve :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x^i} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + q_i\, \chi + (x^4 - S)\left(\frac{\partial \chi}{\partial x^i} + q_i b\right) \\ \frac{\partial w}{\partial x^4} &= \chi(x^i) \qquad + (x^4 - S) b \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial x^i \partial x^j} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial q_i}{\partial x^j}\chi + q_i \frac{\partial \chi}{\partial x^j} + q_j \frac{\partial \chi}{\partial x^i} + q_i q_j b + (x^4 - S)\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^i \partial x^j} + b \frac{\partial q_i}{\partial x^j}\right) \\
\frac{\partial^2 w}{\partial x^i \partial x^4} &= \frac{\partial \chi}{\partial x^i} + q_i b \\
\frac{\partial^2 w}{(\partial x^4)^2} &= b
\end{aligned}\right.$$

Ces expressions sont de la forme

$$D_i w = A_i(x^i) + (x^4 - S)\, B_i(x^i)$$
$$D_{ij} w = A_{ij}(x^i) + (x^4 - S)\, B_{ij}(x^i)$$

et on aurait de même :

$$D_{ijk} w = A_{ijk}(x^i) + (x^4 - S) B_{ijk}(x^i)$$

avec les relations suivantes entre les fonctions A_i, $B_i, \ldots, B_{ijk}$:

$$\left\{\begin{aligned}
A_{ij} &= \frac{\partial A_i}{\partial x^j} + q_j B_i \\
A_{ijk} &= \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} + q_k B_{ij}
\end{aligned}\right.
\qquad
\left\{\begin{aligned}
B_{ij} &= \frac{\partial B_i}{\partial x^j} \\
B_{ijk} &= \frac{\partial B_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 B_i}{\partial x^j \partial x^k}
\end{aligned}\right.$$

Pour que les fonctions $D_i w$, $D_{ij} w D_{ijk} w$ soient localement de carré intégrable au voisinage de tous les points de Δ, il faut et il suffit que les fonctions A_i, $B_i, \ldots, B_{ijk}$ le soient.

Ces fonctions admettent des développements limités en fractions rationnelles homogènes de x^i, s, de dénominateur s^p, quand $x^i \to 0$.

Pour qu'elles soient localement de carré intégrable il faut que ces développements limités commencent par un terme de $d^o \geqslant -1$.

Or dans B_i, figure $\frac{\partial \chi}{\partial x^i}$ dont le développement limité commence par un terme de $d^o 0$; donc dans B_{ijk} figure $\frac{\partial^3 \chi}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k}$ qui commence par un terme de $d^o - 2$, et B_{ijk} ne sera donc pas en général de carré intégrable.

Il convient donc de choisir b de façon que dans le développement limité de

$B_i = \dfrac{\partial \chi}{\partial x^i} + q_i b$, le terme de $d^o 0$ soit une *constante* : alors le développement limité de la dérivée B_{ij} commencera par un terme de $d^o 0$, et celui de B_{ijk} par un terme de $d^o -1$.

On peut choisir un tel b *à condition que* φ *soit la restriction à* $\mathscr{C}_0$ *d'une fonction* v *définie dans* V *qui vérifie au point* 0 *l'équation* $Lw(0) = 0$.

On montre [3] en effet que dans ce cas le développement limité de χ coïncide avec celui de $[D_4 v]$ jusqu'à l'ordre 1. Donc :

$$\chi(x^i) = a_4 + a_{4i} x^i + a_{44} S + o(s)$$

On choisit alors $b = a_{44}$ et on a :

$$B_i = \frac{\partial \chi}{\partial x^i} + q_i \, a_{44} = a_{4i} + o(1)$$

Ceci étant, on vérifie que les A_i, A_{ij}, A_{ijk} sont aussi des fonctions localement de carré intégrable : en effet, le développement limité de A_i coïncide avec celui de $[D_i v]$ jusqu'à l'ordre 1 ; celui de A_{ij} coïncide avec celui de $[D_{ij} v]$ jusqu'à l'ordre 0 : A_{ij} est donc continu au point 0 et son développement limité commence par la constante a_{ij} ; et le développement limité de A_{ijk} commence donc par un terme de $d^o 0$ et A_{ijk} est donc borné.

IV - RESULTATS

Nous rappelons les hypothèses faites et le résultat obtenu dans le théorème suivant :

THEOREME. *Soit* V *une variété de dimension 4.*

Soit L *un opérateur différentiel linéaire du 2ème ordre sur* V, *qui, dans une carte locale s'écrit :*

$$Lu = A^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + B^\alpha \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} + Cu$$

L *est hyperbolique sur* V.

Soit $\mathscr{C}_0$ *un conoïde caractéristique de* L *de sommet* 0. V, L, $\mathscr{C}_0$ *satisfont aux hypothèses suivantes :*

$$\text{I} \quad \left\{ \begin{array}{l} V \textit{ est de classe } C^5 \\ A^{\alpha\beta}, B^\alpha, C \textit{ sont de classe } C^3 \\ \mathscr{C}_0 \textit{ n'a pas d'autre point singulier que } 0 \\ \mathscr{C}_0 - \{0\} \textit{ est de classe } C^5 \end{array} \right.$$

Soit φ une fonction définie sur $\mathscr{C}_o$ satisfaisant aux hypothèses suivantes :

II

- φ est de classe C^5 sur $\mathscr{C}_o - \{0\}$
- au voisinage de 0, dans une carte locale telle que $A^{44} = 1$, $A^{4i} = 0$, $A^{ij} = -\delta^{ij}$ au point 0, et où $\mathscr{C}_o$ a pour équation $x^4 - S(x^i) = 0$, φ admet un développement limité :

$$\varphi(x^i) = a_o + a_i x^i + a_4 S + \frac{1}{2}(a_{ij}x^i x^j + 2a_{i4}x^i S + a_{44}S^2) + o(\sum (x^i)^2)$$

- les dérivées de φ jusqu'à l'ordre 5 admettent les développements limités dérivés.
- $$a_{44} - \sum_i a_{ii} + B^\alpha(0)\, a_\alpha + C(0)\, a_o = 0$$

Conclusion : Il existe une fonction u et une seule, définie dans $\mathscr{E}(\mathscr{C}_o)$ telle que :

- $u \in H^2_{\ell oc}$
- dans $\mathscr{E}(\mathscr{C}_o)$, $Lu = 0$
- sur $\mathscr{C}_o$, $u = \varphi$

Remarques : 1) Si l'on veut que le conoïde caractéristique issu d'un point quelconque de V soit de classe C^5, il convient de faire les hypothèses suivantes : les $A^{\alpha\beta}$ sont de classe C^5 et V doit donc être de classe C^6.

On peut donc remplacer l'hypothèse I par :

I'

V est de classe C^6

les $A^{\alpha\beta}$ sont de classe C^5 ; les B^α et C de classe C^3

$\mathscr{C}_o$ n'a pas d'autre point singulier que 0

2) On peut remplacer l'hypothèse II par l'hypothèse suivante, un peu plus restrictive, mais d'expression plus simple.

II'

φ est la restriction à $\mathscr{C}_o$ d'une fonction v définie sur V de classe C^5, et telle que $Lw(0) = 0$.

REFERENCES

[1] J. LERAY. *«Hyperbolic differential equations»*. Princeton 1952.

[2] F. CAGNAC. *«Problème de Cauchy sur un conoïde caractéristique»*. Annaldi Matematica Pura ed Applicata. Tome C V (1975), p. 355-393.

[3] F. CAGNAC. *«Condition pour un problème de Cauchy bien posé sur un conoïde caractéristique pour des équations quasi linéaires»*. C.R.A.S., t 285 (7 novembre 1977) p. 777.

(Manuscrit reçu le 7 janvier 1980)