

FELIPE ACKER

MARC-ANTOINE PRESTEL

**Convergence d'un schéma de minimisation alternée**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5<sup>e</sup> série*, tome 2, n° 1 (1980), p. 1-9

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1980\\_5\\_2\\_1\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1980_5_2_1_1_0)

© Université Paul Sabatier, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## CONVERGENCE D'UN SCHEMA DE MINIMISATION ALTERNEE

**Felipe Acker <sup>(1)</sup>(\*) et Marc-Antoine Prestel <sup>(2)</sup>**

*(1) 19, rue de Richemont - 75013 Paris.*

*(2) 127, rue St Denis - 75001 Paris.*

Résumé : On considère les suites 
$$\begin{cases} x_n = (I + \partial \varphi_1)^{-1} y_{n-1} \\ y_n = (I + \partial \varphi_2)^{-1} x_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

où  $\varphi_1, \varphi_2 : H \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  sont convexes, s.c.i. et propres et où  $y_0 \in H$  a été fixé. On pose  $\phi(x,y) = \frac{1}{2} |x-y|^2 + \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$ . On montre que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(x_n, y_n) = \inf \phi$  et que si  $\phi$  est bornée inférieurement, alors la suite  $(x_n - y_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $u \in H$  indépendant de  $y_0$ . On montre aussi que si  $\phi$  atteint son minimum, alors  $(x_n, y_n)$  converge faiblement dans  $H \times H$  vers  $(\bar{x}, \bar{y})$  vérifiant  $\phi(\bar{x}, \bar{y}) = \underset{(x,y) \in H \times H}{\text{Min}} \phi(x,y)$  et que, dans le cas contraire on a :  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |y_n| = \infty$ .

Summary : We are considering the sequences 
$$\begin{cases} x_n = (I + \partial \varphi_1)^{-1} y_{n-1} \\ y_n = (I + \partial \varphi_2)^{-1} x_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

where  $\varphi_1, \varphi_2 : H \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  are convex, lower-semicontinuous and proper functions and where  $y_0 \in H$  is fixed. Setting  $\phi(x,y) = \frac{1}{2} |x-y|^2 + \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$ , we show that  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(x_n, y_n) = \inf \phi$  and we also show that if  $\phi$  is bounded from below, then the sequence  $(x_n - y_n)_{n \geq 1}$  converges in  $H$  to  $u$  ( $u$  independent from  $y_0$ ). Moreover we can prove that if  $\phi$  reaches its minimum, then  $(x_n, y_n)_{n \geq 1}$  converges in  $H \times H$  to  $(\bar{x}, \bar{y})$  such that  $\phi(\bar{x}, \bar{y}) = \underset{(x,y) \in H \times H}{\text{Min}} \phi(x,y)$ . If on the contrary  $\phi$  does not reach its minimum, then we get :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |y_n| = +\infty$ .

(\*) Boursier du C.N.P. Brésil.

**Notations :**  $H$  est un espace de Hilbert réel, de produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de norme  $\|\cdot\|$ .  $I$  désigne l'identité de  $H$ . On note  $D(\varphi)$  le domaine de  $\varphi$ ,  $\partial\varphi$  (resp.  $\partial\phi$ ) le sous-différentiel de  $\varphi$  (resp.  $\phi$ ) défini sur  $D(\partial\varphi) \subset H$  (resp.  $D(\partial\phi) \subset H \times H$ ) (pour les notations et propriétés élémentaires des sous-différentiels, voir [1]).

## I - PRESENTATION DU PROBLEME

Soient  $H$  un espace de Hilbert réel,  $\varphi_1, \varphi_2 : H \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  deux fonctions convexes, semi-continues inférieurement et propres. Soient  $T_1$  et  $T_2$  les contractions de  $H$  dans  $H$  définis par

$$T_1 = (I + \partial\varphi_1)^{-1}, \quad T_2 = (I + \partial\varphi_2)^{-1}$$

On fixe  $y_0 \in H$  et on définit les suites  $(x_n)_{n \geq 1}$  et  $(y_n)_{n \geq 1}$  de  $H$  par :

$$\forall n \geq 1, \quad x_n = T_1(y_{n-1}), \quad y_n = T_2(x_n)$$

on se propose d'étudier la convergence de la suite  $(x_n - y_n)_{n \geq 1}$ .

Ce problème est directement lié à la minimisation de la fonction  $\phi$  définie par  $\phi : H \times H \rightarrow ]-\infty, \infty]$

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{2} (x-y)^2 + \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$$

En effet,  $x_1 = T_1(y_0)$  est un point de minimum de l'application  $x \mapsto \phi(x, y_0)$ . Si  $y_0 \in D(\varphi_2)$ ,  $x_1$  est même l'unique point de minimum de  $x \mapsto \phi(x, y_0)$ . Pour  $n \geq 1$ ,  $x_n$  appartient à  $D(\partial\varphi_1) \subset D(\varphi_1)$  et  $y_n \in D(\partial\varphi_2) \subset D(\varphi_2)$ . Par un raisonnement analogue, on obtient que, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} y_n & \text{ est le point de minimum de } y \mapsto \phi(x_n, y) \\ x_{n+1} & \text{ est le point de minimum de } x \mapsto \phi(x, y_n). \end{aligned}$$

on en déduit que, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\infty > \phi(x_n, y_n) \geq \phi(x_{n+1}, y_n) \geq \phi(x_{n+1}, y_{n+1}).$$

## II - PROPRIETE DES SUITES MINIMISANTES DE $\phi$

**PROPOSITION.** Soit  $\phi: H \times H \rightarrow ]-\infty, +\infty]$ , convexe et propre. On suppose que l'application  $\phi: H \times H \rightarrow ]-\infty, \infty]$

$$(x,y) \mapsto \frac{1}{2} (x-y)^2 + \phi(x,y)$$

est bornée inférieurement. Il existe alors  $u \in H$  tel que pour toute suite  $(x_n, y_n)$  de  $H \times H$  avec

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n, y_n) = \inf_{x,y \in H} \phi \text{ on a}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = u$$

*Démonstration.* Soit  $(x_n, y_n)$  une suite minimisante. Pour montrer que  $(x_n - y_n)$  est une suite de Cauchy, on observe que pour tous  $m, n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{x_n + x_m}{2}, \frac{y_n + y_m}{2}\right) &= \frac{1}{2} \left| \frac{x_n - y_n}{2} + \frac{x_m - y_m}{2} \right|^2 + \phi\left(\frac{x_n + x_m}{2}, \frac{y_n + y_m}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{4} \left\{ |x_n - y_n|^2 + |x_m - y_m|^2 + 2 \langle x_n - y_n, x_m - y_m \rangle \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \phi(x_n, y_n) + \phi(x_m, y_m) \right\} \end{aligned}$$

à cause de la convexité de  $\phi$ . On a donc

$$\begin{aligned} \phi(x_n, y_n) + \phi(x_m, y_m) - 2\phi\left(\frac{x_n + x_m}{2}, \frac{y_n + y_m}{2}\right) \\ \geq \frac{1}{4} \left\{ |x_n - y_n|^2 + |x_m - y_m|^2 - 2 \langle x_n - y_n, x_m - y_m \rangle \right\} \geq \frac{1}{4} |(x_n - y_n) - (x_m - y_m)|^2. \end{aligned}$$

Puisque  $\phi(x_n, y_n)$  et  $\phi(x_m, y_m)$  tendent vers  $\inf \phi$ , qui est fini,  $\phi$  étant propre et minorée, il résulte de la majoration précédente que :

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} |(x_n - y_n) - (x_m - y_m)|^2 = 0.$$

Soit alors  $u = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n)$ . Si  $(x'_n, y'_n)$  est une suite minimisante de  $\phi$ , on sait que  $(x'_n - y'_n)$  converge vers  $u' \in H$ . Or, la suite obtenue en alternant les  $(x_{2n}, y_{2n})$  et les  $(x'_{2n+1}, y'_{2n+1})$  est aussi une suite minimisante, donc convergente et on en conclut que  $u' = u$ .

*Remarques.* 1) Si  $\varphi(x,y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$ ,  $\varphi_1, \varphi_2$  définies par

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in K \\ +\infty & \text{si } x \notin K \end{cases} \quad \varphi_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y = y_0 \\ +\infty & \text{si } y \neq y_0 \end{cases}$$

où  $y_0 \in H$  et  $K \subset H$  est un convexe fermé, on retrouve le théorème de projection sur un convexe fermé.

2) Dans la démonstration de la proposition, on obtenait en fait l'inégalité suivante :

$$\forall (x,y) \in H \times H, \forall n \geq 1, \phi(x,y) + \phi(x_n, y_n) - 2\phi\left(\frac{x+x_n}{2}, \frac{y+y_n}{2}\right) \geq \frac{1}{4} |(x-y) - (x_n - y_n)|^2$$

Puisque  $\phi\left(\frac{x+x_n}{2}, \frac{y+y_n}{2}\right) \geq \inf \phi$ , on a,

$$\phi(x,y) + \phi(x_n, y_n) - 2 \inf \phi \geq \frac{1}{4} |(x-y) - (x_n - y_n)|^2.$$

En faisant tendre  $n$  vers l'infini, on obtient

$$\forall (x,y) \in H \times H, |(x-y) - u|^2 \leq 4(\phi(x_n, y_n) - \inf \phi).$$

### III - CONVERGENCE DE LA SUITE $(x_n - y_n)$

On reprend  $\phi(x,y) = \frac{1}{2} (x-y)^2 + \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$ . On vérifie facilement que  $D(\partial\phi) = D(\partial\varphi_1) \times D(\partial\varphi_2)$  et que pour tout

$$(x,y) \in D(\partial\phi), \partial\phi(x,y) = \{x-y + \partial\varphi_1(x)\} \times \{y-x + \partial\varphi_2(y)\}$$

Puisque, par définition des suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$ , on a pour tout  $n \geq 1$

$$(x_n - y_n) \in \partial\varphi_2(y_n), (y_n - x_{n+1}) \in \partial\varphi_1(x_{n+1}), (x_{n+1} - y_{n+1}) \in \partial\varphi_2(y_{n+1}),$$

on obtient en particulier

$$\forall n \geq 1, (0, x_n - x_{n-1}) \in \partial\phi(x_{n+1}, y_n) \text{ et } (y_n - y_{n+1}, 0) \in \partial\phi(x_{n+1}, y_{n+1}).$$

LEMME. Pour tout  $(x,y) \in H \times H$  et pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$\langle x - x_{n+1}, y - y_{n+1} \rangle \leq \langle x - x_n, y - y_n \rangle + 2\phi(x,y) - \phi(x_{n+1}, y_n) - \phi(x_{n+1}, y_{n+1})$$

*Démonstration.* On a :

$$(1) \langle x - x_{n+1}, y - y_{n+1} \rangle = \langle x - x_n, y - y_n \rangle + \langle x_n - x_{n+1}, y - y_n \rangle + \langle x - x_{n+1}, y_n - y_{n+1} \rangle$$

Puisque

$$(0, x_n - x_{n+1}) \in \partial\phi(x_{n+1}, y_n) \text{ et } (y_n - y_{n+1}, 0) \in \partial\phi(x_{n+1}, y_{n+1})$$

il vient aussi

$$(2) \quad \phi(x, y) - \phi(x_{n+1}, y_n) \geq \langle x_n - x_{n+1}, y - y_n \rangle$$

$$(3) \quad \phi(x, y) - \phi(x_{n+1}, y_{n+1}) \geq \langle x - x_{n+1}, y_n - y_{n+1} \rangle$$

le lemme découle directement de (1), (2) et (3).

On se servira maintenant du fait que si  $\varphi$  est convexe, s.c.i et propre et  $T = (I + \partial\varphi)^{-1}$ , alors :

$$\forall (u, v) \in H \times H, \langle u - v, Tu - Tv \rangle \geq |Tu - Tv|^2.$$

**THEOREME 1.**

(i) la suite  $(x_n, y_n)$  vérifie :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(x_n, y_n) = \inf_{x, y \in H} \phi(x, y)$

(ii) si  $\phi$  est bornée inférieurement, il existe  $u \in H$  indépendant de  $y_0$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = u$ .

*Démonstration.*

(i) Puisque  $(\phi(x_n, y_n))$  est décroissante, on peut poser  $d = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n, y_n)$  (si  $d = -\infty$ , il n'y a plus rien à démontrer).

Le lemme nous assure que pour tout  $(\bar{x}, \bar{y}) \in H \times H$  et pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$\langle \bar{x} - x_{n+1}, \bar{y} - y_{n+1} \rangle \leq \langle \bar{x} - x_n, \bar{y} - y_n \rangle + 2\phi(\bar{x}, \bar{y}) - \phi(x_{n+1}, y_n) - \phi(x_{n+1}, y_{n+1})$$

Puisque  $d = \inf_n \phi(x_n, y_n) = \inf_n \phi(x_{n+1}, y_{n+1})$ , on a

$$\langle \bar{x} - x_{n+1}, \bar{y} - y_{n+1} \rangle \leq \langle \bar{x} - x_n, \bar{y} - y_n \rangle + 2(\phi(\bar{x}, \bar{y}) - d)$$

En faisant varier  $n$  de 1 à  $m$  et en additionnant les inégalités correspondantes, on obtient :

$$\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in H \times H, \forall m \geq 1,$$

$$\langle \bar{x} - x_{m+1}, \bar{y} - y_{m+1} \rangle \leq \langle \bar{x} - x_1, \bar{y} - y_1 \rangle + 2m(\phi(\bar{x}, \bar{y}) - d)$$

Soit  $x \in H$ . On porte  $(x, T_2x)$  à la place de  $(\bar{x}, \bar{y})$  dans la dernière inégalité, et on obtient, compte-tenu de ce que  $y_{m+1} = T_2(x_{m+1})$  :

$$\begin{aligned} \forall x \in H, \forall m \geq 1, 0 &\leq |T_2x - y_{m+1}|^2 \leq \langle x - x_{m+1}, T_2x - y_{m+1} \rangle \\ \Rightarrow 0 &\leq |T_2x - y_{m+1}|^2 \leq \langle x - x_1, T_2x - y_1 \rangle + 2m(\phi(x, T_2x) - d) \end{aligned}$$

D'où 
$$\phi(x, T_2x) \geq d - \frac{\langle x - x_1, T_2x - y_1 \rangle}{2m}$$

On fait alors tendre  $m$  vers l'infini pour obtenir :

$$\forall x \in H, \phi(x, T_2x) \geq d.$$

Puisque  $\phi(x, T_2x) = \inf_{y \in H} \phi(x, y)$ , il en résulte que :

$$\forall (x, y) \in H \times H \quad \phi(x, y) \geq d.$$

Donc,  $d = \lim_n \phi(x_n, y_n)$  est égal à  $\inf \phi$  et si  $\inf \phi > -\infty$ ,  $(x_n, y_n)$  est une suite minimisante.

(ii) se déduit de (i) et de la proposition du § II.

*Remarque.* La condition posée dans la partie (ii) (ie.  $\phi$  est borné inférieurement) est suffisante mais n'est pas nécessaire, comme on peut le voir en posant  $\varphi_1 \equiv 0$  et  $\varphi_2(y) = \langle p, y \rangle$ ,  $p \neq 0$ .

#### IV - CONVERGENCE DES SUITES $(x_n)$ ET $(y_n)$

Soit  $M = \{ (x, y) \in H \times H \mid \phi(x, y) = \inf \phi \}$  ( $\phi$  n'est plus supposée bornée inférieurement).

Puisque  $\phi$  est convexe et s.c.i.,  $M$  est convexe et fermé.

D'autre part, puisque  $(x, y) \in M \Leftrightarrow (0, 0) \in \partial\phi(x, y)$  et que pour tout  $(x, y) \in H \times H$ ,  $\partial\phi(x, y) = (x - y + \partial\varphi_1(x)) \times (y - x + \partial\varphi_2(y))$ , on a :

$$(x, y) \in M \Leftrightarrow (y - x) \in \partial\varphi_1(x) \text{ et } (x - y) \in \partial\varphi_2(y)$$

On a donc

- (i)  $M = \{ (x, y) \in H \times H \mid T_2x = y \text{ et } T_1y = x \}$
- (ii)  $M = \{ (x, T_2x) \mid x \in H \text{ et } T_1T_2x = x \}$ ,

(iii)  $M = \{ (x, x+u) \mid x \in H \text{ et } T_1 T_2 x = x \}$ ,  $u$  étant l'élément de  $H$  cité dans le Théorème du paragraphe III.

Il découle de (i) que, pour tout  $n \geq 1$  et pour tout  $(x, y) \in M$ ,

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x| &= |T_1 y_n - T_1 y| \leq |y_n - y| = |T_2 x_n - T_2(x)| \leq |x_n - x| \\ |y_{n+1} - y| &= |T_2 x_{n+1} - T_2 x| \leq |x_{n+1} - x| \leq |y_n - y| \end{aligned}$$

**THEOREME 2.**

(i) Si  $M = \emptyset$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |y_n| = \infty$

(ii) Si  $M \neq \emptyset$ , alors il existe  $(\bar{x}, \bar{y}) \in M$  tel que  $x_n \rightarrow \bar{x}$  et  $y_n \rightarrow \bar{y}$ .

*Démonstration.* (i) Si  $(x_n)$  ne tend pas vers l'infini, il existe une sous-suite  $(x_{n_m})$  bornée. Puisque  $y_{n_m} = T_2 x_{n_m}$  et que  $T_2$  est contractante, la suite  $(x_{n_m}, y_{n_m})$  est alors bornée dans  $H \times H$ . Soit donc  $(\bar{x}, \bar{y}) \in H \times H$  un point limite faible d'une sous-suite de  $(x_{n_m}, y_{n_m})$ . Le fait que  $\phi(x_n, y_n) \rightarrow \inf \phi$  et la s.c.i. faible de  $\phi$  entraînent que  $(\bar{x}, \bar{y}) \in M$ , ce qui contredit l'hypothèse. Le même raisonnement peut être fait si on suppose que  $(y_n) \not\rightarrow \infty$ .

(ii) Si  $(x, y) \in M$ , les suites  $(|x_n - x|)_{n \geq 1}$  et  $(|y_n - y|)_{n \geq 1}$  sont décroissantes et  $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq 1}$  est bornée. La démonstration du (i) montre que toute sous-suite de  $(x_n, y_n)$  admet une sous-suite convergeant faiblement vers un élément  $(\bar{x}, \bar{y}) \in M$ . Il suffit alors de prouver que  $(\bar{x}, \bar{y})$  ne dépend pas de la sous-suite considérée.

Si  $(x_{n_m}, y_{n_m}) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$  et  $(x_{n_m}, y_{n_m}) \rightarrow (x, y)$ , on a  $(x, y) \in M$  et  $(\bar{x}, \bar{y}) \in M$ . Soient alors  $\bar{\ell} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \bar{x}|$ ,  $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x|$ .

On a les identités

(\*)  $|x_{n_m} - \bar{x}|^2 = |x_{n_m} - x|^2 + |x - \bar{x}|^2 + 2 \langle x_{n_m} - x, x - \bar{x} \rangle$

(\*\*)  $|x_{n_m} - x|^2 = |x_{n_m} - \bar{x}|^2 + |\bar{x} - x|^2 + 2 \langle x_{n_m} - \bar{x}, \bar{x} - x \rangle$

En faisant tendre  $m$  vers l'infini dans (\*) et  $m$  dans (\*\*) on obtient

$$\bar{\ell}^2 = \ell^2 - |x - \bar{x}|^2 \text{ et } \ell^2 = \bar{\ell}^2 - |x - \bar{x}|^2.$$

On en déduit que  $x = \bar{x}$ , et donc  $x_n \rightarrow \bar{x}$ .

On montre de même que  $\bar{y} = y$  (ou bien on remarque que  $x_n - y_n \rightarrow u$ , d'où  $y_n \rightarrow \bar{x} - u$ ).



*Exemple.* Comme application des Théorèmes 1 et 2, citons le résultat suivant :

- Soient  $H$  un espace de Hilbert,  $K_1, K_2 \subset H$  deux convexes fermés,  $p_i$  la projection sur  $K_i$  ( $i=1,2$ ).  
Si  $y_0 \in H$ , on forme le schéma de projection alternée  $x_n = p_1(y_{n-1})$ ,  $y_n = p_2(x_n)$  pour  $n \geq 1$ .

On a alors

(i) Il existe  $u \in H$ , ne dépendant que de  $K_1$  et  $K_2$  tel que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = u \text{ et } \|u\| = \inf_{x \in K_1, y \in K_2} \|x - y\| = d(K_1, K_2)$$

(ii) Si  $K_1$  (ou  $K_2$ ) est borné,  $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq 1}$  converge faiblement vers  $(x, y) \in K_1 \times K_2$  tel que  $\|x - y\| = d(K_1, K_2)$ . Si  $K_1$  (ou  $K_2$ ) est compact,  $(x_n, y_n)$  converge fortement vers  $(x, y)$ .

En effet, si  $\varphi_i$  est la fonction indicatrice de  $K_i$ , on a  $p_i = (I + \partial\varphi_i)^{-1}$  ( $i=1,2$ ).

## REFERENCES

- [1] H. BREZIS. «*Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*». North-Holland, 1973.
- [2] R.T. ROCKAFELLAR. «*Convex Analysis*». Princeton Univ. Press, 1970.

(Manuscrit reçu le 19 juillet 1979)