ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

PIERRE-LOUIS LIONS

Un problème de contrôle géométrique et les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 2, nº 1 (1980), p. 67-78

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1980_5_2_1_67_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol II, 1980, P. 67 à 78

UN PROBLEME DE CONTROLE GEOMETRIQUE ET LES EQUATIONS DE HAMILTON-JACOBI-BELLMAN

Pierre-Louis Lions *(1)*

(1) Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Tour 55-65, 4 Place Jussieu 75230 Paris Cédex 05.

Résumé : Dans cet article, nous montrons que les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman peuvent s'interpréter comme un problème de contrôle géométrique. Nous donnons également l'interprétation probabiliste de ce résultat d'équivalence. Les techniques utilisées sont uniquement de nature analytique (et non probabiliste).

Summary : In this paper we show that Hamilton-Jacobi-Bellman equations may be interpreted as a geometrical control problem. We also give the stochastic interpretation of this equivalence result. We only use analytical methods (and not probabilistic ones).

Introduction

L'objet de ce travail est de montrer l'équivalence entre les *équations de Hamilton-Jacobi-Bellman* et un problème de *contrôle géométrique.*

Décrivons tout d'abord le problème de contrôle géométrique : soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière régulière et soient $A_1,\ldots,A_m$ m opérateurs elliptiques du 2ème ordre sur $\mathcal{O}$ et $f_1,\ldots,f_m$ m fonctions données (les hypothèses précises sur les coefficients sont faites dans la section I). Soit $\chi = (\chi_1,\ldots,\chi_m)$ une partition de l'unité sur $\mathcal{O}$: la partition χ est la variable de contrôle. L'état du système est la solution u_χ de

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \chi_i \left\{ A_i u_\chi - f_i \right\} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O}, \\ \qquad\qquad u_\chi = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O} \end{array}\right.$$

(la résolution de ce problème nécessite des hypothèses soit sur la régularité des χ, par exemple $\chi_i \in C(\overline{\mathcal{O}})$, soit sur les opérateurs A_i : ces hypothèses seront explicitées dans la suite).

Alors, pour tout x_0 fixé dans $\mathcal{O}$, la fonction coût est $u_\chi(x_0)$ et on cherche à minimiser $u_\chi(x_0)$ parmi toutes les partitions :

$$(2)\qquad \tilde{u}(x_0) = \inf_{\chi} u_\chi(x_0),$$

$\tilde{u}(x_0)$ est donc la fonction coût optimum.

Ce problème de contrôle admet une solution qui se relie (en fait est «équivalente») à celle d'un autre problème de contrôle, a priori tout à fait différent, qui est le suivant :

le contrôle *d'intégrales stochastiques* (stoppées à la sortie de $\overline{\mathcal{O}}$) conduit à l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman :

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\max_{1 \leq i \leq m} \left\{ A_i u - f_i \right\} = 0 & \text{dans } \mathcal{O} \\ u = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O}. \end{array}\right.$$

Des problèmes particuliers du type (3) ont été traités par N.V. Krylov ([8], [9], [10]), puis par H. Brézis et L.C. Evans [2], L.C. Evans et A. Friedman [5], P.L. Lions et J.L. Menaldi [20]. Enfin les problèmes généraux du type (3) ont été résolus par l'auteur (voir [12] et [13]). La formulation précise du problème de contrôle stochastique est esquissée dans la section III ; le lecteur pourra se reporter à [8], [13], et [7].

Nous allons montrer ici que nous avons

$$\tilde{u}(x) = u(x) \quad \forall\, x \in \overline{\mathcal{O}} \qquad \text{(voir Th. II.1).}$$

Par ailleurs u étant supposée connue, on peut construire un contrôle optimal χ défini de la façon suivante

$$\chi_i(x) = 1_{(A_i u(x) = f_i(x))}.$$

La section I est consacrée à l'introduction de quelques notations ainsi qu'au rappel des résultats principaux concernant la résolution de (3). Nous démontrons ensuite dans la section II le résultat d'équivalence. Enfin dans la section III nous dégageons l'interprétation probabiliste du résultat d'équivalence.

I - NOTATIONS, HYPOTHESES ET RAPPELS

I.1. - Notations et hypothèses

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ et soient $A_1,\dots,A_m$ des opérateurs elliptiques du second ordre définis par :

$$A_i = -\sum_{k,\ell} a^i_{k\ell}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_\ell} + \sum_k b^i_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k} + c^i(x).$$

Nous supposerons dans toute la suite (sauf mention explicite) que

(4) $$a^i_{\ell k} = a^i_{k\ell}\ ,\ b^i_k\ ,\ c^i \in C^2(\bar{\mathcal{O}})\ ;$$

(5) $$\exists \nu > 0, \forall (x,\xi) \in \bar{\mathcal{O}} \times \mathbb{R}^N, \forall i, \sum_{k,\ell} a^i_{k\,\ell}(x)\xi_k\,\xi_\ell \geqslant \nu\,|\xi|^2\ ;$$

(6) $$\forall x \in \bar{\mathcal{O}},\ c^i(x) \geqslant 0,$$

et nous poserons $\lambda = \inf\limits_{i,x}\ c^i(x)$ ($\lambda \geqslant 0$).

Nous dirons d'autre part que χ est une partition mesurable (resp. continue, resp. de classe C^k) de l'unité sur $\bar{\mathcal{O}}$ si $\chi = (\chi_1,\dots,\chi_m)$ et $0 \leqslant \chi_i \leqslant 1, \sum_{i=1}^m \chi_i = +1$ et enfin $\chi_i \in L^\infty(\mathcal{O})$ (resp. $C(\bar{\mathcal{O}})$, resp. $C^k(\bar{\mathcal{O}})$).

I.2. - Rappels

Rappelons maintenant le résultat principal de [12] concernant la résolution de (3) : sous les hypothèses (4)-(5)-(6) et si de plus $f_1,\dots,f_m$ appartiennent à $W^{2,\infty}(\mathcal{O})$ et si $\lambda \geqslant \lambda_0 \geqslant 0$ (où λ_0 ne dépend que des normes $C^2(\mathcal{O})$ des coefficients $a^i_{\ell k}, b^i_k$) alors il existe une unique solution u de (3) dans $W^{2,\infty}(\mathcal{O})$.

De plus dans certains cas λ_0 peut être pris égal à 0 : c'est le cas par exemple si nous supposons $a^i_{k\ell}$ indépendant de x (voir [12]). Dans quelques cas particuliers (N = 2, m = 2,...) on peut affaiblir les hypothèses faites, voir d'ailleurs les Corollaires II.2 et II.3.

II - LES RESULTATS PRINCIPAUX

II.I. - Le Théorème d'équivalence

Soit χ une partition continue de l'unité sur $\bar{\mathcal{O}}$, alors il est connu (voir par exemple P.L. Lions [19]) que le problème linéaire suivant

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \chi_i(A_i u_\chi - f_i) &= 0 \quad \text{dans } \mathcal{O}, \\ u_\chi &= 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O} \end{aligned} \right.$$

admet une unique solution u_χ dans $W^{2,p}(\mathcal{O}) \cap W_o^{1,p}(\mathcal{O})$ dès que $f_1,\dots,f_n$ sont dans $L^p(\mathcal{O})$ $(1 < p < \infty)$, nous noterons u_χ la solution de (1).

THEOREME II.1. *Sous les hypothèses (4), (5), (6) et en supposant de plus* $\lambda \geqslant \lambda_o$ *(défini ci-dessus) et* $f_1,\dots,f_m$ *dans* $W^{2,\infty}(\mathcal{O})$, *alors nous avons, en notant* $u(x)$ *la solution de (3) dans* $W^{2,\infty}(\mathcal{O})$:

$$(7)\qquad u(x) = \inf_{\chi \text{ continue}} u_\chi(x) \ , \quad \forall\, x \in \bar{\mathcal{O}}.$$

Remarque II.1. Le résultat est conservé si on ne suppose pas $\mathcal{O}$ borné, il convient alors de remplacer (4) par

$$(4')\qquad a^i_{\ell k}\ ,\ b^i_k\ ,\ c^i \in C^2_b(\bar{\mathcal{O}})$$

(espace des fonctions continues bornées sur $\bar{\mathcal{O}}$ ainsi que leurs dérivées premières et secondes).

Remarque II.2. Le résultat peut s'étendre facilement au cas parabolique et à certaines équations de Hamilton-Jacobi-Bellman dégénérées. Il suffit dans ce cas d'utiliser les résultats d'existence de P.L. Lions [13] , [14] , [15] et de reprendre la démonstration qui suit.

Remarque II.3. Dans la section II.3, nous donnons divers compléments et extensions du Théorème II.1.

Démonstration du Théorème II.1. Nous montrerons tout d'abord que pour toute partition χ nous avons $u(x) \leqslant u_\chi(x)$, puis qu'il existe des partitions χ_ϵ «optimales à ϵ -près» i.e. $\forall \epsilon > 0\ \exists \chi_\epsilon$

$$\| u - u_{\chi_\epsilon} \|_{L^\infty(\mathcal{O})} \leqslant \epsilon\ .$$

i) Soit donc χ une partition fixée : puisque u vérifie (3), nous avons

$$\begin{cases} \sum\limits_i \chi_i(A_i u - f_i) \leqslant 0 \quad \text{p.p.} \quad \text{dans } \mathcal{O} \\ u \in W^{2,\infty}(\mathcal{O}), \, u = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}. \end{cases}$$

Alors, d'après le principe du maximum de J.M. Bony [1], nous en déduisons :

$$u(x) \leqslant u_\chi(x), \quad \forall x \in \bar{\mathcal{O}}.$$

ii) Comme u vérifie (3) il existe une partition mesurable χ de l'unité telle que

$$\sum_i \chi_i(A_i u - f_i) = 0 \quad \text{p.p.} \quad \text{dans } \mathcal{O}.$$

Considérons χ_ϵ partition de classe C^∞ telle que $\chi_\epsilon = (\chi_1^\epsilon, \ldots, \chi_m^\epsilon)$ où $\chi_i^\epsilon \xrightarrow[L^N(\mathcal{O})]{} \chi_i$.
Nous noterons $u_\epsilon = u_{\chi_\epsilon}$.
Nous avons la relation suivante :

$$\sum_{i=1}^m \chi_i^\epsilon \left\{ A_i(u_\epsilon - u) \right\} = \sum_{i=1}^m (\chi_i^\epsilon - \chi_i)(f_i - A_i u),$$

d'où nous déduisons d'après C. Pucci [22], ou N.V. Krylov [11] : $\exists\, C > 0$

$$\| u_\epsilon - u \|_{L^\infty(\mathcal{O})} \leqslant C \, \Big\| \sum_{i=1}^m (\chi_i^\epsilon - \chi_i)(f_i - A_i u) \Big\|_{L^N(\mathcal{O})} \leqslant C' \sum_{i=1}^m \| \chi_i^\epsilon - \chi_i \|_{L^N(\mathcal{O})}$$

Et ceci permet de conclure. La démonstration prouve également le

COROLLAIRE II.1. *Sous les hypothèses du Théorème II.1, pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe une partition* χ_ϵ *de classe* C^∞ *telle que*

$$\| u(x) - u_{\chi_\epsilon}(x) \|_{L^\infty(\mathcal{O})} \leqslant \epsilon \; .$$

II.2. - Quelques compléments et extensions

i) Le cas de deux opérateurs

Dans le cas de deux opérateurs, les résultats précédents peuvent être sensiblement améliorés. Tout d'abord en ce qui concerne la résolution de (1), d'après P.L. Lions [18], il existe une unique solution u_χ de (1) dans $H^2 \cap H_0^1(\mathcal{O})$ pour f_1, f_2 dans $L^2(\mathcal{O})$ et pour toute partition de l'unité *mesurable*. De plus si f_1, f_2 sont dans $L^N(\mathcal{O})$, alors $u_\chi \in L^\infty(\mathcal{O})$ (et la borne L^∞ ne dépend pas de χ).

Rappelons également les résultats concernant la résolution de (3) dans le cas m = 2 : soient f_1, $f_2 \in L^2(\mathcal{O})$, alors, d'après [2] , [16] , il existe une unique solution de (1) dans $H^2(\mathcal{O}) \cap H_0(\mathcal{O})$. De plus si f_1, f_2 sont dans $L^N(\mathcal{O})$ alors $u \in C(\bar{\mathcal{O}})$ (voir [6]) et si f_1, f_2 sont dans $W^{1,p}(\mathcal{O})$ $(p > N)$ alors $u \in C^{2,\alpha}(\mathcal{O})$ (pour $0 < \alpha < 1$).

COROLLAIRE II.2. *Sous les hypothèses (4), (5), (6) et si de plus* m = 2, f_1, f_2 *appartiennent à* $L^N(\mathcal{O})$, *alors nous avons*

$$u(x) = \inf_{\chi \text{ mesurable}} u_\chi(x) \quad \text{p.p. } sur\ \mathcal{O},$$

(l'infimum étant pris au sens des mesures). De plus il existe une partition mesurable de $\mathcal{O}$: (θ_1, θ_2) *telle que si* $\chi = (1_{\mathcal{O}_1}, 1_{\mathcal{O}_2})$ *alors nous avons* $u(x) = u_\chi(x)$ *dans* $\mathcal{O}$*. Enfin les conclusions du Corollaire II.1 sont conservées.*

Démonstration. On déduit facilement de [18] : $u(x) \leqslant u_\chi(x)$ p.p. pour toute partition mesurable χ. De plus si $\mathcal{O}_1 = (A_1 u = f_1)$, $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O} - \mathcal{O}_1$ et si $\chi = (1_{\mathcal{O}_1}, 1_{\mathcal{O}_2})$ il est clair que $u = u_\chi$.

Montrons maintenant que les conclusions du Corollaire II.1 sont conservées. Cela se fait par un argument de continuité. En effet d'après [11] ou [22] , si u_χ désigne la solution de (1) correspondant à (f_1, f_2) (resp. u_χ, (g_1, g_2)) on a

$$\| u_\chi - v_\chi \|_{L^\infty(\mathcal{O})} \leqslant C \sup_{i=1,2} \| f_i - g_i \|_{L^N(\mathcal{O})}.$$

Il suffit donc de montrer le corollaire pour f_1, f_2 régulière : reprenons alors la démonstration du Théorème II.1, nous avons

$$\sum_{i=1}^m \chi_i^\epsilon \left\{ A_i(u_\epsilon - u) \right\} = \sum_{i=1}^m (\chi_i^\epsilon - \chi_i)(f_i - A_i u).$$

Soit alors $\mathcal{O}'$ un ouvert tel que $\bar{\mathcal{O}}' \subset \theta$, alors au vu de [11]

$$\| u_\epsilon - u \|_{L^\infty(\mathcal{O}')} \leqslant \| u_\epsilon - u \|_{L^\infty(\partial \mathcal{O}')} + C \| \chi_i^\epsilon - \chi_i \|_{L^N(\mathcal{O}')} ;$$

d'où nous déduisons

$$\overline{\lim_{\epsilon \to 0}} \| u_\epsilon - u \|_{L^\infty(\mathcal{O})} \leqslant \overline{\lim_{\epsilon \to 0}} \| u_\epsilon - u \|_{L^\infty(\mathcal{O} - \bar{\mathcal{O}}')}.$$

Mais par un argument de fonctions barrières standard, nous obtenons

$$|u_\epsilon(x)|, |u(x)| \leqslant C \quad d(x, \partial \mathcal{O}).$$

Donc
$$\overline{\lim_{\epsilon\to 0}}\ \| u_\epsilon - u \|_{L^\infty(\mathcal{O})} \leqslant C\, d(\partial\mathcal{O}', \partial\mathcal{O}).$$

Comme cette distance peut être rendue arbitrairement petite, le corollaire en découle.

Remarque II.4. La démonstration prouve que le contrôle
$$\chi = (1_{(A_1 u = f_1)}, 1_{(A_1 u < f_1)})$$
est un *contrôle optimal* pour le problème de contrôle géométrique.

Remarque II.5. Dans le cas où on suppose que les opérateurs A_i sont de Cordès (voir [3], [4]) le Corollaire II.2 (et la Remarque II.4) reste exact. Il suffit pour cela d'utiliser les résultats de [17].

Remarque II.6. Dans le cas de deux opérateurs (m = 2), on peut donner une variante du résultat d'équivalence. Soit B un borélien quelconque de $\mathcal{O}$ et soit $u_B = u_\chi$ où $\chi = (1_B, 1_{\mathcal{O}-B})$, alors sous les hypothèses du Corollaire II.2 nous avons

(7') $$u(x) = \inf_{B \text{ borélien}} u_B(x).$$

ii) Le cas d'une infinité d'opérateurs

Nous supposerons donnés un ensemble convexe fermé V de $\mathbb{R}^p$ et des fonctions $a_{k\ell}(x,v)$, $b_k(x,v)$, $c(x,v)$, $f(x,v)$ vérifiant

(4'') $\varphi(x,v)$ demeure dans un borné de $C^2(\overline{\mathcal{O}})$ quand v décrit V, pour $\varphi = a_{k\ell}, b_k, c, f$;

(4''') $\exists$ p fonction continue de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ telle que $p(0) = 0$ et
$|\varphi(x,v_1) - \varphi(x,v_2)| \leqslant p(|v_1 - v_2|)$, $\forall\, v_1, v_2 \in V$, pour $\varphi = a_{k\ell}, b_k, c, f$;

(5') $\exists\, \nu > 0\ \ \forall\,(x,v,\xi) \in \overline{\mathcal{O}} \times V \times \mathbb{R}^N, \sum_{k,\ell} a_{k\ell}(x,v)\xi_k \xi_\ell \geqslant \nu |\xi|^2$;

(6') $$\forall\,(x,v) \in \mathcal{O} \times V,\ c(x,v) \geqslant \lambda,$$

et nous noterons $\lambda = \inf_{x,v} c(x,v)$.

Alors, d'après [12], si $\lambda \geqslant \lambda_0$ assez grand, il existe une unique solution u(x) dans $W^{2,\infty}(\mathcal{O})$. Introduisons maintenant le problème de contrôle géométrique : χ sera maintenant une partition de l'unité continue $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_m)$ où m est quelconque.

Soit $(v_1,\dots,v_m)$ dans V, la variable de contrôle sera l'ensemble $(\chi, v_1,\dots,v_m)$ et le coût sera la solution u(x) de

$$\sum_{i=1}^{m} \chi_i \left\{ A(v_i)u - f(v_i) \right\} = 0 \quad \text{p.p.} \quad \text{dans } \mathcal{O},\ u = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}.$$

Nous noterons cette solution $u(\chi, v_1,\dots,v_m)$. Il est aisé de montrer de la même façon que le Théorème II.1, le :

CORÓLLAIRE II.3. *Sous les hypothèses (4"), (4'''), (5'), (6') et si* $\lambda \geqslant \lambda_0$, nous avons

$$u(x) = \inf_{m, \chi, v_i} u(\chi, v_1,\dots,v_m, x), \quad \forall x \in \bar{\mathcal{O}}.$$

De plus pour tout $\epsilon > 0$, *il existe* m, χ *de classe* C^∞ *et* $v_1,\dots,v_m$ *dans* V *tels que*

$$\| u(x) - u(\chi, v_1,\dots,v_m, x) \|_{L^\infty(\mathcal{O})} < \epsilon\ .$$

Remarque II.7. Sous les hypothèses du Corollaire II.3 mais supposer λ assez grand, d'après P.L. Lions et J.L. Menaldi [20] , nous savons qu'il existe une sous-solution maximum u(x) dans $W_0^{1,\infty}(\mathcal{O})$ du problème (1), c'est-à-dire qu'il existe $u \in W^{1,\infty}(\mathcal{O})$ tel que

(i) $\forall v \in V$, $A(v)u \leqslant f(v)$ dans $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$; et

(ii) si $w \in W^{1,\infty}(\mathcal{O})$ satisfait $A(v)w \leqslant f(v)$ dans $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$, $\forall v \in V$, alors $w(x) \leqslant u(x)$ sur $\bar{\mathcal{O}}$.

De plus, d'après [20] et [13] , il existe $u_\epsilon \in W^{2,\infty}(\mathcal{O})$ tel que $\| u_\epsilon - u \|_{L^\infty(\mathcal{O})} < \epsilon$, et u_ϵ vérifie

$$\left| \sup_{v \in V} \left\{ A(v)u_\epsilon - f(v) \right\} \right| \leqslant \epsilon \quad \text{p.p.} \quad \text{dans } \mathcal{O}\ ,\ u_\epsilon \,|_{\partial\mathcal{O}} = 0.$$

Ces résultats permettent d'étendre le Corollaire II.3 à la solution généralisée u(x) de (1). Cette généralisation (un peu technique) ne sera pas développée ici.

III - INTERPRETATION PROBABILISTE DU RESULTAT D'EQUIVALENCE

Nous nous plaçons, pour simplifier, dans le cadre du Théorème II.1.

Nous allons dans un premier temps définir un problème de contrôle stochastique naturellement associé à (1), puis interpréter le résultat d'équivalence.

i) Nous posons $V = \{\theta = (\theta_i)_{1 \leq i \leq m}, 0 \leq \theta_i \leq +1, \sum_i \theta_i = +1\}$,

$$a_{k\ell}(x,\theta) = \sum_{i=1}^{m} \theta_i \; a^i_{k\ell}(x)\,,\; b_k(x,\theta) = \sum_{i=1}^{m} \theta_i\, b^i_k(x)\,,$$

$$c(x,\theta) = \sum_{i=1}^{m} \theta_i c^i(x) \text{ et } f(x,\theta) = \sum_{i=1}^{m} \theta_i \; f_i(x)\,.$$

Enfin nous définissons $\sqrt{2}\;\sigma(x,\theta)$ comme étant la racine carrée symétrique définie positive de la matrice $a(x,\theta)$. Remarquons que d'après (5), $\sigma(x,\theta) \in C^2(\bar{\mathscr{O}})$. Soit maintenant (Ω, F, F_t, P, W) l'espace de Wiener canonique : la variable de contrôle sera un processus non-anticipatif $\theta(t,\omega)$ à valeurs dans V. A tout contrôle $\theta(\cdot)$ on associe la fonction coût suivante :

$$J(x,\theta(\cdot)) = E\left[\int_0^{\tau_x} f(y_x(t),\theta(t))\exp\left(-\int_0^t c(y_x(s))ds\right)ds\right]$$

où τ_x est le temps de sortie de $\bar{\mathscr{O}}$ de la solution $y_x(t)$ de

$$\text{(8)} \qquad \begin{cases} dy_x(t) = \sigma(y_x(t), \theta(t))dW_t - b(y_x(t),\theta(t))dt \\ y_x(0) = x\,. \end{cases}$$

Le problème de contrôle stochastique est alors de minimiser $J(x,\theta)$ i.e.

$$\text{(9)} \qquad u(x) = \inf_{\theta(\cdot)} J(x,\theta(\cdot)).$$

Nous définissons maintenant la classe Θ_M des contrôles markoviens réguliers. Nous dirons qu'un contrôle $\theta(\cdot)$ appartient à Θ_M s'il existe θ fonction Lipschitzienne de $\bar{\mathscr{O}}$ dans V telle que

$$\text{(10)} \qquad \theta(t,\omega) = \theta(y_x(t,\omega)),$$

où $y_x(t,\omega)$ est la solution de

$$(8')\quad \begin{cases} dy_x(t) = \sigma(y_x(t), \theta(y_x(t)))dW_t - b(y_x(t), \theta(y_x(t)))dt \\ y_x(0) = x\,. \end{cases}$$

Alors, nous avons le

COROLLAIRE II.4. *Sous les hypothèses du Théorème II.1, nous avons*

$$u(x) = \inf_{\theta(\cdot)} J(x, \theta(\cdot)) = \inf_{\theta(\cdot) \in \Theta_M} J(x, \theta(\cdot)), \quad \forall\, x \in \bar{\mathcal{O}}.$$

De plus, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction θ de classe C^∞ *sur $\mathcal{O}$ à valeurs dans* V *telle que le contrôle* $\theta_x(\cdot)$ de Θ_M *correspondant (par (10)) vérifie*

$$u(x) \leqslant J(x, \theta_x(\cdot)) \leqslant u(x) + \epsilon \;, \quad \forall\, x \in \bar{\mathcal{O}}.$$

Démonstration. La formule de Itô donne immédiatement pour tout contrôle $\theta(\cdot)$:

$$u(x) \leqslant J(x, \theta(\cdot)).$$

De plus, si $\epsilon > 0$ est fixé, soit χ une partition de classe C^∞ telle que

$$|u(x) - u_\chi(x)| \leqslant \epsilon \;, \quad \forall\, x \in \bar{\mathcal{O}}\,;$$

une telle partition existe d'après le Corollaire II.1.

Soit alors $\theta_\chi(\cdot)$ le contrôle markovien associé à $\chi(x)$ par (10), nous avons en fait

$$u_\chi(x) = J(x, \theta_\chi(\cdot)) \;, \quad \forall\, x \in \bar{\mathcal{O}} \;;$$

le Corollaire s'en déduit donc.

Remarque III.1. Dans les hypothèses du Théorème II.1 est incluse l'hypothèse λ assez grand. On peut montrer que cette hypothèse n'est nullement indispensable pour le Corollaire II.4. Néanmoins, nous ne considérons pas ici une telle généralisation, afin de ne pas alourdir les démonstrations.

Remarque III.2. Il existe de nombreux résultats donnant l'existence de contrôles markoviens à ϵ-près (voir [8], [21], [13], [20]). Le Corollaire II.4 a l'avantage de donner un contrôle markovien «régulier», ce qui assure par exemple que la solution de (8') est Fellerienne.

REFERENCES

[1] J.M. BONY. *«Principle du maximum dans les espace de Sobolev»*. Compte-rendus Paris, Série A, 265 (1967), p. 333-336.

[2] H. BREZIS and L.C. EVANS. *«A variational approach to the Bellman-Dirichlet equation for two elliptic operators»*. Arch. Rat. Mech. Anal., 71 (1979), p. 1-14.

[3] M. CHICCO. *«Principio di massimo per soluzioni di equazioni ellitiche del secundo ordine di tipo Cordes»*. Ann. Mat. Pura Appl. 100 (1974), p. 239-258.

[4] H.O. CORDES. *«Zero order a priori estimates for solutions of elliptic differential equations»*. Proc. Symp. Pure Maths. 4 (1961), p. 157-166.

[5] L.C. EVANS and A. FRIEDMAN. *«Optimal stochastic switching and the Dirichlet problem for the Bellman equation»*. Trans. Amer. Math. Soc., 253 (1979), p. 365-389.

[6] L.C. EVANS et P.L. LIONS. *«Deux résultats de régularité pour le problème de Bellman-Dirichlet»*. Compte-Rendus Paris, Série A, 286 (1978), p. 587-589.

[7] W.H. FLEMING and R. RISHEL. *«Deterministic and stochastic optimal control»*. Springer-Verlag (1975), New-York.

[8] N.V. KRYLOV. *«Control of a solution of a stochastic integral equation»*. Th. Proba. Appl. 17 (1972), p. 114-131.

[9] N.V. KRYLOV. *«On control of the solution of a stochastic integral equation with degeneration»*. Math. USSR Izv. vol. 6 (1972), no 1, p. 249-262.

[10] N.V. KRYLOV. *«On equation of minimax type in the theory of elliptic and parabolic equations in the plane»*. Math. USSR Sbornik vol. 10 (1970), no 1, p. 1-19.

[11] N.V. KRYLOV. *«An inequality in the theory of stochastic integrals»*. Th. proba. Appl. 17 (1972), p. 114-130.

[12] P.L. LIONS. *«Résolution des problèmes généraux de Bellman-Dirichlet»*. Compte-rendus Paris, série A, 287 (1978), p. 747-750 et article détaillé aux Acta Mathematica.

[13] P.L. LIONS. *«Contrôle de diffusions dans R^N»*. Compte-rendus Paris, Série A, 288 (1979), p. 339-342 et article détaillé à paraître.

[14] P.L. LIONS. *«Le problème de Cauchy pour les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman»*. Thèse d'Etat, Paris, Univer. P. et M. Curie, 1979.

[15] P.L. LIONS. *«Résolution des problèmes de Bellman-Dirichlet dégénérés».* A paraître.

[16] P.L. LIONS. *«Some problems related to the Bellman-Dirichlet equation for two operators».* A paraître dans Comm. P.D.E. Paru également sous forme de rapport MRC. University de Wisconsin-Madison (1978), # 1816.

[17] P.L. LIONS. *«Equations de Hamilton-Jacobi-Bellman et opérateurs de Cordès».* A paraître.

[18] P.L. LIONS. *«Résolution des problèmes de transmission et construction des processus de diffusion associés». A* paraître.

[19] P.L. LIONS. *«Problèmes elliptiques du 2ème ordre non sous forme divergence».*Proc. Roy. Soc. Edim., 84 A (1979), p. 263-271.

[20] P.L. LIONS et J.L. MENALDI. *«Problèmes de Bellman avec le contrôle dans les coefficients de plus haut degré».* A paraître. Voir également Compte-rendus Paris, série A, 287 (1978), p. 409-412.

[21] M. NISIO. *«Some remarks on stochastic optimal controls».* Japan J. Maths. 1 (1975) no 1, p. 159-183.

[22] C. PUCCI. *«Limatazioni per soluzioni di equazioni ellitiche».* Ann. Mat. Pura Appl. 74 (1966), p. 15-30.

(Manuscrit reçu le 5 octobre 1979)