ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

JEAN COQUET

Types de répartition complète des suites

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 2, nº 2 (1980), p. 137-155
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1980_5_2_2_137_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol II, 1980, P. 137 à 155

TYPES DE REPARTITION COMPLETE DES SUITES

Jean Coquet (1)

(1) Département de Mathématiques, Université de Valenciennes - 59326 Aulnoy les Valenciennes France.

Résumé : On étudie diverses notions de répartition complète modulo 1. Des exemples sont donnés. Les résultats sont appliqués aux ensembles normaux et à la répartition des suites dans les compacts.

Summary : Different notions of completely uniformly distributed sequences are studied. Examples are given and applied to normal sets and to the distribution of sequences in compact spaces.

I - INTRODUCTION

I.1 - RAPPELS

$u : \mathbb{N} \to X$ désigne une suite à valeurs dans un espace compact métrisable, X, μ une mesure de probabilité borélienne sur X et $\mathscr{C}(X)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans $\mathbb{C}$. u est dite μ-répartie dans X, si,

$$(1) \qquad \forall f \in \mathscr{C}(X), \ \frac{1}{N} \sum_{n<N} f(u(n)) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \int_X f d\mu .$$

De nombreux auteurs ont étudié des cas particuliers de cette notion faisant intervenir la famille de suites $(T^k u)_{k \in \mathbb{N}}$ où $T^k u$ est la suite : $n \mapsto u(n+k)$.

Ainsi, u est dite *complètement μ-répartie* dans X si la suite : $n \mapsto (u(n+k))_{k \in \mathbb{N}}$ est répartie dans $X^{\mathbb{N}}$ selon la mesure-produit $\mu^{\mathbb{N}}$, ou, ce qui revient au même ([8] , p. 27) si, $\forall\, s \in \mathbb{N}^*$, $n \mapsto (u(n+1),\ldots,u(n+s))$ est répartie dans X^s selon μ^s.
Et u est dite *uniformément μ-répartie* dans X([5] , p. 27) si,

$$\forall\, f \in \mathscr{C}(X), \frac{1}{N} \sum_{n<N} f(u(n+k)) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f d\mu,$$

uniformément par rapport à $k \in N$.

Ces deux types de répartition sont incompatibles si μ n'est pas concentrée en un point ([5] , p. 204).

I.2 - REPARTITIONS MULTIPLICATIVES

On s'intéresse ici à des types de μ-répartition liés à la famille de suites $(M_k u)_{k \in \mathbb{N}^*}$ où $M_k u(n) = u(kn)$, ou à des familles analogues.

Cette étude nous a été suggérée par le résultat suivant [4] dû à Halász et Vaughan d'après une idée de Daboussi, qui est une version multiplicative du théorème de Van der Corput :

THEOREME 1. f *désigne une suite de réels,* E *un ensemble de nombres premiers tel que* $\sum_{p \in E} \frac{1}{p} = +\infty$. *On suppose que la suite* $M_p f - M_q f$ *est équirépartie modulo 1 quels que soient* p *et* q *distincts, appartenant à* E. *Alors* $f + \lambda$ *est équirépartie modulo 1 quelle que soit la suite* λ *additive réelle.*

Définitions. Les notations sont celles du paragraphe I.1.

1) u est dite *complètement μ-répartie multiplicativement dans* X si, $\forall\, s \in \mathbb{N}^*$, la suite : $n \mapsto (u(n), u(2n),\ldots,u(sn))$ est répartie dans X^s selon la mesure μ^s.

2) u est dite *uniformément μ-répartie multiplicativement dans* X si,

$$\forall\, f \in \mathscr{C}(X), \frac{1}{N} \sum_{n<N} f(u(kn)) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f d\mu,$$

uniformément par rapport à $k \in \mathbb{N}^*$.

3) Lorsque X est un groupe muni de la mesure de Haar normalisée, on remplace le terme «μ-répartie» par «équirépartie».

Une suite $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est dite *complètement (resp. uniformément) équirépartie multiplicativement modulo 1* si la suite $\hat{f} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ des projections canoniques sur le tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est complètement (resp. uniformément) équirépartie multiplicativement.

De même, une suite $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est dite *complètement (resp. uniformément) équirépartie multiplicativement modulo l'entier* $q \geqslant 2$ si la suite de ses projections canoniques sur $\mathbb{Z}/q\,\mathbb{Z}$ est complètement (resp. uniformément) équirépartie multiplicativement.

Remarque. Si la mesure μ n'est pas concentrée en un point, il n'existe aucune suite $u : \mathbb{N} \to X$ qui soit à la fois complètement μ-répartie multiplicativement et uniformément μ-répartie multiplicativement dans X.

I.3 - PLAN DE L'ARTICLE

On peut démontrer que, pour presque tout réel $\theta > 1$, la suite $n \mapsto \theta^n$ est complètement équirépartie multiplicativement modulo 1. Le but du paragraphe II est de construire effectivement une suite complètement équirépartie multiplicativement modulo 1 de la forme $n \mapsto x\,u(n)$ où u est une suite d'entiers naturels et x un irrationnel arbitraire.

La construction réalisée est modifiée au paragraphe III afin de donner un exemple de suite $n \mapsto x\,v(n)$ où x est irrationnel et v à valeurs dans $\mathbb{N}$ possédant une propriété plus forte contenant à la fois la répartion complète et la répartition complète multiplicativement.

La suite v est utilisée au paragraphe IV pour démontrer une propriété des ensembles normaux et aussi pour donner une construction universelle associant à toute suite $\theta : \mathbb{N} \to X$, μ-répartie, une suite $\lambda : \mathbb{N} \to \theta(\mathbb{N})$, complètement μ-répartie multiplicativement dans X. En fait, λ possède également la propriété plus générale décrite au paragraphe III.

II - UNE SUITE COMPLETEMENT EQUIREPARTIE MULTIPLICATIVEMENT

II.1 - ENONCE DU RESULTAT

THEOREME 2. *Il existe une suite* $u : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *possèdant les propriétés suivantes :*

1) u *est complètement équirépartie multiplicativement modulo* q, *quel que soit* q *entier* $\geqslant 2$.

2) x u *est complètement équirépartie multiplicativement modulo 1, quel que soit* x *irrationnel.*

II.2 - CONSTRUCTION DE u

$(q_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ désigne une suite d'entiers naturels, deux à deux premiers entre eux et telle que, pour tout y irrationnel :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| y\, q_k \|^2 = +\infty,$$

où, pour tout t réel, $\| t \| = \operatorname{Min} \{ | t-n | ; n \in \mathbf{Z} \}$.

D'autre part, $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite strictement croissante d'entiers positifs vérifiant les conditions :

$$(C1) : \lim_{k \to \infty} \sigma_{k+1} \cdot \sigma_k^{-1} = +\infty \text{ et,}$$
$$(C2) : \lim_{k \to \infty} \sigma_k \cdot (q_1 \dots q_k)^{-1} = +\infty .$$

Soit $J_k = [\sigma_k, \sigma_{k+1}[$ et soit $\rho_k(n)$ le reste de la division euclidienne de n par q_k. On pose $u(n) = 0$ si $n < \sigma_1$ et

$$u(n) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant K} \rho_k(n) \text{ si } n \in J_K,\ K \in \mathbb{N}^*.$$

II.3 - PREMIERE ETAPE DE LA DEMONSTRATION

Pour tout t réel, on pose $e(t) = e^{2i\pi t}$. Démontrer le théorème 2. 1) revient, d'après le critère de Weyl, à prouver que la suite :

$$n \mapsto g(n) = e\left(\frac{1}{q} \sum_{j=1}^{s} d_j\, u(jn)\right)$$

a une valeur moyenne nulle lorsque le s-uple d'entiers relatifs $(d_1,\dots,d_s)$ n'est pas congru à $(0,\dots,0)$ modulo q.

Il est clair qu'on peut supposer $d_s \not\equiv 0$ modulo q, quitte à remplacer s par $\operatorname{Max} \{ j \in \mathbb{N}^* ; d_j \not\equiv 0 \text{ modulo } q \}$.

s étant fixé, on choisit $N \in J_{K+1}$ où K est assez grand pour que $\sigma_{K+2+t} > s\, \sigma_{K+1+t}$ quel que soit $t \in \mathbb{N}$, de sorte que, si $n \in J_{K+t}$, $bn \in J_{K+t} \cup J_{K+t+1}$ pour tout $b \in \{ 1,\dots,s \}$.

On partage J_{K+t} en sous-intervalles I^b_{K+t} définis par :

$$I^s_{K+t} = \{ n \in J_{K+t} ; sn \in J_{K+t} \} \quad \text{et,}$$

$$I^{b}_{K+t} = \{ n \in J_{K+t} \,;\, bn \in J_{K+t} \text{ et } (b+1)n \in J_{K+t+1} \} \text{ si } b < s.$$

Dans l'intervalle I^{s}_{K+t}, g a pour période $q_1 \ldots q_{K+t}$ et sa valeur moyenne sur une période est donnée d'après le théorème chinois, par :

$$\mu^{s}_{K+t} = \prod_{k=1}^{K+t} \Big(\frac{1}{q_k} \sum_{0 \leqslant m < q_k} e\big(\frac{1}{q} \sum_{j=1}^{s} d_j \,\rho_k\,(jm)\big)\Big).$$

Et, pour $b < s$, dans l'intervalle I_{K+t}, g a pour période $q_1 \ldots q_{K+t+1}$ et sa valeur moyenne sur une période est :

$$\mu^{b}_{K+t} = \mu^{s}_{K+t} \cdot \frac{1}{q_{K+t+1}} \cdot \sum_{0 \leqslant m < q_{K+t+1}} e\big(\frac{1}{q} \sum_{b < j \leqslant s} d_j \,\rho_{K+t+1}\,(jm)\big)$$

Soit $A(K+t,b)$ le cardinal de I^{b}_{K+t} et soit β l'entier défini par $N \in I^{\beta}_{K+1}$. Lorsque $\beta = s$,

$$\sum_{n<N} g(n) = \sum_{n<\sigma_K} g(n) + \sum_{b=1}^{s} \sum_{n \in I^{b}_{K}} g(n) + \sum_{n \in I^{s}_{K+1},\, n<N} g(n).$$

$$= 0(\sigma_K) + \sum_{b=1}^{s} A(K,b)\, \mu^{b}_{K} + 0(q_1 \ldots q_{K+1}) + (N - \sigma_{K+1})\, \mu^{s}_{K+1}$$

$$= o(N) + \sum_{b=1}^{s} A(K,b)\, \mu^{b}_{K} + (N - \sigma_{K+1})\, \mu^{s}_{K+1}$$

Lorsque $\beta < s$

$$\sum_{n<N} g(n) = \sum_{n<\sigma_K} g(n) + \sum_{b=1}^{s} \sum_{n \in I^{b}_{K}} g(n) + \sum_{\beta < b \leqslant s} \sum_{n \in I^{b}_{K+1}} g(n)$$

$$+ \sum_{n \in I^{\beta}_{K+1},\, n<N} g(n).$$

$$= 0(\sigma_K) + 0(q_1 \ldots q_{K+1}) + 0(q_1 \ldots q_{K+2}) + \sum_{b=1}^{s} A(K,b)\, \mu^{b}_{K}$$

$$+ \sum_{\beta < b \leqslant s} A(K+1,b)\, \mu^{b}_{K+1} + \Big(N - \Big[\frac{\sigma_{K+2}}{\beta+1}\Big]\Big)\, \mu^{\beta}_{K+1}$$

Puisque

$$N > \frac{\sigma_{K+2}}{\beta+1},\ 0\,(\sigma_K) + 0\,(q_1 \ldots q_{K+1}) + 0\,(q_1 \ldots q_{K+2})$$

$$= o\,(\sigma_{K+2}) = o\,(N).$$

Donc, $\sum_{n<N} g(n) = o(N) + \sum_{b=1}^{s} A(K,b)\mu_K^b + \sum_{\beta<b\leqslant s} A(K+1,b)\mu_{K+1}^b + (N - \frac{\sigma_{K+2}}{\beta+1})\mu_{K+1}^{\beta}$

Puisque $|\mu_{K+t}^b| \leqslant |\mu_{K+t}^s|$ pour tout $t \in \mathbf{N}$ et tout $b \leqslant s$, il suffit de prouver que

$$\lim_{K\to\infty} \mu_K^s = 0.$$

Une remarque analogue vaut pour la deuxième partie du théorème 2 en posant cette fois $g(n) = e(x \sum_{j=1}^{s} d_j u(jn))$ et en supposant que x est irrationnel et que $d_s \in \mathbf{Z}^*$.

II.4 - FIN DE LA PREUVE DU THEOREME 2. 1)

II.4.1 - Cas où s=1

Puisque q ne divise pas d_1, $\left|\sum_{m<q_k} e(q^{-1} d_1 \rho_k(m))\right| \leqslant \frac{2}{|e(q^{-1}d_1)-1|} < \frac{q_k}{2}$ pour k assez grand. Donc $\mu_K^1 \underset{K\to\infty}{\to} 0$.

II.4.2 - Cas où s ⩾2

$$\left|\sum_{m<q_k} e(q^{-1} \sum_{j=1}^{s} d_j\rho_k(jm))\right| \leqslant q_k - [(s-1)^{-1} q_k]$$

$$+ \left|\sum_{m<[s^{-1}q_k]} e(\frac{m}{q}\sum_{j=1}^{s} jd_j) + \sum_{[s^{-1}q_k]\leqslant m<[(s-1)^{-1}q_k]} e(-\frac{d_sq_k}{q})\, e(\frac{m}{q}\sum_{j=1}^{s} jd_j)\right|$$

Lorsque q ne divise pas $\sum_{j=1}^{s} jd_j$,

$$\left|\sum_{m<q_k} e(q^{-1}\sum_{j=1}^{s} d_j\rho_k(jm))\right| \leqslant q_k - [(s-1)^{-1} q_k] + \frac{4}{\left|e(\frac{1}{q}) - 1\right|}$$

$$(1) \qquad \leqslant q_k\,(1 - \frac{1}{2s}) \text{ pour k assez grand.}$$

Dans le cas contraire,

$$\left|\sum_{m<q_k} e(q^{-1}\sum_{j=1}^{s} d_j\rho_k(jm))\right| \leqslant q_k - [(s-1)^{-1} q_k]$$

$$+ \left|[s^{-1} q_k] + e(-\frac{d_sq_k}{q})\,([(s-1)^{-1} q_k] - [s^{-1}q_k])\right|$$

Pour k assez grand, $(q_k,q) = 1$ donc q ne divise pas $d_s q_k$. Il en résulte qu'il existe une constante $C > 0$, dépendant de s et q, telle que :

$$(2) \qquad \left| \sum_{m < q_k} e\left(q^{-1} \sum_{j=1}^{s} d_j \rho_k(jm)\right) \right| \leqslant q_k\,(1-C), \text{ pour k assez grand.}$$

Les majorations (1) et (2) donnent : $\lim\limits_{K \to \infty} \mu_K^s = 0.$

II.5 - FIN DE LA PREUVE DU THEOREME 2. 2)

Lorsque $\sum\limits_{j=1}^{s} jd_j \neq 0$, on a une majoration analogue à (1) de $\left| \sum\limits_{m < q_k} e\left(x \sum\limits_{j=1}^{s} d_j \rho_k(jm)\right) \right|$, pour x irrationnel et k assez grand.

Dans le cas contraire,

$$\left| \sum_{m < q_k} e\left(x \sum_{j=1}^{s} d_j \rho_k(jm)\right) \right| \leqslant q_k - [(s-1)^{-1} q_k]$$

$$+ \; \left| [s^{-1} q_k] + e(-x\, d_s\, q_k)\,\left([(s-1)^{-1} q_k] - [s^{-1} q_k]\right) \right|$$

$$\leqslant q_k\,(1-C' \,\| x\, d_s\, q_k \|^{2}) \text{ pour k assez grand,}$$

C' étant une constante > 0, dépendant de s. Dans ce cas, la divergence de $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \| x\, d_s\, q_k \|^2$ permet de conclure.

II.6 - REMARQUE

Si $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{q_k} = +\infty$, la suite x u est également complètement équirépartie modulo 1 pour tout x irrationnel.

III - REPARTITION POLYNOMIALEMENT COMPLETE

III.1 - DEFINITIONS

On désigne par $\mathbb{N}^1[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients entiers naturels, de degré $\geqslant 1$.

1) Une suite u à valeurs dans un compact métrisable X muni d'une mesure de probabilité μ borélienne, est dite *complètement μ-répartie polynomialement* si, quel que soit $s \in \mathbb{N}^*$ et quels que soient les polynômes distincts $P_1,\dots,P_s$ appartenant à $\mathbb{N}^1[x]$, la suite de terme général $(u(P_1(n)),\dots,u(P_s(n)))$ est répartie dans X^s selon la mesure μ^s.

2) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est *complètement équirépartie polynomialement modulo 1* si la suite $\hat{f}$ des projections canoniques sur le tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est complètement équirépartie polynomialement dans le tore.

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est *complètement équirépartie polynomialement modulo* q, entier $\geqslant 2$, si la suite des projections canoniques sur $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ est complètement équirépartie polynomialement dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

III.2 - UN EXEMPLE

P et Q étant des éléments de $\mathbb{N}^1[x]$, on note $P \prec Q$ si $P(n) < Q(n)$ pour n assez grand.

THEOREME 3. *Il existe une suite* $v : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *possédant les propriétés suivantes :*

1°) v *est complètement équirépartie polynomialement modulo* q, *quel que soit l'entier* $q \geqslant 2$.

2°) xv *est complètement équirépartie polynomialement modulo 1, quel que soit* x *irrationnel.*

III.3 - CONSTRUCTION DE v

$(q_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ désigne une suite d'entiers naturels deux à deux premiers entre eux telle que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k} = +\infty$.

$(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ désigne une suite strictement croissante d'entiers positifs vérifiant les conditions :

$$\text{(C'1)} \quad \lim_{k \to \infty} \sigma_{k+1} \cdot \sigma_k^{-k} = +\infty$$

$$\text{(C 2)} \quad \lim_{k \to \infty} \sigma_k \cdot (q_1 \dots q_k)^{-1} = +\infty .$$

On pose encore $J_k = [\sigma_k, \sigma_{k+1}[$ et $\rho_k(n) = n - q_k \left[\frac{n}{q_k}\right]$.

Enfin, $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ désigne une application, dont l'existence est établie au paragraphe suivant, et possédant la propriété suivante :

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} \text{quel que soit } s \in \mathbb{N}^*, \text{ quels que soient les entiers relatifs } d_1,\dots,d_s \text{ et les polynômes} \\ P_1 \prec P_2 \prec \dots \prec P_s \text{ appartenant à } \mathbb{N}^1[x], \text{ il existe } u_o \in \mathbb{N} \text{ tel que :} \\ \qquad \sum_{j=1}^{s} d_j h\,(P_j(u_o)) = d_s + \sum_{j=1}^{s} d_j h\,(P_j(u_o-1)). \end{array} \right.$$

On pose $v(n) = 0$ si $n < \sigma_1$ et,

$$v(n) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant K} h\,(\rho_k(n)) \text{ si } n \in J_K\ ,\ K \in \mathbb{N}^*.$$

III.4 - EXISTENCE DE h

III.4.1 - Un lemme

LEMME. *Il existe une suite* $(z_r)_{r \in \mathbb{N}^*}$ *d'entiers naturels telle que :*

$$(C'1), \qquad z_{r+1} \cdot (z_r)^{-r} \underset{r \to \infty}{\to} \infty$$

et

$$(\mathrm{Int})\ \forall\, P \in \mathbb{N}^1\,[x],\ \{ z_r\ ; r \in \mathbb{N}^* \} \cap \{ P(n)\ ; n \in \mathbb{N} \} \textit{ est infini}.$$

Démonstration. On numérote les éléments de $\mathbb{N}^1[x]$ sous la forme Q_ℓ , $\ell \in \mathbb{N}^*$. Soit $t(r)$ l'entier défini par :

$$\frac{(t(r)-1)t(r)}{2} < r \leqslant \frac{t(r)(1+t(r))}{2}$$

et soit $\ell(r) = r - \dfrac{t(r)\,(t(r)-1)}{2}$.

On pose $z_r = \mathrm{Inf}\, \{ Q_{\ell(r)}(m)\ ; m \in \mathbb{N} \text{ et } Q_{\ell(r)}(m) \geqslant r(z_{r-1})^{r-1} \}$ par exemple.

III.4.2 - DEFINITION DE h

On pose $h(n) = 0$ si $n < z_1$ et $h(n) = r$ si $n \in [z_r, z_{r+1}[$. Il existe M tel que, pour tout $n \geqslant M$ et tout couple d'entiers (i,j) :

$$1 \leqslant i < j \leqslant s \Rightarrow P_i(n) < P_j(n)$$

On choisit $u_o > M$ de manière que $P_s(u_o)$ soit un terme z_t et que $P_1(u_o-1) \geqslant z_{t-1}$ ce qui est possible d'après la condition de croissance rapide de (z_r).
Alors

$$\sum_{j=1}^{s} d_j h(P_j(u_o)) = (t-1)(d_1+\ldots+d_{s-1}) + td_s \text{ et,}$$

$$\sum_{j=1}^{s} d_j h(P_j(u_o-1)) = (t-1)(d_1+\ldots+d_s).$$

III.5 - REDUCTION DU PROBLEME

On démontre par exemple la deuxième partie du théorème 3. Soit x irrationnel et soit $(d_1,\ldots,d_s) \in \mathbb{Z}^s - \{(0,\ldots,0)\}$. On peut supposer $d_s \neq 0$. Il s'agit de vérifier que la suite :

$$n \mapsto g(n) = e(x \sum_{j=1}^{s} d_j v(P_j(n))) \text{ a une moyenne nulle.}$$

On suppose K assez grand pour que σ_K soit au moins égal à l'entier M défini au paragraphe précédent, et que, pour tout $t \geqslant K$,

$$n \in J_t \Rightarrow \{P_1(n),\ldots,P_s(n)\} \subset J_t \cup J_{t+1},$$

ce qui est possible d'après (C'1).

Pour tout $t \geqslant K$ on partage J_t comme au II.3 en sous-intervalles :

$$I_t^s = \{n \in J_t \,;\, P_s(n) \in J_t\} \text{ et, pour } b < s,$$

$$I_t^b = \{n \in J_t \,;\, P_b(n) \in J_t \quad \text{et, } P_{b+1}(n) \in J_{t+1}\}.$$

Dans I_t^s, g a pour période $q_1 \ldots q_t$; soit μ_t^s sa valeur moyenne sur une période. Et dans I_t^b, $b<s$, g a pour période $q_1 \ldots q_{t+1}$ avec une moyenne μ_t^b sur une période.

Comme dans II.3, on se ramène à prouver que : $\lim\limits_{t \to \infty} \mu_t^s = 0$.

III.6 - FIN DE LA DEMONSTRATION

On a cette fois :

$$(3) \qquad \mu_t^s = \prod_{1 \leqslant k \leqslant t} \left(\frac{1}{q_k} \sum_{m < q_k} e(x \sum_{j=1}^{s} d_j h(\rho_k(P_j(m))))\right.$$

Soit $u_o > M$, l'entier défini au paragraphe III.3 et soit k assez grand pour que :

$$P_1(u_o) < \dots\dots < P_s(u_o) < q_k.$$

$$\Big| \sum_{m<q_k} e(x \sum_{j=1}^{s} d_j h(\rho_k(P_j(m)))) \Big| \leqslant q_k - (u_o+1) + \Big| \sum_{m \leqslant u_o} e(x \sum_{j=1}^{s} d_j h(P_j(m))) \Big|$$

$$\leqslant q_k - 2 + \Big| e(x \sum_{j=1}^{s} d_j h(P_j(u_o-1))) + e(x \sum_{j=1}^{s} d_j h(P_j(u_o))) \Big|$$

$$= q_k - 2 + |1 + e(x\, d_s)| \text{ d'après la propriété } (\mathscr{P}).$$

Donc, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour k assez grand :

$$\frac{1}{q_k} \Big| \sum_{m<q_k} e(x \sum_{j=1}^{s} d_j h(\rho_k(P_j(m)))) \Big| \leqslant 1 - \frac{C}{q_k} \tag{4}$$

D'après la divergence de $\sum \frac{1}{q_k}$, (3) et (4) donnent $\lim\limits_{t\to\infty} \mu_t^s = 0$.
La première partie du théorème 3 se démontre de la même manière en remplaçant x par $\frac{1}{q}$ et en supposant $d_s \not\equiv 0 \bmod q$.

IV - APPLICATIONS DU THEOREME 3

IV.1 - ENSEMBLES NORMAUX

IV.1.1 - Enoncé du résultat

Un sous-ensemble B de $\mathbb{R}^*$ est dit *normal* [7] s'il existe une suite $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout x réel :

$$x \in B \Leftrightarrow x\lambda \text{ équirépartie mod. 1.}$$

Ainsi, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est normal. Le théorème 3 permet de préciser que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est complètement normal polynomialement dans le sens suivant :

Définition. $B \subset \mathbb{R}^*$ est dit *complètement normal polynomialement* s'il existe une suite $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout x réel,

$x \in B \Rightarrow x\,\theta$ est complètement équirépartie polynomialement modulo 1.
$x \notin B \Rightarrow x\,\theta$ n'est pas équirépartie modulo 1.

On se propose de prouver le théorème suivant qui généralise le théorème de [2] :

THEOREME 4. *Tout sous-ensemble normal de* $\mathbb{R}^*$ *est complètement normal polynomialement.*

IV.1.2 - Une construction universelle

$\mathscr{B}_q$ désigne l'ensemble formé par les polynômes non constants de degré $\leqslant q$ et dont les coefficients sont des entiers naturels $\leqslant q$.

$\mathscr{B}_q$ étant fini et v étant complètement équirépartie polynomialement modulo $q(q+1)$, il existe une suite d'entiers positifs M_q satisfaisant aux conditions suivantes :

(C'1)
$$\lim_{q \to \infty} M_{q+1} \cdot M_q^{-q} = +\infty \quad \text{et,}$$

(Cong.) Pour tout $N \geqslant M_q$, quels que soient les polynômes $P_1 \prec P_2 \dots \prec P_q$ appartenant à $\mathscr{B}_q$, et quel que soit le q-uple $(m_1,\dots,m_q)$ d'éléments de $\{0,1,\dots,q(q+1)-1\}$,

$$\left| \frac{1}{N} \operatorname{Card} \left\{ n < N \,;\, \forall j \leqslant q,\ v(P_j(n)) \equiv m_j \bmod q(q+1) \right\} - \frac{1}{q^q(q+1)^q} \right| \leqslant \frac{1}{2^q\, q^q (q+1)^q}\,.$$

Soit $\mathscr{I}_q = [M_q, M_{q+1}[$. On pose $v^*(n) = 0$ si $n < M_1$ et $v^*(n) = v(n) - q \left[\frac{v(n)}{q} \right]$ si $n \in \mathscr{I}_q$.
Soit d'autre part B un ensemble normal et soit $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une suite telle que :

$$x \in B \Leftrightarrow x\lambda \text{ équirépartie modulo 1.}$$

On va montrer que la suite $\theta = \lambda \circ v^*$ possède la propriété :

$$\begin{cases} x \in B \Rightarrow x\,\theta \text{ complètement équirépartie polynomialement modulo 1.} \\ x \notin B \Rightarrow x\,\theta \text{ non équirépartie modulo 1.} \end{cases}$$

IV.1.3 - Preuve du théorème 4 : cas où $x \in B$

Soit $(d_1,\dots,d_s) \in \mathbb{Z}^s$ tel que $d_s \neq 0$ et soient $P_1 \prec P_2 \prec \dots \prec P_s$ des éléments de $\mathbb{N}^1[x]$. Il s'agit de vérifier que :

$$n \mapsto h(n) = e(x \sum_{j=1}^{s} d_j \lambda(v^*(P_j(n))))$$ a une valeur moyenne nulle.

Dans la suite T est un entier assez grand vérifiant :

(5) $T \geqslant \mathrm{Max} \; \{ s, \deg P_1, \ldots, \deg P_s, H(P_1), \ldots, H(P_s) \}$, où $H(P_j)$ est la hauteur de P_j, c'est à dire son plus grand coefficient, et

(6) $$n \geqslant M_T \Rightarrow P_1(m) < \ldots\ldots < P_s(n), \text{ et}$$

(7) $$\forall\, t \geqslant T, n \in \mathcal{J}_t \Rightarrow P_s(n) \in \mathcal{J}_t \cup \mathcal{J}_{t+1},$$

ce qui est possible puisque (M_q) satisfait à (C'1).

Pour $t \geqslant T$, on partage $\mathcal{J}_t$ de la même manière que J_t. Ainsi,

$$\mathcal{J}_t^s = \{ n \in \mathcal{J}_t ; P_s(n) \in \mathcal{J}_t \} \text{ et si } b < s,$$

$$\mathcal{J}_t^b = \{ n \in \mathcal{J}_t ; P_b(n) \in \mathcal{J}_t \text{ et } P_{b+1}(n) \in \mathcal{J}_{t+1} \}$$

Soit $\epsilon > 0$. Puisque $x\lambda$ est équirépartie modulo1, il existe $K_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

(8) $$\forall\, K \geqslant K_0, \; \left| \frac{1}{K} \sum_{m<K} e(x\, d_s\, \lambda(m)) \right| \leqslant \epsilon .$$

Soit maintenant $N \in \mathcal{J}_{K+1}$ avec $K \geqslant \mathrm{Max}(T, K_0)$. Soit $\beta \leqslant s$ défini par $N \in \mathcal{J}_{K+1}^{\beta}$.

(9) $$\sum_{n<N} h(n) = O(M_K) + \sum_{b=1}^{s} \sum_{n \in \mathcal{J}_K^b} h(n) + \sum_{\beta < b \leqslant s} \sum_{n \in \mathcal{J}_{K+1}^b} h(n) + \sum_{n \in \mathcal{J}_{K+1}^{\beta}, n<N} h(n)$$

D'autre part, si $(m_1, \ldots, m_s) \in \{ 0, \ldots, K-1 \}^s$, on pose :

$$A(K,s,(m_1,\ldots,m_s)) = \mathrm{Card} \; \{ n \in \mathcal{J}_K^s, \forall\, j \leqslant s, v^*(P_j(n)) = m_j \}$$

$$= \mathrm{Card} \; \{ n \in \mathcal{J}_K^s, \forall\, j \leqslant s, v(P_j(n)) \equiv m_j \bmod K \} .$$

On pose aussi $M_{k,b} = \mathrm{Max}\, \mathcal{J}_K^b$, pour tout $b \leqslant s$.
D'après la condition (Cong.) :

$$\left| A(K,s,(m_1,\ldots,m_s)) - \frac{\mathrm{Card}\, \mathcal{J}_K^s}{K^s} \right| \leqslant \frac{2 M_{K,s}}{2^K K^s}$$

Ceci entraîne, en faisant varier $(m_1,\dots,m_s)$ dans $\{0,\dots,K-1\}^s$:

$$\Big|\sum_{n\in\mathcal{I}_K^s} h(n) - \operatorname{Card}\mathcal{I}_K^s \cdot \prod_{j=1}^{s}\Big(\frac{1}{K}\sum_{m_j<K} e(xd_j\,\lambda(m_j))\Big)\Big| \leqslant \frac{M_{K,s}}{2^{K-1}}$$

puis, d'après (8),

$$(10)\qquad \Big|\sum_{n\in\mathcal{I}_K^s} h(n)\Big| \leqslant \epsilon\,.\operatorname{Card}\mathcal{I}_K + \frac{M_{K,s}}{2^{K-1}}$$

De même, pour $b<s$ et $(m_1,\dots,m_s)\in\{0,\dots,K-1\}^b\times\{0,\dots,K\}^{s-b}$, on pose

$$A(K,b,(m_1,\dots,m_s)) = \operatorname{Card}\{n\in\mathcal{I}_K^b\,;\forall j\leqslant s,\ v^*(P_j(n))=m_j\}$$

$$=\operatorname{Card}\{n\in\mathcal{I}_K^b\,;\forall j\leqslant b,\ v(P_j(n))\equiv m_j \bmod K, \text{ et } \forall j>b,\ v(P_j(n))\equiv m_j \bmod K+1\}$$

On obtient, comme précédemment

$$(11)\qquad \Big|\sum_{n\in\mathcal{I}_K^b} h(n)\Big| \leqslant \epsilon\,.\operatorname{Card}\mathcal{I}_K^b + \frac{M_{K,b}}{2^{K-1}}$$

(10) et (11) donnent :

$$(12)\qquad \begin{aligned}\Big|\sum_{b=1}^{s}\sum_{n\in\mathcal{I}_K^b} h(n)\Big| &\leqslant \epsilon\,.\operatorname{Card}\mathcal{I}_K + \frac{1}{2^{K-1}}(M_{K,1}+\dots+M_{K,s})\\ &< M_{K+1}\Big(\epsilon+\frac{s}{2^{K-1}}\Big)\end{aligned}$$

De même, à l'aide de la condition (Cong.) :

$$(13)\qquad \Big|\sum_{n\in\mathcal{I}_{K+1}^{\beta},\, n<N} h(n)\Big| \leqslant (N+M_{K+1,\beta+1})\frac{1}{2^K} + \epsilon(N-M_{K+1,\beta+1})$$

puisque $\operatorname{Card}\{n\in\mathcal{I}_{K+1}^{\beta},\ n<N\} = N-M_{K+1,\beta+1}$.

On a également :

$$(14)\qquad \Big|\sum_{\beta<b\leqslant s}\ \sum_{n\in\mathcal{I}_{K+1}^b} h(n)\Big| \leqslant \epsilon(M_{K+1,\beta+1}-M_{K+1}) + \frac{1}{2^K}(M_{K+1,\beta+1}+\dots+M_{K+1,s})$$

(13) et (14) entraînent :

$$\left| \sum_{\beta < b \leqslant s} \; \sum_{n \in \mathcal{I}^b_{K+1}} h(n) + \sum_{n \in \mathcal{I}^{\beta}_{K+1},\, n<N} h(n) \right|$$

$$\leqslant \epsilon(N - M_{K+1}) + \frac{1}{2^K}(N + s\, M_{K+1,\beta+1})$$

$$\leqslant \epsilon(N - M_{K+1}) + \frac{(s+1)N}{2^K} \tag{15}$$

Finalement, (9), (12) et (15) donnent :

$$\left| \sum_{n<N} h(n) \right| \leqslant M_K + \epsilon N + N \frac{(3s+1)}{2^K}$$

$$\leqslant 2\epsilon N,$$

pour K (donc N) assez grand.

IV.1.4 - Cas où $x \notin B$

Pour un calcul plus simple que le précédent, on voit que :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{N} \left| \sum_{n<N} e(xd\lambda(v^*(n))) \right| \geqslant \overline{\lim_{K\to\infty}} \frac{1}{K} \left| \sum_{m<K} e(xd\lambda(m)) \right|$$

et le second membre de cette inégalité est $>$ 0 pour au moins une valeur de $d \in \mathbb{N}^*$. Donc $x(\lambda \circ v^*)$ n'est pas équirépartie.

IV.2 - REPARTITION DANS UN COMPACT

On se contente d'énoncer le résultat dont la démonstration est calquée sur celle du théorème 4.

THEOREME 5. *Soit* $\lambda : \mathbb{N} \to X$, *une suite répartie dans le compact métrisable* X *selon la mesure de probabilité* μ. *La suite* $\lambda \circ v^*$ *est complètement* μ*-répartie polynomialement dans* X.

(Bien entendu, v^* désigne la suite construite au paragraphe IV.1.2).

IV.3 - SUITES A CROISSANCE LENTE ET SUITES NON DECROISSANTES

IV.3.1 - Suites à croissance lente

Le résultat qui suit généralise le théorème 1 de [3]:

THEOREME 6. *Soit* $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ *telle que* $\phi(n) \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$ *. Il existe une suite* v *d'entiers naturels telle que :*

1) $v(n) = 0(\phi(n))$ lorsque $n \to +\infty$,

2) v soit complètement équirépartie polynomialement modulo q, pour tout q entier $\geqslant 2$.

3) xv soit complètement équirépartie polynomialement modulo 1 pour tout x irrationnel.

Démonstration. Soit v la suite construite au III.3. Si

$$n \in J_K, \; v(n) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant K} h(\rho_k(n)) \leqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant K} \rho_k(n)$$

$$< (q_1 + \ldots + q_K) < Kq_K \text{ (si } (q_k) \text{ est croissante).}$$

On peut se ramener au cas où ϕ est non décroissante. Il suffit alors que (σ_k) vérifie la condition :

$$Kq_K = 0(\phi(\sigma_K)) \text{ lorsque } K \to +\infty.$$

IV.3.2 - Suites non décroissantes

A l'aide du théorème de Van der Corput, on démontre en posant $V(n) = \sum_{m=0}^{n} v(m)$ où v est la suite précédente, le résultat suivant qui améliore le théorème 3 de [3].

THEOREME 7. *Soit* $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ *telle que* $\phi(n) \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$ *. Il existe une suite* V *non décroissante d'entiers naturels vérifiant* $V(n) = 0(n\phi(n))$ *lorsque* $n \to +\infty$ *, et telle que* xV *soit complètement équirépartie polynomialement modulo 1 pour tout* x *irrationnel.*

Notons qu'on ne peut remplacer $0\,(n\phi(n))$ par $0(n)$ d'après le théorème 3 de [3].

V - REMARQUES ET PROBLEMES

V.1 - UN RESULTAT METRIQUE

P. LIARDET a démontré [6] que presque toute suite à valeurs dans le tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ était complètement équirépartie polynomialement.

V.2 - SUITES POLYNOMIALES

Si le polynôme $P-P(0)$ possède au moins un coefficient irrationnel, la suite $n \mapsto P(n)$ est uniformément équirépartie modulo 1. Cependant, une telle suite n'est ni uniformément équirépartie multiplicativement modulo 1 ni complètement équirépartie multiplicativement modulo 1.

V.3 - LES SUITES (n^c)

Il n'existe aucun réel $c > 0$ tel que la suite $n \mapsto n^c$ soit complètement équirépartie modulo 1. Par contre, d'après le critère de Weyl, cette suite est complètement équirépartie multiplicativement modulo 1 lorsque c n'appartient pas à l'ensemble dénombrable :

$$D = \left\{ c \in \mathbb{R} \ ; (1,2^c,\ldots,j^c,\ldots) \text{ soit une famille liée sur } \mathbb{Q} \right\}.$$

Que peut-on dire de D ?

V.4 - UN PROBLEME D'ANALYSE HARMONIQUE

Le théorème de Halász et Vaughan cité au I.2 suggère de considérer la famille des suites $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ de module $\leqslant 1$ telles que, pour tout couple $(s,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$:

$$\delta_g(s,t) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} g(sn)\, \overline{g(tn)} \text{ existe.}$$

δ_g est la corrélation multiplicative de g. Est-il vrai qu'il existe une mesure ν_g bornée, positive, borélienne, sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, nécessairement symétrique par rapport à la diagonale de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, telle que :

$$\forall\, (s,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ \delta_g(s,t) = \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} s^{ix}\, t^{-iy}\, d\nu_g(x,y) \ ?$$

Si c'est le cas, peut-on traduire en termes de décomposition de ν_g (diffuse ?) le fait que $|\delta_g|$ ait une moyenne nulle et obtenir ensuite une version harmonique du théorème de Halasz et Vaughan, analogue au théorème de Bertrandias [1] qui dit que si la mesure spectrale (ordinaire) de g est diffuse, g est pseudo-aléatoire et a donc une valeur moyenne nulle ?

REFERENCES

[1] J.P. BERTRANDIAS. *«Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre p»*. Bull. Soc. Math. France, mémoire 5, 1-66 (1966).

[2] J. COQUET. *«Ensembles normaux et équirépartition complète»*. Acta Arithmetica 39, à paraître.

[3] J. COQUET. *«Sur l'équirépartition des suites à croissance lente et des suites non décroissantes»*. Bull. Soc. Math. France, n° 108-2 (1980), 251-258.

[4] G. HALASZ, R.C. VAUGHAN. Communication privée.

[5] L. KUIPERS, H. NIEDERREITER. *«Uniform distribution of sequences»*. Wiley-Interscience.

[6] P. LIARDET. Communication privée.

[7] G. RAUZY. *«Caractérisation des ensembles normaux»*. Bull. Soc. Math. France 98, 401-414 (1970).

[8] G. RAUZY. *«Propriétés statistiques de suites arithmétiques»*. P.U.F., Collection Sup., le Mathématicien 15 (1976).

(Manuscrit reçu le 29 avril 1980)