

GHIAS HACHEM

**Sur les fréquences de diffusion (scattering) d'un corps élastique couplé avec l'air**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5<sup>e</sup> série*, tome 2, n° 3-4 (1980), p. 193-218

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1980\\_5\\_2\\_3-4\\_193\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1980_5_2_3-4_193_0)

© Université Paul Sabatier, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SUR LES FREQUENCES DE DIFFUSION (SCATTERING) D'UN CORPS ELASTIQUE COUPLE AVEC L'AIR

Ghias Hachem <sup>(1)</sup>

*(1) Département de Mathématiques, Université Paris-Nord - 93430 Villetaneuse - France.*

**Résumé :** Dans ce travail on étudie du point de vue spectral le problème d'un corps élastique plongé dans l'air, le couplage dépend d'un petit paramètre  $\epsilon$ . On associe à ce problème un opérateur  $B_\epsilon$  pour lequel on construit un prolongement méromorphe de sa résolvante. Les résonances sont les pôles de ce prolongement. On étudie le comportement des résonances lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , et on montre que toute résonance du problème extérieur est limite de résonances de  $B_\epsilon$ . Dans une dernière partie on considère  $B_\epsilon$  comme opérateur perturbé d'un opérateur  $A$ . On établit l'existence et complétude des opérateurs d'ondes.

**Summary :** In this article we study from the standpoint of spectral theory the interaction of an elastic body with air, the interaction depending on a small parameter  $\epsilon$ . We associate with this problem an operator  $B_\epsilon$ , and construct a meromorphic extension of its resolvent. Resonances (scattering frequencies) are the poles of this extension.

We then study the behaviour of the resonances when  $\epsilon \rightarrow 0$ , and we show, that every scattering frequency of the exterior problem is a limit of resonances of  $B_\epsilon$ . In a second part we look to  $B_\epsilon$  as perturbed from an operator  $A$ , we establish the existence and completeness of wave operators.

### INTRODUCTION

Dans ce travail on étudie du point de vue spectral le problème d'un corps élastique plongé dans l'air. On fait intervenir une constante de couplage  $\epsilon$ .

On associe à ce problème un opérateur  $B_\epsilon$ , pour lequel on construit un prolongement méromorphe de sa résolvante, au feuillet «non physique». Les résonances comme définies dans l'article de E. Sanchez-Palencia apparaissent alors comme les pôles de ce prolongement.

On étudie le comportement des résonances lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , et les résultats obtenus complètent ceux de l'article précédent.

Dans une dernière partie on traite par les méthodes habituelles de la théorie de la diffusion B comme un opérateur perturbé, obtenu à partir d'un opérateur libre A. On établit l'existence et la complétude des opérateurs d'onde.

Par ces mêmes méthodes on peut étudier le cas d'un corps élastique homogène, contenant comme inclusion un autre corps élastique, et obtenir les propriétés spectrales de ce système ainsi que l'existence et la complétude des opérateurs d'onde.

Je remercie Monsieur E. Sanchez-Palencia pour son aide et ses remarques au sujet de ce travail, ainsi que Monsieur J.C. Guillot pour ses suggestions quant à la mise en forme de cet article.

## NOTATIONS

Dans la suite on adopte les notations suivantes : les espaces  $H^s(\Omega)$  sont les espaces de Sobolev habituels. Si H est un espace de fonction sur  $\Omega$ , on note par :

$$H_{loc} = \{ u \mid u \phi \in H \text{ pour tout } \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \}$$

$$H_{comp} = \{ u \mid u \in H, u \text{ à support compact} \}$$

Si  $a > 0$ ,  $B(0,a)$  est la boule de centre 0 et rayon a et

$$H_a = \{ u \mid u \in H \text{ supp } u \subset B(0,a) \cap \Omega \}.$$

Ces espaces seront munis de leurs structures habituelles.

Enfin lorsque  $\Omega$  est non borné, on note par :

$$H_{loc}^s(\bar{\Omega}) = \{ u \mid u \in H^s(\Omega'), \forall \Omega' \subset \Omega, \Omega' \text{ relativement compact} \}.$$

Lorsque u est un champ de vecteur, on écrit  $u \in H$  pour  $u_i \in H \quad i = 1,2,3$ .

Pour toutes les notations sur les opérateurs on adopte les notations de [5]. D'autre part, on pose :

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right).$$

Les opérateurs grad, rot, div sont écrits à l'aide de  $\nabla$  d'une façon conventionnelle.

I. - L'OPERATEUR LIBRE

On considère l'opérateur  $\hat{\mathbf{A}}$  donné formellement par :

$$\hat{\mathbf{A}}u = -\nabla(\nabla \cdot u) \quad u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3).$$

LEMME 1.1. On a :

$$\nabla(\nabla \cdot u) = \Delta u + \nabla \wedge (\nabla \wedge u) \tag{1.1}$$

au sens des distributions.

PROPOSITION 1.2. L'opérateur maximal associé à  $\hat{\mathbf{A}}$  dans  $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)$  et défini par :

$$D(\hat{\mathbf{A}}) = \{u \mid u \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3), \hat{\mathbf{A}}u \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)\}$$

$$\hat{\mathbf{A}}u = \hat{\mathbf{A}}u \quad \text{pour } u \in D(\hat{\mathbf{A}})$$

est auto-adjoint positif.

*Démonstration.* Par la transformation de Fourier  $\hat{\mathbf{A}}$  est unitairement équivalent à l'opérateur de multiplication dans  $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)$  par la matrice

$$A(\xi) = [\xi_i \xi_j] \quad 1 \leq i \leq 3, \quad 1 \leq j \leq 3$$

cette matrice est symétrique positive.

On pose :

$$H = \{f \mid f \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3); \nabla \wedge f = 0\}$$

$$H_0 = \{f \mid f \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3); \nabla \cdot f = 0\}$$

On a alors le lemme classique suivant [3] :

LEMME 1.3. On a :

$$H = \overline{\{\nabla \phi \mid \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)\}} L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)$$

$$H_0 = \overline{\{\nabla \wedge f \mid f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)\}} L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)$$

et

$$L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3) = H \oplus H_0.$$

PROPOSITION 1.4.

(a) Chacun des sous-espaces  $H$  et  $H_0$  réduit  $\hat{A}$ . On a alors :

$$\hat{A} = A \oplus 0 \quad \text{où} \quad A = \hat{A}|_H$$

(b) On a

$$D(A) = H^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3) \cap H$$

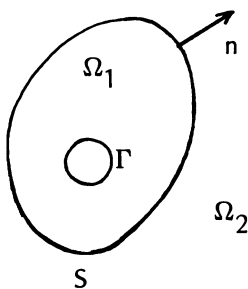
$$Au = -\Delta u$$

L'opérateur  $A$  est spectralement absolument continu.

Démonstration. La vérification est immédiate moyennant 1.3.

## II. - L'OPERATEUR PERTURBE

Soit  $\Omega$  un domaine extérieur à un compact, on suppose que la frontière de  $\Omega$ ,  $\partial\Omega = \Gamma$  est régulière et que  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$  où  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont des domaines,  $\Omega_1$  étant relativement compact et  $S = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$  est une surface régulière. On désigne par  $n$  le champ des normales extérieures.



Physiquement l'ouvert  $\Omega_1$  contient un corps élastique homogène solidaire de  $\Gamma$ , dont les constantes de Lamé sont  $\lambda_1 = \lambda$  et  $\mu_1 = \mu$ . Ce corps est couplé à travers  $S$  à  $\Omega_2$  qui contient l'air considéré comme corps élastique de constantes  $\lambda_2 = 1$ ,  $\mu_2 = 0$ .

On appelle  $\epsilon$  le rapport de la densité de l'air, à celle du corps élastique dans  $\Omega_1$ ,  $\epsilon$  est un petit paramètre.

Introduisons les opérateurs différentiels :

$$(1.2) \quad \sigma_{ij}^{1,2}(u^{1,2}) = \mu_{1,2} \left( \frac{\partial u_i^{1,2}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{1,2}}{\partial x_i} \right) + \lambda_{1,2} (\nabla \cdot u^{1,2}) \delta_{ij}$$

les indices 1,2 réfèrent à  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , il est entendu alors que  $u^{1,2}$  est le déplacement dans  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  respectivement. On adopte la convention de sommation sur les indices répétés. Lorsque  $u \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^3)$  on écrit  $u = u^1 + u^2$ , avec

$$u^1 = u \cdot 1_{\Omega_1} \quad u^2 = u \cdot 1_{\Omega_2}$$

parfois  $u^1$  (resp.  $u^2$ ) est considéré comme la restriction de  $u$  à  $\Omega_1$  (resp.  $\Omega_2$ ).

On note  $\hat{K}$  l'espace  $L^2(\Omega, \mathbb{C}^3)$  muni du produit scalaire, (Energie potentielle)

$$(2.2) \quad b(u,v) = \int_{\Omega_1} u_i \bar{v}_i \, dx + \epsilon \int_{\Omega_2} u_i \bar{v}_i \, dx$$

Sur  $\hat{K}$  on définit la forme sesquilinéaire  $\hat{b}$  par

$$(3.2) \quad D(\hat{b}) = \{ u \mid u \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^3) ; u^1 \in H^1(\Omega_1) ; u^1|_{\Gamma} = 0, \nabla \cdot u \in L^2(\Omega) \}$$

$$\hat{b}(u,v) = \sum_i \int_{\Omega_1} \mu_1 \nabla u_i \cdot \overline{\nabla v_i} + (\lambda_1 + \mu_1) \int_{\Omega_1} \nabla \cdot u \overline{\nabla \cdot v} \, dx + \epsilon \int_{\Omega_2} \nabla \cdot u \overline{\nabla \cdot v} \, dx$$

PROPOSITION 2.1. *La forme  $\hat{b}$  est une forme symétrique positive fermée sur son domaine.*

*Démonstration.* Le fait que  $\hat{b}$  est symétrique positive est évident. Cette forme est fermée. (Résultat classique) voir [16] p. 13.

LEMME 2.2. *Si  $u \in D(\hat{b})$ , on a  $u^1 \cdot n = u^2 \cdot n$  au sens des traces dans  $H^{-1/2}(S)$ . ( $u^i = u|_{\Omega_i}$ ).*

*Démonstration.* Montrons l'existence des traces, leur égalité étant alors évidente. Du côté de  $\Omega_1$ , on a  $u \in H^1(\Omega_1)$ . Du côté de  $\Omega_2$ , on a  $u \in M$  où

$$M = \{ u \mid u \in L^2(\Omega_2), \nabla \cdot u \in L^2(\Omega_2) \}$$

$M$  est un espace de Hilbert muni de la norme

$$\|u\| = ( \|u\|_{L^2(\Omega_2)}^2 + \|\nabla \cdot u\|_{L^2(\Omega_2)}^2 )^{1/2}.$$

Pour tout  $\theta \in H^{1/2}(S)$  soit  $\tilde{\theta}$  son relèvement continu à  $H^1(\Omega_2)$  (Par un certain relèvement fixé).

Alors pour tout  $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}_2)$  à support compact, on a par intégration par partie

$$\langle \text{grad } \tilde{\theta}, u \rangle = \int_S (u \cdot n) \theta \, dS - \langle \tilde{\theta}, \nabla \cdot u \rangle$$

Ou alors :

$$\begin{aligned} \left| \int_S (u \cdot n) \theta \, dS \right| &\leq (\|\nabla \cdot u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}) \|\tilde{\theta}\|_{H^1} \\ &\leq C \|u\|_M \|\theta\|_{H^{1/2}} \end{aligned}$$

La forme linéaire  $\theta \rightarrow \int_S (u \cdot n) \theta \, dS$  est donc continue sur  $H^{1/2}(S)$ . Si on la note

par  $\phi_u$  on a  $\phi_u \in H^{-1/2}(S)$  et l'application  $u \rightarrow \phi_u$  de  $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}_2)$ , dans  $H^{-1/2}(S)$  est continue pour la norme  $\|\cdot\|_M$ . Son prolongement est l'opérateur de trace cherché.

DEFINITION 2.3. On note par  $\hat{B}$  l'opérateur auto-adjoint positif associé à  $\hat{b}$ .

PROPOSITION 2.4.

(a) On a  $D(\hat{B}^{1/2}) = D(\hat{b})$

(b) Pour que  $u \in D(\hat{b})$  soit dans  $D(\hat{B})$  il faut et il suffit que :

(i) Pour tout  $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

$$(4.2) \quad \int_S \overline{\sigma_{ij}(v^{(1)})n_j} u_i^{(1)} \, ds = \epsilon \int_S \overline{\sigma_{ij}(v^{(2)})n_j} u_i^{(2)} \, ds$$

$$(ii) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^{(1)}(u^1) \in L^2(\Omega_1) \quad i = 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^{(2)}(u^2) \in L^2(\Omega_2) \quad i = 1, 2, 3$$

On a alors au sens des distributions :

$$(\hat{B}u)_i = -\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^{(1)}(u^1) - \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^{(2)}(u^2)$$

(avec les notations définies plus haut).

*Démonstration.* Si  $u \in D(\hat{b})$  pour que  $u \in D(\hat{B})$  il faut et il suffit que l'application

$$v \rightarrow \hat{b}(u,v)$$

soit continue dans  $\hat{K}$ . Or  $\hat{b}(u,v)$  s'écrit aussi :

$$\hat{b}(u,v) = \int_{\Omega_1} \sigma_{ij}^{(1)}(v^{(1)}) \frac{\partial \bar{u}^{(1)}}{\partial x_j} dx + \epsilon \int_{\Omega_2} \sigma_{ij}^{(2)}(v^{(2)}) \frac{\partial \bar{u}^{(2)}}{\partial x_j} dx$$

par intégration par partie dans  $\Omega_1$ , et  $\Omega_2$  séparément et pour  $\vec{v} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ , on a :

$$\begin{aligned} \hat{b}(u,v) = & - \int_{\Omega_1} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^{(1)}(v^{(1)}) \cdot \bar{u}_i^{(1)} dx - \epsilon \int_{\Omega_2} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^{(2)}(v^{(2)}) \cdot \bar{u}_i^{(2)} dx \\ & + \int_S (\sigma_{ij}^{(1)}(v^{(1)})_{n_j}) u_i^1 ds - \epsilon \int_S (\sigma_{ij}^{(2)}(v^{(2)})_{n_j}) u_i^2 ds \end{aligned}$$

On voit alors que les termes frontières doivent être nuls d'où (i), et moyennant le produit scalaire  $b$  de  $K$  on voit que  $Bu$  est bien défini par (ii).

DEFINITION 2.5. On note par  $T$  l'opérateur auto-adjoint sur  $L^2(\Omega_1)$  défini par :

$$\begin{aligned} D(T) = & \{ u \mid u \in H^2(\Omega_1) \quad u|_{\Gamma} = 0 \quad \sigma_{ij}^{(1)}(u)_{n_j}|_S = 0 \} \\ [Tu]_i = & - \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^{(1)}(u). \end{aligned}$$

On a le résultat classique :

LEMME 2.6. L'opérateur  $T$  est à spectre purement ponctuel discret ayant  $+\infty$  comme point d'accumulation.

On note par :

$$(5.2) \quad K_0 = \text{Ker } \hat{B} \quad K = (\text{Ker } \hat{B})^\perp$$

PROPOSITION 2.7.

- (a) Chacun des sous-espaces  $K_0$  et  $K$  réduit  $\hat{B}$ ,  $K_0$  est de dimension infinie. Soit  $\hat{B} = 0 \oplus B$  la décomposition de  $\hat{B}$  suivant  $K_0$  et  $K$ .



(b) Si  $u \in D(B)$  on a  $\nabla \Lambda u = 0$  dans  $\Omega_2$ , et

$$Bu = -\Delta u \quad \text{dans } \Omega_2.$$

*Démonstration.*

(a) Le fait que  $K_0$  et  $K$  réduisent  $\hat{B}$  est évident. Par ailleurs, tout  $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_2, \mathbb{C}^3)$  tel que  $\nabla \cdot u = 0$  est dans  $K_0$  ce qui montre que  $\dim K_0 = \infty$ .

(b) Tout  $u \in D(B)$  est orthogonal aux vecteurs de la forme  $v = \nabla \Lambda v_0$ ,  $v_0 \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_2)$  d'où

$$\langle u, \nabla \Lambda v_0 \rangle = \epsilon \int u \cdot \overline{\nabla \Lambda v_0} \, dx = -\epsilon \int \nabla \Lambda u \cdot \overline{v_0} \, dx = 0.$$

Ce qui montre que  $\nabla \Lambda u = 0$  dans  $\Omega_2$  au sens des distributions. D'après le lemme (1.1) on voit que :

$$Bu = -\Delta u$$

dans  $\Omega_2$ .

**PROPOSITION 2.8.** *Le spectre ponctuel de B est un sous-ensemble discret de  $\mathbb{R}_+^*$ .*

*Démonstration.* Soient  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  et  $u \in D(B)$  tels que

$$Bu = \lambda u.$$

La fonction  $u$  vérifie :

$$\Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{dans } \Omega_2.$$

Comme  $u \in L_2(\Omega_2)$ . On sait par le théorème de Rellich que  $u$  est nulle au voisinage de  $\infty$ , comme  $u$  est de plus analytique  $u = 0$  dans  $\Omega_2$ . Il en résulte que  $u|_{\Omega_1}$  est solution de

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(u) + \lambda u_i = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

$$u_i|_{\Gamma} = 0$$

$$\sigma_{ij}(u) n_j = 0 \quad \text{sur } S$$

$$u \cdot n = 0 \quad \text{sur } S$$

La fonction  $u$  est alors nulle sauf dans le cas où  $\lambda$  est valeurs propre de l'opérateur  $T$  défini en 2.5. Comme l'ensemble des valeurs propres de  $T$  est discret, l'assertion est démontrée.

*Remarque.* Le spectre de  $B$  est non vide dans le cas de la sphère, (ou plus généralement pour un corps ayant un axe de symétrie) où sont observées des oscillations propres vérifiant la condition  $u \cdot n = 0$  sur le bord. Voir Love [6] p. 284.

### III. - LA RESOLVANTE DE L'OPERATEUR B, LES RESONANCES

Pour commencer on introduit les notations suivantes :

DEFINITION 3.1. *On pose*

$$\mathbb{C}^\pm = \{z \mid \pm \operatorname{Im} z > 0\}$$

$$Z = \{\omega \mid \omega \in \mathbb{C} \quad \omega^2 \in \sigma(T)\}$$

$$Z_0 = \{\omega \mid \omega \in \mathbb{C} \quad \omega^2 \in \sigma_p(B)\}$$

DEFINITION 3.2. *On dit qu'une fonction  $\phi \in H_{\text{Loc}}^2(\overline{\Omega}_2)$ , solution de*

$$\Delta\phi + \omega^2\phi = 0$$

*vérifie la condition de radiation de Sommerfeld si*

$$\phi = O\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\left| \frac{\partial\phi}{\partial r} - i\omega\phi \right| = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

*Dans la suite cette condition sera désignée par «S».*

LEMME 3.3. *Pour que le problème :*

$$\Delta\phi + \omega^2\phi = 0 \quad \text{dans } \Omega_2, \quad \omega \in \mathbb{C}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} \Big|_S = 0$$

$\phi$  vérifie «S»

admette une solution  $\phi$  non nulle, il faut et il suffit que  $\omega$  appartienne à un sous-ensemble discret, noté  $R_0$  de  $\mathbb{C}^-$ .

Dans ce cas l'ensemble des solutions est un sous-espace de dimension fini de  $H_{\text{Loc}}^2(\bar{\Omega}_2)$ . Pour une démonstration voir [15] p. 158-160 ou [11].

DEFINITION 3.4. On pose

$$\Delta = \mathbb{C} \setminus (Z \cup R_0).$$

Et pour tout  $\omega \in \mathbb{C}^+$ ,

$$G(\omega) = R(\omega^2, B)$$

où  $R(\cdot, B)$  est la résolvante de l'opérateur  $B$ .

On voit facilement que l'opérateur  $G(\omega)$  est continu de  $K$  dans  $D(B)$  muni de la norme du graphe, et que  $G(\cdot)$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}^+$ .

Pour la suite on notera toujours par  $G(\omega)$  la restriction de  $G(\omega)$  à  $K_{\text{comp}}$ , considérée comme à valeur dans  $D_{\text{Loc}}(B)$  muni de sa structure d'espace de Fréchet.

Pour tout  $u \in K_{\text{comp}}$ ,  $v \in D_{\text{comp}}(B)$ , l'application

$$\mathbb{C}^+ \ni \omega \rightarrow \langle G(\omega) u, v \rangle$$

est analytique. ( $G(\cdot)$  est analytique au sens faible en tant que famille d'opérateurs).

Le but de ce paragraphe est de montrer que l'application  $G$  admet un prolongement méromorphe  $\tilde{G}$  à  $\Delta$ , dont les pôles (formant un ensemble discret) sont situés dans  $\mathbb{C}^-$ , et sont des *résonances*.

Pour cela considérons le problème suivant :

Pour  $v \in K_{\text{comp}}$  et  $\omega \in \Delta$  déterminer  $u \in D_{\text{Loc}}(B)$  tel que :

$$(1.3) \quad (a) \quad \mathcal{B} u + \omega^2 u = v$$

$$(b) \quad u = \nabla \phi \text{ dans } \Omega_2 ; \text{ et } \phi \text{ vérifie «S»}.$$

L'opérateur  $\mathcal{B}$  étant l'opérateur différentiel défini dans (ii) de la proposition 2.4.

DEFINITION 3.5.

- (1) Pour tout  $\omega \in \Delta$  on note par  $0(\omega)$  l'espace vectoriel des solutions de (1.3) avec  $v = 0$ .
- (2) Un nombre  $\omega \in \Delta$  est dit une résonance lorsque  $0(\omega)$  n'est pas réduit à zéro. Soit  $R_\epsilon$  l'ensemble de ces résonances (dépendant du couplage).

On pose :

$$\Delta_\epsilon = \Delta - R_\epsilon.$$

Dans ce paragraphe on montre principalement les deux théorèmes suivants :

THEOREME 3.6.

- (a) L'ensemble  $R_\epsilon$  est discret,  $R_\epsilon \subset \mathbb{C}^-$ .
- (b) Pour  $\omega \in R_\epsilon$   $\dim 0(\omega) < +\infty$ .
- (c) Pour tout  $\omega \in \Delta_\epsilon$  et  $v \in K_{\text{comp}}$  le problème (1.3) admet une solution unique.

THEOREME 3.7.

- (a) Pour tout  $\omega \in \Delta_\epsilon$ , et  $v \in K_{\text{comp}}$  soit

$$\tilde{G}(\omega)v = u(\omega, v)$$

l'unique solution du problème 1.3.

Alors  $\tilde{G}(\omega)$  applique continûment  $K_{\text{comp}}$  dans  $D_{\text{Loc}}(B)$  et  $\tilde{G}(\cdot)$  est analytique dans  $\Delta_\epsilon$  (Dans le sens précisé plus haut).

- (b) Pour  $\omega \in \mathbb{C}^+$  on a  $\tilde{G}(\omega) = G(\omega)$ .

$\tilde{G}$  est un prolongement de  $G$ , les singularités  $R_\epsilon$  sont des pôles.

La démonstration de ces deux théorèmes sera faite à partir des lemmes suivants :

LEMME 3.8.

- (a) Il existe une application linéaire  $p$  continue de  $K_{\text{comp}}$  dans  $H_{\text{comp}}^1(\Omega_2)$  telle que :

$$\nabla p(v) = v \quad \text{dans } \Omega_2$$

- (b) Pour tout  $v \in K$  il existe  $\phi \in H_{\text{Loc}}^1(\overline{\Omega_2})$  telle que,  $v = \nabla \phi$  dans  $\Omega_2$ .

*Démonstration.* On montre (a), (b) résulte d'arguments similaires.

Soit  $v \in K_{\text{comp}}$ , et  $r > 0$  assez grand tel que :  $\text{Supp } v \subset B(0,r)$ , et soit  $\omega_r = \Omega_2 \cap B(0, r+1)$ . Considérons la fonction  $v \in L^2(\omega_r)$  d'après [2], [3] elle admet une décomposition orthogonale sous la forme :

$$v = \nabla \phi + g_0$$

où  $\phi \in H^1(\omega_r)$  et  $g_0$  est limite dans  $L^2(\omega_r)$  de fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  telles que :

$$* \quad [\nabla \cdot g = 0, \quad \text{et } g \cdot \nu = 0]$$

( $\nu$  étant la normale extérieure à  $\partial\omega_r$ ). Or du fait que  $v \in (\text{Ker } \hat{B})^\perp$ , on voit que  $v$  est orthogonal à tout  $g \in \mathcal{C}^\infty$  vérifiant \*, d'où  $g_0 \equiv 0$ .

Le fait que  $v$  est nulle sur  $\{x \mid r \leq |x| \leq r+1\}$  montre qu'on peut choisir  $\phi$  de façon à ce que  $\phi$  soit nulle sur cet ensemble,  $\phi$  est ainsi déterminée de manière unique. On pose  $\phi = p(v)$ , de l'inégalité de Poincaré, appliquée à  $\omega_r$

$$\|p(v)\|_{H^1(\Omega_2)} = \|\phi\|_{H^1(\Omega_2)} \leq C(r) \|v\|_K$$

D'où l'assertion.

LEMME 3.9. *Le problème (1.3) est équivalent au problème suivant :*

Etant donné  $v \in K_{\text{comp}}$  et  $\omega \in \Delta$ , trouver  $\phi \in H_{\text{Loc}}^2(\overline{\Omega_2})$  et  $u^1 \in H^2(\Omega_1)$  telles que :

$$\Delta \phi + \omega^2 \phi = p(v) \quad \text{dans } \Omega_2$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = u^1 \cdot n \quad \text{dans } H^{1/2}(S)$$

$\phi$  vérifie «S»

$$(\mathcal{B} + \omega^2)u^1 = v \quad \text{dans } \Omega_1$$

$$\sigma_{ij}^{(1)}(u^1)n_j = \epsilon \Delta \phi \cdot n_i \quad \text{dans } H^{1/2}(S)$$

$$u^1|_{\Gamma} = 0$$

Dans le sens que  $u = u^1 + u^2$  est solution de (1.3) si et seulement si  $u = u^1 + \nabla \phi$  où  $u^1$  et  $\phi$  sont solutions de (2.3).

*Démonstration.* Immédiate moyennant le lemme précédent.

LEMME 3.10. Pour tout  $\psi \in H^{1/2}(S)$ , et  $g \in L^2_{\text{comp}}(\Omega_2)$ , le problème non homogène

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \Delta \phi + \omega^2 \phi &= g \text{ dans } \Omega_2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} &= \psi \text{ sur } S \\ \phi &\text{ vérifie «S»} \end{aligned}$$

Admet pour tout  $\omega \notin R_0$  une solution unique  $T(\omega)(g, \psi)$  dans  $H^2(\overline{\Omega}_2)$ , l'application

$$T(\omega) : L^2_{\text{comp}}(\Omega_2) \times H^{1/2}(S) \rightarrow H^2_{\text{comp}}(\overline{\Omega}_2)$$

est linéaire continue, et  $T(\cdot)$  est analytique dans  $\mathbb{C} - R_0$ .

*Démonstration.* Ce problème se ramène facilement au cas où  $\psi \equiv 0$  et peut alors être traité par les méthodes de [8] [11] ou [15].

On a aussi le lemme classique [4].

LEMME 3.11. Le problème aux limites dans  $\Omega_1$  :

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \mathcal{B}u + \omega^2 u &= v \\ \sigma_{ij}(u)n_j &= w_i \text{ dans } H^{1/2}(S) \\ u|_{\Gamma} &= 0 \end{aligned}$$

est un problème elliptique régulier, il admet pour tout  $\omega^2 \notin \sigma(T)$ , i.e.  $\omega \notin Z$ ,  $v \in L^2(\Omega_1)$   $w \in H^{1/2}(S)$  une solution unique  $R(\omega)(v, w)$  ; l'application linéaire :

$$R(\omega) : L^2(\Omega_1) \times H^{1/2}(S) \rightarrow H^2(\Omega_1)$$

est continue, et  $R(\cdot)$  est analytique dans  $\mathbb{C} \setminus Z$ .

*Démonstration des théorèmes 3.6. et 3.7. Soit  $\omega \in \Delta$ .*

D'après les lemmes précédents le problème (2.3) se réduit à déterminer  $u = u_1$  solution de (4.3) avec :

$$(5.3) \quad w_i = \epsilon \Delta \phi \cdot n_i, \phi = T(\omega)(p(v), u_1 \cdot n |_S)$$

La solution de (2.3) sera donnée par  $(u_1, \phi)$ .

Ce problème a un sens puisque :

$$\Delta \phi = p(v) - \omega^2 \phi \in H_{Loc}^1(\overline{\Omega}_2)$$

a une trace sur  $S$ , dans  $H^{1/2}(S)$ .

L'opérateur  $R(\omega)$  défini au lemme 3.11. est un opérateur compact à valeur  $H^1(\Omega)$  (Th. de Rellich).

Fixons pour le moment  $a > 0$  assez grand tel que  $\overline{\Omega}_1 \subset B(0, a)$  ; et soit :

$$K_a = \{ v \mid v \in K \text{ supp } v \subset B(0, a) \}.$$

Avec ces notations la solution unique de (2.3) si elle existe vérifie :

$$(6.3) \quad u_1 = R(\omega) [v_1 ; \epsilon(p(v) - \omega^2 \phi)n_i]$$

avec  $\phi = T(\omega)(p(v) ; u_1 \cdot n |_S)$ .

Introduisant l'opérateur suivant sur  $K_a \times H^1(\Omega_1)$

$$\begin{cases} H(\omega, \epsilon)(v, u) = [0, \epsilon \omega^2 R(\omega)(0 ; \phi)] \\ \phi \text{ donnée par (5.3)} \end{cases}$$

On voit facilement que cet opérateur est bien défini, et est compact, de plus il dépend d'une manière analytique de  $\omega \in \Delta$ , et de façon continue de  $\epsilon > 0$ .

Utilisant  $H(\omega, \epsilon)$  on voit que (6.3) s'écrit alors :

$$[v, u_1] = [v, R(\omega) \{ v_1, \epsilon p(v)n_i \}] - H(\omega, \epsilon)(v, u_1).$$

On établit alors aisément que (2.3) admet une solution si et seulement si  $[I + H(\omega, \epsilon)]$  est inversible. La solution est alors donnée par :

$$(7.3) \quad \begin{cases} u_1 = \text{pr}_2 ( [I + H(\omega, \epsilon)]^{-1} [v, R(\omega) \{v_1, \epsilon p(v)n_1\}] ) \\ \phi = T(\omega)(p(v), u_1 \cdot n) \end{cases}$$

On est donc en présence d'une famille analytique d'opérateurs compacts. Le théorème de S. Steinberg [13] , implique alors que si  $[I + H(\omega, \epsilon)]^{-1}$  existe en un point de  $\Delta$ , alors il existe partout sauf en un ensemble discret de points, dont les points d'accumulation appartiennent à  $\partial\Delta$ .

Or un calcul rapide montre que :

$$\|H(\omega, \epsilon)\| \leq \epsilon |\omega|^2 \|R(\omega)\| \|T(\omega)\|$$

fixant  $\omega$ , on voit alors que pour  $\epsilon < \epsilon_0$

$$\|H(\omega, \epsilon)\| \leq \frac{1}{2}.$$

D'où  $[I + H(\omega, \epsilon)]$  est inversible pour  $\epsilon < \epsilon_0$ .

Il existe donc un ensemble  $R_\epsilon(a)$  discret tel que,  $[I + H(\omega, \epsilon)]^{-1}$  existe et soit méromorphe dans  $\Delta - R_\epsilon(a)$  ;  $R_\epsilon(a)$  étant l'ensemble de ses pôles. On voit facilement que  $R_\epsilon(a)$  ne dépend pas de  $a$ . On le note  $R_\epsilon$ . On a donc montré (c), de 3.6. ; (b) résulte aussi de [13]. Le fait  $R_\epsilon \subset \mathbb{C}^-$  vient de ce que pour  $\omega \in \mathbb{C}^+$  d'après [15] p. 129, la condition «S» implique  $\phi \in L^2(\Omega_2)$ .

Ce même argument montre que pour  $\omega \in \mathbb{C}^+$

$$\tilde{G}(\omega) = G(\omega).$$

Pour voir que  $R_\epsilon \cap \mathbb{R} = \emptyset$ , un théorème de Rellich montre que toute solution de :

$$\Delta\phi + \omega^2\phi = 0 \text{ qui vérifie «S» avec } \omega \text{ réel}$$

est nécessairement nulle dans  $\Omega_2$ . Donc  $(u, \phi)$  n'est solution de (2.3) homogène que lorsque  $\omega^2$  est valeur propre de T, ce qui a été exclu.

Les autres assertions des théorèmes 3.6 et 3.7 résultent de la construction précédente.

C.Q.F.D.



*Remarque.* Si dans l'énoncé du problème (1.3) on retire la restriction  $\omega \in \Delta$ , le problème homogène admettrait alors des solutions pour  $\omega \in Z_0$ , et pour certains  $\omega \in R_0$ . Les résonances  $R_\epsilon$  sont liées au couplage. Les solutions pour  $\omega \in Z_0$  sont les vecteurs propres du problème dans  $\Omega_1$  prolongée par 0 en  $\Omega_2$ .

On sait d'après [13] th. 3 que lorsque  $\epsilon$  varie les points de  $R_\epsilon$  décrivent des courbes continues dans  $\Delta$ , et si  $\omega(\epsilon)$  est une telle branche continue, lorsque  $\epsilon$  tend vers 0, le point  $\omega(\epsilon)$  tend vers  $\partial\omega = Z \cup R_0$  ou vers l'infini.

En fait le théorème 3.1 de [10] prouve que tout point de  $Z$  est limite d'une suite  $\omega(\epsilon_k)$ ,  $\epsilon_k \rightarrow 0$  de résonances.

On démontre aussi :

**THEOREME 3.12.** Soit  $\omega_0 \in R_0$ , il existe deux suites  $\{\epsilon_n\} \subset \mathbb{R}^*$  et  $\{\omega_n\} \subset \mathbb{C}$  telles que pour tout  $n > 0$ ;  $\omega_n \in R_{\epsilon_n}$  et

$$\omega_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$$

*Démonstration.* Soit  $G(x) = \frac{e^{i\omega |x|}}{4\pi |x|}$  la solution fondamentale de  $(\Delta + \omega^2)$  qui vérifie «S».

Introduisons les opérateurs suivants dans  $L^2(S)$

$$(8.3) \quad [T(\omega)\xi](x) = 2 \int_S \frac{\partial}{\partial n_x} G(x-y; \omega) \xi(y) dy$$

$$(9.3) \quad [S(\omega)\xi](x) = 2 \int_S G(x-y; \omega) \xi(y) dy$$

voir pour la définition de ces opérateurs intégraux singuliers [14] chap. II et [11]. On sait alors que :

$$S(\omega) : L^2(S) \rightarrow H_{Loc}^2(\overline{\Omega}_2)$$

est un opérateur continu et que :

$$\phi(x) = [S(\omega)\xi](x)$$

vérifie

$$\begin{aligned}
 & \Delta\phi + \omega^2\phi = 0 \text{ dans } \Omega_2 \\
 (10.3) \quad & \frac{\partial\phi}{\partial n} = -\xi + T(\omega)\xi \text{ sur } S \\
 & \phi \text{ vérifie } S
 \end{aligned}$$

Pour construire des solutions vérifiant «S» pour le problème

$$\begin{aligned}
 (11.3) \quad & \Delta\phi + \omega^2\phi = 0 \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = u.n \\
 & \mathcal{B}u + \omega^2u = 0 \quad u|_{\Gamma} = 0
 \end{aligned}$$

et  $\sigma_{ij}(u)n_j = -\epsilon \omega^2\phi \cdot n_i$ .

On introduit les deux opérateurs de traces sur S :

$$\gamma_1(u) = u \cdot n|_S \quad [\gamma_2(\phi)]_i = \phi n_i|_S$$

$\gamma_1$  (resp.  $\gamma_2$ ) applique  $H^2(\Omega_1)$  (resp.  $H^2_{Loc}(\overline{\Omega}_2)$ ) dans  $H^{1/2}(S)$ .

On sait alors qu'il existe un opérateur continu

$$L(\omega) : H^{1/2}(S) \rightarrow H^2(\Omega_1)$$

tel que  $-\epsilon \omega^2 L(\omega)(\gamma_2\phi)$  soit la solution du problème défini par les deux dernières lignes de (11.3).

D'après (10.3), le problème (11.3) devient équivalent au problème suivant :  
 Déterminer  $\xi \in L^2(S)$   $\xi \neq 0$  telle que :

$$[T(\omega) - I] \xi = -\epsilon \omega^2 H(\omega)\xi$$

où 
$$H(\omega) = \gamma_1 \circ L(\omega) \circ \gamma_2 \circ S(\omega)$$

est un opérateur dans  $L^2(S)$ .

Les opérateurs  $T(\omega)$  et  $H(\omega)$  dépendent d'une manière analytique de  $\omega$  et  $T(\omega)$  est compact.

Or si  $\omega_0 \in \mathbb{R}_0$ , on sait d'après [13] que :  $\omega_0$  est un pôle pour  $[-I + T(\omega)]^{-1}$  : il existe donc  $C \neq 0$  opérateur borné et  $m > 0$  tels que

$$(12.3) \quad [-I + T(\omega)]^{-1} = (\omega - \omega_0)^{-m} C + D(\omega)$$

La famille d'opérateurs  $D(\omega)$  étant analytique au voisinage de  $\omega_0$ .

Supposons que pour tout  $\epsilon < \rho$  l'ouvert  $|\omega - \omega_0| < \delta$ , ( $\delta$  assez petit) ne contienne aucune résonance, autrement dit :

$$[T(\omega) + \epsilon \omega^2 H(\omega) - I]^{-1}$$

existe et est analytique dans ce voisinage, pour tout  $\epsilon < \rho$ , ou que en particulier

$$\int_{|\omega - \omega_0| = \delta} (\omega - \omega_0)^m [T(\omega) + \epsilon \omega^2 H(\omega) - I]^{-1} d\omega = 0$$

En passant à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , on obtient :

$$\int_{|\omega - \omega_0| = \delta} (\omega - \omega_0)^m [T(\omega) - I]^{-1} d\omega = 0$$

Ce qui contredit (12.3).

#### IV. - LES OPERATEURS D'ONDE ASSOCIES AU COUPLE (A,B)

##### La partie absolument continue de B

Pour étudier la partie absolument continue de B, on va montrer que B vérifie le «principe de l'absorption limitée».

Pour tout intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  et  $\delta > 0$ , on pose :

$$I_{\pm}^{\delta} = \{ z \mid \operatorname{Re} z \in I ; 0 < \pm \operatorname{Im} z < \delta \} .$$

**PROPOSITION 4.1.** Soient  $I \subset \mathbb{R}^+ - \sigma(T)$  et  $\delta > 0$ , et considérons  $R(z,B)$  restreinte à  $I_{\pm}^{\delta}$  comme opérant de  $K_{\text{comp}}$  dans  $D_{\text{Loc}}(B)$  alors  $R(z,B)$  est uniformément continue sur  $I_{\pm}^{\delta}$  (resp.  $I_{\pm}^{\delta}$ ), en particulier pour tout  $f \in K_{\text{comp}}$

$$R(k \pm i0, B)f = \lim_{\rho \rightarrow 0} R(k \pm i\rho, B)f$$

existe dans  $D_{\text{Loc}}(B)$ , uniformément sur  $I$ .

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que pour  $z \notin \sigma(B)$  on a :

$$R(z, B) = G(\sqrt{z}) \quad \text{Im} \sqrt{z} > 0$$

où  $G$  est défini par la définition (4.3).

La proposition 4.1. est alors un corollaire du théorème 3.7. et on a :

$$R(k \pm i0, B)f = \tilde{G}(\pm \sqrt{k}) f.$$

**COROLLAIRE 4.2.** Pour tout intervalle fermé  $I \subset \mathbb{R}^+ - \sigma(T)$ , soit  $P(I)$  le projecteur spectral de  $B$  associé à  $I$ , on a :

$$P(I)K \subset K_{ac}$$

où  $K_{ac}$  est l'espace d'absolu continuité de  $B$ .

*Démonstration.* Comme  $K_{comp}$  est dense dans  $K$  il suffit de montrer que pour  $f \in K_{comp}$ ,  $P(I)f \in K_{ac}$ . Soit alors  $m$  la mesure spectrale associée à  $P(I)f$ .

On a pour tout Borélien  $J$  :

$$m(J) = \|P(J)P(I)f\|^2 = \|P(J \cap I)f\|^2.$$

Or si  $J$  est un intervalle,  $J \cap I$  ne contient pas de valeur propre, on a alors par la formule de Stone

$$\|P(J \cap I)f\|^2 = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\rho \downarrow 0} \int_{J \cap I} \langle [R(t+i\rho) - R(t-i\rho)]f ; f \rangle dt$$

où  $\langle , \rangle$  est le produit scalaire dans  $K$ , or d'après la proposition précédente,  $[R(t+i\rho) - R(t-i\rho)]f$  admet une limite pour  $\rho \rightarrow 0$  dans  $D_{Loc}(B)$  uniformément en  $t \in I$ . Or comme  $f$  est à support compact, on voit alors :

$$D(t) = \lim_{\rho \downarrow 0} \langle [R(t+i\rho) - R(t-i\rho)]f ; f \rangle = \langle (G(\sqrt{t}) - G(-\sqrt{t}))f ; f \rangle$$

existe et est uniforme ; on peut donc écrire :

$$m(J) = \frac{1}{2\pi i} \int_{J \cap I} D(t) dt.$$

La mesure  $m$  est donc absolument continue de densité égale à  $D$  sur  $I$ , à zéro sur  $\complement I$ . Cela implique par définition que  $P(I)f \in K_{ac}$ .

Il résulte facilement de ce qui précède que si :

$$K = K_{ac} \oplus K_{sc} \oplus K_p$$

est la décomposition de  $K$  en espace d'absolue continuité ; continu singulier, et en l'espace engendré par les vecteurs propres, les projecteurs associés sont respectivement

$$P(\mathbb{R} - \sigma(T)) ; P(\sigma_p(T) - \sigma(B)) ; P(\sigma_p(B)).$$

où  $\sigma_p(B)$  est le spectre ponctuel de  $B$ .

L'évolution du système est décrite dans  $K$  par l'équation

$$(1.5) \quad \frac{d^2 u}{dt^2} + Bu = 0$$

pour laquelle l'énergie

$$E(u(t), \Omega) = \frac{1}{2} ( \| B^{1/2} u(t) \|_K^2 + \| u(t) \|_K^2 )$$

est conservée. On va s'intéresser aux solutions «d'énergie finie» données par

$$(2.5) \quad u(t) = e^{-itB^{1/2}} h ; \text{ où } h \in D(B^{1/2})$$

où

$$E(u(\cdot), \Omega) = \| B^{1/2} h \|_K^2$$

et plus précisément à leurs comportements asymptotiques lorsque  $t \rightarrow \pm \infty$ .

(Pour la relation entre ces solutions et la solution générale dans un cas analogue voir [14] <sup>2</sup>).

**DEFINITION 4.3.** Si  $D$  est une partie de  $\Omega$ , l'énergie contenue dans  $D$ , à l'instant  $t$  d'une solution (1.5), est définie par :

$$E(u(t), D) = \frac{1}{2} ( \| 1_D B^{1/2} u(t) \|_K^2 + \| 1_D u(t) \|_K^2 ).$$

Dans la suite, on va montrer que pour toute solution de la forme (2.5) avec

$h \in K_{ac}(B^{1/2}) \cap D(B^{1/2})$  et pour tout  $D \subset \Omega$  borné :

$$\lim_{t \rightarrow \pm \infty} E(u(t), D) = 0.$$

D'autre part, on montrera que toute solution de la forme (2.5) pour l'équation des ondes (1.5) se comporte lorsque  $t \rightarrow \pm \infty$  comme une solution de

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + Au = 0$$

et cela en dehors de  $\overline{\Omega}_1$ .

La proposition suivante est un outil pour l'obtention de ces résultats.

**PROPOSITION 4.4.** *L'opérateur  $B^{1/2}$  (resp.  $B$ ) possède la propriété de compacité locale : toute partie de  $D(B^{1/2})$  (resp.  $D(B)$ ) bornée pour la norme du graphe est précompacte dans  $K_{loc}$ .*

*Démonstration.* Soit  $P \subset D(B^{1/2})$  une partie bornée pour la norme du graphe, autrement dit il existe  $C$  telle que

$$\forall u \in P, \quad (*) \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C$$

$$(**) \quad \|\vec{u}^1\|_{H^1(\Omega_1)} \leq C$$

$$(***) \quad \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C$$

Le domaine  $\Omega_1$  étant régulier et borné il résulte de (\*\*\*) que :  $\{u|_{\Omega_1}, u \in P\}$  est précompact dans  $L^2(\Omega_1)$ .

Il résulte aussi de (\*\*\*) que  $\{u.n|_S, u \in P\}$  est borné dans  $H^{1/2}(S)$ .

Soit maintenant une boule  $B$  assez grande pour contenir  $S$  et soit  $\Sigma$  la sphère frontière de  $B$ , on a  $\Sigma \subset \Omega_2$ .

Soit  $\omega$  un ouvert voisinage d'un point de  $\Sigma$ , à tout  $u \in K$  on peut associer une fonction  $\phi_u \in H^1(\omega)$  telle que :

$$\int_{\omega} \phi_u dx = 0 \quad \phi_u \in H^1(\omega) \quad \text{et} \quad u = \nabla \phi_u \quad \text{dans} \quad \omega$$

(cela par 3.8). Moyennant (\*\*), (\*\*\*) et l'inégalité de Poincaré, on a  $\{\phi_u | u \in P\}$  est borné dans  $H^1(\omega)$ ;  $\{\Delta \phi_u | u \in P\}$  est borné dans  $L^2(\omega)$ . D'où  $\{\phi_u | u \in P\}$  est borné dans  $H^2(\omega)$ ,

en particulier

$$\left\{ u.n = \frac{\partial \phi_u}{\partial n} \Big|_{\Sigma \cap \omega} \right\}_{u \in P} \text{ est borné dans } H^{1/2}(\Sigma \cap \omega)$$

$\Sigma$  étant compact, on a que

$$\left\{ u.n \Big|_{\Sigma} \right\}_{u \in P} \text{ est borné dans } H^{1/2}(\Sigma)$$

On considère maintenant  $\Omega' = B \cap \Omega_2$ , répétant l'argument précédent, on associe à  $u \in P$ ,  $\phi_u \in H^1(\Omega')$ .

On a alors que :

$$\left\{ \Delta \phi_u \Big|_{u \in P} \right\}$$

est borné dans  $H^2(\Omega')$ . Comme  $\partial\Omega' = S \cup \Sigma$ , on a alors d'après ce qui précède

$$\left\{ u.n = \frac{\partial \phi_u}{\partial n}, u \in P \right\}$$

est borné dans  $H^{1/2}(S \cup \Sigma)$ .

Par régularité elliptique jusqu'au bord, on a alors :

$$\left\{ \phi_u \Big|_{u \in P} \text{ est borné dans } H^2(\Omega') \right\}$$

On en déduit que  $P \subset H^1(\Omega')$ , il est donc précompact dans  $L^2(\Omega')$  par le théorème de Rellich.

Autrement dit, pour toute boule  $B$ ,  $\{u \Big|_{B \cap \Omega} \Big|_{u \in P}\}$  est précompact dans  $L^2(B \cap \Omega)$ .

**PROPOSITION 4.5.** (Décroissance locale de l'énergie)

Soit  $h \in K_{ac} \cap D(B)$ , et  $D \subset \Omega$  relativement compact, alors :

$$(3.4) \quad \lim_{t \rightarrow \pm \infty} E(u(t); D) = 0$$

où

$$u(t) = e^{-itB^{1/2}} h.$$

*Démonstration.* On a,  $E(u(t); D) = \|1_D B^{1/2} e^{-itB^{1/2}} h\|_K$  or si  $h \in K_{ac} \cap D(B)$ ,

$B^{1/2} h \in K_{ac} \cap D(B^{1/2})$ . On doit donc démontrer que pour  $f \in K_{ac} \cap D(B^{1/2})$  ; (l'espace d'absolue continuité est le même pour B que pour  $B^{1/2}$ )

$$\| 1_D e^{-itB^{1/2}} f \| \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \pm \infty$$

Comme  $f \in K_{ac}$ , un calcul rapide montre que

$$\langle e^{-itB^{1/2}} f, g \rangle = \int_0^\infty e^{-it\lambda} \phi(\lambda) d\lambda$$

où  $\phi \in L^1(\mathbb{R}_+)$  est la densité de la mesure spectrale associée au couple f,g. En prolongeant  $\phi$  par 0 à tout  $\mathbb{R}$ , on voit alors que :

$$t \rightarrow \langle e^{-itB^{1/2}} f, g \rangle$$

est la transformée de Fourier d'une fonction dans  $L^1(\mathbb{R})$  donc tend vers 0 à  $\pm \infty$ .

D'autre part  $\{ e^{-itB^{1/2}} f \}_{t \in \mathbb{R}}$  est borné dans  $D(B^{1/2})$ . Comme  $B^{1/2}$  possède la propriété de compacité locale :

$$\{ 1_D e^{-itB^{1/2}} f \}_{t \in \mathbb{R}} \text{ est précompact dans } K.$$

On a donc

$$\lim_{t \rightarrow \pm \infty} \| 1_D e^{-itB^{1/2}} f \| = 0.$$

DEFINITION 6.4. *Etant donné un opérateur  $J : K \rightarrow H$ , et deux opérateurs auto-adjoints A et B sur H et K respectivement, les opérateurs d'ondes sont définis lorsqu'ils existent par :*

$$W^\pm(A,B,J) = s - \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{iBt} J^* e^{-itA} P_{ac}(A)$$

où  $P_{ac}(A)$  est le projecteur sur l'espace d'absolue continuité de A. On dit que le principe d'invariance est réalisé lorsque

$$W^\pm(\phi(A), \phi(B) ; J) = W^\pm(A,B,J)$$

pour toute fonction  $\phi$  strictement croissante, continue.

Pour les propriétés de ces opérateurs voir [5] p. 529.

Il est apparent dans la définition que l'existence des opérateurs permet de comparer



$e^{itA}$  et  $e^{itB}$  pour  $t \rightarrow \pm \infty$ .

Commençons par définir l'opérateur  $J : K \rightarrow H$ , de la manière dont il sera construit cet opérateur ne tient «compte de l'inclusion  $\Omega_1$  qu'à grande distance».

Soit  $j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  telle que :

- (a)  $0 \leq j \leq 1$
- (b)  $j(x) = 0$  pour  $x \notin \bar{\Omega}_2$
- (c)  $j(x) = 1$  pour  $|x| > R$  assez grand.

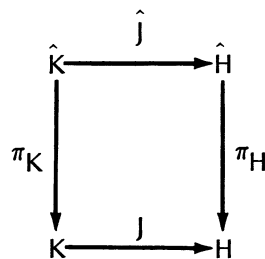
Les espaces  $J, K, \hat{J}, \hat{K}$  sont comme dans I, II.

Soit  $\hat{J} : \hat{K} \rightarrow \hat{H}$ .

Défini par  $(\hat{J}f)(x) = \begin{cases} j(x)f(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \in \Omega^c. \end{cases}$

On a  $(\hat{J}^*f)(x) = f(x)j(x)$  pour  $x \in \Omega$ .

Il est évident que  $\hat{J}$  et  $\hat{J}^*$  sont bornés, soit  $\pi_K$  (resp.  $\pi_H$ ) le projecteur de  $\hat{K}$  (resp.  $\hat{H}$ ) sur  $K$  (resp.  $H$ ), et considérons le diagramme :



On vérifie facilement que :  $\pi_K f = 0 \Rightarrow (\pi_H \circ \hat{J})f = 0$ . Il en résulte qu'on peut définir  $J$  comme l'opérateur rendant le diagramme commutatif.

Nous allons appliquer la méthode de S. Birman, adaptée par C. Lyford dans [7] .

Il suffit alors de vérifier les deux lemmes suivants, ce qui se fait facilement comme dans [14] (2) - Appendice.

LEMME 7.4.

(a) L'opérateur  $J$  (resp.  $J^*$ ) applique  $D(B)$  dans  $D(A)$  (resp.  $D(A)$  dans  $D(B)$ ) et est continu pour les normes du graphe.

(b) Pour tout intervalle  $L \subset \mathbb{R}$  compact, ne rencontrant pas  $\sigma(T)$  ; les deux opérateurs

$$(JJ^* - I)P_{ac}(L,A) ; (J^*J - I)P_{ac}(L,B)$$

sont compacts dans  $H$  et  $K$  respectivement.

LEMME 8.4. L'opérateur  $(BJ^* - J^*A)P(L,A)$  défini sur  $H$  est de trace finie. ( $L$  étant un intervalle compact de  $\mathbb{R}$ ).

PROPOSITION 8.4.

(a) Les opérateurs d'ondes  $W_{\pm}(A,B,J)$  existent, ils sont partiellement isométriques, et on a :

$$B_{ac} = W_{\pm} A W_{\pm}^*$$

(b) Le principe d'invariance est vérifié, en particulier

$$W_{\pm}(A^{1/2}, B^{1/2}, J) = W_{\pm}(A,B,J).$$

*Démonstration.* Moyennant les deux lemmes précédents, les hypothèses de [7] sont vérifiées, d'où la proposition.

## REFERENCES

- [1] S. AGMON. «*Lectures on Elliptic Boundary value problems*». Van Nostrand (1965).
- [2] E.B. BYKHOWSKII. «*Résolution des problèmes mixtes pour les systèmes de Maxwell*». Vestnik Leningrad Univ. (1957), n° 13, p. 50-56 (en russe).
- [3] K.O. FRIEDERICHS, H. WEYL. «*Differential forms on Riemannian Manifolds*». C.P.A.M. 8, 1955.
- [4] L. HORMANDER. «*Linear partial differential operators*». Springer-Verlag (1963).
- [5] T. KATO. «*Perturbation theory for linear operators*». Springer-Verlag.
- [6] A.E.H. LOVE. «*A treatise on the mathematical theory of elasticity*». Dover-New-York.
- [7] W.C. LYFORD. «*A two Hilbert spaces scattering theorem*». Math. Ann. 217 (1975).
- [8] A. MAJDA. «*Outgoing solutions for perturbations of  $-\Delta$* ». J. of Diff. Eq. 16 (1974).
- [9] C. MIRANDA. «*Partial differential equations of elliptic type*». Springer-Verlag.
- [10] E. SANCHEZ-PALENCIA. «*Perturbations spectrales liées à la vibration d'un corps élastique dans l'air, dans «Singular Perturbations and boundary layer theory 1977»*». Lectures Notes in Math. Springer n° 594.
- [11] N. SCHENK and D. THOE. «*Outgoing solutions of  $(-\Delta + q - k^2)u = f$  in an exterior domain*». J. of Math. Anal. Appl. 31 (1970).
- [12] W. STEINSPRING. «*A sufficient condition for an integral operators to have a trace*». J. Reine Angew Math. 200 (1958).
- [13] S. STEINBERG. «*Meromorphic families of compact operators*». A.R.M.A. 31 (1968).
- [14] C.H. WILCOX <sup>(1)</sup>. «*Scattering states and wave operators*». J.F.A. 12 (1973).  
C.H. WILCOX <sup>(2)</sup>. «*Scattering theory for the d'Alembert's wave equation*». Lectures Notes n° 442 Springer.
- [15] P.D. LAX, R.S. PHILLIPS. «*Scattering theory*». Academic Press (1967).
- [16] J.L. LIONS. «*Equations différentielles opérationnelles*». Springer-Verlag (1961).

(Manuscrit reçu le 3 novembre 1979)