

THIERRY BRIÈRE
GEORGES DUVAUT
PAUL ROUGEE

Application des méthodes variationnelles à la cristallisation d'un métal par passage dans une gaine de refroidissement

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 2, n° 3-4 (1980), p. 219-247

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1980_5_2_3-4_219_0

© Université Paul Sabatier, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**APPLICATION DES METHODES VARIATIONNELLES A LA
CRISTALLISATION D'UN METAL PAR PASSAGE DANS
UNE GAINÉ DE REFROIDISSEMENT**

Thierry Brière (*)

() Thierry Brière est mort accidentellement en montagne en mai 1978 en laissant entièrement terminé le travail présenté ici et qui est un prolongement de sa thèse de troisième cycle. En vue de sa publication nous avons simplement dû rédiger une introduction, purement descriptive du contenu, et reconstituer la bibliographie qui manquait. Nous avons également effectué quelques retouches de rédaction portant exclusivement sur la forme et non sur le fond, en particulier pour rendre plus concises les démonstrations qui étaient rédigées avec une abondance de détails inhabituelle dans un article de revue scientifique.*

Georges Duvaut ⁽¹⁾ et Paul Rougee ⁽²⁾

(1) Université P. et M. Curie, Laboratoire de Mécanique Théorique, 4 place Jussieu 75995 Paris.

(2) Université Paris-Nord CSP, Avenue J.B. Clément, 93430 Villetaneuse.

Résumé : La cristallisation d'un métal fondu circulant dans une gaine de refroidissement cylindrique, sous diverses conditions, est étudiée en supposant l'existence d'un front de cristallisation constituant une frontière libre inconnue. Des changements de fonction inconnue du type BAIOCCHI sont utilisés. Des résultats d'existence de solutions faibles sont démontrés, pour le problème d'évolution et pour le problème stationnaire, ainsi que certaines propriétés de ces solutions.

Summary : Crystallisation of a molten metal crossing through a cooling down girdle, under various circumstances, is studied supposing existence of a crystallization front which constitute an unknown free frontier. Some unknown function changes of BAIOCCHI model are used. Some existence of weak solutions results are proved, for the evolution problem and the stationary problem, as well as some properties of these solutions.

I. - INTRODUCTION

En 1971, C. BAIOCCHI introduit à propos d'un problème de filtration à travers une digue poreuse un changement de fonction inconnue qui lui permet d'appliquer la théorie des inéquations variationnelles à ce problème comportant un front de changement de phase inconnu [1]. Cette méthode fut ensuite étendue à d'autres problèmes de STEFAN à deux phases par différents auteurs ([2], [3], [4], ...).

Dans [5], nous nous sommes inspirés de ces travaux pour traiter un problème de cristallisation d'un métal fondu s'écoulant dans une gaine de refroidissement. Deux situations physiques différentes y furent envisagées, conduisant à des conditions aux limites différentes. Pour la première, on traita le problème stationnaire, correspondant au cas où le front de cristallisation est immobile par rapport à la gaine, et pour la seconde le problème d'évolution.

Dans le présent article, nous reprenons la première de ces situations et nous étudions successivement le problème d'évolution, le problème stationnaire et la convergence du premier vers le second.

Les paragraphes 2 et 3 présentent la situation physique envisagée et sa modélisation. En ce qui concerne le transfert de chaleur au niveau de la gaine deux cas sont en fait étudiés : l'un pour lequel ce transfert est régi par la loi de Newton avec un coefficient α , l'autre, considéré comme le cas limite du précédent correspondant à α infini, pour lequel la température du métal au contact de la gaine est imposée égale à celle de l'eau de refroidissement.

Les paragraphes 4, 5, 6 sont consacrés à la mise en équation du problème d'évolution, au changement de fonction inconnue et aux formulations variationnelles dans les deux cas α fini et α infini (relations (24) et (25)).

Le paragraphe 7 établit d'abord l'existence et l'unicité de la solution u_α du premier de ces problèmes sur l'intervalle de temps $[0, T]$. Nous y comparons ensuite les solutions relatives à deux valeurs différentes de α . Nous établissons enfin un résultat de convergence lorsque α tend vers l'infini, de u_α vers la solution u_∞ du second problème.

Le paragraphe 8 reprend les mêmes questions pour les problèmes stationnaires : changement de variable, formulation variationnelle, existence et unicité des solutions w_α et w_∞ . Nous établissons en outre quelques propriétés de ces solutions, et en particulier la convergence de w_α vers w_∞ .

Enfin, le paragraphe 9 établit la convergence de u_α vers w_α et de u_∞ vers w_∞ lorsque T tend vers l'infini.

2. - PRESENTATION DU PROBLEME PHYSIQUE

Le système de cristallisation que nous considérons est constitué (fig. 1) d'un conduit cylindrique A, de section quelconque, muni d'une gaine de refroidissement, et d'une plate-forme mobile B. Aux instants précédant le phénomène étudié, B est en contact avec la partie inférieure de A, et obstrue le conduit cylindrique (fig. 2). Alors le métal occupe l'intérieur de A où on le fait cristalliser grâce à un courant d'eau continu qui traverse la gaine. Lorsqu'un noyau suffisant de métal s'est solidifié, la plate-forme B descend à vitesse constante entraînant le lingot de métal solide qui se constitue (fig. 3). On ajoute du métal fondu au fur et à mesure dans le conduit pour y maintenir le niveau constant.

On se propose d'étudier l'évolution de la distribution de température et de la position du front de cristallisation, pendant un intervalle fini de temps $[0, T]$ et leurs limites respectives lorsque T tend vers l'infini.

3. - MODELISATION

Le métal fondu que l'on ajoute dans A, pour maintenir le niveau constant, et celui qui constitue la phase liquide à l'intérieur du conduit, ont une température supérieure à, mais voisine de la température de fusion-cristallisation T_0 . Ainsi on peut supposer que toute particule de métal se trouvant au niveau supérieur de A est à l'état liquide, à la température T_0 , et que la température de la phase liquide du métal à l'intérieur de A est uniforme et égale à T_0 . Sur Γ_1 , frontière entre A et la gaine, on définit le refroidissement par la loi de Newton :

$$-\frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T - T_1)$$
 où T_1 est la température supposée constante de l'eau à son entrée dans la gaine de refroidissement, $T_1 < T_0$, et où T et $-\frac{\partial T}{\partial n}$ sont respectivement la température du métal

et le flux de chaleur au travers du conduit cylindrique au point considéré. Le coefficient de Newton α positif dépend essentiellement de la conductivité thermique du matériau qui constitue la paroi A.

Le métal occupant l'intérieur de A à l'instant initial est en place depuis assez longtemps pour que l'on considère les particules au contact de B à la température T_1 , à cet instant.

Enfin la température de toute particule, descendant dans A, tendra progressivement vers T_1 . Aussi on suppose que les dimensions du conduit (hauteur H grande par rapport à la section) et la vitesse V de la plate-forme sont telles que toute particule de métal en sortant de A soit à la température T_1 .

Remarque. Aucune hypothèse n'est faite sur le mouvement de la phase liquide du métal dans le conduit. Un grain de métal dès qu'il est solidifié, fait partie du lingot qui se constitue et, entraîné par la plate-forme, se déplace à la vitesse de celle-ci. En conséquence le mouvement de la phase solide est connu : il s'agit d'un mouvement de translation rectiligne s'effectuant à vitesse constante.

4. - MISE EN EQUATION DU PROBLEME

L'espace euclidien \mathcal{E} lié au système de cristallisation A est rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$, avec O dans la section supérieure de A et \vec{y}_3 dirigé selon l'axe de A et orienté dans le sens du déplacement de B, dont la vitesse est $\vec{V} = V\vec{y}_3$ (fig. 3). Tout point y de \mathcal{E} est identifié à ses coordonnées (y_1, y_2, y_3) dans R. Toute particule de métal atteignant la base inférieure de A ($y_3 = H$) est à la température T_1 . Nous pouvons donc limiter notre étude à l'ouvert borné Ω de \mathcal{E} dont la frontière est la réunion de Γ_0, Γ_1 et Γ_2 , où Γ_0 et Γ_2 sont les sections supérieure et inférieure du conduit.

On désigne par $\mathcal{L}(t)$ la surface front de cristallisation à l'instant t, inconnue a priori pour $t \in]0, T[$. L'évolution est supposée telle que toute particule de métal qui s'est solidifiée ne repasse pas à l'état liquide. Soit $y_3 = l_0(y_1, y_2)$ l'équation de $\mathcal{L}(0)$ dans R. Si $y_3 > l_0(y_1, y_2)$ [resp^t : $y_3 < l_0(y_1, y_2)$] le point y de Ω est un point de la phase solide à l'instant initial (resp^t : de la phase liquide). Il en résulte que $\mathcal{L}(t)$ pourra être cherché dans la partie $\omega(t) = \{ y, y \in \Omega, y_3 - l_0(y_1, y_2) \leq Vt \}$ de Ω .

Soit O' le point lié à la plate-forme B défini par $\vec{OO}' = Vt\vec{y}_3$. Le trièdre orthonormé $R' = (O', \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ est lié à B. Tout point x lié à B est identifié à ses coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans R'. On écrit sous la forme $t = l(x)$ l'équation de $\mathcal{L}(t)$ dans R'. Pour tout point x coïncidant à t avec un point y de $\omega(t)$, $t > l(x)$ [resp^t : $t < l(x)$, $t = l(x)$] entraîne que la particule qui se trouve en x à t est à l'état solide (resp^t : à l'état liquide, en cours de changement de phase).

Soit L l'application à valeurs dans \mathbb{R}^+ définie par :

$$\forall t \in]0, T[, \forall y \in \omega(t) \quad L(y, t) = l(y_1, y_2, y_3 - Vt)$$

Alors $t = L(y, t)$ est une équation de $\mathcal{L}(t)$ dans R et on vérifie aisément les :

PROPRIETES. $\forall t \in]0, T[, \forall y \in \omega(t)$, on a :

$$(1) \quad \forall \tau \in]0, T[, 0 \leq y_3 + V(\tau - t) \leq H : L(y_1, y_2, y_3 + V(\tau - t), \tau) = L(y, t)$$

d'où résulte en dérivant par rapport à τ en $\tau = t$:

$$\frac{\partial L}{\partial t}(y,t) + v \frac{\partial L}{\partial y_3}(y,t) = 0$$

$$(2) \quad (y_1, y_2, y_3 + v(L(y,t) - t)) \in \mathcal{L}(L(y,t))$$

$$(3) \quad t = L(y,t) \Rightarrow 1 - \left(\frac{\partial L}{\partial t}(y,t) + \vec{V}(y,t) \cdot \nabla L(y,t) \right) = 0$$

où $\vec{V}(y,t)$ est la vitesse par rapport à R de $\mathcal{L}(t)$ en y à t , et où ∇L est le gradient de L par rapport à y . Remarquer que si $t > L(y,t)$, $L(y,t)$ est l'instant où la particule qui se trouve en y à t cristallise.

Le problème alors consiste à chercher le front de cristallisation $\mathcal{L}(t)$ à chaque instant, ainsi que le champ de température $T(y,t) \leq T_0$ défini sur $\overline{\Omega} \times]0, T[$, égal à T_0 sur Γ_0 et à T_1 sur Γ_2 , égal à l'instant initial à une fonction connue T_i définie sur $\overline{\Omega}$ et à valeurs dans $[T_0, T_1]$, et vérifiant à chaque instant $t \in]0, T[$:

$$\text{- sur } \Gamma_1 : -\frac{\partial T}{\partial n}(y,t) = \alpha(T(y,t) - T_1)$$

- dans le domaine où le métal est fondu ou bien change de phase, défini par $y \in \omega(t)$ et $t \leq L(y,t) : T(y,t) = T_0$

- dans le domaine où le métal est cristallisé, défini par $y \notin \omega(t)$ ou $(y \in \omega(t), t > L(y,t))$: l'équation de la chaleur. On écrit celle-ci, avec la conductivité thermique et la chaleur spécifique normalisées, dans le repère R' puis on effectue le passage au repère R :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(y,t) + v \frac{\partial T}{\partial y_3}(y,t) - \Delta T(y,t) = 0$$

- sur le front de cristallisation $\mathcal{L}(t)$, le bilan thermique suivant. Notant $\vec{n}(y,t)$ et $\vec{q}(y,t)$ la normale unité à $\mathcal{L}(t)$ dirigée vers le métal fondu et le flux de chaleur au point y de $\mathcal{L}(t)$, $\vec{q}(y,t) \cdot \vec{n}(y,t)$ est la chaleur nécessaire à la cristallisation du volume de métal

$$(\vec{V}(y,t) - v \vec{y}_3) \cdot \vec{n}(y,t)$$

puisque $\vec{V}(y,t) - v \vec{y}_3$ est la vitesse de $\mathcal{L}(t)$ par rapport au métal solidifié en y à t . Si donc k est la chaleur latente de cristallisation du métal ($k < 0$), compte tenu de ce que $\vec{n}(y,t)$ est parallèle à $\vec{\nabla}(t - L(y,t))$ on a :

$$\forall y \in \mathcal{L}(t) \quad \vec{q}(y,t) \cdot \vec{\nabla} L(y,t) = k(\vec{V}(y,t) - v \vec{y}_3) \cdot \vec{\nabla} L(y,t)$$

ce qui compte tenu de (3), de (1) et de ce que \vec{q} est égal à $-\nabla T$ s'écrit encore :

$$\forall y \in \mathcal{L}(t) \quad -\nabla T(y,t) \cdot \vec{n}(y,t) = k$$

Posons

$$\theta(y,t) = \frac{T(y,t) - T_0}{T_1 - T_0}, \quad K = \frac{k}{T_1 - T_0}, \quad \theta_i(y) = \frac{T_i(y) - T_0}{T_1 - T_0}$$

$$\Omega_0(t) = \{y, y \in \Omega, \gamma_3 - l_0(y_1, y_2) < vt, t < L(y,t)\}$$

$$\Omega_1(t) = \{y, y \in \Omega, \gamma_3 - l_0(y_1, y_2) < vt, t > L(y,t)\}$$

$$\Omega_2(t) = \{y, y \in \Omega, \gamma_3 - l_0(y_1, y_2) > vt\}$$

$$\Sigma(t) = \{y, y \in \Omega, \gamma_3 - l_0(y_1, y_2) = vt\}$$

On a :

$$(a) \quad k < 0 \Rightarrow K > 0$$

$$(b) \quad \forall (y,t) \in \Omega \times]0, T[, T(y,t) \leq T_0 \Rightarrow \theta(y,t) \geq 0$$

$$(c) \quad \forall y \in \Omega, T_1 \leq T_i(y) \leq T_0 \Rightarrow 0 \leq \theta_i(y) \leq 1$$

$$(d) \quad \forall y \in \Omega, \gamma_3 \leq l_0(y_1, y_2), \theta_i(y) = 0$$

$$(e) \quad \forall t \in]0, T[, t > \frac{H - \inf_{y \in \Omega} l_0(y_1, y_2)}{v}, \quad \Omega_2(t) = \Phi,$$

$$\Omega_0(t) \cup \mathcal{L}(t) \cup \Omega_1(t) = \Omega$$

(f) A chaque instant t , la région $\Omega_2(t)$ comme $\Sigma(t)$ est connue ; par contre $\Omega_1(t)$ et $\Omega_0(t)$ comme $\mathcal{L}(t)$ sont des inconnues.

Le problème consiste à chercher un champ $\theta(y,t)$, $(y,t) \in \bar{\Omega} \times [0, T]$, satisfaisant pour tout $t \in]0, T[$:

$$(4) \quad \forall y \in \Omega : \theta(y,t) \geq 0$$

- (5) $\forall y \in \Omega_0(t) \cup \mathcal{L}(t) : \theta(y,t) = 0$
- (6) $\forall y \in \Omega_1(t) \cup \Omega_2(t) \cup (\Sigma(t) - \mathcal{L}(t)) :$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(y,t) + V \frac{\partial \theta}{\partial y_3}(y,t) - \Delta \theta(y,t) = 0$$
- (7) $\forall y \in \Gamma_0 : \theta(y,t) = 0$
- (8) $\forall y \in \Gamma_1 : -\frac{\partial \theta}{\partial n}(y,t) = \alpha(\theta(y,t) - 1)$
- (9) $\forall y \in \Gamma_2 : \theta(y,t) = 1$
- (10) $\forall y \in \mathcal{L}(t) : -\vec{\nabla} \theta(y,t) \cdot \vec{\nabla} L(y,t) = K$

où $\Sigma(t) - \mathcal{L}(t) = \{ y, y \in \Sigma(t), y \notin \mathcal{L}(t) \}$, ainsi que la condition initiale

(11) $\forall y \in \Omega : \theta(y,0) = \theta_i(y)$

5. - CHANGEMENT DE FONCTION INCONNUE

Par un raisonnement analogue à celui que nous ferons dans le paragraphe (8-5), nous pouvons montrer que, sous des hypothèses ici vérifiées, si une fonction est solution d'une inéquation variationnelle alors elle est de classe C^1 sur Ω . Or le gradient de la fonction θ est discontinu à la traversée de $\mathcal{L}(t)$, donc nous ne pouvons espérer que θ soit solution d'une inéquation variationnelle. Alors suivant une idée de C. Baiocchi [1], nous changeons de fonction inconnue de manière à augmenter la régularité de la fonction à étudier. On définit la nouvelle fonction inconnue u sur $\bar{\Omega} \times [0,T]$, par :

(12)
$$u(y,t) = \int_{\sup(0,t-\frac{y_3}{V})}^t \theta(y_1,y_2,y_3 + V(\tau - t), \tau) d\tau$$

Remarques.

(i) Pour tout $t \in]0,T[$, $u(y,t)$ est nul sur $\Omega_0(t) \cup \mathcal{L}(t)$ et vaut

$$\int_{L(y,t)}^t \theta(y_1,y_2,y_3 + V(\tau - t), \tau) d\tau \quad \text{et} \quad \int_0^t \theta(y_1,y_2,y_3 + V(\tau - t), \tau) d\tau$$

sur $\Omega_1(t)$ et $\Omega_2(t) \cup \mathcal{L}(t)$ respectivement.

(ii) Si la fonction $u(y,t)$ est connue, on obtient $\theta(y,t)$ par la relation :

$$\forall (y,t) \in \Omega \times [0,T], \frac{\partial u}{\partial t}(y,t) + V \frac{\partial u}{\partial y_3}(y,t) = \theta(y,t)$$

(iii) $u(y,t)$ est l'intégrale de la «température θ » de la particule qui se trouve en y à t depuis soit l'instant initial ($y_3 - l_0(y_1, y_2) \geq Vt$) soit l'instant où elle a cristallisé ($y_3 - l_0(y_1, y_2) < Vt$), jusqu'à l'instant t considéré.

Propriétés que vérifie la nouvelle fonction inconnue.

Si la fonction $\theta(y,t)$ vérifie ((4)...(11)) alors la fonction $u(y,t)$ satisfait pour tout $t \in]0, T[$:

$$(13) \quad \forall y \in \Omega : u(y,t) \geq 0$$

$$(14) \quad \forall y \in \mathcal{L}(t) : u(y,t) = 0, \vec{\nabla} u(y,t) = \vec{0}$$

$$(15) \quad \forall y \in \Omega_0(t) : u(y,t) = 0$$

$$(16) \quad \forall y \in \Omega_1(t) : \frac{\partial u}{\partial t}(y,t) + V \frac{\partial u}{\partial y_3}(y,t) - \Delta u(y,t) = -K$$

$$(17) \quad \forall y \in \Omega_2(t) \cup (\Sigma(t) - \mathcal{L}(t)) :$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(y,t) + V \frac{\partial u}{\partial y_3}(y,t) - \Delta u(y,t) = \theta_i(y_1, y_2, y_3 - Vt)$$

$$(18) \quad \forall y \in \Gamma_0 : u(y,t) = 0$$

$$(19) \quad \forall y \in \Gamma_1 : -\frac{\partial u}{\partial n}(y,t) = \alpha(u(y,t) - \inf(t, \frac{y_3}{V}))$$

$$(20) \quad \forall y \in \Gamma_2 : \frac{\partial u}{\partial t}(y,t) + V \frac{\partial u}{\partial n}(y,t) = 1$$

ainsi que la condition initiale

$$(21) \quad \forall y \in \Omega, u(y,0) = 0$$

Remarques.

(i) La fonction u et son gradient sont continus à la traversée de $\mathcal{L}(t)$.

(ii) Sur Γ_2 , la condition de type Dirichlet pour la fonction θ correspond à une relation entre la dérivée normale de u et sa dérivée par rapport au temps.

6. - FORMULATION VARIATIONNELLE

On suppose θ suffisamment régulière pour que $u(t) = u(\cdot, t)$ soit dans $H^1(\Omega)$ pour tout $t \in [0, T]$. On pose :

$$W = \{v, v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_0} = 0\}, \quad \mathcal{C} = \{v, v \in W, v \geq 0 \text{ sur } \Omega\}$$

On définit sur $\overline{\Omega} \times [0, T]$, la fonction g par :

$$\begin{aligned} \cdot y_3 - l_0(y_1, y_2) < \forall t : g(y, t) = -K \\ \cdot y_3 - l_0(y_1, y_2) \geq \forall t : g(y, t) = \theta_i(y_1, y_2, y_3 - \forall t) \end{aligned}$$

La fonction g est parfaitement déterminée par les données du problème et elle est nulle sur $\Sigma(t)$. Avec l'hypothèse ci-dessus, « u satisfait (13),..., (21)» est équivalent à « u satisfait (22), (14), (23), (15), (19), (20), (21)», avec :

$$(22) \quad \forall t \in [0, T], u(t) \in \mathcal{C}$$

$$(23) \quad \forall t \in]0, T[, \forall y \in \Omega_+(t) = \Omega_1(t) \cup \Omega_2(t) \cup (\Sigma(t) - \mathcal{L}(t)) :$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(y, t) + v \frac{\partial u}{\partial y_3}(y, t) - \Delta u(y, t) = g(y, t)$$

En prenant une fonction quelconque v de W , on multiplie l'équation (23) par $v(y) - u(y, t)$, on intègre sur $\Omega_+(t)$, ensuite on utilise formellement l'intégration par parties, on obtient (la référence à y est supprimée) :

$$\begin{aligned} \forall v \in W, \int_{\Omega_+(t)} \frac{\partial u}{\partial t}(t) (v-u(t)) d\Omega + v \int_{\Omega_+(t)} \frac{\partial u}{\partial y_3}(t) (v-u(t)) d\Omega \\ - \int_{\partial\Omega_+(t)} \frac{\partial u}{\partial n}(t) (v-u(t)) d\partial\Omega_+ + \int_{\Omega_+(t)} \vec{\nabla} u(t) \cdot \vec{\nabla} (v-u(t)) d\Omega \\ = \int_{\Omega_+(t)} g(t) (v-u(t)) d\Omega \end{aligned}$$

Nous avons montré, dans [5] p. I.13, que l'appartenance de u à $H^1(\Omega)$ d'une part, et les propriétés (19), (20) et (15) d'autre part, impliquent que Γ_1 et Γ_2 sont inclus dans $\partial\Omega_+(t)$ à un ensemble de mesure nulle près pour la mesure de Γ , alors :

$$\partial\Omega_+(t) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \mathcal{L}(t) \cup (\partial\Omega_+(t) \cap \Gamma_0)$$

En utilisant (18), (19), (20) et (14) on obtient l'équation variationnelle sur $\Omega_+(t)$:

$$\begin{aligned} \forall v \in W, \quad & \int_{\Omega_+(t)} \frac{\partial u}{\partial t}(t) (v-u(t)) d\Omega + \frac{1}{V} \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial t}(t) (v-u(t)) d\Gamma \\ & + v \int_{\Omega_+(t)} \frac{\partial u}{\partial y_3}(t) (v-u(t)) d\Omega + \int_{\Omega_+(t)} \vec{\nabla} u(t) \cdot \vec{\nabla} (v-u(t)) d\Omega \\ & + \alpha \int_{\Gamma_1} u(t) (v-u(t)) d\Gamma = \int_{\Omega_+(t)} g(t) (v-u(t)) d\Omega \\ & + \alpha \int_{\Gamma_1} \inf(t, \frac{y_3}{V}) (v-u(t)) d\Gamma + \frac{1}{V} \int_{\Gamma_2} (v-u(t)) d\Gamma \end{aligned}$$

Posant $\int_{\Omega_+(t)} = \int_{\Omega} - \int_{\Omega_o(t)}$, remarquant que sur $\Omega_o(t)$ g est égale à $-K$ et que u est nulle,

et en n'utilisant que des fonctions test v dans \mathcal{C} , on déduit finalement de (22), (23), (14), (15), (19), (20), (21) que u satisfait la propriété variationnelle :

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(t) \in \mathcal{C}, \forall t \in [0, T] \text{ pp, } \forall v \in \mathcal{C} : \\ (u'(t), v-u(t))_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{V} (u'(t), v-u(t))_{L^2(\Gamma_2)} + a(u(t), v-u(t)) \\ \geq (f(t), v-u(t)) \\ u(y, 0) = 0, \forall y \in \Omega \end{array} \right.$$

Où on a posé :

- $\frac{\partial u}{\partial t}(t) = u'(t)$
- $(\cdot, \cdot)_E$ produit scalaire de l'espace de Hilbert E
- $a(u, v) = V \left(\frac{\partial u}{\partial y_3}, v \right)_{L^2(\Omega)} + (\vec{\nabla} u, \vec{\nabla} v)_{[L^2(\Omega)]^3} + \alpha(u, v)_{L^2(\Gamma_1)}$
- $(f(t), v) = (g(t), v)_{L^2(\Omega)} + \alpha(\inf(t, \frac{y_3}{V}), v)_{L^2(\Gamma_1)} + \frac{1}{V} (1, v)_{L^2(\Gamma_2)}$

Variante

Supposons que le refroidissement sur Γ_1 soit tel que nous puissions le modéliser par « $T=T_1$ sur Γ_1 ». Les autres conditions étant inchangées, nous sommes conduits pour u défini par

(12) à la formulation variationnelle suivante :

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(t) \in \hat{\mathcal{C}}(t), \forall t \in [0, T] \text{ pp, } \forall v \in \hat{\mathcal{C}}(t) : \\ (u'(t), v-u(t))_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{V} (u'(t), v-u(t))_{L^2(\Gamma_2)} + \hat{a}(u(t), v-u(t)) \\ \geq (\hat{f}(t), v-u(t)) \\ u(y, 0) = 0, \forall y \in \Omega \end{array} \right.$$

où l'on a défini :

$$\begin{aligned} \cdot \quad \hat{\mathcal{C}}(t) &= \left\{ v, v \in W, v \geq 0 \text{ sur } \Omega, v(y, t) = \inf\left(t, \frac{y_3}{V}\right) \text{ sur } \Gamma_1 \right\} \\ \cdot \quad \hat{a}(u, v) &= V \left(\frac{\partial u}{\partial y_3}, v \right)_{L^2(\Omega)} + (\vec{\nabla} u, \vec{\nabla} v)_{[L^2(\Omega)]^3} \\ \cdot \quad (\hat{f}(t), v) &= (g(t), v)_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{V} (1, v)_{L^2(\Gamma_2)} \end{aligned}$$

Remarques.

(i) La condition (20) implique que la dérivée de la fonction inconnue apparaît de façon non classique dans l'inéquation variationnelle.

(ii) La définition du convexe $\hat{\mathcal{C}}(t)$ vient de la substitution de la condition « $u(y, t) = \inf\left(t, \frac{y_3}{V}\right)$ » à la condition « $-\frac{\partial u}{\partial n}(y, t) = \alpha(u(y, t) - \inf\left(t, \frac{y_3}{V}\right))$ » sur la frontière Γ_1 et nous conduit à un système variationnel où le convexe dépend du temps.

7. - THEOREMES D'EXISTENCE ET UNICITE. PROPRIETE

THEOREME 1. Sous les hypothèses : « $\theta_i \in L^2(\Omega)$ », « $\frac{\partial \theta_i}{\partial y_3} \in L^2(\Omega)$ » et « l_0 est lipschitzienne», pour tout α , strictement positif donné, il existe un u_α unique solution de (24), dans la classe :

$$u_\alpha, u'_\alpha \in L^2(0, T; W) \cap L^\infty(0, T; Y)$$

où Y est le complété de $X = \left\{ v, v \in C^1(\bar{\Omega}), v = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \right\}$ pour la norme $(\| \cdot \|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{V} \| \cdot \|_{L^2(\Gamma_2)}^2)^{1/2}$.

Démonstration. Nous vérifions que le problème variationnel (24) satisfait les hypothèses du théorème sur les inéquations paraboliques monotones énoncé dans [6], ce qui établira le résultat.

Les hypothèses sur W et Y , ainsi que \mathcal{C} convexe fermé et $u(0) = 0 \in \mathcal{C}$ sont immédiates. On remarquera, pour la suite, que d'une part $\left\{ (\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{V} (\cdot, \cdot)_{L^2(\Gamma_2)} \right\}$ est le produit scalaire sur Y et que d'autre part $|\vec{\nabla} \cdot |_{[L^2(\Omega)]^3}$ est une norme sur W .

Les autres hypothèses à vérifier sont :

$f \in L^2(0, T; W')$ où W' est le dual de W . Ceci résulte, en utilisant Cauchy-Schwartz de ce que l'on a pour v dans $L^2(0, T; W)$:

$$\begin{aligned} |(f(t), v(t))| &= \left| -K \int_{\Omega - \Omega_2(t)} v(y, t) d\Omega + \int_{\Omega_2(t)} \theta_i(y_1, y_2, y_3 - Vt) v(y, t) d\Omega \right. \\ &\quad \left. + \alpha \int_{\Gamma_1} \inf\left(t, \frac{y_3}{V}\right) v(y, t) d\Gamma + \frac{1}{V} \int_{\Gamma_2} v(y, t) d\Gamma \right| \\ &\leq \left[K(\text{mes } \Omega)^{1/2} + |\theta_i|_{L^2(\Omega)} \right] |v(t)|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{V} (\alpha H + 1)(\text{mes } \Gamma)^{1/2} |v(t)|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq \beta |v(t)|_W \end{aligned}$$

où β est une constante indépendante de v .

$f' \in L^2(0, T; W')$. On a de même, pour v dans $L^2(0, T; W)$ et en remarquant que $\theta_i(y_1, y_2, y_3 - Vt)$ est nul sur $\Sigma(t)$:

$$\begin{aligned} |(f'(t), v(t))| &= \left| -V \int_{\Omega_2(t)} \frac{\partial \theta_i}{\partial y_3}(y_1, y_2, y_3 - Vt) v(y, t) d\Omega \right. \\ &\quad \left. + \alpha \int_{\Gamma_1, y_3 > Vt} v(y, t) d\Gamma_1 + V \int_{\Sigma(t)} [\theta_i(y_1, y_2, y_3 - Vt) + K] v(y, t) d\Sigma(t) \right| \\ &\leq V \left| \frac{\partial \theta_i}{\partial y_3} \right|_{L^2(\Omega)} |v(t)|_{L^2(\Omega)} + \alpha (\text{mes } \Gamma)^{1/2} |v(t)|_{L^2(\Gamma_1)} \\ &\quad + KV (\text{mes } \Sigma(t))^{1/2} |v(t)|_{L^2(\Sigma(t))} \leq \beta_1 |v(t)|_W \end{aligned}$$

à condition toutefois de vérifier que $\text{mes } \Sigma(t)$ est borné et qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que :

$$\forall t \in [0, T], \forall v \in W, \quad |v|_{L^2(\Sigma(t))} \leq \gamma |v|_W$$

Or, dans la translation de vecteur $V t \vec{y}_3$, $\Sigma(t)$ est l'intersection de la translaturée de $\mathcal{L}(0)$ et de Ω . On a donc, puisque l_0 est lipschitzienne :

$$\text{mes } \Sigma(t) \leq \alpha = \text{mes } \mathcal{L}(0) \leq c \text{ mes } \Gamma_0$$

où c est la constante de Lipschitz, ainsi que, en notant $\Gamma_{0,t}$ la projection sur Γ_0 de $\Sigma(t)$ parallèlement à \vec{y}_3 :

$$|v(t)|_{L^2(\Sigma(t))}^2 = \int_{\Sigma(t)} v(y,t)^2 d\Sigma(t) \leq c \int_{\Gamma_{0,t}} v^2(y_1, y_2, l_0(y_1, y_2) + Vt, t) dy_1 dy_2$$

L'existence de γ résultera alors de ce que en intégrant $2v \frac{\partial v}{\partial y_3}$ sur l'ouvert

$$\Omega_{0,t} = \left\{ y, y \in \Omega, H > Vt + l_0(y_1, y_2) > y_3 > l_0(y_1, y_2) \right\}$$

qui est la partie de Ω comprise entre $\Sigma(t)$ et la partie $\Sigma_t(0)$ de $\mathcal{L}(0)$ antécédent de $\Sigma(t)$ dans la translation, on obtient pour tout v dans $H^1(\Omega)$, en utilisant en particulier la relation $2ab \leq a^2 + b^2$:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{0,t}} v^2(y_1, y_2, l_0(y_1, y_2) + Vt) dy_1 dy_2 &= \int_{\Gamma_{0,t}} v^2(y_1, y_2, l_0(y_1, y_2)) dy_1 dy_2 \\ + 2 \int_{\Omega_{0,t}} v(y) \frac{\partial v}{\partial y_3}(y) d\Omega &\leq |v|_{L^2(\mathcal{L}(0))}^2 + |v|_{\Omega_{0,t}}^2 + \left| \frac{\partial v}{\partial y_3} \right|_{\Omega_{0,t}}^2 \leq \gamma |v|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

$$f(0) \in Y.$$

$$\forall v \in W : (f(0), v) = \int_{\Omega} \theta_i(y) v(y) d\Omega + \frac{1}{V} \int_{\Gamma_2} v(y) d\Gamma = (\theta_i, v)_Y$$

puisque θ_i est égale à 1 sur Γ_2 . Donc $f(0)$ appartient à Y' identifié à Y .

$$a \text{ forme bilinéaire continue coercive sur } W.$$

La démonstration de la bilinéarité et de la continuité de a sur W est immédiate. La coercivité résulte de ce que pour tout v dans W

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y_3}, v\right)_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2} \left[|v|_{L^2(\Gamma_2)}^2 - |v|_{L^2(\Gamma_0)}^2 \right] = \frac{1}{2} |v|_{L^2(\Gamma_2)}^2$$

qui entraîne

$$a(v, v) = |\vec{\nabla} v|_{[L^2(\Omega)]^3}^2 + \alpha |v|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + \frac{\nu}{2} |v|_{L^2(\Gamma_2)}^2$$

Nous avons vérifié toutes les propriétés exigées pour appliquer le théorème évoqué en début de démonstration.

THEOREME 2. Soient u_{α_1} et u_{α_2} les solutions du problème (24) associées respectivement aux coefficients de Newton α_1 et α_2 . On a :

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq 0 \Rightarrow \inf\left(t, \frac{y_3}{\nu}\right) \geq u_{\alpha_1}(y, t) \geq u_{\alpha_2}(y, t) \geq 0,$$

$$\forall (y, t) \in \Omega \times [0, T] \text{ pp et } \forall (y, t) \in \Gamma_2 \times [0, T] \text{ pp.}$$

Remarque. Cette propriété implique que plus α est grand plus la zone cristallisée est étendue, c'est-à-dire plus le front de cristallisation est «haut» dans la gaine de refroidissement.

Démonstration.

$$(i) \text{ Montrons d'abord } u_{\alpha}(y, t) \leq \inf\left(t, \frac{y_3}{\nu}\right).$$

Nous notons $\varphi(y_3, t)$ la fonction $\inf\left(t, \frac{y_3}{\nu}\right)$ qui, pour tout $t \in [0, T]$, appartient à W . Posons, en utilisant la notation $x^+ = \sup(x, 0)$:

$$w(y, t) = (u_{\alpha}(y, t) - \varphi(y_3, t))^+$$

Pour tout t de $[0, T]$, w appartient à W et nous avons :

$$0 \leq w(t) \leq u_{\alpha}(t), \quad w|_{\Gamma_0}(t) = 0$$

Nous pouvons donc prendre $v(t) = u_{\alpha}(t) \pm w(t)$ comme fonction test dans (24) et il vient en comparant les inégalités obtenues :

$$(u'_{\alpha}(t), w(t))_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\nu} (u'_{\alpha}(t), w(t))_{L^2(\Gamma_2)} + \hat{a}(u_{\alpha}(t), w(t)) + \alpha |w(t)|_{L^2(\Gamma_1)}^2 = (\hat{f}(t), w(t))$$

Nous retranchons dans les deux membres de l'égalité l'expression :

$$(\varphi'(t), w(t))_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{V} (\varphi'(t), w(t))_{L^2(\Gamma_2)} + \hat{a}(\varphi(t), w(t))$$

Nous posons pour tout $t \in]0, T[$:

$$\Omega_3(t) = \{y, y \in \Omega, y_3 - Vt > 0\}$$

$$\mathcal{G}(t) = \{y, y \in \bar{\Omega}, y_3 = \inf(H, Vt)\}$$

Nous remarquons :

(a) $\Omega_2(t) \subset \Omega_3(t)$

(b) $\hat{a}(\varphi(t), w(t)) = (1, w(t))_{L^2(\Omega - \Omega_3)} + \frac{1}{V} (1, w(t))_{L^2(\mathcal{G}(t))}$

(c) $(\varphi'(t), w(t))_{L^2(\Omega)} = (1, w(t))_{L^2(\Omega_3(t))}$

(d) $(\varphi'(t), w(t))_{L^2(\Gamma_2)} = h(t) (1, w(t))_{L^2(\Gamma_2)}$ avec $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > \frac{H}{V} \\ 1 & \text{si } t < \frac{H}{V} \end{cases}$

et où nous avons défini φ' au sens de $L^2(0, T; L^2(\Gamma_2))$.

Nous obtenons, pour t presque partout dans $[0, T]$:

$$\begin{aligned} (w'(t), w(t))_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{V} (w'(t), w(t))_{L^2(\Gamma_2)} &= -a(w, w) - (K + 1)(1, w(t))_{L^2(\Omega - \Omega_2(t))} \\ &- (1 - \theta_1(y_1, y_2, y_3 - Vt), w(t))_{L^2(\Omega_2(t))} + \frac{(1-h(t))}{V} (1, w(t))_{L^2(\Gamma_2)} - \frac{1}{V} (1, w(t))_{L^2(\mathcal{G}(t))} \end{aligned}$$

Après avoir constaté que le second membre de cette relation est négatif, on intègre de 0 à t , et sachant que $w(0)$ est nulle sur $\bar{\Omega}$, on obtient :

$$\left| w(t) \right|_{L^2(\Omega)}^2 = \left| w(t) \right|_{L^2(\Gamma_2)}^2 = 0$$

qui établit le point (i).

(ii) Montrons ensuite : $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq 0 \Rightarrow u_{\alpha_1} \geq u_{\alpha_2}$.

On pose $w(t) = (u_2(t) - u_1(t))^+$; dans l'inégalité relative à u_1 , (respectivement u_2), on choisit

$v(t) = u_1(t) + w(t)$, (respectivement $v(t) = u_2(t) - w(t)$) comme fonction test. On ajoute et il vient :

$$\begin{aligned} (w'(t), w(t))_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{V} (w'(t), w(t))_{L^2(\Gamma_2)} &\leq -\frac{V}{2} \|w(t)\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 - \|\vec{\nabla} w(t)\|_{[L^2(\Omega)]^3}^2 \\ &+ (\alpha_1(u_1(t) - \varphi(t)) - \alpha_2(u_2(t) - \varphi(t)), w(t))_{L^2(\Gamma_1)} \end{aligned}$$

Le second membre de cette relation est à nouveau négatif : en particulier, l'intégrale sur Γ_1 ne porte en fait que sur l'ensemble des points de Γ_1 où $u_2(t) \geq u_1(t)$, c'est-à-dire où

$$0 \geq u_2(t) - \varphi(t) \geq u_1(t) - \varphi(t),$$

donc est négative.

La démonstration se termine alors comme pour le point (i).

THEOREME 3. *Sous les hypothèses du théorème 1, lorsque α tend vers l'infini, u_α tend vers u_∞ dans $L^\infty(0, T; Y)$ faible étoile et dans $L^2(0, T; W)$ faible, et u'_α tend vers u'_∞ dans $L^\infty(0, T; Y)$ faible, où u_∞ est l'unique solution du problème (25).*

Démonstration. La démonstration s'inspire de celle faite par G. Duvaut dans [9]. La démarche étant pour l'essentiel la même, nous ne l'exposerons pas (les fonctions test utilisées pour les estimations sont la fonction φ , puis la fonction constante égale à 1).

8. - ETUDE DU PROBLEME STATIONNAIRE

8.1. Modélisation. Mise en équation

Désormais, dans le phénomène de cristallisation considéré, nous voulons étudier la distribution des températures et la position du front de cristallisation à l'état stationnaire. L'étude se fait à des instants suffisamment éloignés de l'instant initial pour que, la plateforme B descendant toujours à la vitesse $V \vec{y}_3$, le champ des températures, à l'intérieur du système de cristallisation, soit indépendant du temps dans le repère R.

La surface de cristallisation, que l'on désigne par \mathcal{L} , est fixe dans Ω : soit $y_3 = l(y_1, y_2)$ son équation exprimée dans R et inconnue a priori. Le problème consiste à chercher un champ de température $T(y)$, $y \in \overline{\Omega}$, satisfaisant :

$$\cdot \text{ sur } \Omega : T(y) \leq T_0$$

- . sur Γ_0 : $T(y) = T_0$
- . sur Γ_1 : $-\frac{\partial T}{\partial n}(y) = \alpha(T(y) - T_1)$ (Loi de Newton)
- . sur Γ_2 : $T(y) = T_1$

. sur le domaine où le métal est fondu ($\Omega_0 = \{y, y \in \Omega, y_3 < l(y_1, y_2)\}$) ou bien change de phase (\mathcal{L}) : $T(y) = T_0$

. sur le domaine où le métal est solide ($\Omega_+ = \{y, y \in \Omega, y_3 > l(y_1, y_2)\}$), par déduction du cas d'évolution :

$$\Delta T(y) - \nu \frac{\partial T}{\partial y_3}(y) = 0$$

- . sur \mathcal{L} : le bilan thermique

$$\vec{q}(y) \cdot \vec{n}(y) = -k \nu \vec{y}_3 \cdot \vec{n}(y)$$

puisque $-k \nu \vec{y}_3$ est la vitesse de \mathcal{L} par rapport au métal, et avec $\vec{q}(y) = -\vec{\nabla} T(y)$ vecteur flux de chaleur en y et $\vec{n}(y)$ vecteur unité normal à \mathcal{L} . Compte tenu de ce que $\vec{n}(y)$ est parallèle à $\vec{\nabla}(y_3 - l(y_1, y_2))$, ce bilan thermique s'écrit encore :

$$\forall y \in \mathcal{L} \quad \frac{\partial T}{\partial y_3}(y) - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial T}{\partial y_i}(y) \frac{\partial l}{\partial y_i}(y) = k \nu$$

On pose : $\theta(y) = \frac{T(y) - T_0}{T_1 - T_0}$, et on est amené à chercher un champ $\theta(y)$, $y \in \bar{\Omega}$, satisfaisant :

$$(26) \quad \forall y \in \Omega, \theta(y) \geq 0$$

$$(27) \quad \forall y \in \Omega_0 \cup \mathcal{L}, \theta(y) = 0$$

$$(28) \quad \forall y \in \Omega_+, \Delta \theta(y) - \nu \frac{\partial \theta}{\partial y_3}(y) = 0$$

$$(29) \quad \forall y \in \Gamma_0, \theta(y) = 0$$

$$(30) \quad \forall y \in \Gamma_1, -\frac{\partial \theta}{\partial n}(y) = \alpha(\theta(y) - 1)$$

$$(31) \quad \forall y \in \Gamma_2, \theta(y) = 1$$

$$(32) \quad \forall y \in \mathcal{L}, \frac{\partial \theta}{\partial y_3}(y) - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \theta}{\partial y_i}(y) \frac{\partial l}{\partial y_i}(y) = k \nu$$

8.2. Changement de fonction inconnue

Des considérations de régularité identiques à celles développées dans le cas d'évolution nous amènent à introduire la nouvelle fonction inconnue u , remplaçant θ , définie par :

$$(33) \quad \forall y \in \overline{\Omega}, \quad u(y) = \frac{1}{V} \int_0^{y_3} \theta(y_1, y_2, \xi) d\xi$$

La fonction u est nulle sur $\Omega_0 \cup \mathcal{L}$, et égale à

$$\frac{1}{V} \int_{1(y_1, y_2)}^{y_3} \theta(y_1, y_2, \xi) d\xi \quad \text{sur } \Omega_+.$$

θ est égal à $V \frac{\partial u}{\partial y_3}$, ce qui permet le calcul de θ quand u est connue.

Si la fonction $\theta(y)$ vérifie ((26),..., (32)), alors la fonction $u(y)$ satisfait à :

$$(34) \quad \forall y \in \Omega, \quad u(y) \geq 0$$

$$(35) \quad \forall y \in \mathcal{L}, \quad u(y) = 0, \quad \vec{\nabla} u(y) = 0$$

$$(36) \quad \forall y \in \Omega_0, \quad u(y) = 0$$

$$(37) \quad \forall y \in \Omega_+, \quad -\Delta u(y) + V \frac{\partial u}{\partial y_3}(y) = -K$$

$$(38) \quad \forall y \in \Gamma_0, \quad u(y) = 0$$

$$(39) \quad \forall y \in \Gamma_1, \quad -\frac{\partial u}{\partial n}(y) = \alpha(u(y) - \frac{y_3}{V})$$

$$(40) \quad \forall y \in \Gamma_2, \quad \frac{\partial u}{\partial n}(y) = \frac{1}{V}$$

Remarques. . La fonction u et son gradient sont continus à la traversée de \mathcal{L} .

. Sur Γ_2 , la condition de type Dirichlet pour la fonction θ correspond à une condition de type Neumann pour la fonction u .

8.3. Formulation variationnelle

On suppose θ suffisamment régulière pour que u soit dans $H^1(\Omega)$. La propriété « $u \in H^1(\Omega)$ et satisfait ((34),..., (40))» est alors équivalente à « $u \in \mathcal{C}$ et satisfait ((35),(36),

(37),(39),(40)), d'où on déduit que u satisfait la propriété variationnelle :

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in \mathcal{C} , \quad \forall v \in \mathcal{C} \\ a(u, v-u) \geq -K(1, v-u)_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{V}(y_3, v-u)_{L^2(\Gamma_1)} + \frac{1}{V}(1, v-u)_{L^2(\Gamma_2)} \end{array} \right.$$

Pour le détail de la mise sous forme variationnelle, on pourra se reporter à ([5] p. I.13). Indiquons simplement ici que dans un premier temps nous obtenons l'équation variationnelle :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_+} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} (v-u) d\Omega + \nu \int_{\Omega_+} \frac{\partial u}{\partial y_3} (v-u) d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_1} u(v-u) d\Gamma = \\ -K \int_{\Omega_+} (v-u) d\Omega + \frac{1}{V} \int_{\Gamma_2} (v-u) d\Gamma + \frac{\alpha}{V} \int_{\Gamma_1} y_3(v-u) d\Gamma \end{aligned}$$

et que dans un deuxième temps, nous réduisons l'ensemble des fonctions tests de W à \mathcal{C} et étendons les intégrales de Ω_+ , domaine inconnu, à Ω .

Variante

Si nous modélisons le refroidissement sur Γ_1 par la condition « $T = T_1$ sur Γ_1 », les autres conditions étant inchangées, alors on obtient :

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in \hat{\mathcal{C}} = \left\{ v, v \in \mathcal{C} , v(y) = \frac{1}{V} y_3 \text{ sur } \Gamma_1 \right\} , \quad \forall v \in \hat{\mathcal{C}} : \\ \hat{a}(u, v-u) \geq -K(1, v-u)_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{V}(1, v-u)_{L^2(\Gamma_2)} \end{array} \right.$$

8.4. Existence et Unicité

Les formulations variationnelles (41) et (42) vérifient les hypothèses du lemme de Lax Milgram. Par conséquent la solution w_α du problème (41) existe et est unique. Il en est de même de la solution w_∞ du problème (42).

8.5. Etude de la régularité de la solution du problème variationnel

Une étude de régularité permet d'étudier les propriétés que vérifient w_α et w_∞ (cf 8.6) et d'interpréter les solutions des problèmes variationnels (41) et (42). (Pour une idée de

l'interprétation se reporter à [5] p. I.22).

Pour des problèmes de type Dirichlet, où les données sur le bord sont très régulières (par exemple : la digue poreuse [1]), on peut, en appliquant les théorèmes de régularité de Brézis-Stampacchia [7], démontrer que la solution u de l'inéquation variationnelle appartient à $W^{2,p}(\Omega)$ pour $p > 1$. D'après le théorème des injections de Sobolev, $W^{2,p}(\Omega)$ est inclus dans $C^1(\bar{\Omega})$, pour p assez grand, donc u appartient à $C^1(\bar{\Omega})$. Mais, dans notre problème, nous ne pouvons obtenir ce résultat : les conditions sur le bord sont du type Dirichlet–Neumann. Ainsi les théorèmes d'analyse fonctionnelle ne nous permettent pas d'obtenir de régularité assez forte de la solution de l'inéquation variationnelle, aux voisinages des points limitrophes des frontières Dirichlet et Neumann (points limites entre Γ_0 et Γ_1 , Γ_1 et Γ_2). Alors nous montrons des résultats locaux de régularité.

THEOREME 4. *Pour tout point y appartenant à Ω , il existe un ouvert ω , $y \in \omega$, $\bar{\omega} \subset \Omega$ tel que la solution w_α du problème (41) vérifie :*

$$w_\alpha \in W^{2,p}(\omega), \forall p > 1$$

Démonstration. Soit G la solution, dont on sait qu'elle existe et est unique dans $H^1(\Omega)$, du système :

$$\begin{aligned} \cdot & \quad -\Delta G(y) + V \frac{\partial G}{\partial y_3}(y) = 0 \text{ dans } \Omega \\ \cdot & \quad G(y) = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \\ \cdot & \quad \frac{\partial G}{\partial n}(y) = \alpha \left(\frac{y_3}{V} - G(y) \right) \text{ sur } \Gamma_1 \\ \cdot & \quad \frac{\partial G}{\partial n}(y) = \frac{1}{V} \text{ sur } \Gamma_2 \end{aligned}$$

Posant $w_\alpha = \tilde{w} + G$ dans (41) et utilisant la formulation variationnelle dont G est solution, on obtient que \tilde{w} est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{w} \in \text{convexe } \mathcal{C}_1 = \{v, v \in W, v \geq -G \text{ sur } \Omega\}, \forall w \in \mathcal{C}_1 : \\ a(\tilde{w}, w - \tilde{w}) \geq -K(1, w - \tilde{w})_{L^2(\Omega)} \end{array} \right.$$

Utilisant comme fonction test $w = (1 - \frac{\eta}{M_\eta}) \tilde{w} + \frac{\eta}{M_\eta} v$, avec $v \in \mathcal{C}_1$, $\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$, $M_\eta \in \mathbb{R}$ et $0 \leq \eta \leq M_\eta$, qui est bien dans \mathcal{C}_1 , il vient

$$\forall v \in \mathcal{C}_1, \forall \eta \in \mathcal{D}(\Omega), 0 \leq \eta : \hat{a}(\tilde{w}, \eta(v - \tilde{w})) \geq K(1, \eta(v - \tilde{w}))_{L^2(\Omega)}$$

Soit y un point de Ω , ϵ sa distance à $\partial\Omega = \Gamma$ ($\epsilon > 0$), et σ et ω les boules ouvertes de centre y de rayon $\frac{\epsilon}{2}$ et $\frac{\epsilon}{3}$. D'après les théorèmes de régularité à l'intérieur des solutions des équations elliptiques, on a

$$(44) \quad G \in W^{2,p}(\sigma) \subset W^{2,p}(\omega), \quad \forall p, 1 < p < +\infty$$

Par ailleurs, $\bar{\sigma}$ étant inclus dans Ω , l'ensemble des restrictions à σ des fonctions de W est $H^1(\sigma)$. Appliquant (43) avec $\eta \in \mathcal{D}(\sigma) \subset \mathcal{D}(\Omega)$, il vient :

$$(45) \quad \forall v \in H^1(\sigma), v \geq -G \text{ sur } \sigma, \quad \forall \eta \in \mathcal{D}(\sigma), \eta \geq 0 : \\ \int_{\sigma} \overrightarrow{\nabla \tilde{w}} \cdot \overrightarrow{\nabla} (\eta(v-\tilde{w})) d\Omega + v \int_{\sigma} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y_3} \eta(v-\tilde{w}) d\Omega \geq -K \int_{\sigma} \eta(v-\tilde{w}) d\Omega$$

Un théorème de H. Brézis ([8], théorème 1.1 p. 4) permet alors de déduire de (44) et (45) que \tilde{w} , donc aussi w_{α} , compte tenu de (44), est dans $W^{2,p}(\omega)$, $\forall p, 1 < p < +\infty$.

THEOREME 5. *La solution w_{α} du problème (41) appartient à $C^1(\Omega)$.*

Démonstration. Le théorème résulte de ce que, avec les notations du théorème précédent et en utilisant le théorème des injections de Sobolev,

$$W^{2,p}(\omega) \subset C^1(\bar{\omega}) \text{ pour } p \text{ assez grand.}$$

THEOREME 6. *La solution w_{∞} du problème (42) appartient à $C^1(\Omega)$.*

Démonstration. La démarche est la même que pour w_{α} , en utilisant la fonction \hat{G} solution de :

$$\begin{aligned} \cdot \quad & -\Delta \hat{G}(y) + v \frac{\partial \hat{G}}{\partial y_3}(y) = 0 \text{ dans } \Omega \\ \cdot \quad & \hat{G}(y) = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \\ \cdot \quad & \hat{G}(y) = \frac{y_3}{v} \text{ sur } \Gamma_1 \\ \cdot \quad & \frac{\partial \hat{G}}{\partial n}(y) = \frac{1}{v} \text{ sur } \Gamma_2 \end{aligned}$$

8.6. Quelques propriétés des solutions des problèmes variationnels (41) et (42)

THEOREME 7. Lorsque α tend vers l'infini, la solution w_α du problème (41) converge vers la solution w_∞ du problème (42) au sens de $H^1(\Omega)$ faible et au sens de $L^2(\Omega)$ fort.

Démonstration. Prenons comme fonction test dans (41) la fonction Φ définie par $\Phi(y) = \frac{y_3}{V}$. Remarquons que

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{\nabla} (\Phi - w_\alpha) d\Omega = \frac{1}{V} \int_{\Gamma_2} (\Phi - w_\alpha) d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial y_3} (\Phi - w_\alpha) d\Omega$$

il vient :

$$\hat{a}(w_\alpha - \Phi, w_\alpha - \Phi) + \alpha |w_\alpha - \Phi|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \leq -(K+1) |w_\alpha - \Phi|_{L^2(\Omega)}$$

d'où résulte que le second membre est positif et que l'on a

$$\hat{\alpha} |w_\alpha - \Phi|_{H^1(\Omega)}^2 + \alpha |w_\alpha - \Phi|_{L^2(\Gamma_1)} \leq c |w_\alpha - \Phi|_{H^1(\Omega)}$$

où c et $\hat{\alpha}$ constante de coercivité de \hat{a} , sont des constantes positives indépendantes de α .

On en déduit dans un premier temps :

$$|w_\alpha - \Phi|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{c}{\hat{\alpha}}$$

d'où résulte qu'une sous-suite de la suite w_α , encore notée w_α , converge dans $H^1(\Omega)$ faible vers un élément w de $H^1(\Omega)$. Et dans un second temps :

$$\alpha |w_\alpha - \Phi|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \leq \frac{c^2}{\hat{\alpha}}$$

d'où résulte, l'application $v \rightarrow |v|_{L^2(\Gamma_1)}^2$ étant semi-continue inférieurement sur $H^1(\Omega)$ faible :

$$0 = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \inf |w_\alpha - \Phi|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \geq |w - \Phi|_{L^2(\Gamma_1)}^2$$

et donc que w est égale à Φ sur Γ_1 .

On montre aussi que $w = 0$ sur Γ_0 en utilisant la semi-continuité inférieure de $v \rightarrow |v|_{L^2(\Gamma_0)}^2$ sur $H^1(\Omega)$ faible.

L'ouvert Ω étant borné, l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte : w_α converge donc vers w dans $L^2(\Omega)$ fort, et de $w_\alpha \geq 0$ sur Ω résulte $w \geq 0$. On a donc $w \in \mathcal{C}$.

Si par ailleurs nous écrivons (41) avec une fonction test v dans $\hat{\mathcal{C}} \subset \mathcal{C}$, il vient

$$\hat{a}(w_\alpha, w_\alpha) + \hat{a}(w_\alpha, v) - K(1, v - w_\alpha)_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{V}(1, v - w_\alpha)_{L^2(\Gamma_2)} \leq -\alpha \left| w_\alpha - \frac{y_3}{V} \right|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \leq 0$$

Utilisant la semi-continuité inférieure de $\hat{a}(u, u)$ sur $H^1(\Omega)$ faible, on déduit par passage à la limite dans la relation ci-dessus, que w limite de w_α dans $H^1(\Omega)$ faible est solution de (42), donc est égal à w_∞ .

THEOREME 8. Soient w_{α_1} et w_{α_2} les solutions du problème (41) associées aux coefficients de Newton α_1 et α_2 , avec $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq 0$. On a alors :

$$\forall y \in \Omega, \frac{y_3}{V} \geq w_\infty(y) \geq w_{\alpha_1}(y) \geq w_{\alpha_2}(y) \geq 0$$

ce qui entraîne par ailleurs :

$$\Omega_{+\infty} \supset \Omega_{+1} \supset \Omega_{+2}$$

Démonstration. La première inégalité vient de ce que l'on a sur Ω , $T \leq T_1$, donc $\theta \leq 1$, ce qui compte tenu de la nullité de θ sur Γ_0 entraîne $u \leq \frac{y_3}{V}$.

Les autres inégalités, qui expriment que plus α est grand plus le front de cristallisation est haut dans la gaine, se démontrent pour l'essentiel comme dans le cas d'évolution (paragraphe 7). Remarque que les résultats de régularité du paragraphe 8.5 permettent d'écrire la quadruple inégalité en chaque point de Ω .

THEOREME 9. On a la relation :

$$\forall \alpha \geq 0, \forall y \in \Omega, w_\infty(y) \geq w_\alpha(y) \geq \psi(y) \geq 0$$

où la fonction ψ de $\bar{\Omega}$ à valeurs dans \mathbb{R}^+ est définie par :

$$\psi(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y_3 \in \left[0, H - \frac{1}{(K+1)V} \right] \\ y_3^2 \frac{(K+1)}{2} + y_3 \left(\frac{1}{V} - H(K+1) \right) + \frac{(K+1)}{2} \left(\frac{1}{(K+1)V} - H \right)^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

si $V \leq \frac{1}{(K+1)H} : \psi(y) = y_3^2 \frac{(K+1)}{2}$

Remarque. N'oublions pas que la chaleur spécifique et la conductivité thermique sont considérées constantes et normalisées et qu'elles jouent un rôle implicite dans les relations entre V et $\frac{1}{(K+1)H}$.

Ce théorème permet de localiser la position du front de cristallisation. Il se trouve dans l'ensemble

$$\left\{ y, y \in \Omega : y_3 \leq \sup \left(0, H - \frac{1}{(K+1)V} \right) \right\}$$

et en particulier lorsque $V \leq \frac{1}{(K+1)H}$ il coïncide avec Γ_0 : le métal ajouté cristallise instantanément sur Γ_0 .

Démonstration.

$$(i) \text{ Cas où } V \geq \frac{1}{(K+1)H}$$

Il est loisible de prendre $w_\alpha + (\psi - w_\alpha)^+$ comme fonction test dans (41), on obtient :

$$\hat{a}(w_\alpha, (\psi - w_\alpha)^+) + \alpha(w_\alpha - \frac{y_3}{V}, (\psi - w_\alpha)^+)_{L^2(\Gamma_1)} \geq -K(1, (\psi - w_\alpha)^+)_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{V}(1, (\psi - w_\alpha)^+)_{L^2(\Gamma_2)}$$

Remarquant que l'intégrale sur Γ_1 est négative (théorème 8) et que :

$$\hat{a}(\psi, (\psi - w_\alpha)^+) = \frac{1}{V}(1, (\psi - w_\alpha)^+)_{L^2(\Gamma_2)} + ((K+1)V(y_3 - H) - K, (\psi - w_\alpha)^+)_{L^2(\Omega_4)}$$

avec $\Omega_4 = \left\{ y, y \in \Omega, y_3 > H - \frac{1}{(K+1)V} \right\}$, on obtient en retranchant membre à membre les deux relations précédentes :

$$-\hat{a}((\psi - w_\alpha)^+, (\psi - w_\alpha)^+) \geq V(K+1)(H - y_3, (\psi - w_\alpha)^+)_{L^2(\Omega_4)}$$

Le membre de droite de cette relation est positif puisque dans Ω_4 , y_3 est inférieur à H . On en déduit que $(\psi - w_\alpha)^+$ est nul au sens de $H^1(\Omega)$. Mais ψ et w_α étant de classe C^1 sur Ω , il en résulte $w_\alpha \geq \psi$ partout sur Ω .

$$(ii) \text{ Cas où } V \leq \frac{1}{(K+1)H}$$

On procède comme pour (i). On a cette fois

$$\hat{a}(\psi, (\psi - w_\alpha)^+) = H(K+1)(1, (\psi - w_\alpha)^+)_{L^2(\Gamma_2)} + (K+1)(Vy_3 - 1, (\psi - w_\alpha)^+)_{L^2(\Omega)}$$

et on obtient

$$-\hat{a}((\psi-w_\alpha)^+, (\psi-w_\alpha)^+) \geq (1-V\gamma_3(K+1), (\psi-w_\alpha)^+)_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{1}{V} - H(K+1), (\psi-w_\alpha)^+\right)_{L^2(\Gamma_2)}$$

Le membre de droite est à nouveau positif puisque $\frac{1}{V} - H(K+1)$ et $1 - V\gamma_3(K+1)$ sont positifs, ce qui permet de terminer la démonstration comme dans le premier cas.

9. - CONVERGENCE DE LA SOLUTION DU PROBLEME D'EVOLUTION VERS LA SOLUTION DU PROBLEME STATIONNAIRE

Bien que l'étude du cas d'évolution et celle du cas stationnaire aient été menées indépendamment, les inéquations variationnelles obtenues font espérer des résultats de convergence.

THEOREME 9. *Lorsque le temps tend vers l'infini, la solution u_α du problème (24) converge vers w_α solution du problème (41) au sens de $L^2(\Omega)$ fort et de $L^2(\Gamma_2)$ fort.*

Démonstration. Prenons pour fonction test w_α dans le problème (24) et $u_\alpha(t)$ dans le problème (41) et ajoutons membre à membre. Posant $z(t) = u_\alpha(t) - w_\alpha$, nous obtenons, en supposant que $t \geq \frac{H}{V}$, ce qui entraîne $\Omega_2(t) = \Omega_3(t) = \phi$:

$$(z'(t), z(t))_Y + a(z(t), z(t)) \leq 0$$

Mais a est une forme bilinéaire coercive sur W et l'application trace de W sur $L^2(\Gamma_2)$ est continue ; donc il existe λ strictement positif tel que :

$$\forall v \in W, a(v,v) \geq \lambda \left(|v|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{V} |v|_{L^2(\Gamma_2)}^2 \right)$$

il vient :

$$\forall v \in W, (z'(t), z(t))_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{V} (z'(t), z(t))_{L^2(\Gamma_2)} + \lambda \left(|z(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{V} |z(t)|_{L^2(\Gamma_2)}^2 \right) \leq 0$$

On multiplie par $e^{\lambda t}$ strictement positif, on aboutit à :

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} \left(|z(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{V} |z(t)|_{L^2(\Gamma_2)}^2 \right) \leq 0$$

On intègre de 0 à t , et on divise par $e^{\lambda t}$:

$$\forall t \in [0, T], \left| z(t) \right|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{V} \left| z(t) \right|_{L^2(\Gamma_2)}^2 \leq e^{-\lambda t} \left(C + \left| w_\alpha \right|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{V} \left| w_\alpha \right|_{L^2(\Gamma_2)}^2 \right)$$

où C est une constante positive.

Il en résulte que : $u_\alpha(t)$ converge vers w_α dans $L^2(\Omega)$ fort et $L^2(\Gamma_2)$ fort quand t tend vers l'infini.

THEOREME 10. *Lorsque le temps tend vers l'infini, la solution u_∞ du problème (25) converge vers w_∞ solution du problème (42) au sens de $L^2(\Omega)$ fort et de $L^2(\Gamma_2)$ fort.*

Démonstration. C'est pour l'essentiel la même que la précédente.

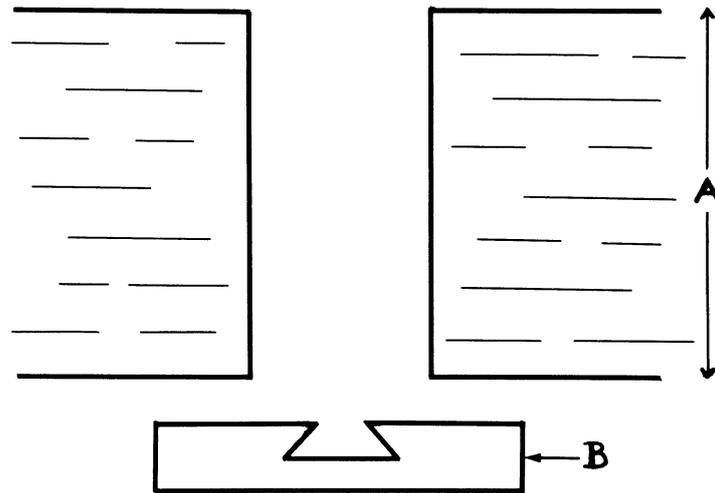


figure 1

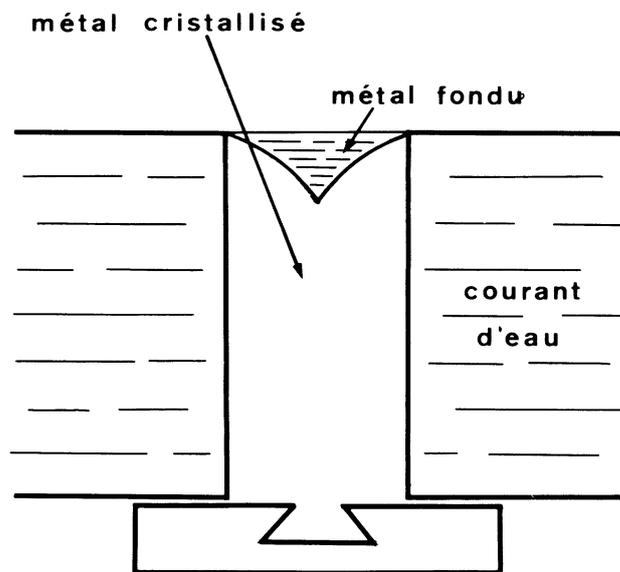


figure 2

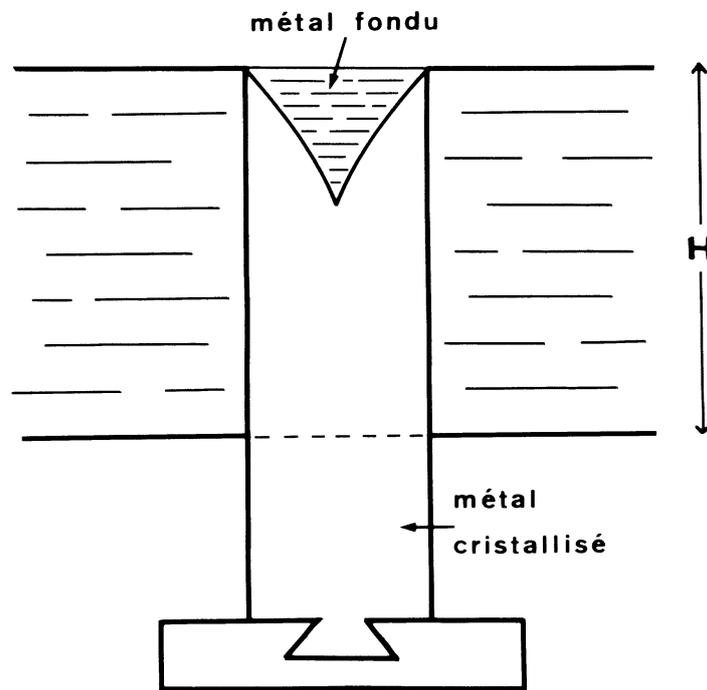


figure 3

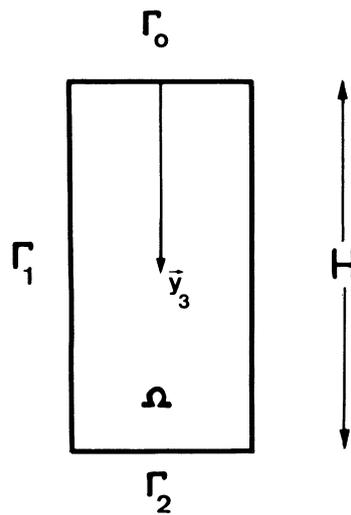


figure 4

REFERENCES

- [1] C. BAIOCCHI. «*Su un problema di frontiera libera connesso a questioni di idraulica*». Ann. di Mat. Pure e app. (IV) X C II, pp 107-127 (1972).
- [2] G. DUVAUT. «*Fusion d'un bloc de glace à 0° C*». Note au CRAS 276, série A, pp 1461-1464 (1973).
- [3] G. DUVAUT. «*Problèmes à frontière libre en théorie des milieux continus*». Publication du Congrès de Mécanique de Toulouse (1975).
- [4] J. AGUIRRE PUENTE et M. FREMOND. «*Propagation du gel dans les milieux poreux*». Symposium on Applications of Methods of Functionnal analysis to Problems of Mechanics, Marseille Sept. 1975.
- [5] T. BRIERE. Thèse de Doctorat de 3ème cycle - Paris 1976.
- [6] J.L. LIONS. «*Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*». Dunod (1969).
- [7] H. BREZIS et G. STAMPACCHIA. «*Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques*». Bull. Soc. Math. de France 96, pp 153-180 (1968).
- [8] H. BREZIS. «*Problèmes unilatéraux*». Thèse d'Etat, Université Paris VI.
- [9] G. DUVAUT. «*Etude de problèmes unilatéraux en mécanique par des méthodes variationnelles*». C.I.M.E. Bressanone, Ed. Cremonèze, Rome (1974).

(Manuscrit reçu le 4 juin 1979)