

ANDRÉ LICHNEROWICZ

Variétés de Poisson et feuilletages

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 4, n° 3-4 (1982), p. 195-262

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1982_5_4_3-4_195_0

© Université Paul Sabatier, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

VARIETES DE POISSON ET FEUILLETAGES

André Lichnerowicz ⁽¹⁾

(1) Collège de France, 75005 Paris - France.

Résumé : Une variété de Poisson (W, Λ) est une variété sur laquelle est définie, par un 2-tenseur contravariant antisymétrique Λ , un crochet de Poisson sur les fonctions [7]. Elle est feuilletée en sous-variétés symplectiques. Soit (M, \mathcal{F}) une variété munie d'un feuilletage \mathcal{F} ; le fibré $T^*\mathcal{F}$ cotangent au feuilletage admet une structure naturelle de variété de Poisson tangentiellement exacte qui peut être caractérisée. Différentes relations entre les cohomologies associées à un feuilletage et à une variété de Poisson sont étudiées. On montre l'existence, sous une condition cohomologique, de $*$ -produits tangentiels sur une variété de Poisson. Pour (M, \mathcal{F}) on met en évidence des classes de cohomologie de Chevalley de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents opérant sur les espaces de formes normales, classes définies à partir de formes caractéristiques du feuilletage \mathcal{F} .

Summary : A Poisson manifold (W, Λ) is a manifold on which a skewsymmetric contravariant 2-tensor defines a Poisson bracket for the functions. Such a manifold admits a foliation (or a singular foliation) with symplectic submanifolds. Let (M, \mathcal{F}) be a manifold with a foliation \mathcal{F} . The cotangent bundle $T^*\mathcal{F}$ of the foliation admits a natural exact Poisson structure which can be characterized. Various relations between the cohomologies associated with a foliation or a Poisson structure are studied. We prove the existence, under a general cohomological condition, of tangential $*$ -products on a Poisson manifold and we introduce, by means of characteristic forms of a foliation (M, \mathcal{F}) , natural Chevalley cohomology classes of the Lie algebra of the tangent vector fields, acting on the spaces of normal forms by Lie differentiation.

INTRODUCTION

J'ai introduit, il y a quelque temps, la notion de *variété de Poisson* [7] comme généralisation contravariante naturelle de celle de variété symplectique. Une variété de Poisson (W, Λ) est une variété différentiable W sur laquelle est défini, par un 2-tenseur contravariant antisymétrique Λ , l'analogue du crochet de Poisson pour les fonctions. D'après Kirillov et moi-même, sur une telle variété, Λ détermine un feuilletage symplectique, soit en un sens généralisé (variété de Poisson non régulière), soit au sens strict du terme (variété de Poisson régulière). Les deux exemples naturels les plus simples de variété de Poisson sont les suivants : soit A une algèbre de Lie, A^* l'espace dual ; le tenseur de structure de A définit sur A^* une structure de Poisson Λ . Les «feuilles» de (A^*, Λ) sont les orbites, pour la représentation coadjointe, d'un groupe de Lie connexe admettant A pour algèbre. D'autre part le fibré cotangent $T^*\mathcal{F}$ d'un feuilletage \mathcal{F} admet une *structure de Poisson canonique* régulière dont les feuilles sont les fibrés cotangents des feuilles de \mathcal{F} ; cette structure est *tangentielle exacte* en un sens convenable.

Nous nous proposons, dans cet article, d'étudier systématiquement les rapports entre variétés de Poisson (essentiellement dans le cas régulier) et feuilletage. Cet article est rédigé de manière, autant que possible, à se suffire à lui-même. Il est divisé en cinq chapitres.

Le chapitre I est consacré à la notion de variété de Poisson associée à un feuilletage et à ses principales propriétés, indépendamment de toute introduction de connexion. Après avoir rappelé les définitions et propriétés générales concernant feuilletages \mathcal{F} et variétés de Poisson (W, Λ) et fixé les notations, on définit $T^*\mathcal{F}$ comme variété de Poisson tangentielle exacte et on montre qu'à tout feuilletage est canoniquement associé un fibré en sphères muni d'une structure conforme de Jacobi [8]. A partir d'un théorème de Nagano [16], on caractérise les fibrés cotangents à un feuilletage en termes de variétés de Poisson tangentielle exacte et l'on relie l'orientabilité transverse d'un feuilletage à l'orientabilité de sa variété de Poisson associée. Dans un contexte proche de celui de Godbillon-Vey, on introduit une 1-classe de Λ -cohomologie tangentielle de $(T^*\mathcal{F}, \Lambda)$, naturelle par rapport aux images réciproques par submersion du feuilletage. Chemin faisant, on a introduit pour une variété de Poisson exacte, mais non tangentielle exacte, une classe intéressante de Λ -cohomologie.

Soit (M, \mathcal{F}) une variété munie d'un feuilletage \mathcal{F} . Le chapitre II porte sur les connexions linéaires sans torsion dites *adaptées au feuilletage* \mathcal{F} . On y montre comment une telle connexion peut être relevée sur la variété de Poisson associée. Si M est munie d'une métrique riemannienne, celle-ci détermine d'une manière unique une connexion adaptée déduite de la connexion riemannienne. Les approches de Guelorget-Joubert et B. Reinhart sont interprétées dans ce contexte un peu différent. On établit l'existence sur toute variété de Poisson de connexions linéaires dites *connexions de Poisson* qui sont la généralisation dans ce cadre des connexions symplectiques correspondant aux variétés symplectiques.

Le chapitre III est relatif à la généralisation de la notion de $*_{\nu}$ -produit à une variété de Poisson (W, Λ) . L'espace $N = C^{\infty}(W; \mathbb{R})$ admet une structure d'algèbre associative définie par le produit usuel des fonctions et une structure d'algèbre de Lie définie par le crochet de Poisson (algèbre de Lie de Poisson) que l'on se propose de déformer au sens de Gerstenhaber. De telles déformations sont susceptibles de jouer un rôle important dans la Mécanique quantique des systèmes dépendant du temps. On met en évidence un invariant cohomologique, toujours non nul, de la structure de Poisson, à partir de la cohomologie de Chevalley de l'algèbre de Lie de Poisson. Cet invariant est l'extension au cas des variétés de Poisson d'un invariant concernant le cas symplectique. Il joue un rôle majeur dans la théorie des $*_{\nu}$ -produits tangentiels de (W, Λ) et peut être généralisé d'une manière étroitement liée à l'homomorphisme de Chern-Weil. Sous une condition générale concernant la nullité de la Λ -cohomologie tangentielle en dimension 3, on prouve l'existence sur (W, Λ) de $*_{\nu}$ -produits tangentiels.

Dans le chapitre IV on précise, à partir de l'introduction de connexions adaptées, des résultats concernant les feuilletages lagrangiens d'une variété symplectique, obtenus récemment par A. Weinstein et P. Dazord. Il existe ainsi une connexion adaptée sur la variété induisant sur chaque feuille une connexion plate sans torsion. Les liaisons avec l'holonomie et le cas riemannien sont aussi étudiés.

Le dernier chapitre porte d'une part sur des classes de Λ -cohomologie tangentielle de $(T^* \mathcal{F}, \Lambda)$ en dimensions impaires déduites de l'algèbre caractéristique du feuilletage, d'autre part sur la mise en évidence, à partir des $2r$ -formes caractéristiques du fibré transverse, de r -cocycles de Chevalley de l'algèbre de Lie L des vecteurs tangents au feuilletage, opérant par dérivation de Lie sur les r -formes normales. Les classes de cohomologie correspondantes sont naturelles par rapport aux images réciproques par submersion du feuilletage et sans liaisons simples avec ses classes caractéristiques.

Cet article caractérisé par l'introduction systématique des variétés de Poisson et celle des connexions adaptées aux feuilletages, synthétise d'une part, en les précisant, un certain nombre de résultats antérieurs et d'autre part apporte des résultats nouveaux concernant les différentes cohomologies associées à un feuilletage ou à une variété de Poisson.

Les résultats les plus intéressants figurent aux paragraphes 3 à 5, aux paragraphes 13, 16 et 17, ainsi qu'au paragraphe 23.

I - NOTION DE VARIÉTÉ DE POISSON ASSOCIÉE À UN FEUILLETAGE

1. - Éléments attachés à un feuilletage

a) Soit M une variété différentiable connexe, paracompacte, de dimension m et classe C^∞ . Tous les éléments introduits sont supposés de classe C^∞ . Soit \mathcal{F} un feuilletage de M de codimension q . Nous désignons par $\mathcal{F}(x)$ la feuille connexe passant par $x \in M$ et de dimension $p = m - q$. Nous posons :

$$\dim. \mathcal{F} = p \qquad \text{codim. } \mathcal{F} = q \qquad (p + q = m)$$

Soit TM le fibré tangent de M . Nous notons $T\mathcal{F}$ le sous-fibré vectoriel de TM défini par les vecteurs tangents aux feuilles. Le fibré $T\mathcal{F}$ tangent au feuilletage admet donc pour fibre en $x \in M$ l'espace tangent $T_x \mathcal{F}(x)$ de dimension p . Ainsi $\dim. T\mathcal{F} = m + p$. Le fibré vectoriel quotient $\nu\mathcal{F} = TM/T\mathcal{F}$ est le fibré transverse à \mathcal{F} . Sa fibre en $x \in M$ est $T_x M/T_x \mathcal{F}(x)$ de dimension q . On a la suite exacte de fibrés vectoriels sur M

$$(1-1) \qquad 0 \rightarrow T\mathcal{F} \rightarrow TM \rightarrow \nu\mathcal{F} \rightarrow 0$$

b) On sait que le dual d'un fibré vectoriel est défini comme le fibré des homomorphismes dans le fibré linéaire trivial. Étudions les duaux respectifs $\nu^*\mathcal{F}$, $T^*\mathcal{F}$ de $\nu\mathcal{F}$ et $T\mathcal{F}$. On déduit de (1-1), par dualité, la suite exacte :

$$(1-2) \qquad 0 \rightarrow \nu^*\mathcal{F} \rightarrow T^*M \rightarrow T^*\mathcal{F} \rightarrow 0$$

Le sous-fibré $\nu^*\mathcal{F}$ de T^*M peut être défini par les covecteurs de M nuls sur les éléments de $T\mathcal{F}$; sa fibre est de dimension q . Le fibré quotient $T^*\mathcal{F} = T^*M/\nu^*\mathcal{F}$ est dit le fibré cotangent au feuilletage; sa fibre est de dimension p et $\dim. T^*\mathcal{F} = m + p$.

Soit $\pi : T^*\mathcal{F} \rightarrow M$ la projection du fibré cotangent au feuilletage. Si $x \in M$, $\pi^{-1}\mathcal{F}(x)$ est le fibré cotangent de la feuille $\mathcal{F}(x)$. Nous définissons ainsi un feuilletage de la variété $W = T^*\mathcal{F}$ par des feuilles de dimension $2p$. Nous notons $\mathcal{G} = \pi^*\mathcal{F}$ ce feuilletage; on a

$$\dim. \pi^*\mathcal{F} = 2p \qquad \text{codim. } \pi^*\mathcal{F} = q$$

c) Nous notons $\{x^A\}$ ($A, B, \dots = 1, \dots, m$) une carte locale de M de domaine U . Si $\sigma : T^*M \rightarrow M$ est le fibré cotangent de M , la carte envisagée de M définit une carte $\{x^K\} = \{x^A, \xi_A = x^{\bar{A}}\}$ ($K, L, \dots = 1, \dots, 2m$) de T^*M , de domaine $\sigma^{-1}(U)$.

Le feuilletage \mathcal{F} est défini par un système de Pfaff complètement intégrable, partout

de rang q sur M . Une carte $\{x^A\} = \{x^a, x^i\}$ ($a, b, \dots = 1, \dots, q$; i, j, \dots, m) de M de domaine U est dite *adaptée au feuilletage* \mathcal{F} si, dans U , $x^a = \text{const.}$ le long des feuilles. Soit $\{x^{B'}\} = \{x^{b'}, x^{j'}\}$ une carte adaptée à \mathcal{F} de domaine U' tel que $U \cap U' \neq \emptyset$; on a sur $U \cap U'$:

$$(1-3) \quad x^{b'} = f^{b'}(x^a) \quad x^{j'} = g^{j'}(x^a, x^i)$$

Nous notons $A = (A_A^{B'} = \partial_A^{B'} = \partial x^{B'} / \partial x^A)$ et $(A_B^A = \partial x^A / \partial x^{B'})$ les matrices jacobiennes reliant les deux cartes.

Une carte adaptée $\{x^a, x^i\}$ de M , de domaine U , définit au dessus de U des cartes de $T\mathcal{F}$ et $\nu\mathcal{F}$ qui peuvent s'écrire :

$$T\mathcal{F} : \{x^a, x^i, v^j\} \quad \nu\mathcal{F} : \{x^a, x^i, v^b\}$$

Elle définit aussi, au dessus de U , des cartes de $\nu^*\mathcal{F}$ et $T^*\mathcal{F}$ qui peuvent se noter :

$$\nu^*\mathcal{F} : \{x^a, x^i, \xi_b = x^{\bar{b}}\} \quad T^*\mathcal{F} : \{x^a, x^i, \xi_j = x^{\bar{j}}\}$$

Le feuilletage $\pi^*\mathcal{F}$ de $T^*\mathcal{F}$ est défini au dessus de U par les équations $dx^a = 0$.

d) Soit M' une variété différentiable telle qu'il existe *une submersion* $\rho : M' \rightarrow M$. Si $\{x^a, x^i\}$ est une carte de M , de domaine U , adaptée au feuilletage \mathcal{F} , il résulte de la propriété de submersion que les q fonctions locales $x^a \circ \rho$ sont indépendantes sur $\rho^{-1}(U)$. Il en résulte que la submersion ρ définit sur M' un feuilletage \mathcal{F}' de même codimension que \mathcal{F} qui est dit *l'image réciproque de \mathcal{F} par ρ* ; on pose $\mathcal{F}' = \rho^*\mathcal{F}$.

En particulier $\pi : W = T^*\mathcal{F}' \rightarrow M$ est une submersion de W sur M et le feuilletage $\mathcal{G} = \pi^*\mathcal{F}'$ de W n'est autre que l'image réciproque de \mathcal{F} par π .

2. - Notion de variété de Poisson

Soit W une variété différentiable de dimension d . Nous posons $N = C^\infty(W ; \mathbb{R})$. Pour abrégé nous appelons *r-tenseur* un tenseur contravariant antisymétrique d'ordre r .

a) Sur de tels tenseurs, Schouten [14] et Nijenhuis ont introduit un crochet (le crochet de Schouten) qui, à tout couple A, B d'un r -tenseur et d'un s -tenseur fait correspondre un $(r + s - 1)$ -tenseur noté $[A, B]$ qui peut être défini de la manière suivante : pour tout $(r + s - 1)$ -forme fermée β , on a :

$$(2-1) \quad i([A, B])\beta = (-1)^{rs+s} i(A)di(B)\beta + (-1)^r i(B)di(A)\beta$$

où $i(\cdot)$ est le produit intérieur. Pour $r = 1$, $[A, B] = \mathcal{L}(A)B$, où $\mathcal{L}(\cdot)$ est l'opérateur de dérivation de Lie. On vérifie immédiatement que :

$$(2-2) \quad [A, B] = (-1)^{rs} [B, A]$$

Si C est un t -tenseur, on a l'identité de Jacobi généralisée :

$$(2-3) \quad S(-1)^{rs} [[B, C], A] = 0$$

où S est la sommation après permutation circulaire. De plus :

$$(2-4) \quad [A, B \wedge C] = [A, B] \wedge C + (-1)^{rs+s} B \wedge [A, C]$$

Si T^r est l'espace vectoriel des r -tenseurs, introduisons la somme directe

$$T = \sum_{r=0}^d T^r$$

Il résulte des définitions et des propriétés (2-2) et (2-3) que le crochet de Schouten détermine sur T une structure d'algèbre de Lie graduée. Un calcul élémentaire fournit pour composantes de $[A, B]$ sur le domaine d'une carte locale arbitraire $\{x^K\}$:

$$(2-5) \quad [A, B]^{K_2 \dots K_{r+s}} = \frac{1}{(r-1)!s!} \epsilon_{I_2 \dots I_r J_1 \dots J_s}^A A^{R I_2 \dots I_r} \partial_R B^{J_1 \dots J_s} \\ + \frac{(-1)^r}{r!(s-1)!} \epsilon_{J_1 \dots I_r J_2 \dots J_s}^B B^{R J_2 \dots J_s} \partial_R A^{I_1 \dots I_r}$$

où ϵ est l'indicateur d'antisymétrisation de Kronecker et où $\partial_R = \partial / \partial x^R$.

b) Une *structure symplectique* est définie en général sur une variété W de dimension $d = 2n$ par une 2-forme F de rang $2n$, fermée ($dF = 0$). Nous notons $\mu : TW \rightarrow T^*W$ l'isomorphisme de fibrés vectoriels défini par $X \rightarrow \mu(X) = -i(X)F$; ν sera l'isomorphisme inverse. Ces isomorphismes s'étendent naturellement aux fibrés tensoriels. Soit Λ le 2-tenseur $\nu(F)$ de rang $2n$; Λ qui est dit le *2-tenseur de structure symplectique* vérifie :

$$(2-6) \quad [\Lambda, \Lambda] = 0$$

Inversement une structure symplectique peut être définie sur W de dimension $d = 2n$ par un 2-tenseur Λ de rang $2n$ vérifiant (2-6) ; Λ définit directement ν et par suite μ . De plus si A est un

r-tenseur, on a :

$$(2-7) \quad \mu([\Lambda, A]) = d\mu(A)$$

Si $u, v \in N$, le crochet de Poisson de ces deux fonctions est donné par :

$$\{u, v\} = i(\Lambda)(du \wedge dv)$$

et définit sur N une structure d'algèbre de Lie, la relation (2-6) exprimant que l'identité de Jacobi est satisfaite par le crochet de Poisson.

c) Il est donc naturel de généraliser la notion de variété symplectique de manière contravariante. Sur une variété W de dimension arbitraire d , introduisons un 2-tenseur Λ qui définit sur N une application bilinéaire alternée $N \times N \rightarrow N$, donnée par :

$$(2-8) \quad \{u, v\} = i(\Lambda)(du \wedge dv) \quad (u, v \in N)$$

Pour que ce crochet de Poisson généralisé vérifie l'identité de Jacobi, il faut et il suffit que l'on ait :

$$(2-9) \quad [\Lambda, \Lambda] = 0$$

Nous sommes ainsi conduits à la définition suivante [7] :

DEFINITION. Une structure de Poisson est définie sur une variété W par un 2-tenseur Λ vérifiant (2-9). L'algèbre de Lie définie sur N par (2-8) est dite l'algèbre de Lie de Poisson correspondante. Si le rang de Λ est constant, la structure de Poisson est appelée régulière.

Soient (W, Λ) et (W', Λ') deux variétés de Poisson et soit $\varphi : W' \rightarrow W$ une application différentiable. On dit que φ est un *morphisme de Poisson* si, pour tout couple $u, v \in N(W')$, on a :

$$(2-10) \quad \varphi^* \{u, v\} = \{\varphi^* u, \varphi^* v\}$$

Le 2-tenseur Λ' est projetable par φ en le 2-tenseur Λ aux points de $\varphi(W')$.

Sur la variété de Poisson (W, Λ) , la donnée de Λ définit un *morphisme ν de T^*W dans TW* . Si $u \in N$, on appelle *champ de vecteurs hamiltonien* associé à u le champ :

$$(2-11) \quad X_u = \nu(du) = [\Lambda, u]$$

Il résulte de (2-3) et (2-9) que X_u laisse invariant $\Lambda(\mathcal{L}(X_u)\Lambda = 0)$, c'est-à-dire est une *transformation infinitésimale de Poisson* [7]. D'après (2-3), si $u, v \in N$, on a :

$$X_{\{u,v\}} = [X_u, X_v]$$

et $u \rightarrow X_u$ est un homomorphisme de l'algèbre de Lie de Poisson sur l'algèbre de Lie des champs de vecteurs hamiltoniens.

d) On appelle *champ caractéristique* de la variété de Poisson (W, Λ) l'image P de ν dans TW . Lorsque la structure est *régulière*, P est un sous-fibré vectoriel de TW et on vérifie immédiatement qu'il est complètement intégrable [8]. Lorsqu'il n'en est pas ainsi, la dimension de l'élément P_x de P en $x \in W$, toujours paire, dépend du point x considéré.

On appelle *variété intégrale* de (W, Λ) toute sous-variété connexe immergée S de W , telle que, pour tout point x de S , $T_x S$ soit contenu dans l'élément P_x du champ caractéristique P . Les trajectoires d'un champ de vecteurs hamiltonien, par exemple, sont des variétés intégrales. Une variété intégrale est dite *maximale* si toute variété intégrale qui la contient coïncide avec elle.

Kirillov [15] a établi le remarquable théorème suivant, qui m'a été signalé par Marle :

THEOREME. Soit (W, Λ) une variété de Poisson. Etant donné un point x arbitraire de W , il existe pour la structure de Poisson une variété intégrale maximale unique $S(x)$ passant par x . Pour tout $y \in S(x)$, on a :

$$T_y S(x) = P_y$$

et le rang du champ caractéristique P est constant sur $S(x)$ et égal à sa dimension $2p(x)$. La restriction de Λ à $S(x)$ définit sur cette sous-variété un 2-tenseur de rang $2p(x)$ vérifiant (2-9) et par suite une structure symplectique sur $S(x)$.

Par abus de langage, les variétés intégrales maximales sont dites *les feuilles* de la structure de Poisson. Ces feuilles forment une partition de W en *sous-variétés symplectiques* immergées, de dimensions non nécessairement constantes.

e) Supposons la variété de Poisson (W, Λ) régulière. Elle admet alors un feuilletage au sens usuel du terme [7] en variétés symplectiques de dimension $2p$, les feuilles étant les variétés intégrales maximales. Nous notons encore q la codimension du feuilletage.

J'ai établi qu'une variété de Poisson régulière (W, Λ) admet des atlas de *cartes canoniques* $\{x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}}\}$ ($a = 1, \dots, q$; $\alpha = 1, \dots, p$; $\bar{\alpha} = \alpha + p$) adaptées au feuilletage et pour lesquelles le

2-tenseur Λ admet comme seules composantes non nulles :

$$\Lambda^{\alpha\bar{\alpha}} = -\Lambda^{\bar{\alpha}\alpha} = 1 \quad (\alpha = 1, \dots, p; \bar{\alpha} = \alpha + p)$$

En particulier, elle admet des atlas de cartes adaptées pour lesquelles Λ a des composantes constantes (*cartes naturelles*).

f) L'exemple le plus simple de variété de Poisson non régulière naturel est fourni par la *représentation coadjointe* d'une algèbre de Lie.

Soit A une algèbre de Lie de dimension finie sur \mathbb{R} , A^* l'espace vectoriel dual de A . Nous notons \langle, \rangle la forme bilinéaire de dualité. Introduisons le 2-tenseur Λ de A^* défini par la relation :

$$i(\Lambda)(X \wedge Y) = \langle [X, Y], \xi \rangle \quad (\forall X, Y \in A, \xi \in A^*)$$

On vérifie immédiatement que, compte-tenu de l'identité de Jacobi, le 2-tenseur Λ qui dépend linéairement de $\xi \in A$ détermine sur A^* une *structure de Poisson* [1].

L'application identique $\xi \in A^* \rightarrow \xi$ définit sur A^* un champ de vecteurs privilégié (correspondant aux homothéties de A^*) qui sera encore noté ξ . On a

$$(2-12) \quad \Lambda = -[\Lambda, \xi]$$

Soit $\text{Ad}^* A$ l'algèbre de Lie correspondant à la représentation coadjointe de A dans A^* . Le champ de vecteurs ξ et le tenseur Λ de A^* sont invariants par l'action de $\text{Ad}^* A$. Les feuilles de la structure de Poisson Λ sont les orbites de la représentation coadjointe de tout groupe de Lie connexe admettant A comme algèbre de Lie. On note que le champ ξ n'est pas en général tangent aux orbites.

On obtient un résultat analogue en substituant à Λ un 2-tenseur $\bar{\Lambda} = \Lambda + \Sigma$, où Σ est un 2-tenseur constant qui est un cocycle coadjoint de l'algèbre de Lie A . Tout ceci n'est qu'une autre forme, plus synthétique, de résultats classiques de Kirillov-Kostant-Souriau.

3. - Λ -cohomologie d'une variété de Poisson

a) Soit (W, Λ) une variété de Poisson arbitraire. Il résulte de (2-3) appliquée au 2-tenseur A et aux deux 2-tenseurs $B = C = \Lambda$ que, pour tout A , on a sur (W, Λ) :

$$(3-1) \quad [\Lambda, [\Lambda, A]] = 0$$

Introduisons sur l'espace T des tenseurs contravariants antisymétriques l'opérateur ∂ qui, à tout r -tenseur A , fait correspondre le $(r + 1)$ -tenseur :

$$(3-2) \quad \partial A = -[\Lambda, A]$$

La relation (3-1) exprime que ∂ est *un opérateur de cohomologie* ($\partial^2 = 0$).

Si A et B sont respectivement un r -tenseur et un s -tenseur, on établit aisément la formule suivante [7] :

$$(3-3) \quad \partial(A \wedge B) = \partial A \wedge B + (-1)^r A \wedge \partial B$$

Il résulte de plus de (2-3) que l'on a :

$$(3-4) \quad \partial[A, B] = -[\partial A, B] - (-1)^r [A, \partial B]$$

La cohomologie définie par ∂ sur l'algèbre extérieure T des tenseurs contravariants antisymétriques est dite *l'algèbre de Λ -cohomologie de la variété de Poisson*. Dans le cas particulier d'une variété symplectique, cette Λ -cohomologie est isomorphe d'après (2-7) à la cohomologie de G. de Rham de la variété W . Nous notons dans la suite $H^r(W, \Lambda)$ le r^e espace de Λ -cohomologie de la variété de Poisson (W, Λ) , quotient de l'espace des r -tenseurs cocycles de (W, Λ) par l'espace des r -tenseurs cobords.

Il résulte de (3-4) que le crochet de Schouten induit sur l'espace des classes de Λ -cohomologie une structure *d'algèbre de Lie graduée*.

b) *Supposons (W, Λ) régulière* et de codimension q . Soit U un domaine contractile de W . En introduisant une carte naturelle $\{x^a, x^i\}$ de domaine U , on établit aisément [7].

PROPOSITION. *Sur le domaine contractile U de la variété de Poisson régulière (W, Λ) , tout r -tenseur cocycle est somme d'un cobord et d'un r -tenseur transverse constant sur chaque feuille du feuilletage. En particulier pour $r > q$, tout r -tenseur cocycle est un cobord sur U (locale triviale).*

c) Une variété de Poisson (W, Λ) , régulière ou non, est dite *exacte* s'il existe un vecteur Z tel que :

$$(3-5) \quad \Lambda = \partial Z$$

soit :

$$\Lambda = -[\Lambda, Z]$$

Si Z est tangent aux feuilles, (W, Λ) est dite *tangentiellement exacte*.

D'après (2-9), pour une variété symplectique exacte, on a $F = d\omega$, où ω est la 1-forme :

$$(3-6) \quad \omega = i(Z)F = -\mu(Z)$$

d) Etant donnée une variété de Poisson (W, Λ) , il existe un entier p tel que sur W :

$$\Lambda^p \neq 0 \quad \Lambda^{p+1} \equiv 0$$

$2p$ est le rang maximum de la structure de Poisson. Soit V le plus grand ouvert de W tel que Λ^p soit partout $\neq 0$ sur V ; le 2-tenseur Λ définit ainsi sur chaque domaine de V une structure de Poisson *régulière* de rang $2p$.

Cela posé, supposons que (W, Λ) soit *exacte* : on a $\Lambda = \partial Z$, où Z est défini à un 1-cocycle près. Considérons le $(2p + 1)$ -tenseur :

$$C = \Lambda^p \wedge Z$$

On a d'après (3-3) :

$$\partial C = \Lambda^p \wedge \partial Z = \Lambda^{p+1} = 0$$

et C est un $(2p + 1)$ -cocycle. Sa classe de cohomologie est indépendante du choix de Z : en effet, si X est un 1-cocycle, $\Lambda^p \wedge X$, produit d'un cobord Λ^p par un cocycle, est un cobord. Nous pouvons énoncer :

PROPOSITION. *Pour toute variété de Poisson (W, Λ) exacte (avec $\Lambda = \partial Z$), de rang maximum $2p$, le $(2p + 1)$ -tenseur $\Lambda^p \wedge Z$ est un $(2p + 1)$ -cocycle dont la classe de Λ -cohomologie ne dépend que de la structure de Poisson.*

En particulier, si (W, Λ) est tangentiellement exacte, cette classe est nulle. Dans le cas de la structure de Poisson définie naturellement sur l'espace dual A^* d'une algèbre de Lie A (notations de § 2, f), $\Lambda = \partial \xi$ est exact ; si les orbites de dimension maximum sont de dimension $2p$, le tenseur $\Lambda^p \wedge \xi$ définit une classe intéressante de Λ -cohomologie.

4. - Variété de Poisson associée à un feuilletage

Soit M une variété différentiable de dimension m , munie d'un feuilletage \mathcal{F} de codimension q (avec $p + q = m$)

a) Si $\sigma : T^* M \rightarrow M$ est le fibré cotangent de M , la 2-forme de Poincaré $F_{(M)}$ de $T^* M$ définit sur $T^* M$ une structure symplectique exacte, dont nous notons $\Lambda_{(M)}$ le 2-tenseur de structure et ν le morphisme correspondant.

Soit $\{x^A\}$ une carte de M de domaine U . Dans la carte associée $\{x^K\} = \{x^A, x^{\bar{A}}\}$ de $T^* M$, de domaine $\sigma^{-1}(U)$, on a :

$$(4-1) \quad F_{(M)} \big|_{\sigma^{-1}(U)} = \sum_A dx^A \wedge dx^{\bar{A}}$$

et $\Lambda_{(M)}$ a pour seules composantes non nulles :

$$(4-2) \quad \Lambda_{(M)}^{A\bar{A}} = -\Lambda_{(M)}^{\bar{A}A} = 1$$

Prenons pour $\{x^A\}$ une carte $\{x^a, x^i\}$ ($a, b, \dots = 1, \dots, q ; i, j, \dots = q + 1, \dots, n$) adaptée au feuilletage \mathcal{F} . A chaque fonction locale x^a , nous pouvons faire correspondre sur $\sigma^{-1}(U)$ le champ de vecteur local $P_{(a)} = \nu(dx^a)$ qui a pour composantes

$$P_{(a)}^L = \Lambda_{(M)}^{KL} (dx^a)_K = \Lambda_{(M)}^{aL}$$

Il résulte de (4-2) que les $P_{(a)}$ ont pour composantes dans la carte $\{x^A, x^{\bar{A}}\}$:

$$(4-3) \quad P_{(a)}^A = 0 \quad P_{(a)}^{\bar{i}} = 0 \quad P_{(a)}^{\bar{b}} = \delta_a^b$$

D'après (4-3), chaque $P_{(a)}$ définit une section locale de $\nu^* \mathcal{F}$. Au dessus de $x \in U$, les vecteurs $P_{(a)}$ engendrent la fibre en ce point de $\nu^* \mathcal{F}$. D'autre part il résulte trivialement de (4-2), (4-3) que l'on a au dessus de U :

$$\mathcal{L}(P_{(a)}) \Lambda_{(M)} = 0$$

Il en résulte que le 2-tenseur $\Lambda_{(M)}$ est *projetable sur* $W = T^* \mathcal{F} = T^* M / \nu^* \mathcal{F}$ selon un 2-tenseur $\Lambda_{(\mathcal{F})}$ dont les seules composantes non nulles dans la carte $\{x^a, x^i, x^{\bar{i}}\}$ correspondante de T^* sont :

$$\Lambda_{(\mathcal{F})}^{\bar{i}\bar{i}} = -\Lambda_{(\mathcal{F})}^{\bar{i}\bar{i}} = 1$$

Par suite $\Lambda_{(\mathcal{F})}$ est partout de rang $2p$ et vérifie trivialement $[\Lambda_{(\mathcal{F})}, \Lambda_{(\mathcal{F})}] = 0$. Le 2-tenseur $\Lambda_{(\mathcal{F})}$ définit ainsi sur $T^*\mathcal{F}$ une structure régulière de Poisson de codimension $(m+p) - 2p = q$. Le feuilletage symplectique de $(W = T^*\mathcal{F}, \Lambda_{(\mathcal{F})})$ n'est autre que $\pi^*\mathcal{F}$, les feuilles étant les fibrés cotangents aux feuilles de \mathcal{F} .

b) Soit $Z_{(M)}$ le champ fondamental du fibré vectoriel $T^*M \rightarrow M$ (champ des homothéties) ; c'est aussi le champ fondamental de la variété symplectique exacte $(T^*M, \Lambda_{(M)})$ et l'on a :

$$(4-4) \quad \Lambda_{(M)} = -[\Lambda_{(M)}, Z_{(M)}]$$

Dans la carte $\{x^A, x^{\bar{A}}\}$ de T^*M , le vecteur $Z_{(M)}$ a pour composantes :

$$(4-5) \quad Z_{(M)}^A = 0 \quad Z_{(M)}^{\bar{A}} = x^{\bar{A}}$$

et l'on a au dessus de U d'après (4-3) :

$$(\mathcal{L}(P_{(a)}) Z_{(M)})^K = \partial_a Z_{(M)}^K$$

Par suite d'après (4-5)

$$\mathcal{L}(P_{(a)}) Z_{(M)} = P_{(a)}$$

Il en résulte que $Z_{(M)}$ est projetable sur $T^*\mathcal{F}$ selon un champ de vecteurs $Z_{(\mathcal{F})}$ dont les seules composantes non nulles dans la carte $\{x^a, x^i, x^{\bar{i}}\}$ correspondantes sont :

$$Z_{(\mathcal{F})}^{\bar{i}} = x^{\bar{i}}$$

Le champ $Z_{(\mathcal{F})}$ est le champ fondamental du fibré vectoriel $\pi : T^*\mathcal{F} \rightarrow M$ et est donné par les vecteurs fondamentaux des fibrés cotangents aux feuilles de \mathcal{F} . Il est tangent au feuilletage de $T^*\mathcal{F}$ et vérifie, d'après (4-4), $\Lambda_{(\mathcal{F})} = -[\Lambda_{(\mathcal{F})}, Z_{(\mathcal{F})}]$. Nous pouvons énoncer :

THEOREME. *Le fibré vectoriel $\pi : T^*\mathcal{F} \rightarrow M$ cotangent au feuilletage \mathcal{F} est muni naturellement d'une structure régulière de Poisson $\Lambda_{(\mathcal{F})}$ tangentielle exacte, de même codimension que \mathcal{F} . On a :*

$$(4-6) \quad \Lambda_{(\mathcal{F})} = -[\Lambda_{(\mathcal{F})}, Z_{(\mathcal{F})}] = \partial Z_{(\mathcal{F})}$$

où $Z_{(\mathcal{F})}$ est le champ fondamental du fibré vectoriel [17].

Nous supprimons dans la suite l'indice \mathcal{F} , pour $\Lambda(\mathcal{F})$ et $Z(\mathcal{F})$, lorsqu'aucune confusion n'est à craindre.

5. - Caractérisation de $T^*\mathcal{F}$

Nous nous proposons de caractériser les variétés différentiables, connexes, paracompactes W qui peuvent être considérées comme *des fibrés cotangents à un feuilletage*. A cet effet, nous utiliserons un théorème de Nagano [16] qui permet de caractériser les fibrés vectoriels et que nous allons rappeler.

a) Considérons une variété W de dimension n , munie d'un champ de vecteurs Z dont nous désignons par M l'ensemble des points singuliers (ou zéros). Si $x \in M$, le champ Z définit sur l'espace tangent $T_x W$ en x un opérateur linéaire $A_Z(x)$, dont la matrice des composantes, pour une carte $\{z^K\}$ ($K, L, \dots = 1, \dots, n$) de W de domaine U s'écrit $(\partial_K Z^L)$; $A_Z(x)$ est appelé *l'opérateur caractéristique* de Z en x .

Si $\pi : W \rightarrow M$ est un *fibré vectoriel* dont la base M , de dimension m , peut être identifiée à la section nulle et dont la fibre est de dimension p (avec $m + p = n$), le champ fondamental Z des homothéties infinitésimales du fibré vectoriel vérifie les propriétés suivantes :

PROPRIETES (P) : (I) Z engendre un groupe de Lie à un paramètre $\exp(t Z)$ de transformations globales de W .

(II) M est une sous-variété de W de codimension p .

(III) Si $x \in M$, l'opérateur caractéristique $A_Z(x)$ vérifie $A_Z^2(x) = A_Z(x)$ et est de rang p .

(IV) Pour tout point $z \in W$, il existe un point unique $x = \lim_{t \rightarrow -\infty} \exp(t Z)z$ de M .

Inversement Nagano a établi le théorème suivant :

THEOREME (Nagano). *Si le champ de vecteurs Z de la variété différentiable W vérifie les propriétés (P), (W, Z) admet une structure unique de fibré vectoriel de vecteur fondamental Z . Tout difféomorphisme d'un fibré vectoriel (W, Z) sur un fibré vectoriel (W', Z') qui applique Z sur Z' est un isomorphisme de fibrés vectoriels.*

Si $x \in M$, il résulte de (P_{III}) que l'opérateur $A_Z(x)$ opérant sur $T_x W$ est diagonalisable et admet comme valeurs propres 1 à l'ordre p et 0 à l'ordre m . Les vecteurs propres correspondant à 0 sont les éléments de $T_x M$, espace tangent à M ; ceux correspondant à 1 définissent un sous-espace $N_x M$ de $T_x W$ de dimension p , supplémentaire de $T_x M$ dans $T_x W$. L'ensemble $N M$ des

vecteurs de $N_x M$ aux différents points x de M admet une structure naturelle de fibré vectoriel sur M , transverse à M dans W . On établit essentiellement le théorème précédent en construisant un difféomorphisme de $N M$ sur W .

On a pu ainsi caractériser en termes de champs fondamentaux les fibrés cotangents à une variété [16] et les fibrés canoniques d'une variété [17].

b) Donnons-nous *une variété de Poisson* (W, Λ) *régulière, tangentiellement exacte*, de codimension q . Nous notons $2p$ le rang de Λ qui définit sur W un feuilletage symplectique exact \mathcal{G} . Si $z \in W$, $\mathcal{G}(z)$ est la feuille passant par z . Il existe, par hypothèse, un vecteur Z *tangent au feuilletage* tel que :

$$\Lambda = -[\Lambda, Z]$$

Nous supposons que (W, Z) *vérifie les propriétés (P)*, où la codimension de M est effectivement p , de telle sorte que sa dimension est $m = p + q$. Le vecteur Z étant tangent, l'opérateur caractéristique $A_Z(x)$, en $x \in M$, est à valeurs dans $T_x \mathcal{G}(x)$.

Sous les hypothèses faites, il résulte du théorème de Nagano que (W, Z) peut être identifié à un fibré vectoriel $\hat{\pi} : W \rightarrow M$, de champ fondamental Z , à fibre de dimension p .

Soit $\{y^A\}$ ($A = 1, \dots, m$) une carte de M admettant le domaine contractile U . On en déduit une carte $\{y^K\} = \{y^A, y^\rho\}$ ($\rho, \sigma, \dots = 1, \dots, p$) de W de domaine $\hat{\pi}^{-1}(U)$, pour laquelle Z a pour composantes :

$$(5-1) \quad Z^A = 0 \quad Z^\rho = y^\rho$$

Considérons un domaine $V = U \times]-1, +1[$ de W , où $y^\rho \in]-1, +1[$ et où le domaine U de M est identifié à $\{y^\rho = 0\}$. Soit f une fonction C^∞ définie sur V et constante sur les feuilles de \mathcal{G} restreintes à ce domaine V . Le vecteur Z étant tangent, on a $\mathcal{L}(Z|_V) f = 0$ sur V et f est homogène de degré 0 en $\{y^\sigma\}$; il vient :

$$y^\sigma \partial_\sigma f(y^A, y^\rho) = 0$$

Par suite $\partial_\rho f(y^A, 0) = 0$. On en déduit par un raisonnement standard que f est indépendant des y^ρ . Ainsi f est l'image réciproque sur V par $\hat{\pi}$ d'une fonction définie sur U que nous notons encore f .

Soit $\{x^a, x^\alpha\}$ ($a = 1, \dots, q$; $\alpha = 1, \dots, 2p$) une carte de W de domaine adaptée au feuilletage \mathcal{G} .

Il résulte du raisonnement précédent que les q fonctions x^a sont les images réciproques par $\hat{\pi}$ de fonctions sur U notées encore x^a . Ces q fonctions étant indépendantes sur U on peut les

compléter et définir une carte $\{x^a, x^i\}$ ($a = 1, \dots, q$; $i = 1, \dots, p$) de M de domaine U .

Les relations $x^a = \text{const.}$ déterminent sur M un feuilletage \mathcal{F} tel que, pour la submersion $\hat{\pi}$, on ait $\mathcal{G} = \hat{\pi}^* \mathcal{F}$. On voit que \mathcal{F} est de codimension q et que chaque feuille de \mathcal{F} est de dimension p . Si $z \in W$ et $x = \hat{\pi}(z)$, on pose $\mathcal{F}(x) = \hat{\pi}^{-1} \mathcal{G}(z)$. La carte $\{x^a, x^i\}$ est une carte adaptée au feuilletage \mathcal{F} .

c) D'après (5-1), l'opérateur $A_Z(x)$, pour $x \in M$, est représenté dans la carte $\{y^A, y^\rho\}$ par la $p \times p$ -matrice $(\partial_\sigma y^\rho = \delta_\sigma^\rho)$.

Choisissons un point z_0 quelconque de W et soit $x_0 = \hat{\pi}(z_0)$ sa projection sur M . Nous nous proposons d'étudier la feuille $\mathcal{G}(z_0)$ de W . Le champ de vecteurs Z étant tangent, $Z|_{\mathcal{G}(z_0)}$ est un champ de vecteurs \bar{Z} de $\mathcal{G}(z_0)$ qui engendre un groupe de Lie à un paramètre de transformations globales de $\mathcal{G}(z_0)$, soit $\exp(t\bar{Z}) = \exp(tZ)|_{\mathcal{G}(z_0)}$. La variété M étant considérée comme sous-variété de W , la sous-variété $\mathcal{F}(x_0)$ de M peut être identifiée à $M \cap \mathcal{G}(z_0)$ et est la sous-variété des zéros de \bar{Z} dans $\mathcal{G}(z_0)$.

Pour la variété $\mathcal{G}(z_0)$ de dimension $2p$, on a :

PROPRIETES (P') : (I') \bar{Z} engendre un groupe de Lie à un paramètre $\exp(t\bar{Z})$ de transformations globales de $\mathcal{G}(z_0)$.

(II') $\mathcal{F}(x_0)$ est une sous-variété de $\mathcal{G}(z_0)$ de codimension p (et dimension p)

(III') Si $x \in \mathcal{F}(x_0)$, l'opérateur caractéristique $A_{\bar{Z}}(x)$, restriction de $A_Z(x)$ à $T_x \mathcal{G}(z_0)$ et défini sur cet espace, vérifie $A_{\bar{Z}}^2(x) = A_{\bar{Z}}(x)$ et est de rang p .

(IV') Pour tout point z de $\mathcal{G}(z_0)$, il existe un point unique x de $\mathcal{F}(x_0)$ tel que $x = \lim_{t \rightarrow -\infty} \exp(t\bar{Z})z$.

On déduit des résultats de Nagano [16] que la restriction de $\hat{\pi}$ à $\mathcal{G}(z_0)$ définit $\mathcal{G}(z_0)$ de manière unique comme fibré cotangent de $\mathcal{F}(x_0)$. Il en résulte immédiatement que, pour M muni du feuilletage \mathcal{F} , la variété (W, Λ, Z) peut être identifiée à $T^* \mathcal{F}$ muni de sa structure de Poisson tangentiellement exacte. On a :

THEOREME. Soit (W, Λ, Z) une variété de Poisson régulière, tangentiellement exacte, de codimension q et rang $2p$, telle que son champ fondamental Z vérifie les propriétés (P). La variété (W, Λ, Z) admet alors une structure unique de fibré cotangent à un feuilletage $T^* \mathcal{F}$, pour un feuilletage \mathcal{F} de codimension q de M , telle que Λ et Z soient les éléments fondamentaux de $T^* \mathcal{F}$.

6. - Structure conforme de Jacobi associée à un feuilletage

Soit M une variété différentiable de dimension m , munie d'un feuilletage \mathcal{F} de codimension q (avec $p + q = m$).

a) Considérons la variété $T_0^* \mathcal{F}$ obtenu en privant le fibré cotangent au feuilletage $T^* \mathcal{F}$ de sa section nulle ; $T_0^* \mathcal{F}$ est feuilleté en feuilles $T_0^* \mathcal{F}(x)$ qui sont les fibrés cotangents aux feuilles de \mathcal{F} privés de leurs sections nulles. Sur $T_0^* \mathcal{F}$, le vecteur Z est sans zéros. Soit ρ la relation d'équivalence définie sur $T_0^* \mathcal{F}$ par les trajectoires de Z et considérons l'espace quotient $T_0^* \mathcal{F} / \rho = \Theta^* \mathcal{F}$. C'est une variété de dimension $(2p + q - 1)$ dont les éléments sont les directions cotangentes aux feuilles de \mathcal{F} ; la variété $\Theta^* \mathcal{F}$ est un fibré sur M en sphères de dimension $(p - 1)$, admettant un feuilletage dont les feuilles sont les fibrés en cosphères des feuilles de \mathcal{F} , soit $\Theta^* \mathcal{F}(x)$ ($x \in M$).

b) Adoptons sur $T_0^* \mathcal{F}$ des cartes $\{x^\alpha\} = \{x^0, x^\lambda\}$ ($\alpha, \beta, \dots = 0, 1, \dots, 2p+q-1$, $\lambda, \mu, \dots = 1, \dots, 2p+q-1$) de domaine U , telles que Z ait pour seule composante non nulle, sur U , $Z^0 = 1$. Dans l'intersection $U \cap U'$ des domaines de deux telles cartes on a :

$$(6-1) \quad x^{0'} = x^0 + \varphi(x^\lambda) \quad x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^\lambda)$$

Il résulte de (4-6) que l'on a sur U dans la carte introduite :

$$\Lambda^{\alpha\beta} = -\partial_0 \Lambda^{\alpha\beta}$$

Posons sur U :

$$(6-2) \quad \bar{\Lambda}^{\alpha\beta} = e^{x^0} \Lambda^{\alpha\beta}$$

de telle sorte que les $\bar{\Lambda}^{\alpha\beta}$ sont indépendants de x^0 . Sur \bar{U} projection de U , nous sommes conduits à introduire un vecteur $\bar{E}_{\bar{U}}$ et un 2-tenseur $\bar{\Lambda}_{\bar{U}}$ définis par :

$$\bar{E}_{\bar{U}} = (\bar{E}^\lambda) = (\bar{\Lambda}^{0\lambda}) \quad \bar{\Lambda}_{\bar{U}} = (\bar{\Lambda}^{\lambda\mu})$$

et vérifiant sur \bar{U} :

$$(6-3) \quad \bar{E}_{\bar{U}} \wedge (\bar{\Lambda}_{\bar{U}})^{p-1} \neq 0$$

Sur le domaine U , la relation $[\Lambda, \Lambda] = 0$ s'écrit :

$$(6-4) \quad S \Lambda^{\delta\alpha} \partial_\delta \Lambda^{\beta\gamma} = 0$$

où S est la sommation après permutation circulaire sur α, β, γ . Pour $\alpha = 0, \beta = \mu, \gamma = \nu$, la relation (6-4) s'écrit :

$$\Lambda^{\rho 0} \partial_{\rho} \Lambda^{\mu\nu} + \Lambda^{\rho\mu} \partial_{\rho} \Lambda^{\nu 0} + \Lambda^{\rho\nu} \partial_{\rho} \Lambda^{0\mu} = 0$$

soit encore d'après (6-2) :

$$-\bar{E}^{\rho} \partial_{\rho} \bar{\Lambda}^{\mu\nu} + \partial_{\rho} \bar{E}^{\mu} \bar{\Lambda}^{\rho\nu} + \partial_{\rho} \bar{E}^{\nu} \bar{\Lambda}^{\mu\rho} = 0$$

On obtient ainsi :

$$(6-5) \quad [\bar{E}_{\bar{U}}, \bar{\Lambda}_{\bar{U}}] = 0$$

On obtient de même en faisant $\alpha = \lambda, \beta = \mu, \gamma = \nu$ dans (6-4) :

$$S \bar{\Lambda}^{\rho\lambda} \partial_{\rho} \bar{\Lambda}^{\mu\nu} - S \bar{E}^{\lambda} \bar{\Lambda}^{\mu\nu} = 0$$

c'est-à-dire :

$$(6-6) \quad [\bar{\Lambda}_{\bar{U}}, \bar{\Lambda}_{\bar{U}}] = 2 \bar{E}_{\bar{U}} \wedge \bar{\Lambda}_{\bar{U}}$$

Ainsi, d'après (6-3), (6-5), (6-6), le couple $(\bar{E}_{\bar{U}}, \bar{\Lambda}_{\bar{U}})$ définit sur \bar{U} de dimension $(2p + q - 1)$ une structure de Jacobi régulière [8] de dimension q .

Dans l'insertion $\bar{U} \cap \bar{U}'$ des domaines de deux cartes de $\Theta^* \mathcal{F}$ déduites de cartes de $T_0^* \mathcal{F}$ adaptées à Z , on a d'après (6-1) et (6-2) :

$$(6-7) \quad \bar{\Lambda}_{\bar{U}'} = e^{\varphi} \bar{\Lambda}_{\bar{U}}$$

et pour les vecteurs correspondants :

$$(6-8) \quad \bar{E}_{\bar{U}'} = e^{\varphi} (\bar{E}_{\bar{U}} + [\bar{\Lambda}_{\bar{U}}, \varphi])$$

Il résulte de (6-7) et (6-8) que le 2-tenseur Λ de $T_0^* \mathcal{F}$ définit une structure conforme de Jacobi globale [8].

c) Soit $\{x^a, x^i\}$ une carte de M , de domaine V , adaptée au feuilletage \mathcal{F} . Le feuilletage de $T_0^* \mathcal{F}$ est définie au dessus de V par les relations $x^a = \text{const}$; le vecteur Z étant tangent à ce feuilletage, les x^a sont les images réciproques par la projection $T_0^* \mathcal{F} \rightarrow \Theta^* \mathcal{F}$ de fonctions locales de Θ^* encore notées x^a . Ainsi $\{x^0, x^\lambda = x^a, x^r\}$ ($r = 1, \dots, 2p-1$) est une carte de $T_0^* \mathcal{F}$ au dessus

de V ; dans cette carte, on a :

$$\Lambda^{a\alpha} = 0$$

Dans la carte correspondante $\{x^\lambda\} = \{x^a, x^r\}$ de $\Theta^* \mathcal{F}$ il vient :

$$(6-9) \quad \bar{\Lambda}_{\bar{U}}^{a\lambda} = 0 \quad \bar{E}_{\bar{U}}^a = 0$$

Il en résulte que le feuilletage canonique [8] de la variété conforme de Jacobi régulière $\Theta^* \mathcal{F}$ en variétés de contact est défini par les $x^a = \text{const}$. Il admet pour feuilles les variétés de contact $\Theta^* \mathcal{F}(x)$. Nous pouvons énoncer :

PROPOSITION. *Si (M, \mathcal{F}) est une variété munie d'un feuilletage \mathcal{F} , le fibré en sphères $\Theta^* \mathcal{F} \rightarrow M$ admet une structure conforme de Jacobi régulière naturelle, dont le feuilletage est donné par les variétés de contact $\Theta^* \mathcal{F}(x)$ (où $x \in M$).*

7. - Orientabilité de $T^* \mathcal{F}$

a) Soit $V \rightarrow M$ un fibré vectoriel sur la variété M , dont nous notons q la dimension de la fibre. On sait que V est dit *un fibré vectoriel orientable* si le groupe structural du fibré principal associé peut être réduit à $GL^+(q; \mathbb{R})$. Il est équivalent de dire que le fibré vectoriel $\Lambda^q V \rightarrow M$ admet une section globale partout $\neq 0$. Si $V \rightarrow M$ est un fibré vectoriel orientable, il en est de même pour son dual $V^* \rightarrow M$.

Dire que $T M$ (ou $T^* M$) est un fibré vectoriel orientable, c'est dire que la variété différentiable M est orientable.

b) Soit (W, Λ) une variété de Poisson régulière de codimension q et rang $2p$. Nous notons \mathcal{G} le feuilletage symplectique correspondant.

Comme le tenseur Λ^p est partout $\neq 0$, ce tenseur définit une section globale partout $\neq 0$, du fibré $\Lambda^{2p}(T \mathcal{G}) \rightarrow W$ et le fibré vectoriel $T \mathcal{G} \rightarrow W$ est orientable. Il en résulte que *pour que le fibré vectoriel transverse $\nu \mathcal{G} = T W / T \mathcal{G}$ sur W soit orientable, il faut et il suffit que la variété W soit orientable.*

c) Cela posé, soit (M, \mathcal{F}) une variété munie d'un feuilletage (notations du § 1). Nous notons I^1 l'espace des 1-formes de M qui s'annulent sur les feuilles, l'idéal (pour le produit extérieur) des formes de M qui s'annulent sur les feuilles. On peut remarquer que $(I)^{q+1} = \{0\}$.

D'après les définitions rappelées, pour qu'il existe sur M une q -forme ω , partout $\neq 0$, appartenant à $(\mathbb{1}^1)^q$ il faut et il suffit que le fibré vectoriel $\nu^* \mathcal{F} \rightarrow M$ soit orientable, donc que le fibré vectoriel $\nu \mathcal{F} \rightarrow M$ soit orientable. S'il en est ainsi, nous dirons que la q -forme ω définit le feuilletage \mathcal{F} .

Si $\{x^a, x^i\}$ ($a, b, \dots = 1, \dots, q$; $i, j, \dots = q+1, \dots, m$) est une carte de M de domaine U adaptée au feuilletage \mathcal{F} , la forme ω qui est localement décomposable s'écrit sur U :

$$(7-1) \quad \omega|_U = \exp \psi_U dx^1 \wedge \dots \wedge dx^q \quad (\psi_U \in C^\infty(U; \mathbb{R}))$$

Considérons la variété de Poisson ($W = T^* \mathcal{F}$, Λ) associée à (M , \mathcal{F}) et munie du feuilletage $\mathcal{G} = \pi^* \mathcal{F}$; s'il existe sur M une q -forme définissant le feuilletage \mathcal{F} , la q -forme $\pi^* \omega$ de $T^* \mathcal{F}$ définit le feuilletage $\mathcal{G} = \pi^* \mathcal{F}$ et les fibrés vectoriels $\nu^* \mathcal{G}$ ou $\nu \mathcal{G}$ de base W sont orientables. Il résulte du b. que la variété de Poisson $W = T^* \mathcal{F}$ est orientable.

Ainsi si $\nu \mathcal{F} \rightarrow M$ est un fibré vectoriel orientable, la variété de Poisson $W = T^* \mathcal{F}$ est elle-même orientable.

d) Inversement supposons la variété $W = T^* \mathcal{F}$ orientable, c'est-à-dire le fibré vectoriel $\nu^* \mathcal{G} \rightarrow W$ orientable.

Soit alors ω_W une q -forme de W , partout $\neq 0$, définissant le feuilletage \mathcal{G} . D'après (7-1) il existe une 1-forme η_W telle que :

$$(7-2) \quad d\omega_W + \eta_W \wedge \omega_W = 0$$

Elle vérifie :

$$(7-3) \quad d\eta_W \wedge \omega_W = 0$$

Si $x \in M$, restreignons η_W à la fibre $\pi^{-1}(x)$ de $\pi : T^* \mathcal{F} \rightarrow M$. D'après (7-3), cette restriction est une 1-forme fermée, donc homologue à 0, sur l'espace vectoriel $\pi^{-1}(x)$. Sur cet espace, il existe une fonction φ_x à valeurs réelles telle que :

$$\eta_W|_{\pi^{-1}(x)} = d\varphi_x$$

où φ_x peut être parfaitement déterminée par la condition $\varphi_x(0) = 0$. Il en résulte que les φ_x définissant sur $W = T^* \mathcal{F}$ une fonction $\varphi \in N = C^\infty(W; \mathbb{R})$, nulle sur la section nulle de $T^* \mathcal{F}$, telle que :

$$(\eta_W - d\varphi)|_{\pi^{-1}(x)} = 0 \quad (\forall x \in M)$$

Cela posé substituons à la q-forme ω_W la q-forme :

$$(7-4) \quad \bar{\omega}_W = \exp \varphi \cdot \omega_W$$

On a :

$$(7-5) \quad d\bar{\omega}_W + \bar{\eta}_W \wedge \bar{\omega}_W = 0$$

où $\bar{\eta}_W = \eta_W - d\varphi$ est telle que :

$$(7-6) \quad \bar{\eta}_W \Big|_{\pi^{-1}(x)} = 0 \quad (\forall x \in M)$$

A la carte $\{x^a, x^i\}$ de M , de domaine U , adaptée à \mathcal{F} , correspondant (voir § 1) une carte $\{x^a, x^i, x^{\bar{j}}\}$ de W , de domaine $\pi^{-1}(U)$, adaptée à \mathcal{G} . On a :

$$(7-7) \quad \bar{\omega}_W \Big|_{\pi^{-1}(U)} = \exp \psi_U(x^a, x^i, x^{\bar{j}}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^q$$

et par suite :

$$d\bar{\omega}_W \Big|_{\pi^{-1}(U)} = d\psi_U \wedge \bar{\omega}_W \Big|_{\pi^{-1}(U)}$$

Ainsi, d'après (7-5)

$$(\bar{\eta}_W \Big|_{\pi^{-1}(U)} + d\psi_U) \wedge \bar{\omega}_W \Big|_{\pi^{-1}(U)} = 0$$

D'après (7-6), pour $x \in U$, on a sur la fibre $\pi^{-1}(x)$:

$$d\psi_U \Big|_{\pi^{-1}(x)} = 0$$

c'est-à-dire $\partial_{\bar{j}} \psi_U = 0$. Il résulte donc de (7-7) qu'il existe sur M une q-forme ω , partout $\neq 0$, telle que :

$$\bar{\omega}_W = \pi^* \omega$$

La q-forme ω définit le feuilletage \mathcal{F} , et les fibrés vectoriels $\nu^* \mathcal{F} \rightarrow M$ ou $\nu \mathcal{F} \rightarrow M$ sont orientables. Nous avons établi :

PROPOSITION. *Pour que le fibré vectoriel transverse $\nu \mathcal{F} \rightarrow M$ soit orientable, il faut et il suffit que la variété de Poisson $W = T^* \mathcal{F}$ associée au feuilletage soit orientable.*

8. - 1-classe de Λ -cohomologie associée à un feuilletage

a) Soit (M, \mathcal{F}) une variété munie d'un feuilletage \mathcal{F} . Nous supposons le fibré vectoriel $\nu \mathcal{F} \rightarrow M$ orientable ou, ce qui est équivalent, la variété $W = T^* \mathcal{F}$ orientable.

S'il en est ainsi, il existe sur M une q -forme ω , partout $\neq 0$, définissant le feuilletage \mathcal{F} et par suite, une 1-forme η telle que :

$$(8-1) \quad d\omega + \eta \wedge \omega = 0$$

avec

$$(8-2) \quad d\eta \wedge \omega = 0$$

Pour ω fixée, η est définie à $\eta \rightarrow \eta + \lambda$ près, où $\lambda \in I^1$ et (8-2) exprime que $d\eta \in I$. Si l'on modifie ω par un facteur partout non nul, il existe un scalaire u de M tel que $\eta \rightarrow \eta + du$. La restriction de η à chaque feuille est fermée et définit sur celle-ci une 1-classe de cohomologie de la feuille qui ne dépend que du feuilletage.

Plus généralement soit \mathcal{F} l'opérateur sur les formes α de M défini par la restriction de α à toutes les feuilles de \mathcal{F} et soit \bar{d} la différentiation extérieure tangente aux feuilles ; on a $\bar{d} \mathcal{F} = \mathcal{F} d$. Une forme α est \bar{d} -fermée si $\bar{d} \mathcal{F} \alpha = 0$; elle est \bar{d} -exacte s'il existe β sur M telle que $\mathcal{F} \alpha = \bar{d} \mathcal{F} \beta$. Nous notons $H^r(\mathcal{F} ; \mathbb{R})$ le r^e espace de cohomologie sur les formes $\mathcal{F} \alpha$ avec \bar{d} comme opérateur cobord.

La 1-forme η définit un élément de $H^1(\mathcal{F} ; \mathbb{R})$ qui constitue la 1-classe de cohomologie secondaire du feuilletage \mathcal{F} .

Une forme de Godbillon-Vey de \mathcal{F} est une $(2q+1)$ -forme de M donnée par :

$$g.V(\mathcal{F}) = \eta \wedge (d\eta)^q$$

Une telle forme est fermée puisque sa différentielle appartient à $(I)^{q+1} = \{0\}$. On vérifie immédiatement que sa classe de cohomologie $[g.V(\mathcal{F})]$, élément de $H^{2q+1}(M ; \mathbb{R})$ est un invariant du feuilletage.

Considérons le fibré vectoriel $\pi : W = T^* \mathcal{F} \rightarrow M$. La forme $\pi^* \omega$ définit le feuilletage $\mathcal{G} = \pi^* \mathcal{F}$ de cette variété et l'on a :

$$d(\pi^* \omega) + \pi^* \eta \wedge \pi^* \omega = 0$$

La 1-forme $\pi^* \eta$ définit la 1-classe du cohomologie secondaire du feuilletage $\pi^* \mathcal{F}$ et la forme $\pi^* \eta \wedge d(\pi^* \eta)^q$ est une forme de Godbillon-Vey de ce feuilletage. On en déduit :

$$[g.V(\pi^* \mathcal{F})] = \pi^*[g.V(\mathcal{F})]$$

Ainsi la classe de Godbillon-Vey de $\pi^*(\mathcal{F})$, élément de $H^{2q+1}(T^*\mathcal{F}; \mathbb{R})$ est l'image réciproque par π de la classe de Godbillon-Vey de \mathcal{F} , élément de $H^{2q+1}(M; \mathbb{R})$.

b) Soit (W, Λ) une variété de Poisson régulière, de codimension q , que nous supposons orientable. Si \mathcal{G} est son feuilletage, le fibré vectoriel $\nu \mathcal{G} \rightarrow W$ est orientable. Nous notons ν le morphisme correspondant.

Soit ω une q -forme de W , partout $\neq 0$, définissant le feuilletage \mathcal{G} et η une 1-forme qui lui correspond d'après (8-1). Introduisons sur W le vecteur $H_{(1)}$, bien déterminé pour ω donné, défini par :

$$(8-3) \quad H_{(1)} = \nu(\eta)$$

De la fermeture des restrictions de η aux feuilles, il résulte :

$$(8-4) \quad \partial H_{(1)} = -[\Lambda, H_{(1)}] = 0$$

et $H_{(1)}$ est 1-cocycle tangent au feuilletage, pour la Λ -cohomologie de (W, Λ) .

Si l'on modifie ω par un facteur partout non nul, on a $\eta \rightarrow \eta + du$ pour un scalaire u de W et l'on obtient le vecteur :

$$H'_{(1)} = H_{(1)} + [\Lambda, u]$$

qui est un 1-cocycle cohomologue à $H_{(1)}$. On a :

PROPOSITION. Sur une variété de Poisson (W, Λ) régulière, orientable, $H_{(1)}$ définit une 1-classe de Λ -cohomologie $[H_{(1)}] \in H^1(W; \Lambda)$ qui ne dépend que de Λ .

Si $[H_{(1)}] = 0$, il existe $u \in N = C^\infty(W; \mathbb{R})$ telle que $H_{(1)} = [\Lambda, u]$, c'est-à-dire $\nu(\eta - du) = 0$. Il vient ainsi :

$$(\eta - du) \wedge \omega = 0$$

et

$$d\omega + du \wedge \omega = 0$$

La 1-classe de cohomologie secondaire du feuilletage \mathcal{G} est nulle. En particulier $[g.V(\mathcal{G})] = 0$.

Le champ de vecteurs $H_{(1)}$ est un champ de vecteurs de W tangent au feuilletage laissant Λ invariant. Dire que $[H_{(1)}]$ est $\neq 0$, c'est-à-dire que le champ $H_{(1)}$ n'est pas un champ de vecteurs hamiltonien. *L'algèbre de Lie des champs hamiltoniens de (W, Λ) est alors un idéal propre de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents à \mathcal{G} préservant Λ .*

c) On peut définir $H_{(1)}$ directement, *de manière contravariante*. La variété de Poisson (W, Λ) , de dimension $d = q + 2p$, étant supposée orientable, il existe sur W un d -tenseur C contravariant antisymétrique, partout non nul. Nous posons :

$$(8-5) \quad C = \Lambda^p \wedge \Theta$$

où Θ est un q -tenseur complètement transverse au feuilletage \mathcal{G} . On peut définir $H_{(1)}$ par la relation :

$$(8-6) \quad \partial \Theta + H_{(1)} \wedge \Theta = 0$$

En effet soit $\{x^a, x^i\}$ ($a = 1, \dots, q$; $i, j, \dots = 1, \dots, 2p$) une *carte naturelle* de (W, Λ) (voir § 2, e) de domaine U . Sur U , Θ a pour seules composantes non nulles :

$$\Theta^{a_1 \dots a_q} = \varphi_U \epsilon^{a_1 \dots a_q}$$

où $\varphi_U \neq 0$ appartient à $C^\infty(U; \mathbb{R})$. Dans la carte envisagée, on a sur U :

$$[\Lambda, \Theta]^{j a_1 \dots a_q} = \Lambda^{ij} (\partial_i \varphi_U / \varphi_U) \Theta^{a_1 \dots a_q}$$

et l'on peut poser :

$$\partial \Theta + K \wedge \Theta = 0$$

où le vecteur K a pour composantes :

$$K^j = \Lambda^{ij} (\partial_i \varphi_U / \varphi_U)$$

D'autre part la q -forme ω déduite de Θ par inversion définit le feuilletage \mathcal{G} . On a sur le domaine U :

$$\omega_{a_1 \dots a_q} = (1 / \varphi_U) \epsilon_{a_1 \dots a_q}$$

On en déduit :

$$(d\omega)_{ia_1 \dots a_q} = -(\partial_i \varphi_U / \varphi_U) \omega_{a_1 \dots a_q}$$

et pour cette forme ω , les composantes tangentielles de η sont sur U :

$$\eta_i = (\partial_i \varphi_U / \varphi_U)$$

Ainsi $H_{(1)}$ a pour seules composantes non nulles :

$$H_{(1)}^j = \Lambda^{ij} \eta_i = \Lambda^{ij} (\partial_i \varphi_U / \varphi_U) = K^j$$

et le vecteur K coïncide avec $H_{(1)}$. A partir de la relation (8-6), on peut vérifier directement les propriétés de $H_{(1)}$.

d) Replaçons-nous dans les conditions du a : soit (M, \mathcal{F}) une variété munie d'un feuilletage \mathcal{F} et soit $(W = T^* \mathcal{F}, \Lambda)$ la variété de Poisson associée.

Un r -tenseur de $T^* \mathcal{F}$ est dit *vertical* si sa projection sur M est nulle. Soit $\{x^a, x^i\}$ ($a = 1, \dots, q$; $i, j, \dots = q+1, \dots, m$) une carte de M de domaine U adaptée au feuilletage \mathcal{F} , $\{x^a, x^i, \bar{x}^i\}$ la carte correspondante de $W = T^* \mathcal{F}$ au dessus de U . Si C est un r -tenseur vertical, il a pour composantes non nulles au dessus de U $\{C^{\bar{j}_1 \dots \bar{j}_r}\}$ et il lui correspond une r -forme γ tangente aux feuilles de W , de composantes $\{\gamma_{j_1 \dots j_r}\}$, avec :

$$C^{\bar{j}_1 \dots \bar{j}_r} = \Lambda^{j_1 \bar{j}_1} \dots \Lambda^{j_r \bar{j}_r} \gamma_{j_1 \dots j_r}$$

Si C est un r -cocycle vertical, on a d'abord :

$$\partial_{\bar{i}} \gamma_{j_1 \dots j_r} = 0$$

et γ est l'image réciproque par π d'une forme tangente aux feuilles de M , notée encore γ . On a d'autre part $\bar{d}\gamma = 0$. La Λ -exactitude de C correspondant à la \bar{d} -exactitude de γ . Si $H_{(V)}^r(W; \Lambda)$ est le r^e espace de cohomologie défini à partir des r - Λ -cochaînes verticales, $\nu\pi^*$ induit un isomorphisme de $H^r(\mathcal{F}; \mathbb{R})$ sur $H_{(V)}^r(W; \Lambda)$.

$\nu: \mathcal{F} \rightarrow M$ étant supposé orientable, soit ω une q -forme de M définissant \mathcal{F} . On a :

$$d\omega + \eta \wedge \omega = 0$$

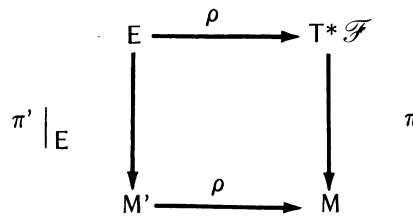
Introduisons sur $W = T^* \mathcal{F}$, le champ de vecteurs $H_{(1)} = \nu(\pi^* \eta)$. C'est un 1- Λ -cocycle vertical de composantes dans la carte envisagée :

$$H_{(1)}^{\bar{i}} = \Lambda^{\bar{j}\bar{i}} \eta_j$$

Pour la variété de Poisson $(T^* \mathcal{F}, \Lambda)$ supposée orientable associée au feuilletage (M, \mathcal{F}) la Λ -classe de cohomologie $[H_{(1)}] \in H_{(V)}^1(T^* \mathcal{F}; \Lambda)$ correspond à la 1-classe de comologie secondaire du feuilletage et est nulle en même temps qu'elle.

e) Soit $\rho : M' \rightarrow M$ une *submersion* de la variété M' , de dimension m' , sur la variété M , de dimension m munie du feuilletage \mathcal{F} . Nous munissons M' du feuilletage $\mathcal{F}' = \rho^* \mathcal{F}$.

Si $x' \in M'$, soit $x = \rho(x') \in M$; à une 1-forme $z \in T_x^* \mathcal{F}(x)$ nous pouvons associer la 1-forme $z' = \rho^* z \in T_{x'}^* \mathcal{F}'(x')$. Ainsi aux éléments de $T^* \mathcal{F} \rightarrow M$ correspondent les éléments du fibré $E = \rho^{-1} T^* \mathcal{F}$. On a le diagramme commutatif :



où E est un sous-fibré vectoriel de $\pi' : T^* \mathcal{F}' \rightarrow M'$. Si $(T^* \mathcal{F}', \Lambda')$ et $(T^* \mathcal{F}, \Lambda)$ sont les variétés de Poisson associées à \mathcal{F}' et \mathcal{F} , on a :

$$(8-7) \quad \rho_* (\Lambda' \Big|_E) = \Lambda .$$

Supposons le fibré vectoriel $\nu \mathcal{F} \rightarrow M$ orientable. Il existe sur M une q -forme ω , partout $\neq 0$, définissant \mathcal{F} et $\rho^* \omega$ est une q -forme sur M' , partout $\neq 0$, définissant \mathcal{F}' . Ainsi le fibré vectoriel $\nu \mathcal{F}' \rightarrow M'$ est orientable. S'il en est ainsi, on a :

$$d\omega + \eta \wedge \omega = 0$$

et par suite :

$$d\rho^* \omega + \rho^* \eta \wedge \rho^* \omega = 0$$

Nous posons $\nu\pi^* = \nu, \nu'\pi'^* = \nu'$ d'où :

$$(8-8) \quad H_{(1)} = \bar{\nu}(\eta) \qquad H'_{(1)} = \bar{\nu}'(\rho^* \eta)$$

Soit $\{x^a, x^i\}$ une carte de M adaptée à \mathcal{F} . On a une carte correspondante $\{x^a, x^i, x^\lambda\}$ de M' adaptée à \mathcal{F}' et les cartes $\{x^a, x^i, x^{\bar{j}}\}$ de $T^*\mathcal{F}$, $\{x^a, x^i, x^\lambda, x^{\bar{j}}\}$ de E et $\{x^a, x^i, x^\lambda, x^{\bar{j}}, x^{\bar{\mu}}\}$ de $T^*\mathcal{F}'$, ($\lambda, \mu = 1, \dots, m'-m$). Dans ces cartes, le 2-tenseur Λ' a pour composantes non nulles :

$$\Lambda'^{\bar{j}\bar{j}} = 1 \qquad \Lambda'^{\bar{\mu}\bar{\mu}} = 1$$

et le 2-tenseur Λ :

$$\Lambda^{\bar{j}\bar{j}} = 1$$

Si $z' \in T^*\mathcal{F}'$ et $z \in T^*\mathcal{F}$ (avec $\pi'(z') = x', \pi(z) = x$), les vecteurs $H_{(1)}$ et $H'_{(1)}$ ont pour composantes non nulles :

$$(8-9) \qquad (H_{(1)})^{\bar{j}}(z) = \eta_j(x) \qquad (H'_{(1)})^{\bar{j}}(z') = \eta_j(\rho(x'))$$

$H'_{(1)} \big|_E$ est un vecteur vertical tangent à E et l'on a

$$(8-10) \qquad \rho_* (H'_{(1)} \big|_E) = H_{(1)}$$

Si $[H'_{(1)}] = 0$, il existe une fonction $\psi \in C^\infty(M'; \mathbb{R})$ telle que :

$$H'_{(1)} = [\Lambda', \pi'^*\psi]$$

D'après (8-9), on peut choisir pour ψ l'image réciproque par ρ d'une fonction définie sur M . Il résulte de (8-9) que $[H_{(1)}] = 0$.

Inversement si $[H_{(1)}] = 0$, il existe une fonction $\varphi \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ telle que :

$$H_{(1)} = [\Lambda, \pi^*\varphi]$$

On peut prendre $\eta_i = \partial_i \varphi$ et il résulte de (8-9) que l'on a :

$$H'_{(1)} = [\Lambda', \pi'^* \rho^* \varphi]$$

Ainsi $[H'_{(1)}] = 0$. Nous pouvons énoncer :

PROPOSITION. *Si ρ est une submersion de (M', \mathcal{F}') sur (M, \mathcal{F}) , on peut prendre $H_{(1)}$ et $H'_{(1)}$ reliés par (8-10) et les deux 1-classes de Λ -cohomologie $[H'_{(1)}]$ et $[H_{(1)}]$ sont nulles simultanément.*

II - CONNEXIONS ADAPTEES A UN FEUILLETAGE ET CONNEXIONS DE POISSON

9. - Connexion adaptée à un feuilletage [9]

Soit (M, \mathcal{F}) une variété différentiable paracompacte de dimension m , munie d'un feuilletage \mathcal{F} tel que :

$$\dim.\mathcal{F} = p \qquad \text{codim.}\mathcal{F} = q \qquad (p+q = m)$$

a) On introduit sur M un atlas de cartes adaptées $\{x^A\} = \{x^a, x^i\}$ ($A, B, \dots = 1, \dots, m$; $a, b, \dots = 1, \dots, q$; $i, j, \dots = q+1, \dots, m$) de domaines U, U', \dots . On munit chaque domaine U d'un champ de corepères pfaffiens $\{\theta^A\} = \{\theta^a, \theta^i\}$ avec :

$$\theta^a = B_b^a dx^b \qquad \theta^i = B_b^i dx^b + B_j^i dx^j$$

de telle sorte que $\{\theta^a = 0\}$ définit \mathcal{F} sur U . Un tel champ de corepères est dit *adapté au feuilletage*. Si U' est muni du champ de corepères adaptés $\{\theta^{A'}\} = \{\theta^{b'}, \theta^{j'}\}$, on a sur $U \cap U' \neq \emptyset$:

$$(9-1) \qquad \theta^{a'} = A_a^{a'} \theta^a \qquad \theta^{j'} = A_b^{j'} \theta^b + A_j^{j'} \theta^j$$

où la matrice $(A_A^{A'})$ et la matrice inverse $(A_{A'}^A)$ sont telles que $A_i^{a'} = 0$, $A_i^a = 0$.

Soit $\overset{*}{\Gamma}$ une connexion linéaire arbitraire *sans torsion* de M . Sur le domaine U , nous notons $(\overset{*}{\omega}_B^A)$ la 1-forme de connexion et posons :

$$\overset{*}{\omega}_B^A = \gamma_{BC}^A \theta^C$$

Sur $U \cap U'$, on a :

$$\overset{*}{\omega}_{i'}^{a'} = A_a^{a'} A_i^{a'} \overset{*}{\omega}_i^a + A_a^{a'} d A_i^a,$$

soit :

$$(9-2) \qquad \overset{*}{\omega}_{i'}^{a'} = A_a^{a'} A_i^{a'} \overset{*}{\omega}_i^a$$

Il vient ainsi :

$$(9-3) \qquad \gamma_{i'A}^{a'} = A_a^{a'} A_i^{a'} A_A^a, \gamma_{iA}^a$$

Cela posé, introduisons sur U un tenseur T_U de type $(1,2)$, covariantement symétrique, tel que

$T_i^a = \gamma_i^* A$. Si $U \cap U' \neq \emptyset$, on peut d'après (9-3) étendre T_U à U' , selon un tenseur $T_{U \cup U'}$ satisfaisant aux mêmes hypothèses et tel que ses composantes T_i^a sur U' soient égales à $\gamma_i^* A$. La variété M étant para-compacte, il résulte d'un raisonnement identique à celui concernant l'existence des connexions linéaires (introduction d'une partition de l'unité), qu'il existe sur M un tenseur T de type (1,2), covariamment symétrique tel que, pour tout domaine U de l'atlas envisagé on ait

$$T_i^a = \gamma_i^* A$$

Introduisons sur M la connexion linéaire sans torsion Γ définie par :

$$\Gamma = \Gamma^* - T$$

Si $(\omega_B^A = \gamma_{BC}^A \theta^C)$ est la 1-forme de connexion de Γ sur un domaine U , on a pour tout champ de corepères adaptés sur U :

$$(9-4) \quad \omega_i^a = 0$$

soit

$$(9-5) \quad \gamma_i^a A = 0$$

Une connexion linéaire sans torsion Γ vérifiant la propriété (9-4) est dite *adaptée au feuilletage* \mathcal{F} [9]. Nous utiliserons fréquemment de telles connexions dans la suite.

b) Le domaine U étant rapporté à la carte adaptée $\{x^A\} = \{x^a, x^i\}$, on peut prendre $\theta^a = dx^a$, $\theta^i = dx^i$. Pour la 1-forme (ω_B^A) de connexion correspondante de Γ , nous posons :

$$\omega_B^A = \Gamma_{BC}^A dx^C$$

où les Γ_{BC}^A sont symétriques par rapport aux indices B, C (absence de torsion). La connexion Γ étant adaptée à \mathcal{F} , il vient :

$$(9-6) \quad \Gamma_i^a = 0$$

On a [3].

PROPOSITION. *Toute connexion adaptée au feuilletage \mathcal{F} est canonique sur $\nu\mathcal{F}$ au sens de Bott.*

Soit ∇ l'opérateur de dérivation covariante défini par Γ . Si Z est une section de $\nu\mathcal{F} \rightarrow M$, il existe

une section Y de $TM \rightarrow M$ telle que sa projection νY sur $\nu \mathcal{F}$ soit Z . Dire que Γ est *canonique* sur $\nu \mathcal{F}$, c'est dire que pour tout champ de vecteurs tangent X , *section de $T\mathcal{F}$* , Γ induit une dérivée covariante tangentielle sur Z telle que :

$$(9-7) \quad \nabla_X Z = \nu[X, Y]$$

Dans une carte adaptée, cette relation se traduit par :

$$(9-8) \quad \nabla_i Y^a = \partial_i Y^a$$

Or

$$\nabla_i Y^a = \partial_i Y^a + \Gamma_{Ai}^a Y^A$$

qui se réduit à (9-8) d'après (9-6).

c) Soit (Ω_B^A) la 2-forme de courbure de Γ sur le domaine U muni de corepères adaptés

$$(9-9) \quad \Omega_B^A = d\omega_B^A + \omega_C^A \wedge \omega_B^C$$

On pose :

$$\Omega_B^A = \frac{1}{2} R_{B,CD}^A \theta^C \wedge \theta^D$$

La connexion Γ étant adaptée, on déduit de (9-9) :

$$(9-10) \quad \Omega_i^a = 0$$

et

$$(9-11) \quad \Omega_b^a = d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_b^c$$

La relation (9-10) exprime que :

$$(9-12) \quad R_{i,CD}^a = 0$$

De l'identité de Bianchi ou de (9-6) on déduit que Ω_b^a est tel que (voir [3])

$$(9-13) \quad R_{b,ij}^a = 0$$

et

$$(9-14) \quad R_{b,ci}^a = R_{c,bi}^a$$

Les (ω_b^a) définissent sur le fibré vectoriel $\nu\mathcal{F} \rightarrow M$ une connexion dont la courbure est d'après (9-11) donnée par (Ω_b^a) . Cette courbure vérifie (9-13), c'est-à-dire est *tangentiellement plate*, ce qui résulte aussi immédiatement de la proposition précédente.

10. - Connexion relevée d'une connexion adaptée à un feuilletage sur la variété de Poisson associée

a) Soit M une variété différentiable munie d'une connexion linéaire Γ sans torsion. Si $\{x^A\}$ ($A = 1, \dots, m$) est une carte de M de domaine U , $\{x^K\} = \{x^A, \xi_A = x^{\bar{A}}\}$ est la carte correspondante de T^*M au dessus de U . J'ai établi [10] que, par des conditions intrinsèques, on pouvait associer à Γ une connexion linéaire sans torsion $\hat{\Gamma}$ de T^*M dont les coefficients, dans la carte envisagée, sont les suivants :

$$(10-1) \quad \hat{\Gamma}_{BK}^A = 0 \quad \hat{\Gamma}_{\bar{B}\bar{C}}^{\bar{A}} = 0 \quad \hat{\Gamma}_{BC}^A = \Gamma_{BC}^A \quad \hat{\Gamma}_{\bar{B}\bar{C}}^{\bar{A}} = -\Gamma_{AC}^B$$

et

$$(10-2) \quad \hat{\Gamma}_{BC}^{\bar{A}} = \xi_D (-\partial_A \Gamma_{BC}^D + \Gamma_{AB}^E \Gamma_{EC}^D - \Gamma_{AC}^E \Gamma_{EB}^D)$$

Cette connexion $\hat{\Gamma}$ est dite *la relevée naturelle* de Γ sur T^*M .

La variété T^*M admet une structure symplectique naturelle de tenseur de structure Λ . On peut déduire de $\hat{\Gamma}$ une *connexion symplectique* $\tilde{\Gamma}$ de (T^*M, Λ_M) , c'est-à-dire une connexion sans torsion telle que Λ_M soit à dérivée covariante nulle dans $\tilde{\Gamma}$. La connexion $\tilde{\Gamma}$ a mêmes coefficients que $\hat{\Gamma}$ à l'exception de :

$$(10-3) \quad \tilde{\Gamma}_{BC}^{\bar{A}} = \frac{1}{3} \xi_D S(-\partial_A \Gamma_{BC}^D + 2 \Gamma_{BC}^E \Gamma_{EA}^D)$$

où S est la sommation après permutation circulaire sur A, B, C . La connexion est dite *la relevée symplectique* de Γ sur T^*M .

b) Supposons que M admette un feuilletage \mathcal{F} et soit munie d'une connexion linéaire Γ adaptée à \mathcal{F} . Nous considérons la variété de Poisson $(T^*\mathcal{F}, \Lambda)$ associée à (M, \mathcal{F}) . Si $\{x^A\} = \{x^a, x^i\}$ est une carte adaptée de M de domaine U , $\{x^K\} = \{x^a, x^i, x^{\bar{i}}\}$ est la carte correspondante de $T^*\mathcal{F}$ au dessus de U .

Nous nous proposons d'associer à Γ une connexion linéaire sans torsion $\tilde{\Gamma}$ sur $T^*\mathcal{F}$, adaptée à $\pi^*\mathcal{F}$, et telle que Λ soit à dérivée covariante nulle dans $\tilde{\Gamma}$. D'après (10-1) et (10-3),

nous sommes conduits à prendre, dans la carte envisagée :

$$(10-4) \quad \tilde{\Gamma}_{iK}^a = \tilde{\Gamma}_{iK}^a = 0, \quad \tilde{\Gamma}_{jK}^i = 0, \quad \tilde{\Gamma}_{jK}^{\bar{i}} = 0, \quad \tilde{\Gamma}_{BC}^A = \Gamma_{BC}^A, \quad \tilde{\Gamma}_{jA}^{\bar{i}} = -\Gamma_{iA}^j$$

et

$$(10-5) \quad \tilde{\Gamma}_{AB}^{\bar{i}} = \xi_{\ell} S(-\partial_i \Gamma_{AB}^{\ell} + 2 \Gamma_{AB}^E \Gamma_{Di}^{\ell})$$

où S est la sommation après permutation circulaire sur i, A, B . Par des calculs directs mettant en oeuvre le tenseur de courbure de Γ , on vérifie que $\tilde{\Gamma}$ est bien une connexion linéaire sans torsion sur $T^*\mathcal{F}$ adaptée au feuilletage $\pi^*\mathcal{F}$ et que l'on a pour la dérivation covariante $\tilde{\nabla}$ correspondante :

$$(10-6) \quad \tilde{\nabla} \Lambda = 0$$

Une telle connexion sera dite une connexion de Poisson (voir § 12).

11. - Connexion adaptée à un feuilletage déduite d'une connexion riemannienne

Supposons la variété différentiable M munie d'une *métrique riemannienne* \underline{g} .

a) Soit \mathcal{F} le feuilletage de M . Nous notons $N_x \mathcal{F}$ l'orthocomplément relativement à \underline{g} , pour $x \in M$, de $T_x \mathcal{F}$ dans $T_x M$. Les $N_x \mathcal{F}$ définissent un fibré vectoriel $N\mathcal{F} \rightarrow M$, isomorphe au fibré vectoriel transverse $\nu\mathcal{F} = TM / T\mathcal{F}$. Le fibré $N\mathcal{F} \rightarrow M$ est dit *le fibré normal* au feuilletage relativement à \underline{g} ; on a :

$$TM = T\mathcal{F} \oplus N\mathcal{F}$$

et on note encore ν la projection de TM sur $N\mathcal{F}$.

Nous supposons M muni d'un atlas de cartes adaptés au feuilletage de domaines U, U', \dots . Introduisons sur chaque domaine U un champ de repères *orthonormés* $\{e_a, e_i\}$ tels que les vecteurs $e_i(x)$ soient tangents à $\mathcal{F}(x)$ en $x \in U$; on note $\{\theta^A\} = \{\theta^a, \theta^i\}$ le champ sur U de corepères orthonormés correspondants, qui est un champ *adapté au feuilletage*, au sens de § 9, a. Si U' est un autre domaine muni du champ adapté de corepères orthonormés $\{\theta^{A'}\} = \{\theta^{a'}, \theta^{i'}\}$, on a sur $U \cap U' \neq \emptyset$:

$$(11-1) \quad \theta^{a'} = B_a^{a'} \theta^a \quad \theta^{i'} = B_i^{i'} \theta^i$$

où les matrices $(B_a^{a'})$ et $(B_i^{i'})$ sont orthogonales.

b) Cela posé, soit $\overset{*}{\Gamma}$ la connexion riemannienne de (M, \underline{g}) . Nous notons $\{\omega_B^A = \gamma_{BC}^A \theta^C\}$ sa 1-forme de connexion sur U muni des corepères $\{\theta^A\} = \{\theta^{\bar{a}}, \theta^i\}$. Si $(A_{\bar{a}}^A)$ et $(A_A^{\bar{a}'})$ sont les matrices de passage de $\{\theta^A\}$ au corepère $\{dx^{A'}\}$ correspondant à une carte adaptée, on a $\theta^A = A_{\bar{a}}^A dx^{\bar{a}'}$, avec $A_{\bar{a}}^{\bar{a}} = 1$. Soit $\{\overset{*}{\Gamma}_{B'}^{\bar{a}'}, \overset{*}{\Gamma}_{B'}^i\}$ les coefficients de $\overset{*}{\Gamma}$ dans la carte $\{x^{A'}\}$; il vient

$$\overset{*}{\gamma}_{B'i}^{\bar{a}} = A_{\bar{a}}^{\bar{a}'} A_B^{B'} A_i^{\bar{a}'} \overset{*}{\Gamma}_{B'i}^{\bar{a}'} + A_{\bar{a}}^{\bar{a}'} \partial_i A_B^{\bar{a}'}$$

où $\{\partial_A\}$ désigne la dérivation pfaffienne dans $\{\theta^A\}$. De même

$$\overset{*}{\gamma}_{iB}^{\bar{a}} = A_{\bar{a}}^{\bar{a}'} A_B^{B'} A_i^{\bar{a}'} \overset{*}{\Gamma}_{B'i}^{\bar{a}'},$$

Il vient par différence :

$$\overset{*}{\gamma}_{B'i}^{\bar{a}} - \overset{*}{\gamma}_{iB}^{\bar{a}} = A_{\bar{a}}^{\bar{a}'} \partial_i A_B^{\bar{a}'}$$

Soit Γ une connexion adaptée définie à partir de $\overset{*}{\Gamma}$ (voir § 9,a) dont la 1-forme de connexion s'écrit sur U : $\{\omega_B^A = \gamma_{BC}^A \theta^C\}$. On déduit de (9-6) :

$$\gamma_{B'i}^{\bar{a}} = A_{\bar{a}}^{\bar{a}'} \partial_i A_B^{\bar{a}'}$$

et les coefficients de Γ vérifient sur le domaine U rapporté aux corepères orthonormés adaptés :

$$(11-2) \quad \gamma_{iB}^{\bar{a}} = 0 \quad \gamma_{B'i}^{\bar{a}} = \overset{*}{\gamma}_{B'i}^{\bar{a}} - \overset{*}{\gamma}_{iB}^{\bar{a}}$$

En particulier :

$$(11-3) \quad \gamma_{bi}^{\bar{a}} = \overset{*}{\gamma}_{bi}^{\bar{a}} - \overset{*}{\gamma}_{ib}^{\bar{a}}$$

En procédant comme au § 9, a on peut encore astreindre le tenseur T qui définit Γ à partir de $\overset{*}{\Gamma}$ à la condition $\{T_{bc}^{\bar{a}} = 0\}$ pour tout domaine U de l'atlas envisagé. On a alors :

$$(11-4) \quad \gamma_{bc}^{\bar{a}} = \overset{*}{\gamma}_{bc}^{\bar{a}}$$

Notre connexion linéaire adaptée Γ de M induit sur le fibré vectoriel normal au feuilletage une connexion de 1-forme locale $(\omega_b^{\bar{a}})$ qui, d'après (11-2) et (11-4) coïncide avec la connexion introduite sur $N \cdot \mathcal{F} \rightarrow M$ par Guelorget-Joubert [5] et Reinhart [13]. Elle vérifie :

$$(11-5) \quad d\theta^{\bar{a}} = \theta^b \wedge \omega_b^{\bar{a}}$$

et admet $(\Omega_b^{\bar{a}})$ comme 2-formes de courbure.

Si $x \in TM$, décomposons ce vecteur en composantes tangentielles et normales X_T et X_N . Pour Z section de $N\mathcal{F}$, (11-2) et (11-4) expriment que, pour la dérivation covariante ∇ correspondant à Γ , on a :

$$(11-6) \quad \nabla_X Z = \nu[X_T, Z] + \nu(\nabla_{X_N}^* Z)$$

relation de définition dans [5].

Nous notons sur (11-1) que, par rapport aux corepères orthonormés adaptés, les types des tenseurs en $\{\theta^a, \theta^i\}$ sont bien déterminés. Il en résulte qu'on peut astreindre encore T à la condition supplémentaire $\{T_{AB}^i = 0\}$. On a alors

$$(11-7) \quad \gamma_{AB}^i = \gamma_{AB}^{*i}$$

La connexion Γ , ainsi définie d'une manière unique à partir de Γ^* et du feuilletage, est dite *la connexion adaptée au feuilletage déduite de la connexion riemannienne Γ^** .

c) Sur une variété riemannienne (M, g) de dimension m , donnons-nous *deux champs de plans orthogonaux*, un champ \underline{P} de p -plans défini localement par le système de Pfaff $\{\theta^a = 0\}$ ($a, b, \dots = 1, \dots, q$) non nécessairement intégrable, et un champ \underline{Q} de q -plans défini localement par le système de Pfaff $\{\theta^i = 0\}$ ($i, j, \dots = q+1, \dots, m$), où les $\{\theta^a, \theta^i\}$ sont des corepères orthogonaux sur les domaines U .

Soit Γ^* la connexion riemannienne de (M, g) de 1-forme de connexion $(\omega_B^A = \gamma_{BC}^A \theta^C)$ sur U . On appelle *seconde forme fondamentale* du champ \underline{P} [13] la forme symétrique d'ordre 2 sur \underline{P} dont les valeurs sont des vecteurs de \underline{Q} donnée par le tenseur noté P dont les composantes en $x \subset U$ sont :

$$(11-8) \quad P_{ij}^a = \frac{1}{2} (\gamma_{ij}^{*a} + \gamma_{ji}^{*a})$$

Le vecteur de courbure moyenne du champ \underline{P} est donné par $\text{Tr. } P$ et a pour composantes :

$$(11-9) \quad p^a = g^{ij} \gamma_{ij}^{*a}$$

On a de même pour le champ orthogonal \underline{Q} la seconde forme fondamentale Q sur \underline{Q} dont les valeurs sont des vecteurs de \underline{P} , qui a pour composantes sur U :

$$(11-10) \quad Q_{ab}^i = \frac{1}{2} (\gamma_{ab}^{*i} + \gamma_{ba}^{*i})$$

le vecteur de courbure moyenne correspondant admettant les composantes :

$$(11-11) \quad Q^i = g^{ab} \gamma_{ab}^{*i}$$

Si le champ \underline{P} est intégrable et correspond au feuilletage \mathcal{F} , P (de composantes $P_{ij}^a = \gamma_{ij}^{*a}$) est la seconde forme fondamentale des feuilles considérées comme variétés immergées dans (M, \underline{g}) .

Il est naturel de dire que le champ \underline{P} (intégrable ou non) est *minimal* si son vecteur de courbure moyenne est nul, qu'il est *totalelement géodésique* si sa seconde forme fondamentale est nulle. Cette définition est justifiées par le fait que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que toute géodésique de (M, \underline{g}) tangente à \underline{P} en un point reste tangente à \underline{P} en chacun de ses points [13].

d) Pour la variété riemannienne (M, \underline{g}) munie du feuilletage \mathcal{F} , la connexion adaptée Γ déduite de la connexion riemannienne $\overset{*}{\Gamma}$ est reliée à la seconde forme fondamentale du champ \underline{Q} orthogonal au feuilletage.

Le corepère $\{\theta^A\}$ étant orthonormé, on a $\gamma_{BC}^{*A} + \gamma_{AC}^{*B} = 0$. On déduit alors de (11-3) :

$$\frac{1}{2} (\gamma_{bi}^a + \gamma_{ai}^b) = -\frac{1}{2} (\gamma_{ib}^{*a} + \gamma_{ia}^{*b})$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2} (\gamma_{bi}^a + \gamma_{ai}^b) = \frac{1}{2} (\gamma_{ab}^{*i} + \gamma_{ba}^{*i})$$

On obtient ainsi :

$$(11-12) \quad Q_{ab}^i = \frac{1}{2} (\gamma_{bi}^a + \gamma_{ai}^b)$$

On sait (voir [11], [18], [6]) que pour que \underline{Q} soit totalelement géodésique, c'est-à-dire pour que la seconde forme fondamentale Q soit nulle, il faut et il suffit que la variété feuilletée (M, \mathcal{F}) admette une métrique de type fibré, c'est-à-dire que \mathcal{F} soit un IR-feuilletage (voir le lemme du § 19 et § 19, e).

12. - Connexion de Poisson sur une variété de Poisson régulière

Soit (W, Λ) une variété de Poisson régulière de codimension q et rang $2p$ et soit \mathcal{G} son feuilletage symplectique. On appelle *connexion de Poisson* de la variété (W, Λ) une connexion linéaire sans torsion Γ de W telle que, si ∇ est l'opérateur de dérivation covariante correspondant, on ait

$$(12-1) \quad \nabla \Lambda = 0$$

a) Supposons W munie d'un atlas de cartes *adaptées* $\{x^K\} = \{x^a, x^i\}$ ($a, b, \dots = 1, \dots, q$; $i, j, \dots = 1, \dots, 2p$) de domaines U, U', \dots . On a $\Lambda^{aK} = 0$ et par suite, pour toute connexion :

$$(12-2) \quad \nabla_K \Lambda^{ab} = 0$$

Si Γ est une connexion de Poisson, on a en particulier :

$$(12-3) \quad \nabla_K \Lambda^{ai} = 0$$

qui se traduit par :

$$(12-4) \quad \Gamma_{jK}^a = 0$$

Ainsi toute connexion de Poisson est nécessairement adaptée au feuilletage \mathcal{G} .

b) Nous nous proposons d'établir :

PROPOSITION. *Sur toute variété de Poisson régulière, il existe des connexions de Poisson. Par restriction à une feuille, une telle connexion définit une connexion symplectique sur la feuille.*

Soit $\overset{*}{\Gamma}$ une connexion de W adaptée au feuilletage \mathcal{G} de telle sorte que dans l'atlas $\overset{*}{\Gamma}_{iK}^a = 0$. Nous nous proposons de modifier $\overset{*}{\Gamma}$ par addition d'un tenseur T covariamment symétrique de façon à vérifier sur chaque domaine U dans la nouvelle connexion *adaptée* Γ :

$$(12-5) \quad \nabla_k \Lambda^{ij} = 0$$

et

$$(12-6) \quad \nabla_a \Lambda^{ij} = 0$$

Sur chaque feuille $\mathcal{G}(x)$, où $x \in W$, le tenseur Λ induit une structure symplectique de 2-forme F dont la matrice (F_{ij}) des composantes sur U est l'inverse de la matrice (Λ^{ij}) . Les connexions Γ et $\overset{*}{\Gamma}$ induisent sur $\mathcal{G}(x)$ des connexions linéaires sans torsion désignées par la même notation. Si $\Gamma = \overset{*}{\Gamma} + T$, on a :

$$\nabla_k F_{ij} = \overset{*}{\nabla}_k F_{ij} + T_{ik}^\ell F_{j\ell} - T_{jk}^\ell F_{i\ell}$$

Si l'on introduit sur U un tenseur T_U de composantes :

$$(12-7) \quad T_{iK}^a = 0 \quad T_{jk}^i = \frac{1}{3} \Lambda^{\ell i} (\overset{*}{\nabla}_k F_{\ell j} + \overset{*}{\nabla}_j F_{\ell k})$$

on vérifie immédiatement que $\nabla_k F_{ij} = 0$, ce qui est équivalent à (12-5). Il résulte du raisonnement du § 9, a qu'il existe sur W un tenseur T de type (1,2), covariamment symétrique, tel que, pour la connexion $\Gamma = \overset{*}{\Gamma} + T$, on ait, sur chaque domaine U de l'atlas, les relations :

$$(12-8) \quad \nabla_K \Lambda^{ai} = 0 \quad \nabla_k \Lambda^{ij} = 0$$

La connexion Γ obtenue induit sur chaque feuille *une connexion symplectique*.

c) Nous modifions maintenant les notations en désignant par $\overset{*}{\Gamma}$ la connexion que nous venons d'obtenir. Pour une connexion $\Gamma = \overset{*}{\Gamma} + T$, où T vérifie sur chaque domaine U :

$$(12-9) \quad T_{iK}^a = 0 \quad T_{jk}^i = 0$$

on a sur U :

$$(12-10) \quad \nabla_a \Lambda^{ij} = \overset{*}{\nabla}_a \Lambda^{ij} + T_{ka}^i \Lambda^{kj} + T_{ka}^j \Lambda^{ik}$$

Choisissons sur U , un tenseur T_U vérifiant (12-9) et tel que :

$$(12-11) \quad T_{ka}^i = -\frac{1}{2} F_{k\ell}^i \overset{*}{\nabla}_a \Lambda^{i\ell}$$

Il résulte de (12-10) que, sur U , on a $\nabla_a \Lambda^{ij} = 0$. Dans l'intersection $U \cap U' \neq \emptyset$ de deux domaines de l'atlas, on vérifie immédiatement que T_U a pour composantes :

$$T_{k'a'}^{i'} = A_i^{i'} A_k^k A_a^a T_{ka}^i$$

On en déduit qu'il existe sur W un tenseur T de type (1,2), covariamment symétrique, tel que pour la nouvelle connexion $\Gamma = \overset{*}{\Gamma} + T$, on ait sur chaque domaine de l'atlas (12-8) et (12-6), donc tel que :

$$\nabla \Lambda = 0$$

La connexion Γ construite est une connexion de Poisson.

III - VARIETES DE POISSON ET * - PRODUITS TANGENTIELS

13. - L'invariant cohomologique universel d'une structure de Poisson

a) Soit (W, Λ) une variété de Poisson, régulière ou non, de dimension d . Si $N = C^\infty(W; \mathbb{R})$, nous notons (N, P) son algèbre de Lie de Poisson, où P est l'opérateur bidifférentiel de Poisson (voir § 2, c) donné par :

$$(13-1) \quad P(u, v) = \{u, v\} = i(\Lambda)(du \wedge dv) = \mathcal{L}(X_u)v \quad (u, v \in N)$$

X_u étant le champ hamiltonien correspondant à u .

La cohomologie de Chevalley de cette algèbre de Lie est la cohomologie de (N, P) à valeurs dans N correspondant à la représentation adjointe. Elle est définie de la manière suivante : une r -cochaîne C est une application multilinéaire alternée de N^r dans N , les 0-cochaînes étant identifiées aux éléments de N . Nous considérons seulement ici les cochaînes différentielles, nulles sur les constantes. Le cobord d'une telle r -cochaîne C est une $(r+1)$ -cochaîne donnée par la formule :

$$(13-2) \quad \partial C(u_0, \dots, u_r) = \epsilon_{0 \dots r}^{\alpha_0 \dots \alpha_r} \left(\frac{1}{r!} \{u_{\alpha_0}, C(u_{\alpha_1}, \dots, u_{\alpha_r})\} - \frac{1}{2(r-1)!} C(\{u_{\alpha_0}, u_{\alpha_1}\}, u_{\alpha_2}, \dots, u_{\alpha_r}) \right)$$

où les u_α appartiennent à N et où ϵ est l'indicateur d'antisymétrization. De l'identité de Jacobi, on déduit $\partial^2 = 0$. On désigne par $H_{\text{dif}}^r(N; N)$ le r^e espace de cohomologie de Chevalley correspondant.

b) Si Γ est une connexion linéaire sans torsion *arbitraire* de W , considérons la 2-cochaîne S_Γ^3 de (N, P) , définie localement, dans toute carte $\{x^K\}$ ($K, L, \dots = 1, \dots, d$) de domaine U par :

$$(13-3) \quad S_\Gamma^3(u, v) \Big|_U = -\Lambda^{KL} (\mathcal{L}(X_u)\Gamma)_{SK}^R (\mathcal{L}(X_v)\Gamma)_{RL}^S \quad (u, v \in N)$$

Il résulte des propriétés de la dérivation de Lie que S_Γ^3 est un 2-cocycle de Chevalley ($\partial S_\Gamma^3 = 0$). Si T est un tenseur de type (1,2), covariamment symétrique, introduisons les opérateurs $A_{T, \Gamma}$ et B_T définis par :

$$A_{T, \Gamma}(u) \Big|_U = -\Lambda^{KL} T_{SK}^R (\mathcal{L}(X_u)\Gamma)_{RL}^S$$

et

$$B_T(u) \Big|_U = -\Lambda^{KL} T_{SK}^R (\mathcal{L}(X_u)T)_{RL}^S$$

Avec ces notations, on établit aisément :

PROPOSITION. La 2-classe β de cohomologie, élément de $H_{\text{dif}}^2(N; N)$, définie par le 2-cocycle S_{Γ}^3 est indépendante du choix de la connexion Γ .

En effet considérons deux connexions sans torsion Γ et Γ' et prenons pour T le tenseur définissant leur différence. On vérifie immédiatement que l'on a :

$$S_{\Gamma'}^3 - S_{\Gamma}^3 = \partial(A_{T, \Gamma} + (1/2)B_T)$$

On voit que la 2-classe de cohomologie $\beta \in H_{\text{dif}}^2(N; N)$ est un invariant de la structure de Poisson de la variété.

c) Supposons (W, Λ) régulière, de codimension q et rang $2p$ et soit \mathcal{G} son feuilletage. Adoptons pour connexion sur W une connexion de Poisson Γ . Si $\{x^K\} = \{x^a, x^i\}$ ($a = 1, \dots, q$; $i, j, \dots = 1, \dots, 2p$) est une carte adaptée à \mathcal{G} de domaine U , on a $\Gamma_{iK}^a = 0$ sur U et il vient :

$$\mathfrak{L}(X_u)\Gamma_{iK}^a = 0 \quad (u \in N)$$

Il en résulte que S_{Γ}^3 peut s'écrire sur U :

$$(13-4) \quad S_{\Gamma}^3(u, v) \Big|_U = -\Lambda^{k\ell}(\mathfrak{L}(X_u)\Gamma)_{jk}^i(\mathfrak{L}(X_v)\Gamma)_{i\ell}^j$$

et ne fait intervenir que les connexions symplectiques sur les feuilles induites par Γ . On a [1] [10]

$$(13-5) \quad S_{\Gamma}^3(u, v) \Big|_U = \Lambda^{k_1\ell_1} \Lambda^{k_2\ell_2} \Lambda^{k_3\ell_3} (\mathfrak{L}(X_u)\Gamma)_{k_1k_2k_3} (\mathfrak{L}(X_v)\Gamma)_{\ell_1\ell_2\ell_3}$$

où $\mathfrak{L}(X_u)\Gamma$ est pris comme 3-tenseur complètement symétrique ; S_{Γ}^3 est de type bidifférentiel (3,3) en u, v , les seules dérivées intervenant étant les dérivées tangentes aux feuilles. J'ai établi (voir [7], p 267) que si A est un endomorphisme local de N tel que ∂A soit une 2-cochaîne n -différentielle, A est nécessairement un opérateur différentiel d'ordre n . Par suite si S_{Γ}^3 était exact dans la cohomologie envisagée, il serait le cobord d'un opérateur différentiel d'ordre 3 ; or on voit immédiatement qu'un tel cobord n'est jamais de type bidifférentiel (3,3).

Ainsi, sur une variété de Poisson régulière, β est toujours $\neq 0$.

d) Supposons maintenant (W, Λ) non régulière et désignons par $2p$ le rang maximum de Λ . Soit U, U' deux domaines de W tels que $\bar{U} \subset U'$ et pour lesquels Λ^p est partout $\neq 0$ sur U' . La restriction $\Lambda_{\bar{U}}$ de Λ à \bar{U} définit \bar{U} comme variété de Poisson régulière.

Soit Γ une connexion linéaire sans torsion de W et soit $\Gamma_{\bar{U}}$ sa restriction à \bar{U} . Supposons S_{Γ}^3 exact sur W ; il existe alors un opérateur différentiel A sur N tel que $S_{\Gamma}^3 = \partial A$. Si $u, v \in C^{\infty}(\bar{U}; \mathbb{R})$ ces fonctions peuvent être prolongées à W et l'on a sur \bar{U} :

$$(13-6) \quad S_{\Gamma}^3(u, v) \Big|_{\bar{U}} = (\{Au, v\} + \{u, Av\} - A\{u, v\}) \Big|_{\bar{U}}$$

Si $A_{\bar{U}}$ est la restriction de A à \bar{U} , on a donc d'après (13-6) sur la variété de Poisson $(\bar{U}, \Lambda_{\bar{U}})$ régulière :

$$S_{\Gamma_{\bar{U}}}^3 = \partial A_{\bar{U}}$$

ce qui implique contradiction avec le c. ; S_{Γ}^3 ne saurait donc être exact. Nous avons établi :

THEOREME. *Sur toute variété de Poisson (W, Λ) , la 2-classe β de cohomologie, élément de $H_{\text{dif}}^2(N; N)$, définie par les 2-cocycles S_{Γ}^3 , est un invariant toujours $\neq 0$ de la structure de Poisson Λ .*

14. - Cohomologie de Hochschild et *-produits

a) Soit W une variété différentiable de dimension d . L'espace $N = C^{\infty}(W; \mathbb{R})$ est muni d'une structure d'algèbre associative (et commutative) définie par le produit usuel des fonctions. La théorie des déformations des algèbres associatives, dues à Gerstenhaber [21], fait intervenir la cohomologie de Hochschild de l'algèbre envisagée en dimensions 2 et 3. Pour l'algèbre associative (N, \cdot) , une k -cochaîne ($k \geq 1$) est une application multilinéaire de N^k dans N . Une cochaîne est dite n -différentielle ($n \geq 0$) si elle est définie par un opérateur multidifférentiel d'ordre maximum n en chaque argument. Nous considérons seulement ici des cochaînes différentielles, nulles sur les constantes. Le cobord d'une telle k -cochaîne C est une $(k+1)$ -cochaîne $\tilde{\partial}C$ donnée par :

$$(14-1) \quad \begin{aligned} \tilde{\partial}C(u_0, \dots, u_k) &= u_0 C(u_1, \dots, u_k) - C(u_0 u_1, u_2, \dots, u_k) + C(u_0, u_1 u_2, \dots, u_k) \\ &+ (-1)^k C(u_0, \dots, u_{k-1} u_k) + (-1)^{k+1} C(u_0, \dots, u_{k-1}) u_k \end{aligned}$$

L'associativité entraîne $\tilde{\partial}^2 = 0$. On désigne par $\tilde{H}_{\text{dif}}^k(N; N)$ le k^{e} espace de cohomologie de Hochschild correspondant. Jacques Vey [19] a obtenu le théorème suivant :

THEOREME (Vey). *L'espace $\tilde{H}_{\text{dif}}^k(N; N)$ est isomorphe à l'espace des k -tenseurs contravariants antisymétriques de W .*

Un tel tenseur définit un opérateur multidifférentiel alterné, d'ordre 1 en chaque

argument, avec lequel il peut être identifié. L'énoncé de Vey peut être vérifié par des moyens élémentaires dans les cas $k = 2$ et $k = 3$ qui importent seuls ici.

b) Soit $E(N ; \nu)$ l'espace des fonctions formelles en $\nu \in \mathbb{R}$ à coefficients dans N ; ν est appelé le paramètre de déformation. Considérons une application bilinéaire $N \times N \rightarrow E(N ; \nu)$ décrite par la série formelle :

$$(14-2) \quad u *_{\nu} v = \sum_{r=0}^{\infty} \nu^r C_r(u,v) = u.v + \sum_{r=1}^{\infty} \nu^r C_r(u,v) \quad (u,v \in N)$$

où les $C_r (r \geq 1)$ sont des 2-cochaînes différentielles. On dit que (14-2) est une *déformation formelle* de l'algèbre associative $(N, .)$ si l'identité d'associativité est formellement satisfaite ; (4-2) définit alors sur $E(N ; \nu)$ une structure d'algèbre associative qui est dite *une algèbre associative formelle* obtenue par déformation. Si (14-2) est arbitraire, on a pour $u, v, w \in N$:

$$(u *_{\nu} v) *_{\nu} w - u *_{\nu} (v *_{\nu} w) = \sum_{t=1}^{\infty} \nu^t \tilde{D}_t(u,v,w)$$

où \tilde{D}_t est la 3-cochaîne :

$$(14-3) \quad \tilde{D}_t(u,v,w) = \sum_{r+s=t} (C_r(C_s(u,v),w) - C_r(u,C_s(v,w))) \quad (r,s \geq 0)$$

Nous sommes conduits à poser :

$$(14-4) \quad \tilde{E}_t(u,v,w) = \sum_{r+s=t} (C_r(C_s(u,v),w) - C_r(u,C_s(v,w))) \quad (r,s \geq 1)$$

et nous avons l'identité $\tilde{D}_t = \tilde{E}_t - \tilde{\partial} C_t$.

Si (14-2) est limité à l'ordre r , on a une déformation d'ordre r si la relation d'associativité est satisfaite à l'ordre $(r+1)$ près. S'il en est ainsi \tilde{E}_{r+1} est automatiquement un 3-cocycle de $(N, .)$. Pour qu'on puisse trouver une nouvelle 2-cochaîne C_{r+1} telle que $\tilde{D}_{r+1} = \tilde{E}_{r+1} - \tilde{\partial} C_{r+1} = 0$ il faut et il suffit que \tilde{E}_{r+1} soit exact. Ainsi \tilde{E}_{r+1} définit une classe de cohomologie, élément de $\tilde{H}_{\text{dif}}^3(N ; N)$, qui est l'*obstruction à l'ordre* $(r+1)$ à la construction d'une déformation.

Une déformation d'ordre 1 est dite une déformation infinitésimale. On a $\tilde{E}_1 = 0$ et ainsi seulement $\tilde{\partial} C_1 = 0$; C_1 est un 2-cocycle de $(N, .)$.

c) Si T est un endomorphisme de N qui est $(n+1)$ -différentiel, $\tilde{\partial} T$ est n -différentiel. On montre [10] qu'inversement si T est un endomorphisme tel que $C = \tilde{\partial} T$ soit n -différentiel ($n \geq 0$), T est lui-même $(n+1)$ -différentiel. Cela posé, considérons une série formelle en ν :

$$(14-5) \quad T_{\nu} = \sum_{s=0}^{\infty} \nu^s T_s = \text{Id.} + \sum_{s=1}^{\infty} \nu^s T_s$$

où les $T_s (s \geq 1)$ sont des endomorphismes de N ; T_ν opère naturellement sur $E(N ; \nu)$. Considérons une autre application bilinéaire $N \times N \rightarrow E(N ; \nu)$ correspondant à la série formelle :

$$(14-6) \quad u *'_\nu v = uv + \sum_{r=1}^{\infty} \nu^r C'_r(u, v)$$

où les C'_r sont encore des 2-cochaînes différentielles. Supposons que (14-5) et (14-6) soient telles qu'on ait formellement l'identité

$$(14-7) \quad T_\nu(u *'_\nu v) = T_\nu u *'_\nu T_\nu v$$

Cette identité peut se traduire par :

$$(14-8) \quad C'_t - C_t + \tilde{G}_t = \tilde{\delta} T_t \quad (t = 1, 2, \dots)$$

où $\tilde{G}_1 = 0$ et où \tilde{G}_t s'exprime à partir des C_r, C'_r, T_s d'indice $< t$. On voit que les $T_s (s \geq 1)$ sont *nécessairement* des opérateurs différentiels. A partir de formules universelles, on établit par récurrence :

PROPOSITION. *La déformation associative (14-2) étant donnée, toute série formelle (14-5), où les $T_s (s \geq 1)$ sont des opérateurs différentiels, engendre une application bilinéaire unique (14-6) vérifiant (14-7) ; cette application est une nouvelle déformation associative qui est dite équivalente à (14-2). En particulier une déformation est dite triviale si elle est équivalente à la déformation identité ($C_r = 0$ pour $r \geq 1$).*

Si deux déformations sont équivalentes à l'ordre t , $(C'_{t+1} - C_{t+1} + \tilde{G}_{t+1})$ est automatiquement un 2-cocycle. Sa classe de cohomologie, élément de $\tilde{H}_{\text{dif}}^2(N ; N)$ est l'*obstruction à l'équivalence à l'ordre $(t+1)$* . En particulier deux déformations infinitésimales définies respectivement par les 2-cocycles C'_1 et C_1 sont équivalentes si et seulement si $(C'_1 - C_1)$ est exact.

d) *Supposons maintenant que (W, Λ) sont une variété de Poisson.* Le 2-tenseur Λ définit l'opérateur bidifférentiel de Poisson P qui est donc un 2-cocycle de Hochschild non exact. Nous ne considérons ici que des déformations associatives de la forme :

$$(14-9) \quad u *_\nu v = uv + \nu P(u, v) + \sum_{r=2}^{\infty} \nu^r C_r(u, v)$$

où les C_r satisfont l'hypothèse suivante :

Hypothèse de parité. C_r est *paire* en u, v pour r pair, *impaire* en u, v pour r impair.

S'il en est ainsi, on dit que (14-9) définit un $*_{\nu}$ -produit sur (W, Λ) . On a alors :

$$(14-10) \quad u *_{\nu} 1 = 1 *_{\nu} u = u \quad u *_{-\nu} v = v *_{\nu} u$$

Par antisymétrisation de (14-9) et division par 2ν , on obtient une application bilinéaire alternée $N \times N \rightarrow E(N; \lambda)$ (avec $\lambda = \nu^2$), soit :

$$(14-11) \quad [u, v]_{\lambda} = P(u, v) + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r C_{2r+1}(u, v)$$

qui vérifie formellement l'identité de Jacobi. On dit que (14-11) est une *déformation* différentielle formelle de l'algèbre de Lie de Poisson $(N; P)$ de la variété. La cohomologie de Chevalley joue exactement le même rôle pour les déformations d'algèbres de Lie que la cohomologie de Hochschild pour les déformations d'algèbres associatives.

15. - Cohomologie de Hochschild tangentielle et $*_{\nu}$ -produits tangentiels

a) Sur la variété de Poisson régulière (W, Λ) donnons-nous une connexion Γ adaptée au feuilletage \mathcal{G} . Tout k -cochaîne différentielle C peut s'exprimer d'une manière et d'une seule en termes de dérivées covariantes symétrisées des arguments et de tenseurs partiellement symétriques : soit, dans une carte $\{x^K\}$ de domaine U , $\left\{ A^{K_1^1 \dots K_{n_1}^1, \dots, K_1^k \dots K_{n_k}^k} \right\}$ le symbole principal de la cochaîne pour l'ordre lexicographique ; on définit ainsi un tenseur A symétrique par rapport aux indices $K_1^1 \dots K_{n_1}^1, \dots$, symétrique par rapport aux indices $K_1^k, \dots, K_{n_k}^k$. La k -cochaîne \bar{C} définie, pour chaque domaine U , par :

$$(15-1) \quad \bar{C}(u_1, \dots, u_k) \Big|_U = C(u_1, \dots, u_k) \Big|_U - A^{K_1^1 \dots K_{n_1}^1, \dots, K_1^k \dots K_{n_k}^k} \nabla_{K_1^1 \dots K_{n_1}^1} u_1 \dots \nabla_{K_1^k \dots K_{n_k}^k} u_k$$

admet un nouveau symbole principal sur lequel nous pouvons répéter l'opération.

Nous dirons que la k -cochaîne C est *tangentielle* pour (W, Λ) , si les différents tenseurs exprimant C dans la connexion Γ sont tangentiels, c'est-à-dire sont des sections convenables de puissances tensorielles de $T\mathcal{G}$. Cette définition est indépendante du choix de la connexion adaptée Γ , comme le montre le lemme suivant :

LEMME. Soit Γ une connexion adaptée au feuilletage \mathcal{G} . Si $\{x^K\} = \{x^a, x^i\}$ est une carte adaptée de domaine U , les composantes tangentielles $\nabla_{i_1 \dots i_n} u$ de la dérivée covariante de u sur U ne s'expriment qu'en termes des dérivées partielles tangentielles $\partial_{i_1 \dots i_n} u$ ($h \leq n$).

La démonstration est immédiate par récurrence sur n .

Il en résulte aisément que, pour qu'une cochaîne C soit tangentielle par rapport à une connexion adaptée Γ , il faut et il suffit que, sur tout domaine U d'un atlas de cartes adaptée à \mathcal{G} , $C|_U$ s'exprime uniquement à partir des dérivées partielles tangentielles des différents arguments, ce qui est indépendant du choix de la connexion.

b) On déduit de (14-1) que si C est une k -cochaîne tangentielle, $\tilde{\delta}C$ est une $(k+1)$ -cochaîne tangentielle. On voit donc qu'on peut définir sur (W, Λ) une cohomologie de Hochschild tangentielle de l'algèbre (N, \cdot) . Un k -cocycle tangential C est dit ici *tangentiellement exact* s'il est le cobord d'une $(k-1)$ -cochaîne tangentielle. Nous notons $\tilde{H}_{\text{dif } T}^k(N; N)$ le k^e espace de cohomologie de Hochschild tangentielle de (N, \cdot) .

Le 2-cocycle donné par P est manifestement tangential. Un $*_{\nu}$ -produit (14-9) sur (W, Λ) est dit un *$*_{\nu}$ -produit tangential* si les 2-cochaînes C_r ($r \geq 2$) sont toutes tangentielles.

Soit Γ une connexion de Poisson sur (W, Λ) qui induit sur les feuilles symplectiques de \mathcal{G} des connexions symplectiques. Introduisons l'opérateur P_{Γ}^2 défini sur chaque domaine U de l'atlas de cartes adaptées par :

$$(15-2) \quad P_{\Gamma}^2(u, v)|_U = \Lambda^{K_1 L_1} \Lambda^{K_2 L_2} \nabla_{K_1 K_2} u \nabla_{L_1 L_2} v = \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \nabla_{i_1 i_2} u \nabla_{j_1 j_2} v$$

qui est manifestement tangential. Il résulte de (13-5) que S_{Γ}^3 est aussi tangential. On déduit de l'étude des $*_{\nu}$ -produits sur une variété symplectique [1] que

$$(15-3) \quad u *_{\nu} v = uv + \nu P(u, v) + (\nu^2/2!) P_{\Gamma}^2(u, v) + (\nu^3/3!) S_{\Gamma}^3(u, v)$$

est un *$*_{\nu}$ -produit tangential à l'ordre 3*.

Pour étudier l'existence de $*_{\nu}$ -produits tangentiels sur (W, Λ) , il nous faut obtenir une version tangentielle du théorème de Vey en dimensions 2 et 3.

16. - Théorème de Vey tangential en dimensions 2 et 3

Soit Γ une connexion adaptée à \mathcal{G} et introduisons un atlas de cartes adaptées $\{x^K = \{x^a, x^i\}$

a) Soit C un 2-cocycle tangential de Hochschild. Si $C(u, v)$ est *impair* en u, v , il est donné d'après le théorème de Vey par un 2-tenseur contravariant anti-symétrique, nécessairement tangential. Etudions le cas où $C(u, v)$ est *pair* en u, v ; il est alors exact et il existe un opérateur

différentiel A tel que :

$$(16-1) \quad C(u,v) = \tilde{\partial} A(u,v) = uA(v) + vA(u) - A(uv)$$

où A est d'ordre $n > 1$ et est défini à un opérateur d'ordre 1 près, donné par un vecteur (1-cycle). Sur le domaine U d'une carte de l'atlas, la partie principale de A s'écrit :

$$B^{K_1 \dots K_n} \partial_{K_1 \dots K_n} u$$

où $B^{K_1 \dots K_n}$ est symétrique par rapport à K_1, \dots, K_n . De (16-1) il résulte que le seul terme de type $(n-1, 1)$ de $\tilde{\partial} A$ s'écrit :

$$-n B^{K_1 \dots K_n} \partial_{K_1 \dots K_{n-1}} u \partial_{K_n} v$$

On en déduit que, $\tilde{\partial} A$ étant tangentiel, le tenseur B définissant la partie principale de A est *tangentiel*. Si nous notons encore B l'opérateur tangentiel défini sur les cartes de l'atlas par :

$$B(u) \Big|_U = B^{i_1 \dots i_n} \nabla_{i_1 \dots i_n} u,$$

le 2-cocycle $\tilde{\partial}(A-B)$ est aussi tangentiel et nous pouvons répéter l'opération. Il en résulte qu'il existe un opérateur tangentiel A_T tel que $A - A_T$ soit d'ordre 1. On a alors $C = \tilde{\partial} A_T$ et le 2-cocycle tangentiel C est *tangentiellement exact*. Nous avons établi l'analogue tangentiel du théorème de Vey en dimension 2.

b) Soit E un 3-cocycle tangentiel de Hochschild. Nous examinons d'abord *le cas où* $E(u, v, w)$ est pair en u, w. D'après le théorème de Vey, ce 3-cocycle est exact et il existe une 2-cochaîne impaire C telle que :

$$(16-2) \quad E(u,v,w) = \tilde{\partial} C(u,v,w) = uC(v,w) - C(uv,w) + C(u,vw) - C(u,v) \cdot w$$

Sur le domaine U d'une carte, la partie principale de C de type (n, n') en (u,v) s'écrit :

$$B^{K_1 \dots K_n, L_1 \dots L_{n'}} (\partial_{K_1 \dots K_n} u \partial_{L_1 \dots L_{n'}} v - \partial_{K_1 \dots K_n} v \partial_{L_1 \dots L_{n'}} u)$$

où B est symétrique par rapport aux indices K et symétrique par rapport aux indices L. Il lui correspond dans $\tilde{\partial} C$ les termes :

$$(16-3) \quad \left\{ \begin{array}{l} - B^{K_1 \dots K_n, L_1 \dots L_{n'}} (\partial_{K_1 \dots K_n} (uv) \partial_{L_1 \dots L_{n'}} w - \partial_{K_1 \dots K_n} w \partial_{L_1 \dots L_{n'}} (uv)) \\ + B^{K_1 \dots K_n, L_1 \dots L_{n'}} (\partial_{K_1 \dots K_n} u \partial_{L_1 \dots L_{n'}} (vw) - \partial_{K_1 \dots K_n} (vw) \partial_{L_1 \dots L_{n'}} u) \end{array} \right.$$

modulo des termes en u ou w . Distinguons différents cas :

1) $n > n' \geq 2$.

Il existe dans $\tilde{\delta} C$ un seul terme de type $(n, n'-1, 1)$ en u, v, w qui peut s'écrire :

$${}_{n'} B^{K_1 \dots K_n, L_1 \dots L_n} \partial_{K_1 \dots K_n} u \partial_{L_1 \dots L_{n-1}} v \partial_{L_n} w$$

Il en résulte que B est nécessairement tangentiel.

2^o) $n = n' \geq 2$.

Astreignant B à être antisymétrique par rapport à (K_1, K_2, \dots, K_n) et (L_1, L_2, \dots, L_n) .

Il existe encore dans $\tilde{\delta} C$ un seul terme de type $(n, n-1, 1)$ en u, v, w qui peut s'écrire :

$${}_{2n} B^{K_1 \dots K_n, L_1 \dots L_n} \partial_{K_1 \dots K_n} u \partial_{L_1 \dots L_{n-1}} v \partial_{L_n} w$$

et la conclusion est la même.

3^o) $n \geq 3, n' = 1$.

Il existe dans $\tilde{\delta} C$ un seul terme de type $(n-1, 1, 1)$ en u, v, w qui s'écrit :

$$-{}_n B^{K_1 \dots K_n, L} \partial_{K_1 \dots K_{n-1}} u \partial_{K_n} v \partial_L w$$

et B est nécessairement tangentiel.

4^o) $n = 2, n' = 1$.

Il existe dans $\tilde{\delta} C$ les termes de type $(1, 1, 1)$ en u, v, w suivants :

$$-2(B^{KL,M} + B^{LM,K}) \partial_K u \partial_L v \partial_M w$$

Par suite si l'un des indices K, L, M est *un indice a*, on a :

$$B^{KL,M} + B^{LM,K} = 0$$

On en déduit par permutation circulaire et addition membre à membre :

$$B^{KL,M} + B^{LM,K} + B^{MK,L} = 0$$

et aussi $B^{KL,M} = 0$ si l'un des trois indices est un a . Le tenseur B est encore tangentiel.

Dans tous les cas, notons encore B la 2-cochaîne tangentielle définie sur les cartes de l'atlas par :

$$B(u,v) \Big|_{L_1} = B^{i_1 \dots i_n, j_1 \dots j_n'} (\nabla_{i_1 \dots i_n} u \nabla_{j_1 \dots j_n'} v - \nabla_{i_1 \dots i_n} v \nabla_{j_1 \dots j_n'} u)$$

Le 3-cocycle $\tilde{\delta}(C-B)$ est encore tangentiel et nous pouvons répéter l'opération sur $(C-B)$. Il en résulte qu'il existe une 2-cochaîne tangentielle C_T telle que $(C-C_T)$ soit de type $(1,1)$, donc soit un 2-cocycle. On a alors $E = \tilde{\delta} C_T$ et le 3-cocycle tangentiel pair E est *tangentiellement exact*.

c) Supposons maintenant le 3-cocycle tangentiel $E(u, v, w)$ *impair* en u, v, w . D'après le théorème de Vey, il existe une 2-cochaîne *paire* C telle que :

$$(16-4) \quad E = \tilde{\delta} C + T$$

où T est donné par un 3-tenseur contravariant antisymétrique. Pour toute 3-cochaîne E introduisons la notation ([10]) :

$$(16-5) \quad (\hat{\Sigma} E)(u, v, w) = E(u, v, w) - E(v, u, w) - E(u, w, v)$$

On vérifie immédiatement que si C est une 2-cochaîne *paire* $\hat{\Sigma} \tilde{\delta} C = 0$. Il résulte de (16-4) que, pour notre 3-cocycle tangentiel E , on a :

$$(16-6) \quad \hat{\Sigma} E = 3T$$

et T est nécessairement *tangentiel*. Par suite $\bar{E} = E - T = \tilde{\delta} C$ est un 3-cocycle tangentiel exact, avec C *paire*.

Sur le domaine U d'une carte de l'atlas envisagé, la partie principale de C de type (n, n') en (u, v) s'écrit :

$$B^{K_1 \dots K_n, L_1 \dots L_{n'}} (\partial_{K_1 \dots K_n} u \partial_{L_1 \dots L_{n'}} v + \partial_{K_1 \dots K_n} v \partial_{L_1 \dots L_{n'}} u)$$

où B présente les mêmes symétries qu'au b. Le raisonnement même du b s'applique dans les cas $n > n' \geq 2$, $n = n' \geq 2$, $n \geq 3$ et $n' = 1$. Il nous suffit d'examiner le cas $n = 2$, $n' = 1$ correspondant à une partie principale qui s'écrit :

$$B^{KL,M} (\partial_{KL} u \partial_M v + \partial_{KL} v \partial_M u)$$

Dans $\tilde{\delta} C$ les termes de type $(1, 1, 1)$ en u, v, w s'écrivent :

$$-2(B^{KL,M} - B^{LM,K}) \partial_K u \partial_L v \partial_M w$$

Par suite si l'un des indices K, L, M est un indice a, $B^{KL,M}$ est complètement symétrique en les trois indices. On peut construire un 3-tenseur A *complètement symétrique* tel que, pour tout domaine d'une carte de l'atlas, on ait :

$$A^{KL,a} = B^{KL,a}$$

Ce tenseur définit une 2-cochaîne A donnée sur chaque domaine U par :

$$A(u,v) \Big|_{L_1} = A^{KLM} (\nabla_{KL} u \nabla_M v + \nabla_{KL} v \nabla_M u)$$

qui est le cobord de $A_1(u)$ donné par :

$$A_1(u) \Big|_{L_1} = (1/3) A^{KLM} \nabla_{KLM} u$$

donc un 2-cocycle. Il en résulte comme au b qu'il existe une 2-cochaîne *tangentielle* C_T telle que $C - C_T - A$ soit de type (1,1), donc soit encore un 2-cocycle. On a alors $E = \tilde{\partial} C_T$ et le 3-cocycle tangentiel impair donné E peut s'écrire :

$$E = \tilde{\partial} C_T + T$$

où C_T et T sont tangentiels.

Nous pouvons résumer les résultats de cette étude par l'énoncé suivant :

PROPOSITION. *Pour k = 2 et 3, les espaces de cohomologie de Hochschild tangentielle $\tilde{H}_{\text{dif. } T}^k(N; N)$ sont isomorphes aux espaces des k-tenseurs contravariants antisymétriques tangentiels.*

17. - Théorème d'existence de $*_{\nu}$ -produits tangentiels.

a) Sur la variété de Poisson régulière (W, Λ) , on peut définir une Λ -cohomologie *tangentielle* (voir § 3). Si A est un k-tenseur contravariant antisymétrique tangentiel, on voit immédiatement en utilisant une carte *naturelle* (§ 2, e) que son cobord :

$$\partial A = -[\Lambda, A]$$

est un (k+1)-tenseur tangentiel. Un A-cocycle tangentiel est dit *tangentiellement exact* s'il est le

cobord d'un $(k-1)$ -tenseur tangentiel.

Nous notons $H_T^k(W, \Lambda)$ le k^e espace de Λ -cohomologie tangentielle de (W, \cdot) .

b) Cela posé, on peut établir, sous une condition générale concernant la Λ -cohomologie tangentielle, l'existence de $*_\nu$ -produits tangentiels sur une variété de Poisson régulière par un raisonnement semblable à celui de Neroslavski-Vlassov [20] (voir aussi [10]) dans le cas symplectique.

Considérons un $*_\nu$ -produit tangentiel d'ordre 2. On peut l'écrire :

$$(17-1) \quad uv + \nu P(u, v) + \nu^2 C_2(u, v)$$

où l'on a $C_2 = (1/2)P_\Gamma^2 + \tilde{\partial} A$, où Γ est une connexion de Poisson et A un opérateur différentiel tangentiel. On procède par récurrence. Choisissons *un entier impair* $t = 2r + 1$ ($r \geq 1$) et supposons qu'il existe un $*_\nu$ -produit tangentiel d'ordre $t - 1 = 2r$ pair prolongeant (17-1). Le 3-cocycle de Hochschild tangentiel \tilde{E}_{2r+1} est pair donc tangentiellement exact, d'après le § 16, et il existe une 2-cochaîne tangentielle C_{2r+1} *impaire* telle que :

$$\tilde{E}_{2r+1} = \tilde{\partial} C_{2r+1}$$

où C_{2r+1} est définie à un 2-tenseur tangentiel près. Choisissons C_{2r+1} : on obtient un $*_\nu$ -produit tangentiel d'ordre $t = 2r+1$. Le 3-cocycle de Hochschild tangentiel \tilde{E}_{2r+1} est *impair* et peut s'écrire :

$$\tilde{E}_{2r+2} = \tilde{\partial} C'_{2r+2} + T^{(3)}$$

où C'_{2r+1} tangentielle est paire et où $T^{(3)}$ est un 3-tenseur tangentiel (voir § 16). On a :

$$\hat{\Sigma} \tilde{E}_{2r+2} = 3 T^{(3)}$$

et l'on voit, comme dans le cas symplectique, que $T^{(3)}$ est un 3- Λ -cocycle tangentiel ($\partial T^{(3)} = 0$).

Supposons que $H_T^3(W, \cdot) = \{0\}$. Le 3-cocycle $T^{(3)}$ est alors tangentiellement exact et il existe un 2-tenseur tangentiel $T^{(2)}$ tel que $T^{(3)} = \partial T^{(2)}$. En substituant à C_{2r+1} la 2-cochaîne $C_{2r+1} + (3/2)T^{(2)}$, on voit que, pour le nouveau 3-cocycle \tilde{E}_{2r+2} , on a $T^{(3)} = 0$ et $\tilde{E}_{2r+2} = \tilde{\partial} C_{2r+2}$ où C_{2r+2} est tangentielle paire. On obtient ainsi un $*_\nu$ -produit tangentiel d'ordre $(2r+2)$. On a établi :

THEOREME. Sur toute variété de Poisson régulière (W, Λ) tel que $H_T^3(W, \Lambda) = \{0\}$ il existe des $*_\nu$ -produits tangentiels.

On établit comme dans le cas symplectique :

PROPOSITION. Si $H_{\Gamma}^2(W, \Lambda) = \{0\}$, tous les $*_{\nu}$ -produits tangentiels existants sont tangentiellément équivalents.

L'équivalence donnée par (14-5) est dite tangentielle si les $T_s (s \geq 1)$ sont des opérateurs tangentiels.

c) Soit Γ une connexion de Poisson de (W, Λ) . Les opérateurs P_{Γ}^r définis par :

$$P_{\Gamma}^r(u, v) \Big|_U = \Lambda^{K_1 L_1} \dots \Lambda^{K_r L_r} \nabla_{K_1 \dots K_r} u \nabla_{L_1 \dots L_r} v$$

sont tangentiels et satisfont l'hypothèse de parité. Introduisons les notations suivantes : nous désignons par Q^r un opérateur bidifférentiel tangential, d'ordre maximum r en chaque argument, nul sur les constantes, satisfaisant l'hypothèse de parité, et dont le symbole principal coïncide avec celui de P^r . En particulier nous posons $Q^0(u, v) = uv$. $Q^1 = P$. Nous sommes conduits à la définition suivante, semblable à celle du cas symplectique [10] :

DEFINITION. Un $*_{\nu}$ -produit de Vey tangential est un $*_{\nu}$ -produit de la forme :

$$u *_{\nu} v = \sum_{r=0}^{\infty} (\nu^r / r!) Q^r(u, v)$$

Un raisonnement identique à celui du cas symplectique ([10], p 173-178) donne :

THEOREME. Tout $*_{\nu}$ -produit tangential d'une variété de Poisson régulière (W, Λ) est tangentiellément équivalent à un $*_{\nu}$ -produit de Vey tangential.

IV - FEUILLETAGES LAGRANGIENS

18. - Connexions linéaires plates sur les feuilles

Soit (M, F) une variété symplectique de dimension $m = 2n$ et soit Λ le tenseur de structure symplectique. Un feuilletage lagrangien de (M, F) est un feuilletage isotrope de la variété de codimension n . Les feuilles isotropes sont donc de dimension n , c'est-à-dire de dimension maximum.

a) Prenons sur M un atlas de cartes

$\{x^A\} = \{x^a, x^i\}$ ($A, B, \dots = 1, \dots, 2n$; $a, b, \dots = 1, \dots, n$; $i, j, \dots = n+1, \dots, 2n$) adaptées au feuilletage \mathcal{F} de domaines U, U', \dots . Introduisons sur chaque domaine U un champ de corepères adaptés $\{\theta^A\} = \{\theta^a, \theta^i\}$ par lequel le feuilletage est défini sur U par $\{\theta^a = 0\}$.

La 2-forme induite par F sur chaque feuille étant nulle, on a sur U :

$$(18-1) \quad F_{ij} = 0$$

et la matrice $n \times n$, de composants F_{ai} , est régulière. On en déduit :

$$(18-2) \quad \Lambda^{ab} = 0$$

Soit Γ^* une connexion sur M adaptée à \mathcal{F} . On a pour ses coefficients sur U par rapport à $\{\theta^A\}$:

$$(18-3) \quad \gamma_{iA}^* = 0$$

Il résulte de (18-1) et (18-3) que l'on a :

$$(18-4) \quad \nabla_A^* F_{ij} = 0$$

et, d'après le caractère fermé de F :

$$(18-5) \quad \nabla_i^* F_{Aj} = \nabla_j^* F_{Ai}$$

b) Substituons à la connexion Γ une autre connexion adaptée telle que :

$$(18-6) \quad \nabla_i F_{Aj} = 0$$

Le tenseur T par lequel Γ doit différer de Γ^* vérifie $T_{iA}^a = 0$ sur U et est tel que :

$$\nabla_i^* F_{Aj} - T_{ji}^B F_{AB} = 0$$

Le tenseur T_U admettant sur U les composantes :

$$T_{ji}^A = \Lambda^{BA} \nabla_i^* F_{Bj} \quad T_{jb}^a = 0$$

répond sur U à la question : il est symétrique en i, j , tel que $T_{iA}^a = 0$, d'après (18-2) et la relation (18-6) est satisfaite. Il en résulte, comme au § 9, qu'il existe sur M un tenseur T de type (1,2), covariamment symétrique et jouissant des propriétés désirées.

C'est sur la connexion adaptée Γ déduite de T que nous allons maintenant raisonner. Pour cette connexion, on a sur U :

$$(18-7) \quad \nabla_j F_{ak} = 0 \quad \nabla_i F_{jk} = 0$$

On en déduit :

$$(18-8) \quad \nabla_i \nabla_j F_{ak} = 0$$

Soit $\{R_{B,CD}^A\}$ le tenseur de courbure de la connexion Γ . On déduit de (18-8) à partir de l'identité de Ricci :

$$R_{a,ij}^b F_{bk} + R_{k,ij}^A F_{aA} = 0$$

D'après les propriétés (9-12), (9-13) du tenseur de courbure d'une connexion adaptée, cette relation se réduit à :

$$R_{k,ij}^l F_{al} = 0$$

c'est-à-dire à :

$$(18-9) \quad R_{k,ij}^l = 0$$

La connexion Γ induit sur chaque feuille une connexion linéaire sans torsion dont le tenseur de courbure est précisément $R_{k,ij}^l$. Nous avons ainsi établi :

PROPOSITION. *Pour tout feuilletage lagrangien d'une variété symplectique (M, F) , il existe sur M une connexion adaptée au feuilletage qui induit sur chaque feuille une connexion linéaire, sans torsion, plate.*

Soit $(W = T^* \mathcal{F}, \Lambda_W)$ la variété de Poisson associée à $(M^* \mathcal{F})$ et π la projection $T^* \mathcal{F} \rightarrow M$. La variété W admet le feuilletage $\pi^* \mathcal{F}$ en cotangents aux feuilles de \mathcal{F} , sur chacun desquels la 2-forme $\pi^* \mathcal{F}$ se réduit à zéro. D'après le § 10, la connexion adaptée Γ de M se relève sur W selon une connexion de Poisson Γ qui induit sur chaque feuille de $\pi^* \mathcal{F}$ une connexion symplectique plate.

c) Soit \mathcal{G} un feuilletage coisotrope de la variété symplectique (M, F) de codimension q et dimension p ($q \leq p$). Ce feuilletage est régulier en ce sens que la 2-forme induite sur chaque feuille de \mathcal{G} par F est de rang constant $2r$.

Au champ intégrable de p -plans donné par \mathcal{G} , associons le champ de plans défini par les orthogonaux symplectiques à ces p -plans qui sont inclus dans eux. Il est bien connu et il est immédiat de vérifier que le nouveau champ obtenu est intégrable et définit un feuilletage isotrope \mathcal{F} de M de codimension $(q + 2r)$ et de dimension q . Si \mathcal{G} était lagrangien, \mathcal{F} et \mathcal{G} coïncideraient. On peut construire sur M un atlas de cartes $\{x^A\} = \{x^{a'}, x^{a''}, x^i\}$ ($x' = 1, \dots, q$; $a'' = 1, \dots, 2r$; $i = 1, \dots, q$) adaptées au feuilletage \mathcal{F} , telles que le feuilletage \mathcal{G} soit défini sur chaque domaine par $x^{a'} = \text{const}$. Un raisonnement identique à celui du b permet d'établir la généralisation suivante :

PROPOSITIONS. Soit \mathcal{G} un feuilletage coisotrope de la variété symplectique (M, F) et soit \mathcal{F} le feuilletage isotrope défini par les orthogonaux symplectiques des plans de \mathcal{G} . Il existe sur M une connexion linéaire sans torsion plate.

Les énoncés du b et du c fournissent une autre approche de résultats encore partiellement inédits d'A. Weinstein, P. Dazord et J.M. Morvan. Ils les précisent un peu en ce qui concerne l'introduction d'une connexion adaptée sur toute la variété (M, F) .

19. - Le cas riemannien

Soit (M, F) une variété symplectique de dimension $m = 2n$ et soit \mathcal{F} un feuilletage lagrangien de (M, F) .

a) Introduisons sur M une métrique riemannienne \underline{g} . Soit Γ^* la connexion riemannienne de (M, \underline{g}) et Γ la connexion adaptée à \mathcal{F} déduite de la connexion riemannienne (voir § 11).

Soit, sur M , un atlas dont chaque domaine U est muni d'un champ de corepères ortho-normés adaptés $\{\theta^A\} = \{\theta^a, \theta^i\}$ ($a, b, \dots = 1, \dots, n$; $i, j, \dots = n+1, \dots, 2n$). La connexion Γ a en particulier dans ces corepères les coefficients suivants (notations du § 11) :

$$(19-1) \quad \gamma_{iA}^a = 0 \quad \gamma_{bi}^a = \gamma_{bi}^{*a} - \gamma_{ib}^{*a} \quad \gamma_{jk}^i = \gamma_{jk}^{*i}$$

La seconde forme fondamentale Q du champ de plans orthogonal à \mathcal{F} est donné, d'après (11-12) par :

$$(19-2) \quad Q_{ab}^i = \frac{1}{2} (\gamma_{bi}^a + \gamma_{ai}^b)$$

Soit (g^{AB}) les composants contravariants de la métrique g dans des corepères adaptés *arbitraires*. On vérifie immédiatement que $\{\nabla_i g^{ab}\}$ définit un tenseur. On a :

LEMME. *Pour que le champ de plans orthogonal à \mathcal{F} dans \underline{g} soit totalement géodésique, il faut et il suffit que le tenseur $\{\nabla_i g^{ab}\}$ soit nul.*

On a en effet dans les corepères orthogonaux adaptés :

$$\nabla_i g^{ab} = \gamma_{ci}^a g^{cb} + \gamma_{ci}^b g^{ac} = (\gamma_{bi}^a + \gamma_{ai}^b)$$

ce qui établit le lemme.

Sur le domaine U , la métrique \underline{g} peut s'écrire dans les corepères orthonormés adaptés $\{\theta^a, \theta^i\}$:

$$\underline{g} : g_{ab} \theta^a \theta^b + g_{ij} \theta^i \theta^j = \sum_a (\theta^a)^2 + \sum_i (\theta^i)^2$$

Substituons à la métrique \underline{g} une métrique \underline{g}' qui peut s'écrire sur U :

$$\underline{g}' : g'_{ab} \theta^a \theta^b + g'_{ij} \theta^i \theta^j = \sum_a (\theta^a)^2 + g'_{ij} \theta^i \theta^j$$

Cette métrique \underline{g}' admet sur U des corepères adaptés orthonormés en \underline{g}' $\{\theta^a, \theta^{i'}\}$, où les $\theta^{i'}$ sont des combinaisons linéaires des θ^j et elle s'écrit dans ces corepères :

$$\underline{g}' : \sum_a (\theta^a)^2 + \sum_i (\theta^{i'})^2$$

Le champ \underline{Q} orthogonal à \mathcal{F} est le même par \underline{g} et pour \underline{g}' . En explicitant $d\theta^a$, on voit que pour les connexions Γ correspondant à \underline{g} et Γ' correspondant à \underline{g}' , on a :

$$(19-3) \quad \gamma'_{bi}, \theta^{i'} = \gamma_{bi}^a \theta^i$$

Il résulte de (19-2) que si le champ \underline{Q} est totalement géodésique pour \underline{g} , il est totalement géodésique pour \underline{g}' .

b) Supposons \underline{g} rapporté aux corepères orthonormés adaptés $\{\theta^A\} = \{\theta^a, \theta^i\}$ et

considérons le tenseur tangentiel qui admet, sur chaque domaine U , pour composantes non nulles :

$$g'_{ij} = g^{ab} F_{ai} F_{bj}$$

La matrice $n \times n$ de composantes F_{ai} étant régulière, on peut définir sur M une métrique riemannienne $\underline{\underline{g}}$ qui s'écrit sur chaque domaine U :

$$\underline{\underline{g}} : g_{ab} \theta^a \theta^b + g'_{ij} \theta^i \theta^j$$

Nous supposons que le champ \underline{Q} est totalement géodésique pour \underline{g} , donc totalement géodésique pour $\underline{\underline{g}}$. Nous adoptons maintenant pour métrique fondamentale sur M la métrique $\underline{\underline{g}}$, que nous notons désormais \underline{g} pour simplifier les notions ; les corepères orthonormés adaptés sont pris par rapport à cette métrique.

Pour la connexion adaptée Γ déduite de la connexion riemannienne Γ^* , on a d'après le § 18, a :

$$(19-4) \quad \nabla_A F_{ij} = 0 \quad \nabla_i F_{aj} = \nabla_j F_{ai}$$

Nous allons établir :

LEMME. *L'hypothèse de totale géodésicité entraîne $\nabla_i F_{aj} = 0$.*

En effet par construction on a :

$$(19-5) \quad g^{ab} F_{ai} F_{bj} = g_{ij}$$

Or d'après (19-1) :

$$\nabla_k g_{ij} = -\gamma_{ik}^{*\ell} g_{\ell j} - \gamma_{jk}^{*\ell} g_{i\ell} = 0$$

et d'après le lemme précédent $\nabla_k g^{ab} = 0$. Par dérivation de (19-5), il vient :

$$g^{ab} (F_{ai} \nabla_k F_{bj} + F_{aj} \nabla_k F_{bi}) = 0$$

soit, d'après (19-4),

$$g^{ab} (F_{ai} \nabla_j F_{bk} + F_{aj} \nabla_i F_{bk}) = 0$$

ce qui s'écrit :

$$\nabla_j (g^{ab} F_{ai} F_{bk}) + \nabla_i (g^{ab} F_{aj} F_{bk}) - g^{ab} F_{bk} (\nabla_j F_{ai} + \nabla_i F_{aj}) = 0$$

Il vient :

$$g^{ab} F_{bk} \nabla_i F_{aj} = 0$$

La matrice (F_{bk}) étant régulière, on a $\nabla_i F_{aj} = 0$.

c) On en déduit, comme au § 18 b, que $\nabla_i \nabla_j F_{ak} = 0$ pour la connexion Γ et l'identité de Ricci donne encore :

$$R_{k,ij}^\ell = 0$$

La connexion Γ définit sur chaque feuille une connexion de coefficients $\gamma_{jk}^i = \gamma_{jk}^{*i}$ qui n'est autre que la connexion riemannienne de la métrique induite par \underline{g} sur la feuille. Ces métriques riemanniennes sont donc plates. Nous énonçons :

PROPOSITION. *Soit \mathcal{F} un feuilletage lagrangien de la variété symplectique (M, F) . S'il existe sur M une métrique riemannienne \underline{g} telle que le champ orthogonal au feuilletage par \underline{g} soit totalement géodésique, il existe sur M une métrique riemannienne \underline{g}' qui induit sur chaque feuille de \mathcal{F} une métrique plate.*

d) *Remarque.* Soit (M, \underline{g}) une variété riemannienne munie d'un feuilletage \mathcal{F} et soit Γ la connexion adaptée à \mathcal{F} déduite de la connexion riemannienne. Pour un atlas de M de cartes adaptées $\{x^a, x^i\}$, les composantes g^{ab} définissent un tenseur contravariant admettant une dérivée covariante en Γ tangente :

$$(19-5) \quad \nabla_i g^{ab} = \partial_i g^{ab}$$

D'après le lemme du a, pour que le champ \underline{Q} orthogonal à \mathcal{F} dans \underline{g} soit totalement géodésique, il faut et il suffit en vertu de (19-5) que les composantes g^{ab} du tenseur métrique ne dépendent que de $\{x^c\}$. Lorsqu'il en est ainsi, on dit selon Reinhart [11] que la métrique \underline{g} est de *type fibré* (fibre-type ou bundle-type) pour \mathcal{F} . Ainsi, pour que sur la variété riemannienne (M, \underline{g}) munie du feuilletage \mathcal{F} , le champ \underline{Q} des plans orthogonaux à \mathcal{F} soit totalement géodésique, il faut et il suffit que la métrique \underline{g} soit de type fibré pour \mathcal{F} .

Ce résultat est identique à un corollaire de [6].

20. - Holonomies

a) Soit (M, \mathcal{F}) une variété munie d'un feuilletage de codimension q et soit Γ une connexion adaptée au feuilletage. Elle induit sur $\nu\mathcal{F}$ une connexion $\nu\Gamma$ dont la restriction à toute feuille est canonique et plate. Introduisons sur M un atlas dans chaque domaine U est muni d'un champ de corepères adaptés $\{\theta^a, \theta^i\}$.

Soit $\Sigma = \mathcal{F}(x)$ une feuille déterminée de \mathcal{F} . Considérons le groupe d'holonomie G_Σ , isomorphe à un sous-groupe de $GL(q)$, défini à une conjugaison près par le transport relativement à la connexion plate restriction de $\nu\Gamma$ à $\nu\mathcal{F}|_\Sigma$ d'un repère de la fibre de $\nu\mathcal{F}$ le long d'un lacet de Σ issu de x . Ce transport obéit au système différentiel qui s'écrit localement, si V est le vecteur transverse transporté :

$$(20-1) \quad X^i \nabla_i V^a = X^i (\partial_i V^a + \gamma_{bi}^a V^b) = 0$$

où X est le vecteur tangent au lacet. Les $\{\gamma_{bi}^a\}$ (voir § 9) ne dépendent pas du choix de la connexion adaptée Γ . Le groupe G_Σ qui ne dépend que du feuilletage et du choix de Σ est dit le *groupe d'holonomie (infinitésimale) dans \mathcal{F} de la feuille Σ* .

b) Supposons que G_Σ soit compact et donc isomorphe à un sous-groupe de $O(q)$. On peut construire sur M une métrique riemannienne \underline{g} définissant pour $\nu\mathcal{F}$ restreint à Σ une métrique fibrée correspondant à G_Σ . Pour des champs de corepères orthonormés adaptés $\{\theta^a, \theta^i\}$ de M on a localement pour toute connexion adaptée :

$$(\gamma_{bi}^a + \gamma_{ai}^b) \Big|_\Sigma = 0$$

Il en résulte que le champ de plans \underline{Q} orthogonal à \mathcal{F} pour \underline{g} est *totalelement géodésique pour Σ* , en ce sens que :

$$(20-2) \quad Q \Big|_\Sigma = 0$$

Ainsi :

PROPOSITION 1. *Si le groupe d'holonomie d'une feuille Σ du feuilletage \mathcal{F} de M est compact il existe sur M une métrique riemannienne g telle que le champ de plans \underline{Q} orthogonal à \mathcal{F} soit totalelement géodésique sur Σ .*

c) Revenons à une variété symplectique (M, F) et à un feuilletage lagrangien \mathcal{F} d'holonomie quelconque. Nous avons vu au § 18 qu'il existe sur M une connexion Γ adaptée à \mathcal{F} qui induit sur chaque feuille Σ de \mathcal{F} une connexion plate Γ_Σ .

La connexion Γ est telle que, sur tout domaine U muni de champs de corepères adaptés $\{\theta^a, \theta^i\}$ on ait :

$$(20-3) \quad \nabla_i F_{jA} = 0$$

A tout vecteur V associons la 1-forme tangentielle $\xi = \mu(V)$. On a :

$$\xi_j = F_{jA} V^A = F_{ja} V^a$$

Le système différentiel (20-1) définissant G_Σ se transforme, d'après (20-3), selon :

$$(20-4) \quad X^i \nabla_i \xi_j = X^i (\partial_i \xi_j - \gamma_{ji}^k \xi_k) = 0$$

qui correspond au transport le long d'un lacet de Σ de la 1-forme tangentielle ξ par rapport à la connexion Γ_Σ . Il en résulte la proposition suivante :

PROPOSITION 2. *Soit (M, F) une variété symplectique et \mathcal{F} un feuilletage lagrangien. Pour toute feuille Σ de \mathcal{F} , il existe un isomorphisme entre le groupe d'holonomie G_Σ de Σ pour \mathcal{F} et le groupe d'holonomie H_Σ de la variété Σ munie de la connexion plate Γ_Σ induite par Γ .*

d) Supposons, sous les mêmes hypothèses, G_Σ compact par une feuille Σ . Modifions la métrique introduite dans la proposition 1, selon le § 19,b. Dans cette métrique, notée encore g , on a toujours $Q|_\Sigma = 0$ et, par suite, pour la connexion adaptée Γ déduite de la connexion riemannienne :

$$\nabla_i F_{aj} |_\Sigma = 0$$

Il vient par dérivation tangentielle :

$$\nabla_i \nabla_j F_{ak} |_\Sigma = 0$$

On en déduit comme au § 19,b que la métrique riemannienne \underline{g}_Σ induite par \underline{g} sur Σ est plate. Le raisonnement et les résultats du c sont valables pour la feuille Σ considérée. Il vient :

PROPOSITION 3. *Soit (M, F) une variété symplectique et \mathcal{F} un feuilletage lagrangien. Si le groupe d'holonomie G_Σ de la feuille Σ de \mathcal{F} est compact, il est isomorphe au groupe d'holonomie de la variété riemannienne plate $(\Sigma, \underline{g}_\Sigma)$ et par suite fini.*

Des raisonnements identiques conduisent à des résultats semblables (Dazord) concernant une feuille Σ d'un feuilletage isotrope de (M, F) , orthogonal symplectique d'un feuilletage isotrope (voir § 18,c).

V - ALGÈBRES CARACTÉRISTIQUES ET VARIÉTÉS DE POISSON

21. - Classes caractéristiques d'un feuilletage

Soit (M, \mathcal{F}) une variété différentiable munie d'un feuilletage de codimension q .

a) Adoptons sur M une métrique riemannienne \underline{g} et soit Γ la connexion adaptée déduite de la connexion riemannienne (§ 11). Elle définit une connexion sur le fibré vectoriel normal $N.\mathcal{F} \rightarrow M$, dont nous notons Ω la 2-forme de courbure.

Les classes caractéristiques à valeurs réelles du fibré vectoriel transverse $\nu.\mathcal{F} \rightarrow M$, identifié au fibré vectoriel normal, sont représentées, en cohomologie de G. de Rham, par des produits de $2r$ -formes fermées qui peuvent s'écrire :

$$(21-1) \quad C_{(r)} = \text{tr}.\langle \Omega^r \rangle$$

où Ω^r est donné, sur un domaine U muni de corepères orthonormés adaptés $\{\theta^a, \theta^i\}$, par :

$$(21-2) \quad \langle \Omega^r \rangle_{a_{r+1}}^{a_1} = \Omega_{a_2}^{a_1} \wedge \Omega_{a_3}^{a_2} \wedge \dots \wedge \Omega_{a_{r+1}}^{a_r} \quad (a_1, \dots, a_{r+1} = 1, \dots, q)$$

Si r est impair, $C_{(r)}$ est cohomologue à 0 :

$$(21-3) \quad C_{(r)} = dh_{(r)}$$

où les $(2r-1)$ -formes $h_{(r)}$ peuvent s'exprimer par des formules universelles [5], [13]. Il résulte de (9-13) que tout produit de formes $C_{(r)}$ de degré total supérieur à $2q$ est nul (Bott). Par restriction aux feuilles, on voit aussi (notations du § 8,a) que $\mathcal{F} C_r = 0$. Il en résulte que pour r impair :

$$(21-4) \quad \bar{d} \mathcal{F} h_{(r)} = 0$$

Ainsi, pour r impair, $\mathcal{F} h_{(r)}$ définit un élément de $H^r(\mathcal{F}; \mathbb{R})$.

b) Étudions la 1-forme $h_{(1)}$. On a localement, avec les notations du § 11 :

$$C_{(1)} \Big|_{L_1} = \Omega_a^a \quad h_{(1)} \Big|_{L_1} = \omega_a^a$$

et la 1-forme $h_{(1)}$ admet par composantes :

$$(21-5) \quad h_{(1)b} = \gamma_{ab}^a = \gamma_{ab}^* = 0 \quad h_{(1)i} = \gamma_{ai}^a = -\gamma_{ia}^*$$

On a ainsi d'après (11-11) :

$$h_{(1)i} = g_{ij} Q^j$$

On voit que la 1-forme $h_{(1)}$ est tangentielle et duale, pour la métrique, du vecteur de courbure moyenne du champ \underline{Q} orthogonal au feuilletage [13].

Supposons le feuilletage transversalement orientable ; le fibré vectoriel $N\mathcal{F} \rightarrow M$ est orientable et son groupe structural peut être réduit à $SO(q)$. Il existe donc sur M une q -forme $\omega \neq 0$ définissant le feuilletage qui peut s'écrire :

$$\omega \Big|_{L_1} = \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^q$$

Par différentiation extérieure, il vient, compte-tenu de (11-5) :

$$d\omega + h_{(1)} \wedge \omega = 0$$

Il en résulte (voir § 8,a) que, pour la construction d'une forme de Godbillon-Vey, on peut prendre $\eta = h_{(1)}$. Ainsi :

$$h_{(1)} \wedge (dh_{(1)})^q = h_{(1)} \wedge (C_{(1)})^q$$

est une forme de Godbillon-Vey de \mathcal{F} .

Introduisons la notation suivante : soit $\omega_S = (\omega_S^a_b)$ la 1-forme locale donnée par :

$$(21-6) \quad \omega_S^a_b = \frac{1}{2} (\omega_b^a + \omega_a^b)$$

Elle admet pour composantes sur U :

$$(\omega_S^a_b)_i = Q_{ab}^i$$

et traduit donc, d'une façon, la seconde forme fondamentale Q . D'après [13], on a avec des notations analogues à celles permettant d'exprimer les $C_{(r)}$:

$$(21-7) \quad \mathcal{F} h_{(r)} = (-2)^{r-1} \frac{r!}{1.3 \dots (2r-1)} \text{tr}(\omega_S)^{2r-1} \quad (r \text{ impair})$$

c) *L'algèbre caractéristique* du feuilletage \mathcal{F} est, par définition, l'algèbre de cohomologie, pour la différentielle extérieure, du complexe défini à partir des produits :

$$h_{(s_1)} \wedge \dots \wedge h_{(s_a)} \wedge C_{(r_1)} \wedge \dots \wedge C_{(r_\beta)} \quad (s \text{ impairs ; } s_1 < \dots < s_\alpha ; r_1 \leq \dots \leq r_\beta)$$

et soumis aux relations d'annulation de Bott [4].

L'algèbre fondamentale tangentielle du feuilletage \mathcal{F} est, par définition, l'algèbre des classes de cohomologie de $H(\mathcal{F}; \mathbb{R})$ (voir § 8,9) engendrée, pour r impair, par les classes $[\mathcal{F}h_{(r)}] \in H^{2r-1}(\mathcal{F}; \mathbb{R})$.

22. - L'algèbre fondamentale tangentielle d'une variété de Poisson

a) Soit (W, Λ) une variété de Poisson régulière de codimension q et rang $2p$, et soit \mathcal{S} le feuilletage de W en feuilles symplectiques. Si ν est le morphisme défini par Λ , à chaque $(2r-1)$ -forme $h_{(r)}$ (r impair), associons le $(2r-1)$ -tenseur contravariant antisymétrique tangentiel :

$$(22-1) \quad H_{(r)} = \nu(h_{(r)}) \quad (r = 1, 3, \dots)$$

qui peut aussi s'écrire :

$$H_{(r)} = \nu(\mathcal{F}h_{(r)})$$

Il résulte de (2-7) et (21-4) que les $H_{(r)}$ définissent des $(2r-1)$ - Λ -cocycles tangentiels de (W, Λ) . L'algèbre fondamentale de Λ -cohomologie tangentielle de (W, Λ) est l'algèbre des classes de cohomologie de $H_T(W, \Lambda)$ (voir § 17,a) engendrée par les classes $[H_{(r)}] \in H_T^{2r-1}(W, \Lambda)$ pour r impair. Elle est isomorphe à l'algèbre fondamentale tangentielle du feuilletage de (W, Λ) .

b) Adoptons sur W une métrique \underline{g} et soit Q la seconde forme fondamentale du champ \underline{Q} orthogonal au feuilletage \mathcal{S} . Nous utilisons pour (W, \mathcal{S}) les notations du § 21.

Sur un domaine U muni de corepères orthonormés adaptés $\{\theta^a, \theta^i\}$ désignons par S la matière symétrique d'éléments :

$$S_b^a = \nu(\omega_S^a_b)$$

soit :

$$(22-2) \quad (S_b^a)^j = \Lambda^{ij} (\omega_S^a_b)_i = \sum_i \Lambda^{ij} Q_{ab}^i$$

Il résulte de (21-7) que l'on a :

$$(22-3) \quad H_{(r)} = (-2)^{r-1} \frac{r!}{1.3 \dots (2r-1)} \text{tr.}(S^{2r-1})$$

où l'on a posé :

$$(S^h)_{a_{h+1}}^{a_1} = S_{a_2}^{a_1} \wedge S_{a_3}^{a_2} \wedge \dots \wedge S_{a_{h+1}}^{a_h}$$

Ainsi $H_{(r)}$ ne dépend que de Q . Si le champ \underline{Q} est totalement géodésique, les $h_{(r)}$ [13] et $H_{(r)}$ sont nuls.

c) Soit (M, \mathcal{F}) une variété munie d'un feuilletage de codimension q .

Adoptons sur M une métrique \underline{g} ; soit Γ^* sa connexion riemannienne, Γ la connexion adaptée déduite de Γ^* . Introduisons sur chaque domaine U d'un atlas de M , un champ de corepères orthonormés adaptés $\{\theta^A\} = \{\theta^a, \theta^i\}$ ($a, b, \dots = 1, \dots, q$; $i, j, \dots = 1, \dots$) \underline{g} peut s'écrire :

$$\underline{g} : \quad \sum_a (\theta^a)^2 + \sum_i (\theta^i)^2$$

Soit $\pi : W = T^*\mathcal{F} \rightarrow M$ le fibre vectoriel qui donne la variété de Poisson associée (W, Λ) . Sur W , au dessus de U , introduisons les 1-formes, bien définies d'après (11-1) :

$$\theta^{\bar{i}} = \nabla^* \xi_i = d\xi_i - \omega_i^* \xi_j$$

Il résulte aussi de (11-1) qu'on peut introduire sur $W = T^*\mathcal{F}$ une métrique riemannienne $\underline{\tilde{g}}$ telle qu'au dessus de U , elle puisse s'écrire :

$$\underline{\tilde{g}} : \quad \sum_a (\theta^a)^2 + \sum_i (\theta^i)^2 + \sum_{\bar{i}} (\theta^{\bar{i}})^2$$

Ainsi les $\{\theta^K\} = \{\theta^a, \theta^i, \theta^{\bar{i}}\}$ ($K, L, \dots = a, i, \bar{i}$ ou A, \bar{i}) sont pour $(W, \underline{\tilde{g}})$ des corepères orthonormés adaptés à $\mathcal{G} = \pi^*\mathcal{F}$.

Soit $\tilde{\Gamma}^*$ la connexion riemannienne de $(W, \underline{\tilde{g}})$. Nous munissons d'un \sim les éléments relatifs à la variété de Poisson. Si (ω_B^A) (resp. $(\tilde{\omega}_L^K)$) sont les 1-formes de connexion de Γ^* et $\tilde{\Gamma}^*$, on a au dessus de U .

$$(22-4) \quad d\theta^A = \theta^B \wedge \omega_B^A \quad d\theta^A = \theta^B \wedge \tilde{\omega}_B^A + \theta^i \wedge \tilde{\omega}_i^A$$

où $d\theta^A$ peut s'exprimer par :

$$(22-5) \quad d\theta^A = \frac{1}{2} b_{BC}^A \theta^B \wedge \theta^C \quad (b_{BC}^A = -b_{CB}^A)$$

On en déduit pour les coefficients correspondants de $\tilde{\Gamma}^*$:

$$\tilde{\gamma}_{BC}^A - \tilde{\gamma}_{CB}^A = b_{BC}^A \quad \tilde{\gamma}_{BC}^A + \tilde{\gamma}_{AC}^B = 0$$

relations vérifiées aussi par les coefficients γ_{BC}^A de Γ^* . On a donc :

$$(22-6) \quad \tilde{\gamma}_{BC}^A = \gamma_{BC}^A$$

D'autre part, d'après (22-4) et (22-5), on a :

$$(22-7) \quad \tilde{\gamma}_{Bi}^* - \tilde{\gamma}_{iB}^* = 0$$

Il résulte de (22-6), (22-4) que la connexion $\tilde{\Gamma}$ adaptée à $\pi^* \mathcal{F}$ déduite de $\tilde{\Gamma}^*$ admet en particulier pour coefficients :

$$\tilde{\gamma}_{bc}^a = \gamma_{bc}^a \quad \tilde{\gamma}_{bi}^a = \gamma_{bi}^a \quad \tilde{\gamma}_{bi}^a = 0$$

Ainsi pour les 1-formes de connexions de Γ et $\tilde{\Gamma}$, on a :

$$(22-8) \quad \tilde{\omega}_b^a = \pi^* \omega_b^a$$

et pour les 2-formes de courbures correspondantes $\tilde{\Omega}_b^a = \pi^* \Omega_b^a$. Il résulte que, pour les formes caractéristiques de $(W, \pi^* \mathcal{F})$, on a :

$$\tilde{C}_{(r)} = \pi^* C_{(r)}$$

et pour r impair :

$$\tilde{h}_{(r)} = \pi^* h_{(r)}$$

PROPOSITION. *Etant donnée une variété (M, \mathcal{F}) munie d'un feuilletage, soit $\pi : W = T^* \mathcal{F} \rightarrow M$ le fibré définissant la variété de Poisson associée. L'algèbre caractéristique de $(W, \pi^* \mathcal{F})$ est l'image réciproque par π de l'algèbre caractéristique de (M, \mathcal{F}) .*

A partir des $h_{(r)}$, on construit les $(2r-1)$ -tenseurs *verticaux* (au sens du § 8,d) donnés pour r impair par :

$$(22-9) \quad \tilde{H}_{(r)} = \nu(\tilde{h}_{(r)}) = \nu(\pi^* h_{(r)})$$

On sait que $\nu\pi^*$ induit un isomorphisme de $H^{2r-1}(\mathcal{F}; \mathbb{R})$ sur $H^{2r-1}(W, \Lambda)$. Il résulte de (22-9) que l'algèbre fondamentale de (M, \mathcal{F}) est isomorphe à l'algèbre fondamentale tangentielle *verticale* de Λ cohomologie de la variété de Poisson associée (W, Λ) .

23. - Formes caractéristiques et cohomologie de l'algèbre des vecteurs tangents, à valeurs dans les r -formes normales

Soit (M, \mathcal{F}) une variété munie d'un feuilletage et soit L l'algèbre de Lie des champs de

vecteurs tangents à \mathcal{F} .

a) Soit Γ une connexion adaptée à \mathcal{F} . Sur le domaine U d'une carte $\{x^A\} = \{x^a, x^i\}$ adaptée, Γ admet la 1-forme de connexion (ω_B^A) et la 2-forme de courbure (Ω_B^A) . Pour un élément X de L , considérons la dérivée de Lie $\mathcal{L}(X)\Gamma$. On a sur U :

$$(23-1) \quad (\mathcal{L}(X)\Gamma)_{iA}^a = 0$$

et

$$(23-2) \quad (\mathcal{L}(X)\Gamma)_{bi}^a = X^i \partial_i \Gamma_{bc}^a$$

Or, pour le tenseur de courbure de Γ , on a :

$$R_{b,ic}^a = \partial_i \Gamma_{bc}^a$$

Il résulte de (23-1), (23-2) que pour la connexion de 1-forme $\omega = (\omega_b^a)$ induite par Γ sur le fibré $\nu\mathcal{F} \rightarrow M$, dont la courbure est (Ω_b^a) , on a :

$$(23-3) \quad (\mathcal{L}(X)\omega)_b^a = i(X) \Omega_b^a$$

b) L'algèbre de Lie L opère par dérivation de Lie sur l'espace E_r des r -formes normales de (M, \mathcal{F}) , sections de $\Lambda^r(\nu^*\mathcal{F})$. Introduisons la cohomologie de Chevalley de cette représentation de L ; si C est une h -cochaîne, son cobord est la $(h+1)$ -cochaîne ∂C donnée par :

$$(23-4) \quad \partial C(X_0, \dots, X_h) = \epsilon_{0 \dots h}^{\alpha_0 \dots \alpha_h} \left(\frac{1}{h!} \mathcal{L}(X_{\alpha_0}) C(X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_h}) - \frac{1}{2(h-1)!} C([X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}], X_{\alpha_2}, \dots, X_{\alpha_h}) \right)$$

où $X_{\alpha} \in L$ et où ϵ est l'indicateur d'antisymétrisation.

Considérons la r -cochaîne (avec $r \leq q$) qui s'exprime localement par :

$$(23-5) \quad C_r(X_1, \dots, X_r) \Big|_{L_1} = \epsilon_{1 \dots r}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} (\mathcal{L}(X_{\alpha_1})\omega)_{a_2}^{a_1} \wedge \dots \wedge (\mathcal{L}(X_{\alpha_r})\omega)_{a_1}^{a_r}$$

D'après (23-3) et la propriété de Bott, sa valeur est bien une r -forme normale :

$$C_r(X_1, \dots, X_r) \Big|_{L_1} = \epsilon_{1 \dots r}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} (i(X_{\alpha_1})\Omega)_{a_2}^{a_1} \wedge \dots \wedge (i(X_{\alpha_r})\Omega)_{a_1}^{a_r}$$

Il résulte des propriétés de la dérivation de Lie que C_r est un r -cocycle dans la cohomologie envisagée. Un calcul direct donne :

$$(23-6) \quad C_r(X_1, \dots, X_r) = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} i(X_r) \dots i(X_1) C_{(r)}$$

où $C_{(r)}$ est la 2r-forme caractéristique définie par (21-2).

Il est immédiat de vérifier qu'un changement de la connexion adaptée ne modifie C_r que d'un cobord : cela résulte de (23-5) et des propriétés de la dérivation de Lie. Ainsi la classe de cohomologie de C_r , élément de $H^r(L; E_r)$, est indépendante du choix de la connexion adoptée.

c) Soit C une h-cochaîne d'ordre différentiel 0 de L à valeurs dans les r -formes normales ; C est donnée par une section notée γ de $\Lambda^r(\nu^* \mathcal{F}) \otimes \Lambda^h(T^* \mathcal{F}) \rightarrow M$. Un calcul direct montre qu'au cobord ∂C , qui est d'ordre 0, correspond la section de $\Lambda^r(\nu^* \mathcal{F}) \otimes \Lambda^{h+1}(T^* \mathcal{F}) \rightarrow M$ définie par $\bar{d}\gamma$, où \bar{d} est la différentielle extérieure tangente. Nous pouvons introduire la cohomologie de Chevalley d'ordre 0 à valeurs dans E_r , dont nous notons $H_{(0)}^h(L; E_r)$ le h^e espace de cohomologie.

En particulier, la partie de type normal-tangentiel (r, r) de la forme caractéristique $C_{(r)}$ donne une section \bar{d} -fermée bien définie de $\Lambda^r(\nu^* \mathcal{F}) \otimes \Lambda^r(T^* \mathcal{F})$ et l'on voit que C_r définit une classe de cohomologie $[C_r]_0$, élément de $H_{(0)}^r(L, E_r)$ ne dépendant encore que du feuilletage. Il résulte de ces remarques que les classes de cohomologie que nous venons de mettre en évidence sont fondamentales distinctes des classes caractéristiques du feuilletage. A une classe caractéristique $C_{(r)}$ nulle peut correspondre une classe de cohomologie $[C_r]$ ou $[C_r]_0$ non nulle et inversement.

Nous appelons algèbre fondamentale de L , à valeurs dans les formes normales, l'algèbre correspondant à la cohomologie d'ordre 0 et représentée par les produits extérieurs, en un sens évident, de cocycles C_r . Examinons la naturalité de cette algèbre par rapport aux submersions.

Si $\rho : M' \rightarrow M$ est une submersion sur M d'une variété M' , au feuilletage \mathcal{F} de M correspond sur M' le feuilletage $\mathcal{F}' = \rho^* \mathcal{F}$ de même codimension (§ 1, d). Nous affectons d'un ' les éléments relatifs à (M', \mathcal{F}') . Si γ est une section de $\Lambda^r(\nu^* \mathcal{F}) \otimes \Lambda^h(T^* \mathcal{F}) \rightarrow M$, $\rho^* \gamma$ est une section de $\Lambda^r(\nu^* \mathcal{F}') \otimes \Lambda^h(T^* \mathcal{F}') \rightarrow M'$. Par suite, si C est une h-cochaîne d'ordre 0 de L à valeurs dans les r -formes normales de M , elle définit une h-cochaîne d'ordre 0 de L à valeurs dans les r -formes normales de M , elle définit une h-cochaîne, notée $\rho^* C$, d'ordre 0 de L' à valeurs dans les r -formes normales de M' et l'on a :

$$(23-7) \quad \partial'(\rho^* C) = \rho^* \partial C$$

Si \underline{g} est une métrique riemannienne sur M , nous supposons les formes caractéristiques $C_{(r)}$ définies

à partir de la connexion adaptée Γ déduite de la connexion riemannienne de (M, \underline{g}) .

Supposons le domaine U de M muni de corepères orthonormés adaptés $\{\theta^A\} = \{\theta^a, \theta^i\}$ relativement à \underline{g} et \mathcal{F} . Soit \underline{h} une métrique riemannienne arbitraire de M' . Sur un domaine U' de M' tel que $\rho(U') = U$, introduisons des corepères adaptés $\{\rho^* \theta^A, \theta^\lambda\}$ ($\lambda = 1, \dots, m' - m$) tels que les θ^λ soient orthogonaux selon \underline{h} aux $\rho^* \theta^A$ (notés θ^A par abus de notation). On a sur U' :

$$\underline{h}|_{U'} = h_{AB} \theta^A \otimes \theta^B + h_{\lambda\mu} \theta^\lambda \otimes \theta^\mu$$

A la métrique \underline{h} , on peut substituer la métrique \underline{g}' de M' telle que $\underline{g}' - \rho^* \underline{g}$ s'écrive $h_{\lambda\mu} \theta^\lambda \otimes \theta^\mu$ sur tout U' . Il existe ainsi sur M' une métrique riemannienne \underline{g}' telle que, pour la connexion adaptée Γ' déduite de la connexion riemannienne de (M', \underline{g}') , on ait sur tout U' :

$$\omega_b'^a = \rho^* \omega_b^a$$

Il en résulte que les formes caractéristiques $C'_{(r)}$ de (M', \mathcal{F}') correspondant à Γ' sont égales à $\rho^* C_{(r)}$. On a ainsi pour les cocycles correspondants

$$(23-8) \quad C'_r = \rho^* C_r$$

De (23-7) et (23-8) résulte *la naturalité* de l'algèbre fondamentale de L . Nous énonçons :

THEOREME. Soit (M, \mathcal{F}) une variété différentiable munie d'un feuilletage \mathcal{F} de codimension q . A toute forme caractéristique $C_{(r)}$ ($r \leq q$) provenant d'une connexion adaptée, correspondant par (23-6) un r -cocycle C_r , d'ordre différentiel nul, de l'algèbre de Lie L des vecteurs tangents à \mathcal{F} opérant par dérivation de Lie sur les r -formes normales. La classe de cohomologie $[C_r]_0$, élément de $H^r_{(0)}(L; E_r)$ ne dépend que du feuilletage et est naturelle par rapport aux images réciproques du feuilletage par submersions.

REFERENCES

- [1] F. BAYEN, M. FLATO, C. FRONSDAL, A. LICHNEROWICZ, D. STERNHEIMER. Ann. of Physics, t. 111, 1978, p. 61-110.
- [2] N. BERNSTEIN et B.I. ROSENFELD. «Functional Analysis 6». 1972, p. 68-69.
- [3] R. BOTT. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Mat. Soc. t. 16, 1970, p. 127-131.
- [4] R. BOTT et A. HAEFLIGER. Bull. Amer. Math. Soc. 78, 1972, p. 1039-1044.
- [5] S. GUELOGUET et G. JOUBERT. C.R. Acad. Sci. Paris A t. 277, 1973, p. 11-14.
- [6] D.L. JOHNSON et L.B. WHITT. J. of Diff. Geom. t. 15, 1980, p. 225-236.
- [7] A. LICHNEROWICZ. J. of Diff. Geom. t. 12, 1977, p. 253-300.
- [8] A. LICHNEROWICZ. C.R. Acad. Sci. Paris A t 285, 1977, p. 455-461, J. de Mat. pures et appl. 57, 1978, p. 453-488.
- [9] A. LICHNEROWICZ. C.R. Acad. Sci. Paris A t 286, 1978, p. 1141-1145, Ann. Fac. Sci. Toulouse 1, 1979, p. 45-76.
- [10] A. LICHNEROWICZ. Ann. Inst. Fourier 32, 1981, p. 157-209.
- [11] B. REINHART. Coll. Geom. Diff. Santiago de Compostela 1972, p. 47-52 ; Springer Lecture Notes 1974 ; Ann. of Math. t 69, 1959, p. 119-132.
- [12] B. REINHART et J. WOOD. Proc. Amer. Math. Soc. 38, 1973, p. 427-430.
- [13] B. REINARD. «*The second fundamental form of a plane field*». Preprint 1977.
- [14] J.A. SCHOUTEN. «*On the differential operators of first order in tensor calculus*». Conv. Int. Geom. Diff. Italia 1953 Ed. Cremonese Roma 1954, p. 1-7.
A. NIJENHUIS. Indag. Math. 17, 1955, p. 390-403.
- [15] A. KIRILLOV. Fund. Anal. Appl. t 9, 1975, p.
- [16] T. NAGANO. J. of Diff. Geom. 2, 1968, p. 253-264.
- [17] A. LICHNEROWICZ. J. Math. pures et appl. 56, 1977, p. 183-204 ; Ve congrès de la Réunion des Mathématiciens d'expression latine, Palma 1977, p. 194-206.
- [18] R. HERMANN. Proc. Amer. Math. Soc. 11, 1960, p. 236-242 ; Ann. of Math. 72, 1960, p. 445-457.
- [19] J. VEY. Comm. Math. Helv. t 50, 1975, p. 421-454.

- [20] O.M. NEROSLAVSKY et A.T. VLASSOV. C.R. Acad. Sci. Paris I t 292, 1981, p. 71.
- [21] M. GERSTENHABER. Ann. of Math. t 79, 1964, p. 59-90.

(Manuscrit reçu le 26 novembre 1982)