ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

GUY ROBIN

Sur la différence $Li(\theta(x)) - \pi(x)$

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 6, nº 3-4 (1984), p. 257-268
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1984_5_6_3-4_257_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol VI, 1984, P 257 à 268

SUR LA DIFFERENCE $Li(\theta(x)) - \pi(x)$

Guy Robin (1)

(1) Laboratoire d'Algorithmique et Théorie des nombres. U.E.R. des Sciences de Limoges, Département de Mathématiques et Informatique, 123 rue Albert Thomas, 87060 Limoges Cédex. et G.R.E.C.O. n° 60.

Résumé : L'étude de la différence $Li(x) - \pi(x)$, $\pi(x)$ désignant le nombre de nombres premiers inférieur à x, est bien connue. On précise ici le comportement asymptotique de $Li(\theta(x)) - \pi(x)$, où $\theta(x) = \sum_{p \leqslant x} \log p$. On généralise le problème au cas des progressions arithmétiques. Les résultats obtenus utilisent l'hypothèse de Riemann généralisée et le calcul effectif des zéros des fonctions de Dirichlet.

Summary : The study of the difference $Li(x) - \pi(x)$, where $\pi(x)$ stands for the number of prime numbers less than x, is well known. We precise there the asymptotic behaviour of $Li(\theta(x)) - \pi(x)$, $\theta(x) = \sum_{p \leqslant x} \log p$. We extend the results to the case of arithmetics progressions. The results are obtained by using the generalized Riemann Hypothesis and the effectif calculus of the zeros of Dirichlet' functions.

1. - INTRODUCTION

Le théorème des nombres premiers affirme que $\pi(x)$, le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x, est asymptotiquement équivalent, lorsque x tend vers l'infini, à

$$\mathrm{Li}(x) = \mathrm{vp} \int_0^x \frac{dt}{\log t} = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_0^{1-\epsilon} \frac{dt}{\log t} + \int_{1+\epsilon}^x \frac{dt}{\log t} \right) \quad (x > 1)$$

Bien que la différence $\mathrm{Li}(x) - \pi(x)$ soit positive pour $x \leqslant 10^{11}$ ([SCH]) on sait d'après LITTLEWOOD ([ELL], p. 200) que :

$$\mathrm{Li}(x) - \pi(x) = \Omega_{\pm}(x^{1/2} \log\log\log x / \log x)$$

Rappelons ici que si g est une fonction réelle positive qui ne s'annule pas, alors $f = \Omega_+(g)$ signifie que $\lim\limits_{x \to \infty} \sup f(x) / g(x) > 0$ et que $f = \Omega_-(g)$ signifie que $-f = \Omega_+(g)$.

Dans un article précédent ([ROB]), nous avons étudié la fonction $\omega(n)$, nombre de facteurs premiers de n. Si $\theta(x) = \sum\limits_{p \leqslant x} \log p$ désigne la première fonction de Tchebychef, nous avons eu besoin de considérer en particulier la différence

$$A(x) = \mathrm{Li}(\theta(x)) - \pi(x).$$

Bien que $\theta(x)$ soit équivalent à x, le comportement de $A(x)$ n'est pas analogue à celui de $\mathrm{Li}(x) - \pi(x)$. Nous avons en effet :

THEOREME 1. *L'assertion,* $A(x) = \mathrm{Li}(\theta(x)) - \pi(x) > 0$ *pour* x *assez grand est équivalente à l'hypothèse de Riemann.*

Lorsque l'hypothèse de Riemann est vraie, il est facile de déduire de calculs faits par RAMANUJAN ([RAM], p. 119) que $A(x) > 0$, pour x assez grand.

Plus généralement, nous nous intéressons au même problème dans les progressions arithmétiques. Si $(k,l) = 1$ nous posons :

$$\pi(x\,;k,l) = \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv l(k)}} 1,$$

$$\theta(x\,;k,l) = \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv l(k)}} \log p,$$

$$\phi(k) = \sum_{\substack{n \leqslant k \\ (n,k) = 1}} 1 \quad \text{(fonction d'Euler)},$$

$$A(x;k,l) = Li(\phi(k)\theta(x;k,l)) - \phi(k)\pi(x;k,l),$$

$$A(x;1,1) = A(x)$$

THEOREME 2. *Soit* k *un entier positif fixé, et* l *un entier premier avec* k. *On suppose que les fonctions de Dirichlet* $L(s,\chi)$ *attachées aux caractères* χ *modulo* k *n'ont pas de zéros sur* $]0,1[$. *On pose :*

$$\theta_k = \max_{\chi \bmod k} (\sup \ \mathrm{Re}(\rho) \ ; \rho \text{ zéros de } L(s,\chi) \ ).$$

On a alors :

a) $A(x;k,l) = 0(x^{\theta_k}/\log^2 x)$

b) Si $\theta_k > 1/2$ *alors*

$$A(x;k,l) = \Omega_{\pm}(x^{\xi}) \quad \text{pour tout } \xi < \theta_k \ ;$$

si de plus, il existe un zéro de partie réelle θ_k

$$A(x;k,l) = \Omega_{\pm}(x^{\theta_k}/\log^2 x).$$

c) Si $\Theta_k = 1/2$

1. Si l *n'est pas résidu quadratique mod* k :

$$A(x;k,l) = \Omega_{\pm}(x^{1/2}/\log^2 x)$$

2. Si l *est résidu quadratique :*

2.1 Pour certains k *(ex. : 1, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12)*

$$A(x;k,l) > 0 \quad \text{pour } x \geqslant x_o(k)$$

2.2 Pour d'autres k *(ex. : 17, 19, 23)*

$$A(x;k,l) = \Omega_{\pm}(x^{1/2}/\log^2 x)$$

Pour la démonstration de ces théorèmes nous utiliserons les formules explicites de la théorie des nombres ([DAV], § 12 et 19), ([ELL], ch. 5 et 6), ([EDW], ch. 3), le théorème de Landau revu par Grosswald ([GRO]), des calculs de transformée de Mellin ([ELL], ch. 6), et les tables sur les zéros des fonctions de Dirichlet ([HAS], [SPI]).

2. - DEMONSTRATION DE LA PARTIE a

Soit $\epsilon = \epsilon(k,l)$ le nombre de solutions, $0 \leqslant x < k-1$, de la congruence $x^2 \equiv l(k)$. On a $\epsilon = \epsilon(k)\delta(l)$ avec $\delta(l) = 1$ ou 0 selon que l est résidu quadratique ou non et $\epsilon(k) = \epsilon(k,1)$.

D'après ([HAR], p. 98), si $k = 2^{\alpha}k'$, $(k',2) = 1$ alors : $\epsilon(k) = 2^{\omega(k)-1}$, $2^{\omega(k)}$, $2^{\omega(k)+1}$ selon que $\alpha = 1,0$ ou $2, \geqslant 3$. On posera $\epsilon(1) = 1$.

Posons

$$\Pi(x\,;k,l) = \sum_{\substack{p^m \leqslant x \\ p^m \equiv l(k)}} \frac{1}{m}$$

$$\Psi(x\,;k,l) = \sum_{\substack{p^m \leqslant x \\ p^m \equiv l(k)}} \log p$$

$$\Pi(x\,;\chi) = \sum_{n \leqslant x} \frac{\chi(n)\,\Lambda(n)}{\log n}$$

où $\Lambda(n)$ est la fonction de Von Mangoldt

$$\psi(x\,;\chi) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)\,\chi(n)$$

$$R(x) = \min(x^{\Theta_k} \log^2 x,\ x\,e^{-a\sqrt{\log x}})\quad a > 0$$

(1) $$B(x;k,l) = Li(\phi(k)\psi(x;k,l)) - \phi(k)\Pi(x;k,l)$$

Nous pouvons écrire d'après le théorème des nombres premiers dans les progressions arithmétiques :

$$Li(\phi(k)\ \psi(x;k,l)) = Li(x) + \frac{\phi(k)\ \psi(x;k,l) - x}{\log x} + 0\left(\frac{R^2(x)}{x \log x}\right)$$

$$= Li(x) + \left(\sum_{\chi} \psi(x,\chi)\bar{\chi}(l) - x\right) / \log x + 0\left(\frac{R^2(x)}{x \log x}\right)$$

et d'après la formule explicite de $\psi(x,\chi)$:

(2) $$Li(\phi(k)\ \psi(x;k,l)) = Li(x) - \frac{1}{\log x} \sum_{\chi} \left(\sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho}\right) \bar{\chi}(l) + 0\left(\frac{R^2(x)}{x \log x}\right)$$

Les sommes portent sur tous les caractères χ modulo k et pour chaque caractère χ sur tous les zéros de la fonction $L(s,\chi)$ associée. D'autre part, d'après la formule explicite de $\Pi(x,\chi)$:

$$\begin{aligned}(3) \qquad \phi(k)\,\Pi(x;k,l) &= \sum_{\chi} \Pi(x,\chi)\,\bar{\chi}(l) \\ &= \mathrm{Li}(x) - \sum_{\chi}\sum_{\rho} \mathrm{Li}(x^{\rho})\,\bar{\chi}(l) + 0(\log x)\end{aligned}$$

Les relations (2) et (3) donnent :

$$B(x\,;k,l) = \sum_{\chi}\left(\sum_{\rho} (\mathrm{Li}(x^{\rho}) - \frac{x^{\rho}}{\rho \log x}\right)\bar{\chi}(l)) + 0\left(\frac{R^2(x)}{x\log x}\right).$$

On peut écrire $\mathrm{Li}(x^{\rho}) = \dfrac{x^{\rho}}{\rho \log x} + \dfrac{x^{\rho}}{(\rho \log x)^2} + 0\left(\dfrac{x^{\Theta}}{|\rho|^3 \log^3 x}\right)$ le terme reste étant uniforme en ρ. Comme les séries $\sum_{\rho} \dfrac{1}{\rho^2}$ et $\sum_{\rho} \dfrac{1}{\rho^3}$ sont absolument convergentes il vient :

$$(4) \qquad B(x\,;k,l) = \sum_{\chi}\left(\sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho^2 \log^2 x}\,\bar{\chi}(l)\right) + 0(x^{\Theta}/\log^3 x)$$

$$(5) \qquad B(x\,;k,l) = 0(x^{\Theta}/\log^2 x)$$

On peut aussi écrire :

$$\psi(x\,;k,l) = \theta(x\,;k,l) + \sum_{\substack{p^2 \equiv l(k) \\ p \leqslant \sqrt{x}}} \log p + 0(x^{1/3})$$

Soit :

$$(6) \qquad \psi(x\,;k,l) - \theta(x\,;k,l) = \sum_{l_1^2 \equiv l(k)} \theta(x^{1/2}\,;k,l_1) + 0(x^{1/3})$$

d'où

$$\mathrm{Li}(\phi(k)\,\psi(x;k,l)) = \mathrm{Li}(\phi(k)\,\theta(x;k,l)) + \frac{\phi(k) \sum_{l_1^2 \equiv l(k)} \theta(x^{1/2};k,l_1) + 0(x^{1/3})}{\log(\phi(k)\,\theta(x;k,l)} + 0\left(\frac{1}{\log^2 x}\right)$$

soit

$$\mathrm{Li}(\phi(k)\,\psi(x;k,l)) = \mathrm{Li}(\phi(k)\,\theta(x;k,l)) + \frac{\phi(x)}{\log x} \sum_{l_1^2 \equiv l(k)} \theta(x^{1/2};k,l_1)$$

$$+\, 0(\mathrm{Max}(x^{1/3}/\log x,\ \epsilon\, x^{-1/2}\, R(x))$$

D'autre part :

$$\Pi(x\,;k,l)=\pi(x\,;k,l)+\frac{1}{2}\sum_{l_1^2\equiv l}\pi(x^{1/2}\,;k,l_1)+0(x^{1/3}/\log x) \tag{7}$$

Comme pour tout m :

$$1/2\,\pi(x^{1/2}\,;k,m)-\frac{\theta(x^{1/2};k,m)}{\log x}=\frac{1}{2}\int_2^{x^{1/2}}\frac{\theta(t;k,m)}{t\log^2 t}\,dt$$

$$=\frac{2\sqrt{x}}{\phi(k)\log^2 x}+0(\sqrt{x}/\log^3 x)$$

On peut écrire :

$$A(x\,;k,l)=B(x\,;k,l)+\frac{2\epsilon\sqrt{x}}{\log^2 x}+0(\sqrt{x}/\log^3 x) \tag{8}$$

Par suite, d'après (5) : $A(x\,;k,l)=0(x^{\Theta_k}/\log^2 x)$ ce qui démontre a).

3. - DEMONSTRATION DE LA PARTIE c) 2.1

Puisque $\Theta_k=1/2$, alors en écrivant $\rho=1/2+\gamma$, on a d'après (4) et (8)

$$A(x\,;k,l)=\frac{\sqrt{x}}{\log^2 x}\left(2\epsilon+\sum_{\chi}\left(\sum_{\rho}\frac{x^{i\gamma}}{\rho^2}\right)\overline{\chi}(l)\right)+0(x^{1/2}/\log^3 x).$$

Si $k=1$, $\sum_{\rho}|1/\rho^2|=0{,}046\ldots<2$ donc $A(x)>0$ pour x assez grand.

Si $k>1$ et si l est résidu quadratique, on aura $A(x;k,l)>0$ pour tous les k tels que $\sum_{\chi}\sum_{\rho}\frac{1}{|\rho|^2}<2\epsilon$; comme $\sum_{\rho}\frac{1}{|\rho|^2}=2\,\mathrm{Re}\sum_{\rho}\frac{1}{\rho}$, en posant $S=\sum_{\chi}\mathrm{Re}\left(\sum_{\rho}\frac{1}{\rho}\right)$ il suffira de montrer que $S<\epsilon$.

Cette somme peut se calculer d'après le lemme suivant :

LEMME. *Si χ est un caractère primitif modulo* k *on a :*

$$\sum_{\rho}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\rho}\right)=\frac{1}{2}\log\frac{k}{\pi}-\frac{\gamma}{2}+(a-1)\log 2+\mathrm{Re}\left(\frac{L'}{L}(1,\chi)\right), \tag{9}$$

formule dans laquelle la somme porte sur tous les zéros de $L(x,\chi)$ *et où* $a = 0$ *ou* 1 *selon que* $\chi(-1) = 1$ *ou* -1.

Démonstration. Considérons les formules (17) et (18) de ([DAV], p. 83).

$$\frac{L'}{L}(s,\chi) = -\frac{1}{2}\log\frac{k}{\pi} - \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}a\right) + B(\chi) + \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) \tag{10}$$

$$\mathrm{Re}(B(\chi)) = -\sum_{\rho} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\rho}\right). \tag{11}$$

Prenons la partie réelle de (10) en $s = 1$. Si ρ est zéro de $L(s,\chi)$, $1-\bar\rho$ est aussi un zéro, par suite :

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{\rho} \frac{1}{1-\rho}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{\rho} \frac{1}{\bar\rho}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{\rho} \frac{1}{\rho}\right).$$

On obtient ainsi la formule (9) en remarquant que :

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\log 2 \quad \text{et} \quad \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1) = -\gamma.$$

Remarquons que dans le cas où $\chi(-1) \neq 1$ alors $L(0,\chi) \neq 0$ et on peut écrire la formule suivante :

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{\rho} \frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{2}\log\frac{k}{\pi} + \frac{1}{2}\gamma + \log 2 - \mathrm{Re}\left(\frac{L'}{L}(0,\chi)\right). \tag{12}$$

Pour terminer la démonstration de la partie c.2.1, il reste à calculer $L(1,\chi)$ et $L'(1,\chi)$ pour les caractères χ correspondant aux valeurs k de l'énoncé ; pour ces valeurs, $\epsilon = 2$, sauf pour $k = 8$, 12 où $\epsilon = 4$.

Tableau des valeurs de S :

k	3 et 6	4	5 et 10	7	8	9	12
S	0,081	0,102	0,313	0,696	0,37	0,703	0,324

4. - LEMMES PRELIMINAIRES

LEMME 1. *Soit*

$$D(x;k,l) = Li(x) - \phi(k)\Pi(x;k,l) + \frac{\phi(k)\psi(x;k,l) - x}{\log x} \tag{13}$$

alors :

$$D(x;k,l) = \Omega_{\pm}(x^{\xi})$$

et si Θ *est atteint :*

$$D(x;k,l) = \Omega_{\pm}(x^{\Theta_k}/\log^2 x).$$

Nous allons calculer la transformée de Mellin de $D(x;k,l) \log x$ et utiliser le théorème de Landau.

Pour $Re(s) > 1$, on a :

$$\int_2^{\infty} \frac{\Pi(x,\chi)}{x^{s+1}}\, dx = \frac{1}{s} \log L(s,\chi) \tag{14}$$

$$\int_2^{\infty} \frac{\psi(x,\chi)}{x^{s+1}}\, dx = -\frac{1}{s}\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} \tag{15}$$

$$\int_2^{\infty} \frac{Li(x)}{x^{s+1}}\, dx = \frac{1}{s}\left(-\log(s-1) + g(s)\right) \tag{16}$$

où $g(s)$ est entière. (Voir par exemple [ELL], ch. 6).

Dans la suite $h(s)$ désigne une fonction holomorphe pour $Re(s) > 0$, non nécessairement toujours la même. Si

$$J(s) = \int_2^{\infty} D(x;k,l) \log x/x^{s+1}\, dx$$

alors

$$J(s) = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\log(s-1) + \frac{1}{s}\sum_{\chi} \log L(s,\chi)\,\overline{\chi}(l)) - \frac{1}{s}\sum_{\chi}\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\,\overline{\chi}(l)\right) - \frac{1}{s-1} + h(s)$$

$$J(s) = -\frac{1}{s^2}\left(\sum_{\chi} \log L(s,\chi)\,\overline{\chi}(l) + \log(s-1)\right) - \frac{1}{s} + h(s).$$

L'expression dans la parenthèse du second membre est holomorphe au voisinage de $s = 1$. Si

$$K(s) = \int_2^{\infty} x^{\xi} \log x / x^{s+1}\, dx = -\frac{1}{(s-\xi)^2} + h(s)$$

$J(s) - \alpha K(s)$ est holomorphe pour $\mathrm{Re}(s) > \Theta_k$, se prolonge au voisinage de l'axe réel jusqu'à $s = \xi$ et ne se prolonge pas en fonction holomorphe pour $\mathrm{Re}(s) > \xi$ donc, $\forall\ \alpha$, $D(x;k,l) \log x - \alpha x^{\xi} \log x$ change de signe sur en ensemble $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \to \infty$; c'est-à-dire que :

$$D(x;k,l) = \Omega_{\pm}(x^{\xi})$$

Soit $\rho = \Theta + i\gamma$ un zéro d'une fonction $L(s,\chi)$ et

$$K_1(s) = \int_2^{\infty} x^{\Theta}/(x^{s-1} \log x)\, dx = \log(s-\Theta_k) + h(s).$$

Compte tenu que, $J(s) - \alpha K_1(s)$ est holomorphe pour $\sigma = \mathrm{Re}(s) > \Theta_k$, que $|J(s) - \alpha K_1(s)| \sim |\alpha| \log(\sigma-\Theta_k)$ au voisinage de $s = \Theta_k$; que $|J(s) - \alpha K_1(s)| \sim \frac{1}{|\rho|^2} \log(\sigma-\Theta_k)$ au voisinage de $s = \rho$, on peut dire, d'après ([ELL], p. 192), que si α est choisi tel que $|\alpha| < \frac{1}{|\rho|^2}$, $D(x;k,l) \log x - \alpha x^{\Theta_k}/\log x$ change de signe sur une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \to \infty$; c'est dire que : $D(x;k,l) = \Omega_{\pm}(x^{\Theta_k}/\log^2 x)$.

LEMME 2. *On a*

$$B(x;k,l) = \Omega_{\pm}(x^{\xi})$$

et si Θ est atteint

$$B(x;k,l) = \Omega_{\pm}(x^{\Theta}/\log^2 x).$$

D'après (1) et (13) nous avons :

$$B(x;k,l) = D(x;k,l) + 0\left(\frac{S^2(x)}{x \log^2 x}\right) \tag{14}$$

avec $S(x) = x - \phi(k)\psi(x;k,l)$.

Si $\Theta_k < 1$, $B(x;k,l) = D(x;k,l) + 0(x^{2\Theta_k - 1} \log^2 x)$ et comme ξ peut être choisi tel que $\xi > 2\Theta_k - 1$, le lemme 2 est, sous cette hypothèse, conséquence du lemme 1.

Si $\theta_k = 1$, l'inégalité $B(x;k,l) < D(x;k,l)$ donne :

$$B(x;k,l) = \Omega_-(x^\xi).$$

La démonstration de $B(x;k,l) = \Omega_+(x^\xi)$ demande plus d'efforts. Soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite, croissante, des nombres qui sont puissance d'un nombre premier congru à l modulo k. Pour $\xi < 1$, fixé, la fonction $y : x \to D(x;k,l) - x^\xi$ est continue et dérivable sur tout intervalle $]r_n, r_{n+1}[$ et l'on a :

$$y'(x) = \frac{S(x)}{x \log^2 x} - \xi\, x^{\xi-1} \tag{15}$$

$$y'(r_n^+) = \frac{S(r_n)}{r_n \log^2 r_n} - \xi\, r_n^{\xi-1} = y'(r_n^-) - \frac{\phi(k)\Lambda(r_n)}{r_n \log^2 r_n}. \tag{16}$$

Pour $x \geqslant x_o$, la fonction $x \to x - \xi\, x^\xi \log^2 x$ est croissante, par suite $y'(x)$ est croissante sur chaque intervalle $]r_n, r_{n+1}[$ avec $r_n > x_o$; elle s'annule donc au plus une fois dans un tel intervalle.

Soit

$$A_1 = \{a\,;\, a > x_o\,;\, y'(a) = 0\}$$

$$A_2 = \{r_n\,;\, r_n > x_o\,;\, y'(r_n^+)y'(r_n^-) < 0\}$$

et

$$A = A_1 \cup A_2.$$

L'ensemble A est discret d'après ce qui précède ; montrons qu'il est infini. Dans l'hypothèse contraire on aurait pour tout $x \geqslant x_1$ $y'(x) > 0$ ou $y'(x) < 0$. D'après (15), il en résulterait pour tout $x \geqslant x_1$, dans le premier cas $S(x) > 0$, dans le deuxième cas $S(x) < \xi\, x^\xi \log^2 x$. Dans les deux cas on aurait une contradiction avec le résultat classique $S(x) = \Omega_\pm(x^{\xi'})$, avec $\xi < \xi' < 1$.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite croissante des éléments de A ; montrons que $S(x_n)$ est assez petit.

Si $x_n \in A_1$ alors $S(x_n) = \xi\, x_n^\xi \log^2 x_n$.

Si $x_n \in A_2$ utilisons l'égalité (16).

Si $S(x_n) > 0$, comme $y'(x_n^+) < 0$ il vient $S(x_n) < \xi\, x_n^\xi \log^2 x_n$ tandis que si $S(x_n) < 0$ on a $|S(x_n)| < \phi(k)\Lambda(x_n)$ puisque $y'(x_n^-) > 0$.

On a donc toujours, $|S(x_n)| = 0(x_n^\xi \log^2 x_n)$.

Soit n_o donné ; si pour tout $n \geqslant n_o$ on avait $y(x_n) \leqslant 0$ alors $\forall\, x > x_{n_o}$ on aurait

$y(x) \leqslant 0$ et donc $D(x;k,l) < x^{\xi}$ en contradiction avec le lemme 1. Par suite, il existe une infinité de x_n tels que $y(x_n) > 0$. Pour cette suite infinie, compte tenu que $y(x_n) > 0$ entraîne $D(x_n;k,l) > x_n^{\xi}$, on a,

$$B(x_n;k,l) = D(x_n;k,l) + 0\left(\frac{S^2(x_n)}{x_n \log^2 x_n}\right) > x_n^{\xi} + 0(x_n^{2\xi-1} \log^2 x_n)$$

ce qui montre que $B(x;k,l) = \Omega_+(x^{\xi})$.

5. FIN DE LA DEMONSTRATION DU THEOREME 2

Les résultats du § 4, compte tenu de l'égalité (8) démontrent les parties b et c.1 du théorème.

Sous les hypothèses de c.2.2, $\theta_k = 1/2$ et l est résidu quadratique modulo k où k est l'une des 3 valeurs 17, 19 ou 23. On utilise alors le résultat de Grosswald ([GRO], p. 417) qui nous donne la possibilité de choisir le paramètre α de la fin de l'étude du lemme 1 supérieur à 4, ce qui permet d'après (8) de prouver que

$$A(x;k,l) = \Omega_{\pm}(x^{1/2}/\log^2 x).$$

Avec les notations de Grosswald et de Spira on utilise

pour $k = 17$, le zéro de plus basse ordonnée : c'est celui de χ_1, d'ordonnée 0,391 et $N = 5$;

pour $k = 19$, le zéro de plus basse ordonnée : c'est celui de χ_5, d'ordonnée 0,0189 et $N = 2$;

pour $k = 23$, les 2 zéros de plus basses ordonnées : celui de χ_9, d'ordonnée 0,595 et celui de χ_{17} d'ordonnée 0,689 avec $N = 2$.

REFERENCES

[DAV] H. DAVENPORT. *«Multiplicative number theory»*. Springer Verlag (1967).

[EDW] H.M. EDWARDS. *«Riemann's Zeta function»*. Academic Press (1974).

[ELL] J. ELLISON. *«Les nombres premiers»*. Hermann Paris (1975). Actual. Scien. et Ind. n° 1366.

[GRO] E. GROSSWARD. *«Oscillation theorems»*. Conf. on the theory of arithmetic functions». Springer Lecture Notes 151 (1971).

[HAR] G.H. HARDY, E.M. WRIGHT. *«An introduction to the theory of numbers»*. Oxford (1960).

[HAS] C.B. HASELGROVE et D. DAVIES. *«The evaluation of Dirichlet L functions»*. Proc. Soc. Ser. (1961) A. 264, p. 122-132.

[RAM] S. RAMUNJUJAN. *«Highly composite numbers»*. Proc. London Math. Soc., Ser. 2, 14 (1915), p. 347-400 ; Collected papers, 78-128, Chelsea.

[ROB] G. ROBIN. *«Estimation de la fonction de Tchebychef θ sur le $k^{ième}$ nombre premier et grandes valeurs de la fonction $\omega(n)$, nombre de diviseurs premiers de n»*. Acta Arithmetica, vol. 42, n° 4, (1983), p. 367-389.

[SCH] L. SCHOENFELD. *«Sharper bounds fo the Chebyschev fonctions $\theta(x)$ and $\psi(x)$». II* Math. of Comp., Vol. 30, Numb. 134, (1976) p. 337-360.

[SPI] R. SPIRA. *«Calculation of Dirichlet L functions»*. Math. Comp.23 (1969), p. 489-498.

(Manuscrit reçu le 19 mars 1984)