Annales de la faculté des sciences de Toulouse

François de Thélin

Résultats d'existence et de non-existence pour la solution positive et bornée d'une e.d.p. elliptique non linéaire

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 8, nº 3 (1986-1987), p. 375-389

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1986-1987_5_8_3_375_0>

Annales Faculté des Sciences de Toulouse Vol.VIII, n°3, 1986-1987

Résultats d'existence et de non-existence pour la solution positive et bornée d'une e.d.p. elliptique non linéaire

FRANÇOIS DE THELIN [(1)]

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous obtenons quelques résultats d'existence et de non existence de la solution positive et bornée $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de l'equation :

$$\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\right) + g(x,u) = 0. \tag{E}$$

Pour prouver les résultats d'existence, nous utilisons soit le théorème de Passe-Montagne, soit le construction explicite de sur et sous-solutions. Les résultats de non existence sont des conséquences d'une identité de type POHOZAEV.

ABSTRACT. — In this paper we obtain some existence and nonexistence results for bounded positive solutions $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ of the equation:

$$\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\right) + g(x,u) = 0. \tag{E}$$

Proving the existence results, either we use the Pass-Mountain lemma or we explicitly construct subsolutions and supersolutions of (E). The nonexistence result follows from a POHOZAEV identity.

I. Introduction

Soient Ω un ouvert borné régulier de $\mathbf{R}^N$ et $1 < p < \infty$. Dans cet article, nous étudions l'existence ou la non-existence d'une solution u positive et bornée, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de :

$$\Delta_p u + g(x,u) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

où $F(\nabla u) = |\nabla u|^{p-2}\nabla u$, $\Delta_p u = \operatorname{div} F(\nabla u)$.

[(1)] Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paul Sabatier, 31062 Toulouse Cedex.

Le cas $p = 2$ a été étudié par de nombreux auteurs. Pour $p \neq 2$ et $g(x,u) = \lambda u^{\gamma-1}$, l'étude de l'existence de la solution a d'abord été entreprise par OTANI [10] en dimension 1, puis DE THÉLIN [17] en dimension N ; l'étude de la non-existence, basée sur une égalité de type POHOZAEV [13] a été faite indépendamment par DE THÉLIN [17] et NI-SERRIN [7,8] pour des solutions radiales dans $\mathbf{R}^N$, puis complétée par OTANI [12] pour un ouvert quelconque.

Le but de ce papier est de présenter un ensemble de résultats d'existence et de non existence en dimension N, généralisant les précédents [7, 8, 10, 12] sans se limiter au seul cas $g(x,u) = \lambda u^{\gamma-1}$. On reprend plusieurs idées d'OTANI [12] et l'essentiel des énoncés de ses théorèmes.

Dans le cas particulier $g(x,u) = \lambda u^{\gamma-1}$, on retrouve les résultats connus :

– existence pour $\gamma(N-p) < Np$

– non existence pour $\gamma(N-p) \geq Np$ lorsque Ω est un ouvert strictement étoilé.

Rappelons enfin qu'un théorème de DIAZ-SAA [4] permet d'affirmer que la solution de notre problème est unique si $u \to \dfrac{g(x,u)}{u^{p-1}}$ est strictement décroissante.

Par ailleurs, pour l'étude du problème de la première valeur propre de Δ_p, on peut voir [11] et [18].

II. Existence

Soient Ω un ouvert borné régulier de $\mathbf{R}^N$, $1 < p < +\infty$ et $g\colon \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction de Carathéodory.

Nous nous intéressons au problème suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \text{Trouver } u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad u \geq 0, \quad u \not\equiv 0 \text{ telle que :} \\ \Delta_p u + g(x,u) = 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

THÉORÈME 1.— *On suppose qu'il existe γ_1 et γ_2 : $1 < \gamma_1 < \gamma_2 < p$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ et $\mu \geq 0$ tels que :*

(i) $\forall x \in \Omega$, $\forall u \geq 0$: $\lambda_1 u^{\gamma_1 - 1} \leq g(x,u)$,

(ii) $\forall x \in \Omega$, $\forall u \geq 0$: $g(x,u) \leq \mu + \lambda_2 u^{\gamma_2 - 1}$.

Alors $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution u. De plus $u \in L^\infty(\Omega)$, ne s'annule pas dans Ω, et possède les propriétés de régularité suivante :

Si $1 < p \leq 2$, $u \in C^{1,\alpha}(\Omega) \cap W^{2,p}_{loc}(\Omega)$;

si $p > 2$, $u \in C^{1,\alpha}(\Omega) \cap B^{p^*,p}_{\infty,\, loc}(\Omega)$.

Si en outre la fonction : $u \longrightarrow \dfrac{g(x,u)}{u^{\gamma_2-1}}$ *est strictement décroissante, cette solution est unique.*

Remarque. — Ici $p^* = \dfrac{p}{p-1}$ et $B_\infty^{p^*,p}$ est l'espace de Besov $\left[W^{1,p}, W^{2,p}\right]_{p^*-1,\infty}$ défini par interpolation.

Nous dirons que $\overline{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ [resp. $\underline{u} \in W^{1,p}(\Omega)$] est sursolution de $\mathcal{P}$ [resp. sous solution de $\mathcal{P}$] si $\Delta_p\overline{u} + g(x,\overline{u}) \leq 0$ [resp. $\Delta_p\underline{u} + g(x,\underline{u}) \geq 0$] dans Ω et si $\overline{u} > 0$ sur $\partial\Omega$ [resp. $\underline{u} \leq 0$ sur $\partial\Omega$].

La démonstration du théorème 1 utilise les lemmes suivants.

LEMME 1. — *Sous l'hypothèse (ii), pour tout $M > 0$, $(\mathcal{P})$ admet une sursolution $\overline{u}$ telle que :*

$$\forall x \in \Omega, \quad \overline{u}(x) \geq M.$$

Démonstration. — Soit $R > 0$ tel que $\Omega \subset B(0,R)$ et cherchons $\overline{u}$ sous la forme : $\overline{u}(x) = \varphi(r) = ar^{p^*} + b$ avec $r = |x|$, $a < 0$, $b > 0$. On aura bien $\overline{u}(x) \geq M$ si on prend $a = -\dfrac{b-M}{R^{p^*}}$.

De manière générale, on a :

$$\Delta_p\overline{u} + g(x,\overline{u}) = (p-1)|\varphi'(r)|^{p-2}\varphi''(r) + \frac{(N-1)}{r}|\varphi'(r)|^{p-2}\varphi'(r) + g(x,\overline{u}). \tag{1}$$

Il vient donc ici :

$$\begin{aligned}\Delta_p\overline{u} + g(x,\overline{u}) &\leq -N|ap^*|^{p-1} + \mu + \lambda_2\left(ar^{p^*} + b\right)^{\gamma_2-1}\\ &\leq -N\left(\frac{(b-M)p^*}{R^{p^*}}\right)^{p-1} + \mu + \lambda_2 b^{\gamma_2-1}.\end{aligned}$$

Sachant que $p > \gamma_2$, on pourra choisir b assez grand pour que

$$\Delta_p\overline{u} + g(x,\overline{u}) \leq 0. \square$$

LEMME 2. — *Sous l'hypothèse (i), pour tout $M > 0$, $\mathcal{P}$ admet une sous solution $\underline{u} \not\equiv 0$ telle que :*

$$\forall x \in \Omega, \quad 0 \leq \underline{u}(x) \leq M.$$

Démonstration. — Supposons pour simplifier les notations que $0 \in \Omega$ et considérons $R > 0$ tel que $B(0, R) \subset \Omega$. Cherchons $\underline{u}$ sous la forme :

$$\underline{u}(x) = \begin{cases} \alpha |x|^{p^*} + \beta & \text{pour } 0 \leq |x| \leq \dfrac{NR}{N+1} \\ \delta (R - |x|)^{p^*} & \text{pour } \dfrac{NR}{N+1} < |x| \leq R \\ 0 & \text{pour } x \in \Omega \backslash B(0, R) \end{cases}$$

$$\text{avec} \left| \begin{array}{l} \beta = \left(\dfrac{\lambda_1 R^p}{(N+1)^{\gamma_1} (p^*)^{p-1}} \right)^{1/(p-\gamma_1)} \\ \alpha = -\dfrac{\beta}{R^{p^*}} \left(\dfrac{N+1}{N} \right)^{p^*-1} \\ \delta = -\alpha N^{p^*-1}. \end{array} \right.$$

Les deux dernières relations assurent que $\underline{u} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$; de plus $\underline{u} \geq 0$, $u \not\equiv 0$ dans Ω et $\underline{u} = 0$ sur $\partial \Omega$.

Sachant que $p > \gamma_1$, on peut choisir R assez petit pour que $\beta \leq M$ et donc $\underline{u} \leq M$ dans Ω.

De plus, pour $\dfrac{NR}{N+1} \leq |x| \leq R$, il vient avec (1) :

$$\begin{aligned} \Delta_p \underline{u} + g(x, \underline{u}) &= (\delta p^*)^{p-1} \left(1 - \frac{(N-1)(R-r)}{r} \right) + g(x, \overline{u}) \\ &\geq (\delta p^*)^{p-1} \left(N - \frac{(N-1)(N+1)}{N} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Et pour $0 \leq |x| \leq \dfrac{NR}{N+1}$:

$$\begin{aligned} \Delta_p \underline{u} + g(x, u) &\geq -N |\alpha p^*|^{p-1} + \lambda_1 \left(\alpha \left(\frac{NR}{N+1} \right)^{p^*} + \beta \right)^{\gamma_1 - 1} \\ &\geq -\frac{N+1}{R^p} (\beta p^*)^{p-1} + \lambda_1 \left(\frac{\beta}{N+1} \right)^{\gamma_1 - 1} = 0 \end{aligned}$$

par choix de β. D'où le résultat. □

Démonstration du théorème 1 . — Il résulte des lemmes 1 et 2 qu'il existe $\overline{u}$ sursolution et $\underline{u}$ sous solutions de $(\mathcal{P})$ telles que $\underline{u} \leq \overline{u}$. D'après le théorème de Deuel et Hess [2], il existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ et :

$$\Delta_p u + g(x, u) = 0.$$

Evidemment $u \in L^\infty(\Omega)$; d'après TOLKSDORF [19], il existe alors $\alpha > 0$ tel que $u \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(\Omega)$. Il résulte donc du principe du maximum de VAZQUEZ [20] que :

$$\forall x \in \Omega, \quad u(x) > 0.$$

Par ailleurs pour $1 < p \leq 2$, $u \in W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ [16] et pour $p > 2$, $u \in B^{p^*,p}_{\infty,\,\text{loc}}(\Omega)$ [14].

Enfin l'unicité résulte d'un théorème de DIAZ et SAA [4]. □

THÉORÈME 2.— *On suppose :*

(i) $\forall x \in \Omega$, $\forall u > 0$, $g(x,u) > 0$;

(ii) $u \to g(x,u)$ *dérivable et telle que :*

$$\forall M, \sup_{\substack{|u| \leq M \\ x \in \Omega}} \left| \frac{\partial g}{\partial u}(x,u) \right| \leq K_M < +\infty ;$$

(iii) $g(x,u) = o(u^{p-1})$ *quand* $u \to 0$, *uniformément en* x ;

(iv) il existe $a \in L^\infty(\Omega)$, $a(x) > 0$ *dans* Ω, *et* $\gamma \in]p, \overline{\gamma}[$ *avec* $\overline{\gamma} = +\infty$ *si* $p \geq N$ *et* $\overline{\gamma} = \dfrac{Np}{N-p}$ *si* $p < N$ *tels que, pour* u *suffisamment grand :*

$$g(x,u) = a(x) u^{\gamma - 1}.$$

Alors $\mathcal{P}$ *admet au moins une solution* u.

THÉORÈME 3.— *Sous les hypothèses du théorème 2,* $u \in L^\infty(\Omega)$, *ne s'annule pas dans* Ω *et possède les propriétés de régularité suivantes :*

$$\begin{array}{ll} \textit{Si } 1 < p \leq 2, & u \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(\Omega) \cap W^{2,p}_{loc}(\Omega) ; \\ \textit{si } p > 2, & u \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(\Omega) \cap B^{p^*,p}_{\infty,\, loc}(\Omega). \end{array}$$

Démonstration du théorème 2 .— Il suffit d'adapter au problème $(\mathcal{P})$ la démonstration de NIRENBERG [9] en appliquant le lemme de Passe-Montagne à la fonction $J(u) = A(u) - B(u)$ où

$$A(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p = \frac{1}{p} \|u\|^p_X, \qquad X = W^{1,p}_0(\Omega)$$

$$B(u) = \int_\Omega G(x, u(x))\, dx, \qquad G(x,u) = \int_0^u g(x,v)\, dv.$$

a) Pour montrer que A est de classe C^1 sur X, il suffit de voir que d'après une relation algébrique de SIMON [14] et l'inégalité de HÖLDER :

$$\begin{aligned}\|A'(u_1) - A'(u_2)\|_{X'} &\le \|F(\nabla u_1) - F(\nabla u_2)\|_{p^*} \\ &\le c\|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_p^{\alpha-1}\{\|\nabla u_1\|_p + \|\nabla u_2\|_p\}^{p-\alpha}\end{aligned}$$

avec $\alpha = p$ si $1 < p \le 2$, $\alpha = 2$ si $p > 2$.

De plus g étant régulière, B est de classe C^1.

b) Soit $(u_n) \subset X$ telle que $J(u_n)$ soit bornée et $J'(u_n) \to 0$. On montre comme dans [9] que $\|u_n\|_X$ est bornée; par compacité de l'injection de X dans $L^\gamma(\Omega)$, une sous-suite encore notée u_n, converge dans $L^\gamma(\Omega)$. Soit

$$I_{n,m} = \int_\Omega [F(\nabla u_n) - F(\nabla u_m)] \cdot (\nabla u_n - \nabla u_m)$$

$$I_{n,m} = \langle J'(u_n) - J'(u_m), u_n - u_m\rangle + \int_\Omega [g(x,u_n) - g(x,u_m)]\,(u_n - u_m).$$

Il est facile de voir que $\lim_{n,m\to+\infty} I_{n,m} = 0$.

Or F vérifie la relation algébrique [14] :

$$\begin{aligned}|\nabla u_n - \nabla u_m|^p \le c\,\{[F(\nabla u_n) - F(\nabla u_m)] \cdot (\nabla u_n - \nabla u_m)\}^{\alpha/2} \\ (|\nabla u_n|^p + |\nabla u_m|^p)^{1-\alpha/2}\end{aligned}$$

avec $\alpha = p$ si $1 < p \le 2$ et $\alpha = 2$ si $p > 2$.

Par application de l'inégalité de HÖLDER, on en déduit :

$$\|u_n - u_m\|_X^p \le c(I_{n,m})^{\alpha/2}\,\{\|u_n\|_X^p + \|u_m\|_X^p\}^{1-\alpha/2}$$

et donc $\lim_{n,m} \|u_n - u_m\|_X = 0$.

X étant complet, la suite u_n converge dans X et la condition de PALAIS-SMALE est vérifiée.

c) $J(0) = 0$ et, étant donné u_0 tel que $J(u_0) > 0$, $\lim_{\mu\to+\infty} J(\mu u_0) = -\infty$, d'où l'existence de $v_0 \neq 0$ tel que $J(v_0) = 0$.

Enfin pour tout $\varepsilon > 0$, on montre comme [9] que

$$J(u) \ge \frac{1}{p}\|u\|_X^p - C\,(\varepsilon\|u\|_X^p + C_\varepsilon\|u\|_X^\gamma)$$

et donc pour $\|u\|_X = \alpha$ assez petit, $J(u) \ge \beta > 0$.

De a), b), c), on déduit l'existence de $u \not\equiv 0$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tel que :

$$\forall v \in X, \quad \int_\Omega F(\nabla u) \cdot \nabla v - \int_\Omega g(x,u)v = 0$$

$g(x,u)$ pouvant être prise ≥ 0 pour tout u, on montre en prenant $v = \overline{u}$ que $u \geq 0$. □

Démonstration du théorème 3. — Montrons d'abord que $u \in L^\infty(\Omega)$. La démonstration est quasiment celle d'OTANI [12] que nous allons inclure ici pour que l'exposé soit plus complet. Le résultat étant évident si $p > N$, nous supposons $p \leq N$ et définissons :

$$\pi = \begin{cases} \dfrac{Np}{N-p} & \text{si } p < N \\ \max(2p, 2\gamma) & \text{si } p = N. \end{cases}$$

Pour $k \in \mathbf{N}$, on définit la suite :

$$q_k = \left\{ \left(\frac{\pi}{p}\right)^{k-1} (\pi - \gamma) - (p - \gamma) \right\} \frac{\pi}{\pi - p}$$

$q_1 = \pi$ et pour tout k, on a :

$$q_{k+1} = (q_k + p - \gamma)\frac{\pi}{p}.$$

LEMME 3. — *$\forall k \in \mathbf{N}^*$, $u \in L^{q_k}(\Omega)$ et de plus $\|u\|_\infty = \overline{\lim} \|u\|_{q_k} < +\infty$.*

Démonstration du lemme 3. — Montrons par récurrence que $u \in L^{q_k}(\Omega)$.

La propriété est vraie pour $k = 1$, d'après le théorème 2, l'injection de $W^{1,p}$ dans L^π étant continue [1].

Supposons donc $u \in L^{q_k}$. Les hypthèses du théorème 2 donnent la majoration :

$$|g(x,u)| \leq \mu + \lambda |u|^{\gamma - 1}$$
$$\|g(\cdot,u)\|_{q_k/(\gamma-1)} \leq \mu(\text{ mes } \Omega)^{(\gamma-1)/q_k} + \lambda \|u\|_{q_k}^{\gamma-1}.$$

Il existe alors une suite $(v_\varepsilon) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ telle que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|v_\varepsilon - g(\cdot,u)\|_{q_k/(\gamma-1)} = 0.$$

Considérons u_ε la solution classique, $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ du problème

$$(\mathcal{P}_\varepsilon)\begin{cases} -\Delta_p^\varepsilon u_\varepsilon = v_\varepsilon & \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $\Delta_p^\varepsilon u_\varepsilon = \operatorname{div}\left[\left(|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon\right)^{(p-2)/2} \nabla u_\varepsilon\right]$.

a) Montrons que u_ε converge faiblement vers u dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Notant $\Omega_\varepsilon = \left\{x \in \Omega \colon |\nabla u_\varepsilon|^2 \geq \varepsilon\right\}$ et $\alpha = \max\left(1, 2^{(2-p)/2}\right)$, on a :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^p \leq \alpha \int_\Omega \left(|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon\right)^{(p-2)/2} |\nabla u_\varepsilon|^2 = \varepsilon \int_\Omega v_\varepsilon u_\varepsilon. \qquad (2)$$

D'où avec l'inégalité de Hölder :

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^p \leq \alpha \|v_\varepsilon\|_{\gamma^*} \|u_\varepsilon\|_\gamma + \varepsilon^{p/2} \operatorname{mes}(\Omega). \qquad (3)$$

La suite v_ε est bornée dans L^{γ^*} puisque $\gamma^* = \dfrac{\gamma}{\gamma-1} < \dfrac{q_k}{\gamma-1}$; $W^{1,p}$ s'injecte continuement dans L^γ; il résulte alors de (3) :

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_p^p \leq C\|\nabla u_\varepsilon\|_p + \varepsilon^{p/2} \text{ mes } (\Omega).$$

Donc la suite u_ε, bornée dans $W_0^1, p(\Omega)$, admet une sous-suite, encore notée u_ε, faiblement convergente vers $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Définissons dans $L^p(\Omega)$:

$$\Phi_\varepsilon(z) = \begin{cases} \int_\Omega \left(|\nabla z|^2 + \varepsilon\right)^{p/2} & \text{si } z \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

$-\Delta_p^\varepsilon$ étant le sous-différentiel de Φ_ε, on a :

$$\forall z \in L^p(\Omega), \quad \Phi_\varepsilon(z) \geq \Phi_\varepsilon(u_\varepsilon) + \int_\Omega v_\varepsilon(z - u_\varepsilon).$$

Sachant que, pour tout z, $\Phi_\varepsilon(z) \geq \Phi_0(z)$, il vient, par semi-continuité inférieure faible de Φ_0 dans $W^{1,p}$:

$$\forall z \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \Phi_0(z) \geq \Phi_0(w) + \int_\Omega g(\cdot, u)(z - u)$$

qui implique $-\Delta_p w = g(\cdot, u)$ et donc $w = u$ par unicité.

b) Montrons que $u \in L^{q_{k+1}}(\Omega)$. Soit $m \in \mathbf{N}$, $1 \leq m \leq k$. Multipliant l'équation par $|u_\varepsilon|^{q_m-\gamma}u_\varepsilon$, on a comme dans (3) :

$$\begin{aligned}
(q_m - \gamma + 1)\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^p |u_\varepsilon|^{q_m-\gamma} &\leq \alpha \int_\Omega v_\varepsilon |u_\varepsilon|^{q_m-\gamma}u_\varepsilon + \varepsilon^{p/2}\int_\Omega |u_\varepsilon|^{q_m-\gamma} \\
&\leq \alpha \|v_\varepsilon\|_{q_m/(\gamma-1)} \left\| |u_\varepsilon|^{q_m-\gamma+1} \right\|_{(q_m/(\gamma-1))^*} \\
&\qquad + \varepsilon^{p/2}(\text{mes }(\Omega))^{\gamma/q_m} \left\| |u_\varepsilon|^{q_m-\gamma} \right\|_{q_m/(q_m-\gamma)} \\
&\leq \left(C_1 + C_2\|u_\varepsilon\|_{q_m}^{\gamma-1}\right)\|u_\varepsilon\|_{q_m}^{q_m-\gamma+1} + C_3\|u_\varepsilon\|_{q_m}^{q_m-\gamma}.
\end{aligned}$$

D'où, par application de l'inégalité de YOUNG :

$$(q_m - \gamma + 1)\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^p |u_\varepsilon|^{q_m-\gamma} \leq C_4 + C_5\|u_\varepsilon\|_{q_m}^{q_m}. \tag{4}$$

Par ailleurs il existe une constante K telle que [1] :

$$\forall w \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \|w\|_\pi \leq K\|\nabla w\|_p,$$

donc :

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon\|_{q_{m+1}}^{q_m+p-\gamma} = \left\| |u_\varepsilon|^{1+\frac{q_m-\gamma}{p}} \right\|_\pi^p &\leq K^p \int_\Omega \left|\nabla\left(u_\varepsilon^{1+\frac{q_m-\gamma}{p}}\right)\right|^p \\
&\leq \left(1 + \frac{q_m-\gamma}{p}\right)^p K^p \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^p |u_\varepsilon|^{q_m-\gamma}.
\end{aligned}$$

Il en résulte alors avec (4) :

$$\|u_\varepsilon\|_{q_{m+1}}^{q_m+p-\gamma} \leq \left\{C_6 + C_7\|u_\varepsilon\|_{q_m}^{q_m}\right\}(q_m + p - \gamma)^p.$$

On en déduit par récurrence sur m que u_ε est borné dans chaque L^{q_m}, $1 \leq m \leq k+1$ et donc $u \in L^{q_{k+1}}(\Omega)$.

c) La relation ci-dessous montre en particulier que u_ε est borné dans $L^{q_{k+1}}$; sachant de plus que ∇u_ε est borné dans L^p, il résulte du théorème de RELLICH (voir par exemple [15], p. 22) qu'une sous suite extraite de u_ε converge fortement vers u dans L^{q_k}. On obtient donc à la limite la relation :

$$\left(\|u\|_{q_{k+1}}^{q_{k+1}}\right)^{\frac{p}{\pi}} \leq \left\{C_6 + C_7\|u\|_{q_k}^{q_k}\right\}(q_k + p - \gamma)^p.$$

Remarquant que $q_k \leq \pi\left(\dfrac{\pi}{p}\right)^{k-1}$ et posant :

$$\begin{aligned}
&a = \frac{\pi}{p}, \quad b = \frac{\pi}{p}\log\max\{1, C_6 + C_7\}, \\
&E_k = q_k \log\max\{1, \|u\|_{q_k}\}, \quad r_k = b + \pi(k-1)\log a,
\end{aligned}$$

il vient :

$$E_{k+1} \leq r_k + aE_k \leq r_k + ar_{k-1} + \cdots + a^{k-1} r_1 + a^k E_1.$$

Des calculs élémentaires donnent alors :

$$E_{k+1} \leq a^k \left\{ E_1 + \frac{b}{a-1} + \frac{\pi \log a}{(a-1)^2} \right\} = da^k.$$

D'où l'on tire

$$\|u\|_\infty \leq \varlimsup_{k\to+\infty} \exp\left(\frac{E_k}{q_k}\right) \leq \varlimsup_{k\to+\infty} \exp\left(\frac{da^{k-1}}{q_k}\right) \leq \exp\left(\frac{d}{\pi}\right).\square$$

FIN de la DÉMONSTRATION du THÉORÈME 3 . — Grâce au lemme 3, la fin de la démonstration est analogue à celle du théorème 1. □

III. Non existence

Nous dirons que l'ouvert Ω est étoilé [respectivement strictement étoilé] si, pour un choix convenable de l'origine, $n(x) \cdot x \geq 0$ [respectivement $n(x) \cdot x \geq \rho > 0$] pour tout $x \in \partial\Omega$, où $n(x)$ désigne la normale extérieure en $x \in \partial\Omega$.

Dans ce paragraphe, nous nous limiterons au cas où la fonction g ne dépend que de u ; le résultat principal est le théorème suivant :

THÉORÈME 4. — *Soit g une fonction continue sur $\mathbf{R}$ telle que :*

$$g(u) > 0 \textit{ pour } u > 0.$$

Considérons :

$$G(u) = \int_0^{|u|} g(v)\, dv.$$

On suppose que l'une des deux hypothèses suivantes est réalisée :

(i) Ω est étoilé et $u \to \dfrac{G(u)}{u^{Np/(N-p)}}$ est strictement croissante ;

(ii) Ω est strictement étoilé et $u \to \dfrac{G(u)}{u^{Np/(N-p)}}$ est croissante.

Alors le problème $(\mathcal{P})$ n'admet pas de solution $u \in L^\infty(\Omega)$.

Remarque. — NI et SERRIN [8] ont prouvé un résultat analogue pour des solutions radiales singulières.

Comme dans [8], [17], la démonstration de ce théorème utilise essentiellement une égalité de type POHOZAEV [13]. Nous allons reprendre en partie l'idée de la démonstration d'OTANI [12].

Démonstration. — Par l'absurde. Supposons que $(\mathcal{P})$ admette une solution $u \in L^\infty(\Omega)$; alors $g(u) \in L^\infty(\Omega)$ et il existe $(v_\varepsilon) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ telle que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|v_\varepsilon - g(u)\|_{p^*} = 0.$$

Soit u_ε la solution classique $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ du problème $(\mathcal{P})$. On note $F_i^\varepsilon = (|\nabla u_\varepsilon| + \varepsilon)^{p-2/2} D_i u_\varepsilon$ et $F^\varepsilon = (F_1^\varepsilon, \dots, F_N^\varepsilon)$.

LEMME 4. — *u_ε converge faiblement vers u dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Démonstration du lemme 4. — Reprenons la démonstration du lemme 3; nous avons d'après (2) :

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^p \leq \alpha \int_\Omega v_\varepsilon u_\varepsilon + \varepsilon^{p/2} \mathrm{mes}(\Omega).$$

D'après l'inégalité de POINCARÉ il existe $c > 0$ tel que :

$$\|u_\varepsilon\|_p^p \leq c \|\nabla u_\varepsilon\|_p^p ,$$

d'où

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_p^p \leq \frac{1}{2} \|\nabla u_\varepsilon\|_p^p + \left(\frac{2c}{p}\right)^{p^*/p} \frac{\alpha^{p^*}}{p^*} \|v_\varepsilon\|_{p^*}^{p^*} + \varepsilon^{p/2} \mathrm{mes}(\Omega).$$

On en déduit que u_ε est borné dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et, comme pour le lemme 3, converge faiblement vers u dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. □

LEMME 5. — *u vérifie la relation suivante :*

$$\begin{aligned}
- p\int_\Omega (x.\nabla u_\varepsilon) v_\varepsilon - (N-p)\int_\Omega u_\varepsilon v_\varepsilon - N\varepsilon \int_\Omega \left(|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon\right)^{(p-2)/2} \\
= (p-1)\int_{\partial\Omega} \left(|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon\right)^{(p-2)/2} |\nabla u_\varepsilon|^2 (x \cdot n)\, d\sigma \\
- \varepsilon \int_{\partial\Omega} \left(|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon\right)^{(p-2)/2} (x \cdot n)\, d\sigma. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Démonstration du lemme 5 . — u_ε étant constant sur $\partial\Omega$, ∇u_ε est porté par la normale extérieure n en $x \in \partial\Omega$ et il vient par la formule de GAUSS :

$$\begin{aligned}
&p\int_{\partial\Omega}\left(|\nabla u_\varepsilon|^2+\varepsilon\right)^{(p-2)/2}|\nabla u_\varepsilon|^2(x\cdot n)\,d\sigma\\
&= p\int_{\partial\Omega}(x\cdot\nabla u_\varepsilon)(F^\varepsilon\cdot n)d\sigma\\
&= p\int_\Omega(x\cdot\nabla u_\varepsilon)\sum_{i=1}^N\frac{\partial}{\partial x_i}F_i^\varepsilon+p\int_\Omega\sum_{i=1}^N\frac{\partial}{\partial x_i}(x\cdot\nabla u_\varepsilon)F_i^\varepsilon\\
&= p\int_\Omega(x\cdot\nabla u_\varepsilon)\Delta_p^\varepsilon u_\varepsilon+p\int_\Omega\sum_{i=1}^N\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}F_i^\varepsilon\\
&\qquad\qquad+p\int_\Omega\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N x_j\left(|\nabla u_\varepsilon|^2+\varepsilon\right)^{(p-2)/2}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i\partial x_j}\\
&= -p\int_\Omega(x\cdot\nabla u_\varepsilon)v_\varepsilon+p\int_\Omega\left(|\nabla u_\varepsilon|^2+\varepsilon\right)^{(p-2)/2}|\nabla u_\varepsilon|^2\\
&\qquad\qquad+\int_\Omega\sum_{j=1}^N x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(|\nabla u_\varepsilon|^2+\varepsilon\right)^{p/2}.
\end{aligned}$$

De même pour la formule de GAUSS :

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega}\left(|\nabla u_\varepsilon|^2+\varepsilon\right)^{\frac{p}{2}}(x\cdot n)\,d\sigma\\
&\qquad\qquad= N\int_\Omega\left(|\nabla u_\varepsilon|^2+\varepsilon\right)^{p/2}+\int_\Omega\sum_{j=1}^N x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(|\nabla u_\varepsilon|^2+\varepsilon\right)^{p/2}.
\end{aligned}$$

Retranchant membre à membre ces deux relations, on déduit (5) puisque :

$$\int_\Omega\left(|\nabla u_\varepsilon|^2+\varepsilon\right)^{(p-2)/2}|\nabla u_\varepsilon|^2=-\int_\Omega\left(\Delta_p^\varepsilon u_\varepsilon\right)u_\varepsilon=\int_\Omega v_\varepsilon u_\varepsilon.\square$$

LEMME 6. — *Si Ω est étoilé, on a les majorations suivantes :*

$$\varepsilon\int_{\partial\Omega}\left(|\nabla u_\varepsilon|^2+\varepsilon\right)^{(p-2)/2}(x\cdot n)\,d\sigma\le\varepsilon^{p/2}\int_{\partial\Omega}(x\cdot n)\,d\sigma\qquad \textit{si } 1<p\le 2$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon\int_{\partial\Omega}\left(|\nabla u_\varepsilon|^2+\varepsilon\right)^{(p-2)/2}(x\cdot n)\,d\sigma&\le\frac{2\varepsilon^{p/2}}{p}\int_{\partial\Omega}(x\cdot n)\,d\sigma\\
&\quad+\frac{p-2}{p}\int_{\partial\Omega}\left(|\nabla u_\varepsilon|^2+\varepsilon\right)^{p/2}(x\cdot n)\,d\sigma\qquad \textit{si } p>2.
\end{aligned}$$

Démonstration. — Immédiate.□

Démonstration du théorème 3, partie (i) . — Ω étant étoilé, des lemmes 5 et 6 on déduit,

pour $1 < p \leq 2$:

$$\begin{aligned}
&-p\int_\Omega (x\cdot\nabla u_\varepsilon)v_\varepsilon - (N-p)\int_\Omega u_\varepsilon v_\varepsilon \\
&\geq (p-1)\int_{\partial\Omega}\left(|\nabla u_\varepsilon|^2+\varepsilon\right)^{(p-2)/2}|\nabla u_\varepsilon|^2\cdot(x\cdot n)\,d\sigma - \varepsilon^{p/2}\int_{\partial\Omega}(x\cdot n)\,d\sigma \\
&\geq -\varepsilon^{p/2}\int_{\partial\Omega}(x\cdot n)\,d\sigma
\end{aligned}$$

et pour $p > 2$:

$$\begin{aligned}
&-p\int_\Omega (x\cdot\nabla u_\varepsilon)v_\varepsilon - (N-p)\int_\Omega u_\varepsilon v_\varepsilon \\
&\geq [(p-1)-(p-2)/p]\int_{\partial\Omega}\left(|\nabla u_\varepsilon|^2+\varepsilon\right)^{p/2}(x\cdot n)\,d\sigma - \frac{2\varepsilon^{p/2}}{p}\int_{\partial\Omega}(x\cdot n)\,d\sigma \\
&\geq -\frac{2\varepsilon^{p/2}}{p}\int_{\partial\Omega}(x\cdot n)\,d\sigma.
\end{aligned}$$

Quand $\varepsilon \to 0$, il en résulte avec le lemme 4, pour $1 < p < +\infty$:

$$-p\int_\Omega (x\cdot\nabla u)g(u) - (N-p)\int_\Omega ug(u) \geq 0. \tag{6}$$

Or $G(u)$ appartient à $W_0^{1,p}(\Omega)$ et donc :

$$\int_\Omega (x\cdot\nabla u)g(u) = \int_\Omega \sum_{i=1}^N x_i\frac{\partial}{\partial x_i}G(u) = -N\int_\Omega G(u). \tag{7}$$

Enfin, sachant que $u \to \dfrac{G(u)}{u^{Np/(N-p)}}$ est strictement croissante.

$$-u^{Np/(N-p)}g(u) + \frac{Np}{(N-p)}u^{-1+Np/(N-p)}G(u) < 0 \tag{8}$$

d'où une contradiction avec (6), (7), (8). □

Démonstration du théorème 3, partie (ii) . — Supposons Ω strictement étoilé. Les lemmes 5 et 6 donnent toujours :

$$\begin{aligned}
&-p\int_\Omega (x\cdot\nabla u_\varepsilon)v_\varepsilon - (N-p)\int_\Omega u_\varepsilon v_\varepsilon \\
&\geq \min\left(\frac{2}{p}, p-1\right)\int_{\partial\Omega}\left(|\nabla u_\varepsilon|^2+\varepsilon\right)^{p/2}(x\cdot n)\,d\sigma - \varepsilon^{p/2}\int_{\partial\Omega}(x\cdot n)\,d\sigma.
\end{aligned} \tag{9}$$

Or d'après HÖLDER :

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega} \left(|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon\right)^{p/2} (x \cdot n)\, d\sigma \\
&\quad \geq \frac{\rho}{(\text{mes}\partial\,\Omega)^{1/(p-1)}} \left| \int_{\partial\Omega} \left(|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon\right)^{(p-1)/2} d\sigma \right|^{p/(p-1)} \\
&\quad \geq \frac{\rho}{(\text{mes}\partial\,\Omega)^{1/(p-1)}} \left| \int_{\partial\Omega} F^\varepsilon \cdot n\, d\sigma \right|^{p^*} \\
&\quad \geq \frac{\rho}{(\text{mes}\partial\,\Omega)^{1/(p-1)}} \left| \int_{\Omega} \Delta_p^\varepsilon u_\varepsilon \right|^{p^*} \\
&\quad = \frac{\rho}{(\text{mes}\partial\,\Omega)^{1/(p-1)}} \left| \int_{\Omega} v_\varepsilon \right|^{p^*}.
\end{aligned}$$

Quand $\varepsilon \to 0$, on en déduit avec (9) et le lemme 4 :

$$Np \int_\Omega G(u) - (N-p) \int_\Omega u g(u) \geq \frac{\rho \min\left(\frac{2}{p}, p-1\right)}{(\text{mes}\partial\,\Omega)^{1/(p-1)}} \left| \int_\Omega g(u) \right|^{p^*} > 0$$

d'où une contradiction.□

Remerciements. — L'auteur remercie M. OTANI pour ses intéressantes remarques.

Références

[1] ADAMS (R.A) . — *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.

[2] DEUEL-HESS . — A criterion for the existence of solutions of nonlinear elliptic boundary value problems, Proc. Royal Soc. Edimburgh A, vol. 74, 1975, p. 49-54.

[3] DIAZ (J.I.) . — Nonlinear partial differential equations and free boundaries, I-Elliptic equations, Pitmann n° 106, 1985.

[4] DIAZ-SAA . — Uniqueness of non-negative solutions for elliptic nonlinear diffusion equations with a general perturbation term, Proc. VII - Cedya, Santander, 1985.

[5] LIONS (J.L.) . — *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, 1969.

[6] NI-SERRIN . — Nonexistence theorems for quasilinear partial differential equations, Rendiconti Circolo Mat. Palermo, Suppl. Studies.

[7] NI-SERRIN . — Existence and nonexistence theorems for ground states for quasilinear partial differential equations, Proc. Acad. Lincei (à paraître).

[8] NI-SERRIN . — Nonexistence theorems for singular solutions of quasilinear partial differential equations, Comm. Pure Appl Math, 34, 1986, p. 379-399.

[9] NIRENBERG . — Variational and topological method in nonlinear problems, Bulletin of the A.M.S., vol. 4 n° 3, 1981, p. 267-302.

[10] OTANI (M.) . — On certain second order ordinary differential equations associated with Sobolev - Poincaré - type inequalities, Nonlinear Analysis T.M.A. n° 8, 1984, p. 1255-1270.

[11] OTANI (M.) . — A remark on certain nonlinear elliptic equations, Proc. Fac. Sci. Tokai Univ. n° 19, 1984, p. 23-28.

[12] OTANI (M.) . — Existence and nonexistence of nontrivial solutions of some nonlinear degenerate elliptic equations, J. Functional Analysis, vol. 76 n°1, 1988, p. 140-159.

[13] POHOZAEV (S.I.) . — Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Soviet. Math. Dokl. n° 6, 1965, p. 1408-1411.

[14] SIMON (J.) . — Sur des équations aux dérivées partielles non-linéaires, Thèse, Paris, 1977.

[15] STRAUSS (W.A.) . — The energy method in non linear partial differential equations, Notas de Matematica n°47, Rio de Janeiro, 1969.

[16] DE THELIN (F.) . — Local regularity properties for the solutions of a nonlinear partial differential equation, Nonlinear Analysis T.M.A. vol. 6 n° 8, 1982, p. 839-844.

[17] DE THELIN (F.) . — Quelques résultats d'existence et de non existence pour une E.D.P. elliptique non linéaire, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 299, série I n° 18, 1984, p. 911-914.

[18] DE THELIN (F.) . — Sur l'espace propre associé à la première valeur propre du pseudo-laplacien, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 303, série I, n° 8, 1986, p. 355-357.

[19] TOLKSDORF (P.) . — On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domains with conical boundary points, Comm. P.D.E., n° 8, 1983, p. 773-817.

[20] VAZQUEZ (J.L.) . — A strong maximum principle for somme quasilinear elliptic equations, Appl. Math. and Optimization n° 12, 1984, p. 191-202.

(Manuscrit reçu le 12 décembre 1986)