

SLIMAN SOUHAIL

Sur les ensembles pluripolaires complets

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 10,
n° 1 (1989), p. 27-36

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1989_5_10_1_27_0

© Université Paul Sabatier, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur les ensembles pluripolaires complets

SLIMAN SOUHAIL⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — Tout ensemble pluripolaire complet de type F_σ dans \mathbf{C}^n est l'ensemble des points infinis d'une fonction de la classe

$$L = \{u \in PSH(\mathbf{C}^n) : u(z) \leq C_u + \text{Log}(1 + |z|), \forall z\}.$$

ABSTRACT. — Every F_σ complete pluripolar set in \mathbf{C}^n is the set of all infinite points of a function belonging to the class

$$L = \{u \in PSH(\mathbf{C}^n) : u(z) \leq C_u + \text{Log}(1 + |z|), \forall z\}.$$

1. Introduction

Les ensembles pluripolaires dans \mathbf{C}^n ont été introduits et étudiés par P. LELONG dans les années 1960. Ils ont un rôle important dans plusieurs problèmes fondamentaux de l'analyse pluricomplexe (cf. [5]_a et l'appendice I de [5]_b). Rappelons qu'un ensemble E est dit :

– localement pluripolaire lorsque pour tout $z \in E$, il existe un voisinage ouvert connexe V de z et une fonction u plurisousharmonique sur V tels que $V \cap E \subset u^{-1}\{-\infty\}$.

– globalement pluripolaire (resp^t pluripolaire complet) lorsqu'il existe une fonction u plurisousharmonique sur \mathbf{C}^n telle que $E \subset u^{-1}\{\infty\}$ (resp^t $E = u^{-1}\{-\infty\}$).

⁽¹⁾ Laboratoire d'Analyse Complexe et Analyse Fonctionnelle, Université Paul Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex et Faculté des Sciences de Marrakech, Maroc.

B. JOSEFSON [4] a montré l'identité des deux premières notions. La troisième notion (ensemble pluripolaire complet) est importante pour les ensembles fermés, en vue du prolongement des courants, fonctions et ensembles analytiques (El Mir [2]).

J. SICIĄK [6] a remarqué que tout ensemble pluripolaire est inclus dans l'ensemble des points infinis d'une fonction de la classe

$$L = \{u \in PSH(\mathbb{C}^n) : u(z) \leq C_u + \text{Log}(1 + |z|), \forall z\}.$$

Dès lors une question naturelle se pose : tout ensemble E pluripolaire complet est-il L -pluripolaire complet, c'est-à-dire $E = u^{-1}\{-\infty\}$ avec $u \in L$? Nous donnons ici une réponse positive.

THÉORÈME . — *Tout ensemble pluripolaire complet de type F_σ dans \mathbb{C}^n est L -pluripolaire complet.*

2. Lemmes d'approximation

Soit E un ensemble pluripolaire complet de type F_σ dans \mathbb{C}^n , soit $(E_k)_{k \geq 1}$ une suite croissante de compacts dont la réunion est égale à E .

On note par $\overline{B}(z_0, r)$ la boule fermée de centre z_0 et de rayon r .

LEMME 2.1. — *Soit E un ensemble pluripolaire complet de type F_σ dans \mathbb{C}^n , soit $z_0 \in \mathbb{C}^n \setminus E$, alors il existe une suite de fonctions entières $(g_k)_{k \geq 1}$, une suite d'entiers naturels $(\ell_k)_{k \geq 1}$ avec $\ell_k \geq k^n$ telles que :*

- (1) $|g_k(z_0)| \geq e^{-\ell_k}$
- (2) $|g_k(z)| \leq e^{3\ell_k}$ pour tout $z \in \overline{B}(z_0, e^k)$
- (3) $|g_k(z)| \leq e^{-k^n \ell_k}$ pour tout $z \in E_k \cap \overline{B}(z_0, e^{\frac{k}{2}})$

Démonstration du lemme 2.1. :

Soit $v \in P(\mathbb{C}^n)$ telle que $E = \{z \in \mathbb{C}^n, v(z) = -\infty\}$.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}^n \setminus E$, on a : $v(z_0) > -\infty$.

On pose :

$$M_k = \text{Max} \left[\sup_{z \in \overline{B}(z_0, e^k)} v(z); |v(z_0)| \right] + 1$$

$$v_k(z) = \frac{v(z) - v(z_0)}{M_k},$$

alors pour tout $k \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned} v_k &\in P(\mathbf{C}^n) \\ v_k(z_0) &= 0 \\ E &= \{z \in \mathbf{C}^n, v_k(z) = -\infty\}. \\ v_k(z) &< 2 \text{ pour tout } z \in \overline{B}(z_0, e^k). \end{aligned}$$

On considère pour tout $k \geq 1$, le domaine de Hartogs $H_k = \{(z, w) \in \mathbf{C}^{n+1}; |w|e^{v_k(z)} < 1\}$ qui est un domaine d'holomorphic, et on construit, suivant une idée [1] une fonction holomorphe F_k sur H_k telle que :

$$(1) \quad \begin{aligned} \limsup_{w \rightarrow 1} |F_k(z_0, w)| &= +\infty \\ |w| &< 1 \end{aligned}$$

Soit $F_k(z, w) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j^k(z)w^j$ le développement de F_k en série de Hartogs, alors pour tout $k \geq 1$, on a :

$$(2) \quad \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \text{Log} |f_j^k(z)| \leq v_k(z) \text{ pour tout } z \in \mathbf{C}^n$$

D'après (1) on a :

$$(3) \quad \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \text{Log} |f_j^k(z_0)| = v_k(z_0) \text{ pour tout } k \geq 1$$

On pose :

$$\begin{aligned} W_k &= \{z \in \mathbf{C}^n, v_k(z) < 2\} \\ 0_k &= \{z \in \mathbf{C}^n, v_k(z) < -k^n - 1\}, \end{aligned}$$

alors les compacts $\overline{B}(z_0, e^k)$ et $\overline{B}(z_0, e^{\frac{k}{2}}) \cap E_k$ sont inclus dans respectivement les ouverts W_k et 0_k .

Tenant compte de (2) en appliquant le lemme classique de Hartogs [5] pour tout $k \geq 1$ à la suite de fonctions plurisous-harmoniques $\left(\frac{1}{j} \text{Log} |f_j^k(z)|\right)_{j \geq 1}$ et aux compacts $\overline{B}(z_0, e^k)$, $E_k \cap (\overline{B}(z_0, e^{k/2}))$ on obtient :

$$(4) \text{ Pour tout } k \geq 1, \text{ il existe } j_k \geq 1 \text{ tel que } |f_{j_k}^k(z)| \leq \exp(-k^n j)$$

- pour tout $j \geq j_k$, pour tout $z \in E_k \cap \overline{B}(z_0, e^{k/2})$
 (5) Pour tout $k \geq 1$, il existe $q_k \geq 1$ tel que $|f_j^k(z)| \leq e^{3j}$
 pour tout $j \geq q_k$, pour tout $z \in \overline{B}(z_0, e^k)$.

L'égalité (3) nous donne :

- (6) Pour tout $k \geq 1$, il existe une suite strictement croissante
 $(n_j(k))_{j \geq 1}$ telle que :

$$|f_{n_j(k)}^k(z_0)| > e^{-n_j(k)}$$

Si on pose :

$$\begin{aligned} m_k &= \max(j_k, q_k, k^n) \\ \ell^k &= n_{m_k(k)} \\ g_k(z) &= f_{\ell^k}^k(z) \text{ pour tout } z \in \mathbf{C}^n, \end{aligned}$$

alors les suites $(\ell_k)_{k \geq 1}, (g_k)_{k \geq 1}$ vérifient les propriétés du lemme 2.1.

Ce qui termine la démonstration du lemme 2.1.

Maintenant, à l'aide de ces fonctions g_k , on construit des polynômes p_k , normalisés et assez petits lorsque les g_k sont petites.

LEMME FONDAMENTAL 2.2.— Soient $(g_k)_{k \geq 1}$ une suite de fonctions entières sur \mathbf{C}^n , $(\ell_k)_{k \geq 1}$ une suite d'entiers vérifiant $\ell_k \geq k^n$ pour tout $k \geq 1$, telles que pour tout $k \geq 1$ on ait :

- (1) $|g_k(0)| \geq e^{-\ell_k}$
 (2) $|g_k(z)| \leq e^{3\ell_k}$ pour tout $z \in \overline{B}(0, e^k)$

Alors il existe une suite de polynômes $(P_k)_{k \geq k_0}$ où $k_0^n \geq (2n+2)!$ de degré inférieur ou égal à $t_k = nk^{n-1}\ell_k$ telle que :

- (1') $|P_k(0)|^{1/t_k} > e^{-\frac{5}{nk^{n-1}}}$
 (2') $|P_k(z)|^{1/t_k} \leq e^{-\frac{k}{3n}}$ si $z \in \overline{B}(0, e^{\frac{k}{2}})$ et $|g_k(z)| \leq e^{-k^n \ell_k}$
 (5') $1 \leq \|P_k\|_{\overline{B}(0,1)} \leq e^{t_k}$

Démonstration du lemme 2.2.

Soit $g_k(z) = \sum_{|r| \geq 0} a_r^{(k)} z^r$ le développement de Taylor de g_k en 0, d'après les inégalités de Cauchy et l'hypothèse (2) on a :

$$|a_r^{(k)}| \leq e^{3\ell_k - |r|k} \text{ pour tout } r \in \mathbf{N}^n$$

Sur les ensembles pluripolaires complets

d'après l'hypothèse (1) on a : $|a_0^{(k)}| \geq e^{-\ell_k}$.

Si on pose :

$$\begin{aligned} M_k &= \{r \in \mathbf{N}^n, r_i < k^{n-1} \ell_k, i = 1, \dots, n\} \\ G_k(z) &= \sum_{r \in M_k} a_r^{(k)} z^r \\ P_k(z) &= \frac{G_k(z)}{a^{(k)}}, \\ \text{où } a^{(k)} &= \max_{r \in M_k} |a_r^{(k)}| \end{aligned}$$

alors :

$$|P_k(0)| = \frac{|a_0^{(k)}|}{a^{(k)}} \geq e^{-4\ell_k}$$

puisque $e^{-\ell_k} \leq a^{(k)} e^{3\ell_k}$

le degré de P_k est inférieur ou égal à $nk^{n-1}\ell_k = t_k$. D'après les inégalités de Cauchy, on a :

$$1 = \frac{\max_{r \in M_k} |a_r^{(k)}|}{a^{(k)}} \leq \max_{|z| \leq 1} |P_k(z)| \leq \sum_{r \in M_k} 1 = \text{card } M_k$$

donc :

$$1 \leq \|P_k\|_{\overline{B}(0,1)} \leq (k^{n-1}\ell_k)^n \leq \exp(nk^{n-1}\ell_k) = e^{t_k}$$

d'où le polynôme P_k vérifie (1') et (3') du lemme.

Maintenant si $|g_k(z)| \leq e^{-k^n \ell_k}$ et $|z| \leq e^{\frac{k}{2}}$

$$\begin{aligned} \text{alors } |G_k(z)| &\leq |g_k(z)| + |g_k(z) - G_k(z)| \\ &\leq e^{-k^n \ell_k} + \sum_{r \in \mathbf{N}^n \setminus M_k} e^{3\ell_k - |r|k + |r|\frac{k}{2}} \\ &\leq e^{-k^n \ell_k} + e^{3\ell_k} \left[\left(1 - e^{-\frac{k}{2}}\right)^{-n} - \left(1 - e^{-\frac{k^n \ell_k}{2}}\right)^n \left(1 - e^{-\frac{k}{2}}\right)^{-n} \right] \\ |P_k(z)| &\leq e^{\ell_k - k^n \ell_k} + e^{4\ell_k} (1 - e^{-\frac{k}{2}})^{-n} \left[1 - \left(1 - e^{-\frac{k^n \ell_k}{2}}\right)^n \right]. \end{aligned}$$

Puisque par l'inégalité de BERNOULLI on a :

$$\left(1 - e^{-\frac{k^n \ell_k}{2}}\right)^n \geq 1 - ne^{-\frac{k^n \ell_k}{2}},$$

on obtient :

$$|P_k(z)| \leq e^{\ell_k - k^n \ell_k} + ne^{-\frac{k^n \ell_k}{2} + 4\ell_k} \left(1 - e^{-\frac{k}{2}}\right)^{-n}.$$

Si $k^n \geq (2n + 2)!$ et $\ell_k \geq k^n$ alors : $(1 - e^{-\frac{k}{2}})^{-n} \leq e^n, 2n \leq e^n$

$$\begin{aligned} |P_k(z)| &\leq \frac{1}{2} e^{-\frac{k^n \ell_k}{3}} + \frac{1}{2} e^{4\ell_k - \frac{k^n \ell_k}{2} + 2n} \\ &\leq e^{-\frac{k^n \ell_k}{3}} \end{aligned}$$

Enfin $|P_k(z)| \leq e^{-\frac{k^n \ell_k}{3}} = e^{-\frac{k \ell_k}{3n}}$ si $|z| \leq e^{\frac{k}{2}}$ et $|g_k(z)| \leq e^{-k^n \ell_k}$ ce qui termine la démonstration du lemme 2.2.

3. Démonstration du théorème

Soit K un compact de \mathbf{C}^n : $K \cap E \neq \emptyset, (E_k)_{k \geq 1}$ suite croissante de compacts telle que $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, à partir de cette suite on construit une suite croissante de compacts qui dépend de K , dont la réunion est égale à E .

Soit $x_0 \in K$, soit $R > 1$, tels que $K \subset B(x_0, R)$, il existe $k_0 = k(K)$ défend de K , tel que pour tout $k \geq k_0$

$$E_k \cap \overline{B}(x_0, e^{\frac{k}{2}} - R) \neq \emptyset$$

on peut supposer $k_0^n \geq (2n + 2)!$ et on pose $F_k = \bigcap_{z \in K} \overline{B}(z, e^{\frac{k}{2}}) \cap E_k$, alors

$$\bigcup_{k=k_0}^{\infty} F_k = E, F_k \subset F_{k+1}, \text{ car } E_k \cap \overline{B}(x_0, e^{\frac{k}{2}} - R) \subset F_k.$$

LEMME 3.1. — Soit E un ensemble \mathbf{C}^n -pluripolaire complet, de type F_σ , K un compact de $\mathbf{C}^n \setminus E$, alors il existe une suite $(v_k)_{k \geq k_0}$ de fonctions dans la classe L , telle que :

- 1°) $v_k(z) \geq -\frac{5}{nk^{n-1}}$ pour tout $z \in K$
- 2°) $v_k(z) \leq -\frac{k}{3n}$ pour tout $z \in F_k$
- 3°) $v_k(z) \leq 1 + \max_{x \in K} |x| + \text{Log}(1 + |z|)$ pour tout $z \in \mathbf{C}^n$

LEMME 3.2. — Soit E un ensemble \mathbf{C}^n -pluripolaire complet, de type F_σ , K un compact de $\mathbf{C}^n \setminus E$ alors il existe une fonction $V_K \in L$ telle que :

- 1°) $E \subset \{z \in \mathbf{C}^n, V_k(z) = -\infty\}$
 2°) $V_K(z) \geq -(5 + \max_{x \in K} |x|)$ pour tout $z \in K$
 3°) $V_K(z) \leq 1 + \text{Log}(1 + |z|)$ pour tout $z \in \mathbf{C}^n$

Démonstration du lemme 3.1.

D'après les lemmes 2.1., 2.2., pour tout $z \in K$ et pour tout $k \geq k_0$, il existe un polynôme P_k (dépendant de z) de degré inférieur ou égal à $t_k = nk^{n-1}\ell_k$ tel que :

- i) $|P_k(z)|^{1/t_k} > e^{-\frac{5}{nk^{n-1}}}$
 ii) $|P_k(x)|^{1/t_k} \leq e^{-\frac{k}{3n}}$ pour tout $x \in E_k \cap \overline{B}(z, e^{\frac{k}{2}})$
 iii) $1 \leq \|P_k\|_{\overline{B}(z,1)} \leq e^{t_k}$

La condition (i) nous donne qu'il existe un voisinage $U_k(z)$ de z tel que :

$$|P_k(x)|^{1/t_k} \geq e^{-\frac{5}{nk^{n-1}}} \text{ pour tout } x \in U_k(z)$$

Or ceci est vrai pour tout $z \in K$, donc $\bigcup_{z \in K} U_k(z) \supset K$; donc il existe une suite finie z_1, \dots, z_{n_k} de points de K telle que

$$\bigcup_{i=1}^{n_k} U_k(z_i) \supset K.$$

il existe aussi une suite finie de polynômes $(P_k^{(i)})_{i=1}^{n_k}$ de degré $\leq t_k^{(i)} = nk^{n-1}\ell_k^{(i)}$, on pose :

$$v_k(z) = \max_{1 \leq i \leq n_k} \frac{1}{t_k^{(i)}} \text{Log} |P_k^{(i)}(z)| \text{ pour tout } z \in \mathbf{C}^n,$$

alors $v_k \in L$; $v_k(z) \geq -\frac{5}{nk^{n-1}}$ pour tout $z \in K$. Maintenant, si $z \in F_k$, alors $z \in \bigcap_{i=1}^{n_k} \overline{B}(z_i, e^{\frac{k}{2}}) \cap E_k$, or : $\frac{1}{t_k^{(i)}} \text{Log} |P_k^{(i)}(z)| \leq -\frac{k}{3n}$ pour tout $z \in E_k \cap \overline{B}(z_i, e^{\frac{k}{2}})$ pour tout $i = 1, \dots, n_k$, d'après (ii).

D'après (iii) et l'inégalité de BERNSTEIN-WALSH ([6], page 180)

$\frac{1}{t_k^{(i)}} \text{Log} |P_k^{(i)}(z)| \leq \max [1, 1 + \text{Log}|z - z_i|]$ pour tout $z \in \mathbf{C}^n$, pour tout $i = 1, \dots, n_k$. Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_k^{(i)}} \text{Log} |P_k^{(i)}(z)| &\leq 1 + \text{Log} (1 + |z - z_i|) \\ &\leq 1 + |z_i| + \text{Log} (1 + |z|). \end{aligned}$$

et :

$$v_k(z) \leq 1 + \max_{x \in K} |x| + \text{Log} (1 + |z|)$$

pour tout $z \in \mathbf{C}^n$, la démonstration du lemme 3.1. est terminée.

Démonstration du lemme 3.2.

On choisit une suite $(k_s)_{s \geq 1}$, croissante qui vérifie $k_s \geq \max(k_0, 2^s)$, pour tout $s \geq 1$. Alors la fonction V_K est définie par :

$$V_K(z) = \sum_{s=1}^{\infty} 2^{-s} [v_{k_s}(z) - \max_{x \in K} |x|],$$

où $(v_{k_s})_{s \geq 1}$ est donnée par le lemme 3.1. On a : $E = \bigcup_{s=1}^{\infty} F_{k_s}$.

a) $V_K \in P(\mathbf{C}^n)$ car pour tout $R \geq 1$, V_K est psh sur $B(0, R)$ puisque

$$V_K(z) = \sum_{s=1}^{\infty} 2^{-s} [v_{k_s}(z) - \max_{x \in K} |x| - 1 - \text{Log} (1 + R)] + 1 + \text{Log} (1 + R),$$

qui est la limite d'une suite décroissante de fonctions psh sur $B(0, R)$, alors elle est psh sur $B(0, R)$ pour tout $R \geq 1$, dont elle est psh sur \mathbf{C}^n .

b) $-V_K(z) \leq 1 + \text{Log} (1 + |z|)$ pour tout $z \in \mathbf{C}^n$

- Si $z \in E$ alors il existe $s_0 \geq 1$ tel que pour tout $s \geq s_0$, $z \in F_{k_s}$

$$V_K(z) \leq \sum_{s=1}^{s_0-1} 2^{-s} v_{k_s}(z) - \frac{1}{3n} \sum_{s=s_0}^{\infty} 1 - \max_{x \in K} |x| = -\infty; \text{ donc :}$$

$$E \subset \{z \in \mathbf{C}^n, V_K(z) = -\infty\}.$$

- Si $z \in K$, alors pour tout $s \geq 1$, $v_{k_s}(z) \geq \frac{5}{nk_s^{n-1}}$ donc :

$$V_K(z) \geq -\max_{x \in K} |x| - 5 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2^{-s}}{nk_s^{n-1}} \geq -(5 + \max_{x \in K} |x|).$$

Ce qui achève la démonstration du lemme 3.2.

Démonstration du théorème

Puisque E est pluripolaire complet, il est de type G_δ , donc son complémentaire $\mathbf{C}^n \setminus E$ est F_σ , il existe alors une suite croissante de compacts $(K_j)_{j \geq 1}$, telle que $\mathbf{C}^n \setminus E = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$.

D'après le lemme 3.2., pour tout $j \geq 1$, il existe une fonction $V_j = V_{K_j}$ dans la classe L , qui vérifie les trois propriétés de ce dernier, on pose $\rho_j = 5 + \max_{x \in K_j} |x|$

$$V(z) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \max \left[\frac{V_j(z)}{\rho_j}, -2^j \right] \text{ pour tout } z \in \mathbf{C}^n$$

Alors la fonction V est dans la classe L , on montre qu'elle est plurisous-harmonique par la technique déjà utilisée pour la démonstration du lemme 3.2.

- Si $z \in E$, $V(z) = \sum_{j=1}^{\infty} -1 = -\infty$.

- Si $z \in \mathbf{C}^n \setminus E$, il existe j_0 tel que pour tout $j \geq j_0$, $z \in K_j$;

$$V(z) \geq - \sum_{j=1}^{j_0-1} 2^{-j} 2^j - \sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{-j} \geq -j_0,$$

finalement : $E = \{z \in \mathbf{C}^n, V(z) = -\infty\}$

ce qu'il fallait démontrer.

Note. Ce travail est le résultat principal d'une thèse de 3^{ième} cycle soutenue à l'Université Paul Sabatier en mars 1987.

Références

- [1] BREMERMAN (H.J.). — On the conjecture of equivalence of the plurisubharmonic functions and the Hartogs functions, *Math. Ann.*, 1956, p. 76-86.
- [2] EL MIR (H.). — Sur le prolongement des courants positifs fermés., *Acta Math.*, t. 153, 1984, p. 1-45.
- [3] HORMANDER (J.). — *An introduction to complex analysis in several variables*, Van Nostrand Princeton N.J., 1966.
- [4] JOSEFSON (B.). — On the equivalence between locally polar and globally polar sets for plurisubharmonic functions on \mathbf{C}^n , *Arkiv för matematik*, t. 16(1) 1978, p. 109-115.

S. Souhail

- [5a] LELONG (P.). — *Fonctionnelles analytiques et fonctions entières (n variables)*. Cours d'été 1967, Presses univ. Montréal, 1968.
- [5b] LELONG (P.), GRUMAN (L.). — *Entire functions of several complex variables*; Springer 1986.
- [6] SICIĄK (J.). — Extremal plurisubharmonic functions in \mathbf{C}^n , *Ann. Pol. Math.*, t. **39**, 1981, p. 175-211.
- [7] VLADIMIROV (V.S.). — *Les fonctions de plusieurs variables complexes et leur application à la théorie quantique des champs*, Dunod Edit. Paris 1967.

(Manuscrit reçu le 22 juin 1987)