Annales de la faculté des sciences de Toulouse

Saïd Benayadi

Certaines propriétés d'une classe d'algèbres de Lie qui généralisent les algèbres de Lie semi-simples

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 12, nº 1 (1991), p. 29-35

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1991_5_12_1_29_0>

Certaines propriétés d'une classe d'algèbres de Lie qui généralisent les algèbres de Lie semi-simples

SAÏD BENAYADI[1]

RÉSUMÉ. — On montre que certaines propriétés classiques des algèbres de Lie semi-simples restent vraies pour les algèbres de Lie g qui vérifient $[g\,,\,g]=g$, $\mathrm{ad}(g)=\mathrm{Der}(g)$, $z(g)=0$.

ABSTRACT. — We show that some classical properties of semi-simple Lie algebras are still valid for the class of Lie algebras satisfying $[g\,,\,g]=g$, $\mathrm{ad}(g)=\mathrm{Der}(g)$, $z(g)=0$.

Introduction

Soit g une algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On désigne respectivement par $\mathrm{Der}(g)$, $\mathrm{ad}(g)$, $Z(g)$, $R(g)$, l'algèbre des dérivations de g, l'idéal des dérivations intérieures, le centre de g, le radical de g. Il y a vingt ans, M. Flato avait posé le problème suivant : "On sait qu'une algèbre de Lie semi-simple g est égale à son algèbre dérivée $[g\,,\,g]$, que toutes ses dérivations sont intérieures (c'est-à-dire $\mathrm{Der}(g)=\mathrm{ad}(g)$), et que son centre $Z(g)$ est nul; ces trois propriétés sont-elles caractéristiques des algèbres de Lie semi-simples?". En 1988, E. Angelopoulos a répondu par la négative à cette question [1], en construisant une famille d'algèbres de Lie qui ont toutes ces trois propriétés, mais qui ne sont pas semi-simples. Le contre exemple de dimension minimum, connu à ce jour, est une algèbre de Lie de dimension 35, ayant un radical nilpotent, et une sous-algèbre de Lie isomorphe à sl(2).

Le but de cet article est d'étudier en général les algèbres de Lie qui ont ces trois propriétés, que nous appellerons (suivant E. Angelopoulos [1]) des

(1) Laboratoire de Physique Mathématique, UA CNRS 1102, Université de Bourgogne, BP 138, 21004 Dijon Cedex, France

algèbres de Lie sympathiques. En termes cohomologiques, une algèbre de Lie est sympathique si $H^0(g,g) = H^1(g,g) = H^1(g,\mathbb{K}) = \{0\}$; l'ensemble des algèbres de Lie sympathiques est donc un ouvert de la variété des algèbres de Lie de dimension fixée. Nous démontrerons les principaux résultats suivants :

(i) soit g une algèbre de Lie, I un idéal sympathique, alors I est facteur direct ;

(ii) toute extension de deux algèbres de Lie sympathiques est sympathique et triviale ;

(iii) une algèbre de Lie g est sympathique si et seulement si elle est somme directe d'idéaux sympathiques irréductibles (c'est-à-dire sans idéaux sympathiques non triviaux).

Ces trois résultats sont classiques si l'on remplace sympathique par semi-simple, mais la semi-simplicité n'est absolument pas une condition nécessaire pour les obtenir.

Toutes les algèbres de Lie envisagées sont de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

DÉFINITION 1.— *Une algèbre de Lie g est sympathique si elle vérifie* $g = [g, g]$, $\mathrm{Der}(g) = \mathrm{ad}(g)$, $Z(g) = \{0\}$.

PROPOSITION 1.— *Soit g une algèbre de Lie.*

Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $g = [g, g]$, $\mathrm{Der}(g) = \mathrm{ad}(g)$, $Z(g) = \{0\}$;

(ii) $g = [g, g]$, *g est isomorphe à* $\mathrm{Der}(g)$;

(iii) $H^0(g,g) = \{0\}$, $H^1(g,g) = \{0\}$, $H^1(g,\mathbb{K}) = \{0\}$.

Preuve

$H^0(g,g) \simeq Z(g)$, $H^1(g,g) \simeq \mathrm{Der}(g)/\mathrm{ad}(g)$ et $H^1(g,\mathbb{K}) \simeq (g/[g, g])^*$ d'où l'équivalence de (i) et (iii).

Montrons que $g = [g, g]$ implique que $Z(\mathrm{Der}(g)) = \{0\}$.

Soit $D \in \mathrm{Der}(g)$, si $D \in Z(\mathrm{Der}(g))$, on a $[D, \mathrm{ad}(x)] = \mathrm{ad}(Dx) = 0$ pour tout $x \in g$. Ce qui entraîne que $D[y, z] = 0$ pour tout y, $z \in g$.

Donc $D = 0$ car $g = [g, g]$.

Alors $[g, g] = g$ et g isomorphe à $\mathrm{Der}(g)$ entraîne que $Z(g) = \{0\}$ et $\mathrm{Der}(g) = \mathrm{ad}(g)$, donc (ii) implique (i).

(i) implique (ii) est une application évidente. □

Remarque. — En utilisant l'assertion (iii), on montre facilement que l'ensemble des algèbres de Lie sympathiques est ouvert dans la variété des algèbres de Lie de dimension donnée.

LEMME 1 ([2]). — *Soient g une algèbre de Lie et I un idéal de g.*

Si $I = [I, I]$, alors I est un idéal caractéristique de g.

Preuve

Soient $D \in \mathrm{Der}(g)$ et $x \in I$, alors

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [z_i, y_i] \quad \text{où } \lambda_i \in \mathbb{K} \text{ et } z_i, y_i \in I$$

$$D(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \big([Dz_i, y_i] + [z_i, Dy_i] \big),$$

Donc $D(x) \in I$ et par suite I est un idéal caractéristique de g. □

PROPOSITION 2. — *Soient g une algèbre de Lie sympathique et I un idéal de g.*

Si I est facteur direct de g, alors I est sympathique.

Preuve

I est un facteur direct de g, alors il existe J un idéal de g tel que $g = I \oplus J$.

$[I, J] = \{0\}$ entraîne que $[g, g] = [I, I] \oplus [J, J]$, d'où $I = [I, I]$.

Soit $d \in \mathrm{Der}(I)$, on considère l'application linéaire $D \in \mathrm{End}(g)$ définie par : $D/_I = d$ et $D/_J = 0$. Un calcul facile montre que D appartient à $\mathrm{Der}(g)$.

Comme g est sympathique, il existe $z \in g$ tel que $D = \mathrm{ad}_g(z)$.

Si $z = z_I + z_J$, où $z_I \in I$ et $z_J \in J$, on a $d = \mathrm{ad}_I(z_I)$, et par la suite $\mathrm{Der}(I) = \mathrm{ad}(I)$.

Enfin, $Z(I) \subset Z(g) = \{0\}$. □

PROPOSITION 3. — *Soient g une algèbre de Lie et I, J deux idéaux de g tels que $I \cap J = \{0\}$. Si I et J sont sympathiques, alors l'idéal $H = I \oplus J$ est sympathique.*

Preuve

Comme $[I\,,\,J]=\{0\}$, alors

$$[H\,,\,H]=[I\,,\,I]\oplus[J\,,\,J]=I\oplus J=H\,.$$

Soit $D\in \mathrm{Der}(H)$.

D'après le lemme 1, I et J sont des idéaux caractéristiques de H, donc $D/_I\in \mathrm{Der}(I)$ et $D/_J\in \mathrm{Der}(J)$. Alors, il existe $x\in I$ et $y\in J$ tels que

$$D/_I=\mathrm{ad}_I(x)\quad \text{et}\quad D/_J=\mathrm{ad}_J(y)\,.$$

Posons $D_1=\mathrm{ad}_H(x+y)$ et montrons que $D=D_1$.

Soient $r\in I$ et $t\in J$,

$$\begin{aligned}D_1(r+t)&=[x\,,\,r]+[y\,,\,t]\\&=D/_I\,(r)+D/_J\,(t)\\&=D(r+t)\,.\end{aligned}$$

Donc $D=\mathrm{ad}_H(x+y)$ et, par suite, $\mathrm{Der}(H)=\mathrm{ad}(H)$.

Soit $x\in Z(H)$, $x=x_I+x_J$, où $x_I\in I$, $x_J\in J$, alors

$$[x_I\,,\,I]=\{0\}\quad \text{et}\quad [x_J\,,\,J]=0\,,$$

ce qui entraîne que $x_I=x_J=x=0$. □

COROLLAIRE .— *Soient g_i, $i=1,\ldots,n$, des algèbres de Lie sympathiques, alors $g_1\times g_2\times\cdots\times g_n$ est sympathique.*

PROPOSITION 4.— *Soient g une algèbre de Lie, et I un idéal de g tel que* $\mathrm{Der}(I)=\mathrm{ad}(I)$.

Si l'une des deux hypothèses suivantes :

(i) $z(g)=\{0\}$,

(ii) $Z(I)=\{0\}$

est vérifiée, alors I est facteur direct de g.

Preuve

Soit $J = \{x \in g \mid [x, I] = \{0\}\}$. Soit $x \in g$, $\mathrm{ad}_g x\restriction_I \in \mathrm{Der}(I)$, donc il existe un élément y de I tel que $\mathrm{ad}_g x\restriction_I = \mathrm{ad}_I(y)$. D'où $[x - y, z] = 0$ pour tout z de I, ce qui prouve que $j = x - y \in J$. Il en résulte que $g = I + J$.

Supposons (i) vérifiée. Soient $x \in I \cap J$ et $y \in g$. On écrit

$$y = y_I + y_J\,, \quad \text{où } y_I \in I \text{ et } y_J \in J\,,$$

et alors :

$$[x, y] = [x, y_I] + [x, y_J] = 0\,.$$

Donc $x \in Z(g) = \{0\}$. Il en résulte que $g = I \oplus J$.

Une démonstration analogue prouve le résultat quand (ii) est vérifiée. □

COROLLAIRE 1.— *Soient g une algèbre de Lie, et I un idéal sympathique de g, alors I est facteur direct de g.*

COROLLAIRE 2.— *Soient g une algèbre de Lie sympathique, et I un idéal de g, alors I est sympathique si et seulement si I est facteur direct de g.*

Preuve.— Proposition 2 et 4.

Remarque.— Dans [1], E. Angelopoulos donne un exemple d'algèbre de Lie sympathique ayant des idéaux qui ne le sont pas.

COROLLAIRE 3.— *Toute extension d'une algèbre de Lie sympathique par une algèbre de Lie sympathique est sympathique et triviale.*

Preuve

Soient g_1, g_2 les deux algèbres de Lie sympathiques, g l'extension, il existe un morphisme surjectif $\mu : g \to g_2$ tel que $\mathrm{Ker}\,\mu = g_1$. D'après le corollaire 1 de la proposition 4, l'idéal sympathique g_1 est facteur direct de g, donc l'extension est triviale, et $g \simeq g_1 \times g_2$. Le corollaire de la proposition 3 montre alors que g est sympathique. □

Remarque.— Ceci s'applique en particulier au cas suivant : soient g une algèbre de Lie, I un idéal sympathique de g, J une sous-algèbre sympathique de g, avec l'hypothèse $I \cap J = \{0\}$. Alors, la sous-algèbre $H = I \oplus J$ est extension de sympathiques, donc sympathique. Ce résultat améliore la proposition 3.

DÉFINITION 2.— *Une algèbre de Lie sympathique est irréductible si elle n'a aucun idéal sympathique non trivial.*

Remarques

(1) Une algèbre de Lie sympathique non semi-simple a toujours au moins un idéal non trivial et non sympathique : par exemple son radical. En effet, une algèbre de Lie à la fois sympathique et résoluble est nécessairement nulle.

(2) E. Angelopoulos donne dans [1] un exemple d'algèbre de Lie sympathique irréductible non semi-simple. La représentation adjointe de cette algèbre de Lie est indécomposable, mais non irréductible.

THÉORÈME 1.— *Soit g une algèbre de Lie sympathique, alors g est somme directe d'idéaux sympathiques irréductibles.*

Preuve

On va raisonner par récurrence sur la dimension de g. Le résultat est vrai si $g = \{0\}$.

Il n'existe pas d'algèbre de Lie sympathique de dimension égale à 1 ou 2.

Si $\dim g = 3$ et g sympathique, alors $[g, g] = g$ implique que g est simple, donc irréductible.

Supposons donc que le résultat est vrai pour $\dim g < n$, et montrons-le pour $\dim g = n$. Si g n'est pas irréductible, elle a un idéal sympathique I non trivial. Par le corollaire 1 de la proposition 4, il existe un idéal J tel que $g = I \oplus J$, et par la proposition 2, J est sympathique. L'hypothèse de récurrence s'applique donc à I et J, et permet de les décomposer en somme directe d'idéaux sympathiques irréductibles.

Pour conlure, il suffit alors de remarquer que tout idéal de I, ou J, est un idéal de g. □

LEMME 2 ([2]).— *Soient g une algèbre de Lie, I et J deux idéaux de g. Si I et J sont semi-simples, l'idéal $I + J$ est semi-simple.*

COROLLAIRE .— *Toute algèbre de Lie a un plus grand idéal semi-simple.*

PROPOSITION 5.— *Soit g une algèbre de Lie sympathique, et soit S son plus grand idéal semi-simple. Il existe un idéal sympathique I tel que $g = S \oplus I$, et I n'a pas d'autre idéal semi-simple que $\{0\}$.*

Preuve

S étant un idéal semi-simple de g est facteur direct, d'où l'existence de I qui est sympathique d'après la proposition 2. Tout idéal semi-simple de I est un idéal semi-simple de g, donc contenu dans $S \cap I = \{0\}$. □

Remarque. — La proposition 5 ramène l'étude des algèbres sympathiques à celles qui n'ont pas d'autre idéal semi-simple que $\{0\}$. Combinant avec le théorème 1, on voit qu'une telle algèbre se réduit en somme directe d'idéaux sympathiques irréductibles non simples.

Conclusion

Certaines propriétés classiques importantes des algèbres de Lie semi-simples restent vraies pour les algèbres de Lie sympathiques. Bien sûr, il en est aussi qui disparaissent, comme par exemple le théorème de Weyl de complète reductibilité (voir la remarque (2), après la définition 2). Une question intéressante est la suivante : les algèbres de Lie sympathiques sont-elles rigides (ou mieux, a-t-on : $H^2(g, g) = \{0\}$?) comme c'est le cas pour les algèbres semi-simples? Nous répondrons à cette question dans un prochain article.

Remerciements

Je remercie les Professeurs M. Flato et G. Pinczon qui m'ont suggéré ce sujet d'étude et m'ont encouragé et conseillé pendant son développement.

Reférences

[1] ANGELOPOULOS (E.) . — *Algèbres de Lie satisfaisant* $g = [g, g]$, $\mathrm{Der}(g) = \mathrm{ad}(g)$, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 306 (1988), pp. 523-525.

[2] BOURBAKI (N.) . — *Groupes et algèbres de Lie*, Hermann Paris, chap. 1 (1971).