Annales de la faculté des sciences de Toulouse

Abdelwaheb Charfi

Représentation non linéaire du groupe affine complexe

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 12, nº 1 (1991), p. 61-73

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1991_5_12_1_61_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XII, n° 1, 1991

Représentation non linéaire du groupe affine complexe

ABDELWAHEB CHARFI[1]

RÉSUMÉ. — On montre qu'une représentation non linéaire du groupe affine du plan complexe est formellement linéarisable quand sa partie linéaire est une représentation unitaire irréductible de dimension infinie, l'espace de la représentation étant l'ensemble des fonctions différentiables à support compact.

ABSTRACT. — We prove that a non linear representation of the affine group of the complex plane, which linear part is an infinite dimensional unitary irreducible representation, is formally linearizable on the space of infinitely differentiable function with compact support.

1. Introduction

L'évolution de plusieurs systèmes physiques est décrite par les solutions d'une équation différentielle autonome, covariante par un groupe de transformation. Un exemple célèbre étant celui des équations relativistes dont la forme est

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\phi_t = A\phi_t \tag{H}$$

où A est un opérateur différentiel (linéaire ou non linéaire) sur E, l'espace vectoriel des conditions initiales, à savoir un espace de fonctions de $\mathbb{R}^3$ vers un espace vectoriel de dimension finie, l'opérateur A admettant un point fixe $\big(A(0) = 0\big)$. Ces équations sont covariantes par le groupe de Poincaré qui est le produit semi-direct

$$P = T_4 \boxplus SL(2, \mathbb{C})\,.$$

[1] E.N.I.S. Sfax, BP 3038, Tunisie.

Autrement dit, si $g = (a, \Lambda) \in P$ et ϕ_t une solution de H dans E, en posant

$$(S_g \phi_0)(x) = \Psi\big[(-a, \Lambda)^{-1}(0, x)\big] \quad \text{avec} \quad \psi(t, x) = \phi_t(x)$$

et en notant par P_0 le générateur temps de P, on a alors $S_g(0) = 0$ et, de la coraviance de l'équation, on obtient $S_{gg'} = S_g S_{g'}$, et l'opérateur A serait :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(S_{\exp tP_0}\right)\Big|_{t=0} .$$

Quand l'opérateur A n'est pas linéaire, une notion de linéarisation des représentations non linéaires des groupes introduite par M. Flato, J. Simon et G. Pinczon [1] permet de déduire dans certains cas les solutions de (H) de celles de l'équation linéaire associée.

La relation entre la théorie des représentations non linéaires des groupes de covariance et les équations linéaires associées est bien développée dans [2-4] ainsi que des théorèmes de linéarisation pour des équations non linéaires relativistes [3].

Soit E un espace vectoriel topologique, on note par $L_n(E)$ l'espace des applications n-linéaires symétriques continues de E^n dans E, et par $\mathcal{F}(E)$, l'espace des séries formelles sur E de la forme :

$$f = \sum_{n \geq 1} f_n , \quad \text{où} \quad f_n \in L_n(E) .$$

DÉFINITION 1.— *On dit que (S, E) est une représentation formelle du groupe de Lie G dans un espace vectoriel topologique E, si S est un homéomorphisme de G dans le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{F}(E)$ (pour la loi de composition des séries formelles usuelles), de plus si pour $g \in G$,*

$$S_g = \sum_{n \geq 1} S_g^n \quad \textit{et} \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in E^n ,$$

l'application

$$g \to S_g^n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

est mesurable (donc continue si E est un Banach [1]).

La représentation linéaire S^1 est appelée la partie libre ou linéaire de S (si de plus E est un Banach et s'il existe un voisinage $V(e) \subset G$ tel que pour tout $g \in V(e)$, S_g est analytique dans un voisinage de 0, U_g, on dit que (S, E) est analytique).

DÉFINITION 2.— *Deux représentations formelles (S, E) et (S', E) de G sont équivalentes, s'il existe un opérateur inversible $A \in \mathcal{F}(E)$ tel que, pour tout $g \in G$,*

$$S'_g = A S_g A^{-1} .$$

En particulier, (S, E) est dite linéarisable si et seulement si elle est équivalente à sa partie linéaire.

Dans cet article, on considère une représentation formelle du groupe affine W du plan complexe, qui est le groupe des transformations :

$$z \to az + b , \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}$$

l'algèbre de Lie réelle associée est engendrée par les translations X_1, X_2, les rotations M et les homothéties D avec les relations de commutations suivantes :

$$[M, X_1] = +X_2 , \quad [M, X_2] = -X_1 ,$$
$$[X_1, X_2] = 0 , \quad [D, M] = 0$$

et

$$[D, X_i] = X_i , \quad \text{pour } i = 1 \text{ ou } 2 .$$

Le groupe W peut être interprété comme étant le produit semi-direct suivant

$$W = \mathbb{R}^+ \boxplus (\mathbb{R}^2 \boxplus SO(2)) .$$

Il est prouvé dans [5] que toute représentation analytique de W dans un espace de Hilbert (dénombrable), dont la partie linéaire est unitaire irréductible de dimension infinie, est formellement linéarisable si et seulement si son terme d'ordre 2 l'est.

Dans cet article, on montre en fait qu'une telle représentation est linéarisable sur l'espace des fonctions C^∞ à support compact sur l'orbite Ω définissant la représentation linéaire associée.

En fait, on montre que

$$H^1(\underline{W}, L_n(E')) = 0 , \quad \text{où} \quad E' = C_C^\infty(\Omega) \text{ et } n \geq 2$$

ce qui est suffisant d'après [2].

On remarque que la nullité de $H^1(G\,,\,L_n(E))$ est suffisante mais non nécessaire, dans [8], l'auteur donne un contre exemple de représentation formelle du groupe euclidien qui est linéarisable mais dont le groupe de 1-cohomologie associé à la partie linéaire de la représentation n'est pas nul.

2. Structure et dual de W

W peut être interprété comme :

$$\begin{aligned} W &= \mathbb{R}^2 \boxplus (\mathbb{R}^+ \times SO(2)) \\ &= H \boxplus K\,, \quad \text{où} \quad H = \mathbb{R}^2 \text{ et } K = \mathbb{R}^+ \times SO(2)\,; \end{aligned}$$

un élément $g = (h, k) \in W$ s'écrit :

$$g = (t, \delta, r)\,, \quad \text{où} \quad t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2\,,\ r \in \mathbb{R} \text{ et } \delta > 0\,.$$

g est représenté par l'élément de $SL(2, \mathbb{C})$:

$$\begin{pmatrix} \delta\, e^{ir} & t_1 + it_2 \\ 0 & \delta^{-1}\, e^{-ir} \end{pmatrix}.$$

H étant un sous-groupe abélien normal et fermé de G, on applique la méthode de Mackey (induction par étage) :

on note $p = (p_1, p_2) \in H$; l'action de $k = (\delta, r)$ sur p est définie par :

$$k(p) = j\big(\delta^2\, e^{-2ir}(p_1 + ip_2)\big)\,, \quad \text{où} \quad j(a + ib) = (a, b) \in \mathbb{R}^2\,;$$

d'où deux types d'orbites :

- $p = 0$, $\Omega = \{0\}$ l'orbite de stabilisateur K ;
- $p \neq 0$, $\Omega = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ l'orbite de stabilisateur $S = \{\pm id\}$;

c'est le deuxième type d'orbite qu'on considère, c'est-à-dire la représentation : $\Big(U\,,\, L^2(\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\})\Big)$ définie par

$$g = (t, \delta, r) \in W\,, \quad f \in L^2\left(\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}\right) \quad \text{et} \quad p = (p_1, p_2) \in \Omega\,,$$
$$(U_g f)(p) = \delta\, e^{i\langle p\,,\, j(\delta t\, e^{ir})\rangle} f \circ j\big(\delta^2\, e^{-2ir}(p_1 + ip_2)\big)\,,$$

où $\langle \cdot\,,\, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire habituel dans $\mathbb{R}^n$. Les relations définissant les opérateurs infinitésimaux sur l'ensemble des fonctions différentiables à support compact sont

$$x \in \Omega\,, \quad f \in C_C^\infty(\Omega)\,,$$

alors

$$(\mathrm{d}U_{X_j} f)(x) = ix^j f(x)\,, \quad j = 1, 2\,,$$
$$(\mathrm{d}U_M f)(x) = x^2 \frac{\partial f}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2}\,,$$
$$(\mathrm{d}U_D f)(x) = \frac{1}{2} f(x) + x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1}(x) + x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2}(x)\,;$$

on les obtient à partir de

$$(\mathrm{d}U_X f)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U_{\exp tX} f)(x)\Big|_{t=0}\,.$$

3. Espace de 1-cohomologie de W

Soit E un espace de Hilbert et a un réel positif. On note

$$L^2\big([-a\,,\,a]\,,\,E\big)$$

l'espace des fonctions de carré intégrable de $\mathbb{R}$ dans E (pour la mesure de Lebesgue) et de support dans $[-a\,,\,a]$; on note

$$L^2_C(\mathbb{R}, E)$$

l'espace des fonctions de carré intégrable de $\mathbb{R}$ dans E à support compact. On montre dans ([6], sect. I, propo. 4) que l'espace

$$\widehat{\bigotimes}^n_\pi L^2_C(\mathbb{R}, E)$$

est une limite inductive stricte des espaces

$$\widehat{\bigotimes}^n_\pi L^2\big([-a\,,\,a]\,,\,E\big)\,,$$

de plus, une application linéaire A de $\widehat{\bigotimes}^n_\pi L^2_C(\mathbb{R}, E)$ dans $L^2(\mathbb{R}, E)$ est continue si et seulement si :

pour tout $a > 0$, sa restriction A_a à $\widehat{\bigotimes}^n_\pi L^2\big([-a\,,\,a]\,,\,E\big)$ est continue; on définit alors les semi-normes

$$P_a(A) = \|A\|_a\,.$$

On note de même par $C_C^\infty(\mathbb{R}^n, E)$ le L.F-espace des fonctions C^∞ à support compact de $\mathbb{R}^n$ dans E et par $\mathcal{D}_{L^2}(E)$ l'espace de Fréchet des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans E qui sont dans $L^2(\mathbb{R}, E)$ ainsi que leurs dérivées.

On pose

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, E) = L\left(\widehat{\bigotimes}_\pi^n L_C^2(\mathbb{R}, E)\,,\ L^2(\mathbb{R}, E)\right) \cap L\left(\widehat{\bigotimes}_\pi^n C_C^\infty(\mathbb{R}, E)\,,\ \mathcal{D}_{L^2}(E)\right).$$

On a les isomorphes topologiques (cf. [6], sect. II, pp. 82-83) :

$$C_C^\infty(\mathbb{R}, E) = C_C^\infty(\mathbb{R}) \otimes E\,,$$
$$\widehat{\bigotimes}_\pi^n C_C^\infty(\mathbb{R}, E) = C_C^\infty(\mathbb{R}^n) \otimes \left(\widehat{\bigotimes}_\pi^n E\right),$$

d'où

$$\widehat{\bigotimes}_\pi^n C_C^\infty(\mathbb{R}, E) = C_C^\infty\left(\mathbb{R}^n\,,\ \widehat{\bigotimes}_\pi^n E\right).$$

On identifie dans toute la suite $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}^+$ (exponentielle) et $C_C^\infty(\mathbb{R}, E)$ (resp. $C_C^\infty(\mathbb{R}^n, E)$) à $C_C^\infty(\mathbb{R}^+, E)$ (resp. $C_C^\infty\big((\mathbb{R}^+)^n, E\big)$) par l'application

$$g \to f : \big(x \to f(x) = e^{x/2} g(e^x)\big)\,.$$

LEMME 3.1.— *Soit $B \in \mathcal{L}\big((\mathbb{R}^+)^n, E\big)$, il existe $F \in \mathcal{L}\big((\mathbb{R}^+)^n, E\big)$ telle que :*
pour tout $f \in C_C^\infty\big([\,1/a\,,\,a\,]^n\,,\ \widehat{\bigotimes}_\pi^n E\big)$ on ait

$$B(f) = \left[\mathrm{d}U_D F - F\,\mathrm{d}\Big(\bigotimes^n U\Big)_D\right](f)\,.$$

Preuve

Si f est définie presque partout sur $\mathbb{R}^+$ et $\lambda > 0$, on pose

$$(\theta_\lambda f)(x) = \sqrt{\lambda}\, f(\lambda x)\;;$$

l'application

$$(\lambda, f) \to \theta_\lambda f$$

est une représentation linéaire continue de $\mathbb{R}^+$ dans $L^2(\mathbb{R}^+, E)$ (resp. $C_C^\infty(\mathbb{R}^+, E)$), le produit tensoriel $\widehat{\bigotimes}_\pi^n \theta_\lambda$ s'étend à une représentation continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\widehat{\bigotimes}_\pi^n L^2(\mathbb{R}^+, E)$ (resp. $\widehat{\bigotimes}_\pi^n C_C^\infty(\mathbb{R}^+, E) \simeq C_C^\infty\big((\mathbb{R}^+)^n, \widehat{\bigotimes}_\pi^n E\big)$).

On choisit une fonction C^∞ sur $(\mathbb{R}^+)^n$, X^+ telle que

$$X^+(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \phi^+(x_1) \geq 0$$

avec ϕ^+ nulle sur $[0, 1/e]$ et égale à 1 sur $[e, +\infty[$; on note

$$\phi^- = 1 - \phi^+ \quad \text{et} \quad X^- = 1 - X^+ .$$

Soit $B \in \mathcal{L}\big((\mathbb{R}^+)^n, E\big)$. On pose

$$I_\lambda^+ = \theta_\lambda B X^- \Big(\bigotimes^n \theta_{\lambda^{-1}}\Big) \quad \text{et} \quad I_\lambda^- = \theta_\lambda B X^+ \Big(\bigotimes^n \theta_{\lambda^{-1}}\Big) \ ;$$

Pour $f \in \widehat{\bigotimes}_\pi^n C_C^\infty(\mathbb{R}^+, E)$, l'application

$$\lambda \to \bigotimes^n \theta_\lambda f$$

est C^∞ de $\mathbb{R}^+$ vers $\widehat{\bigotimes}_\pi^n C_C^\infty(\mathbb{R}^+, E)$, et l'application

$$\lambda \to \theta_\lambda g \quad \big(g \in \mathcal{D}_{L^2}(E)\big)$$

est C^∞ de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathcal{D}_{L^2}(E)$.

Comme conséquence du théorème de Banach-Steinhauss, l'application

$$\lambda \to I_\lambda^+ \quad (\text{ou } \lambda \to I_\lambda^-)$$

est C^∞ de $\mathbb{R}^+$ dans $L\Big(\widehat{\bigotimes}_\pi^n C_C^\infty(\mathbb{R}^+, E)\, , \mathcal{D}_{L^2}(E)\Big)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Soit $a > 1$ et $f \in C_C^\infty\big([1/a\, , a]^n\, , \widehat{\bigotimes}_\pi^n E\big)$ alors :

$$\begin{cases} \text{si } \lambda > ae, & \text{on a } I_\lambda^+ f = 0 \\ \text{si } \lambda < {}^1/_{ae}, & \text{on a } I_\lambda^- f = 0; \end{cases}$$

de plus $X^\pm(\bigotimes^n \theta_{\lambda^{-1}}) f \in C_C^\infty\Big([{}^1/_{a^2 e}\, , a^2 e]^n\, , \widehat{\bigotimes}_\pi^n E\Big)$ si $\lambda \in [{}^1/_{ae}\, , ae]$.

On peut par conséquent définir

$$F^+ = -\int_1^{+\infty} I_\lambda^+ \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} \quad \text{et} \quad F^- = \int_0^1 I_\lambda^- \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}$$

qui ont un sens dans $\mathcal{L}\big((\mathbb{R}^+)^n, E\big)$.

On a alors :

- d'une part $\theta_\lambda f = U_{\exp(\log\lambda)D} f$ pour $\lambda > 0$ et par suite

$$\frac{\mathrm{d}(\theta_\lambda f)}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{1}{\lambda}\, \mathrm{d}U_D(\theta_\lambda f)\ ;$$

- d'autre part et en dérivant $I_\lambda^+ f$ par rapport à λ, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\theta_\lambda B\Big(X^-\Big(\bigotimes^n \theta_{\lambda^{-1}}\Big)\Big) f\right) &= \frac{1}{\lambda}\mathrm{d}U_D\left(\theta_\lambda B\Big(X^-\Big(\bigotimes^n \theta_{\lambda^{-1}}\Big)\Big) f\right)\\ &\quad - \frac{1}{\lambda}\theta_\lambda B\Big(X^-\Big(\bigotimes^n \theta_{\lambda^{-1}}\Big)\Big)\, \mathrm{d}\Big(\bigotimes^n U\Big)_D(f).\end{aligned}$$

En intégrant de deux façons par rapport à λ sur $[\,1\,,+\infty\,[$ on obtient :

- d'une part $-\big[I_\lambda^+ f\big]_1^{+\infty} = I_1^+(f) = B(X^- f)$,
- et d'autre part $\mathrm{d}U_D F^+(f) - F^+\,\mathrm{d}\big(\bigotimes^n U\big)_D(f)$;

On obtient de la même manière

$$\mathrm{d}U_D F^-(f) - F^-\,\mathrm{d}\Big(\bigotimes^n U\Big)_D(f) = I_1^-(f) = B(X^+ f)\,,$$

d'où en posant $F = F^+ + F^-$ et, sachant que $X^+ + X^- = 1$, on aura

$$B(f) = \mathrm{d}U_D F(f) - F\,\mathrm{d}\Big(\bigotimes^n U\Big)_D(f)\,. \ \square$$

LEMME 3.2. — *Dans les conditions du lemme 3.1, si on a de plus pour tout* $f \in C^\infty\left(\left[\frac{1}{a}\,, a\right]^n, \widehat{\bigotimes}^n_\pi E\right)$, $\quad B(f) \in C^\infty\left(\left[\frac{1}{C_a}\,, C_a\right], E\right)$, *alors*

$$F(f) \in C^\infty\left(\left[\frac{1}{aeC_{a^2e}}\,, aeC_{a^2e}\right], E\right) \quad \textit{et} \quad P_a(F) \le 2\log(ae) P_{a^2e}(B)\,.$$

Preuve

- Soit $\lambda \in [\,{}^1/_{ae}\,, ae\,]$, alors

$$(I_\lambda^\pm f)(x) = \sqrt{\lambda}\, B\Big(X^\mp \bigotimes^n \theta_{\lambda^{-1}} f\Big)(\lambda x)$$

et comme $X^{\pm} Bigl(\bigotimes^n \theta_{\lambda^{-1}}\Big) f \in C^{\infty}\Big([\,^1/_{a^2e}\,,\, a^2e\,]^n\,,\, \bigotimes^n E\Big)$, alors :

si $\lambda x > C_{a^2e}$ ou $\lambda x < \dfrac{1}{C_{a^2e}}$, on a $(I_\lambda^{\pm} f)(x) = 0$;

donc :

si $x > aeC_{a^2e}$ ou $x < \dfrac{1}{aeC_{a^2e}}$, on a $(I_\lambda^{\pm} f)(x) = 0$;

ainsi

$$(I_\lambda^{\pm} f) \in C^{\infty}\left(\left[\frac{1}{aeC_{a^2e}}\,,\, aeC_{a^2e}\right],\, E\right)$$

et

$$F(f) \in C^{\infty}\left(\left[\frac{1}{aeC_{a^2e}}\,,\, aeC_{a^2e}\right],\, E\right).$$

• D'autre part :

$$\begin{aligned} P_a(F^+) &\le \int_1^{+\infty} P_a(I_\lambda^+)\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} \\ &\le \int_1^{ae} P_{a^2e}(B)\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} \\ &\le \log(ae)P_{a^2e}(B)\,, \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned} P_a(F^-) &\le \int_0^{1} P_a(I_\lambda^-)\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} \\ &\le \int_{\frac{1}{ae}}^{1} P_{a^2e}(B)\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} \\ &\le \log(ae)P_{a^2e}(B)\,. \end{aligned}$$

d'où $P_a(F) \le 2\log(ae)P_{a^2e}(B)$. □

Soit (U, H) une représentation unitaire irréductible de dimension infinie de W. Après équivalence unitaire, on peut supposer que $H = L^2\big(\mathbb{R}^+, L^2(S^1)\big)$ espace des fonctions de carré intégrables (pour la mesure de Lebesgue) sur $]\,0\,,\,+\infty\,[\; = \mathbb{R}^+$ dans l'espace E des fonctions de carré intégrables sur S^1 (pour la mesure $^{\mathrm{d}\theta}/_{2\pi}$).

L'espace $C_C^{\infty}\big(\mathbb{R}^+, E\big)$ identifié à $C_C^{\infty}\big(\mathbb{R}, E\big)$ est contenu dans H_∞, on note $\mathrm{d}U$ la différentielle de U sur $C_C^{\infty}\big(\mathbb{R}, E\big)$.

Soit $H_n = L\Big(\widehat{\bigotimes}{}_\pi^n C_C^{\infty}\big(\mathbb{R}, E\big)\,,\, C_C^{\infty}\big(\mathbb{R}, E\big)\Big)$, $f \in H_n$ et $X \in \underline{W}$. On pose

$$V_X f = \mathrm{d}U_X f - f\mathrm{d}\Big(\bigotimes^n U\Big)_X\,.$$

L'application $X \to V_X$ est une représentation de $\underline{W}$ dans

$$H_n = L\Big(\bigotimes^n C_C^\infty\big((\mathbb{R}^+)^2 \setminus \{(1,1)\}\,,\, C_C^\infty\big((\mathbb{R}^+)^2 \setminus \{(1,1)\}\Big)$$

à laquelle on associe l'espace $Z^1(\underline{W}, H_n)$ des 1-cocycles de $\underline{W}$ à coefficients dans H_n, c'est l'espace des applications linéaires continues

$$X \to B(X)$$

de $\underline{W}$ dans H_n, vérifiant pout tout X, $Y \in \underline{W}$,

$$B[X\,,\,Y] = V(X)B(Y) - V(Y)B(X)\ ;$$

l'espace des 1-cobords est le sous-espace vectoriel des éléments $B \in Z^1(\underline{W}, H_n)$ de la forme :

$$B(X) = V(X)Y \quad \text{pour un certain} \quad Y \in H_n\,.$$

Proposition 3.1.— *Soit $B \in Z^1(\underline{W}, H_n)$, il existe $F \in H_n$ tel que*

$$B(D) = V(D)F \quad \textit{et} \quad B(X_i) = V(X_i)F\,, \quad i = 1, 2\,.$$

Preuve.— D'après les lemmes 3.1 et 3.2, il existe F tel que $B_D = V(D)F$; par ailleurs, on a $[\,D\,,\,X_i\,] = X_i$, ainsi on a

$$B[\,D\,,\,X_i\,] = B(X_i) = V(D)B(X_i) - V(X_i)B(D)\ ;$$

par suite

$$V(D)\big(B(X_i) - V(X_i)F\big) = B(X_i) - V(X_i)F\,,$$

donc

$$U_{\exp \lambda D}\big(B(X_i) - V(X_i)F\big) \bigotimes^n U_{\exp -\lambda D} = B(X_i) - V(X_i)F\ ;$$

ainsi

$$\theta_{e^\lambda}\big(B(X_i) - V(X_i)F\big)\Big(\bigotimes^n \theta_{e^{-\lambda}}\Big) = B(X_i) - V(X_i)F\ ;$$

alors pour tout $f \in \widehat{\bigotimes}_\pi^n C_C^\infty(\mathbb{R}^+, E)$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\left[\big(B(X_i) - V(X_i)F\big)\Big(\bigotimes^n \theta_{e^{-\lambda}}\Big) f\right](e^\lambda x) = e^{-\frac{\lambda}{2}}\big(B(X_i) - V(X_i)F\big)(f)(x)$$
$$= 0$$

si λ est assez grand, donc $B(X_i) = V(X_i)F$. □

PROPOSITION 3.2.— *Soit n un entier supérieur ou égal à 2, alors :*

$$H^1(W, H_n) = 0\,.$$

Preuve.— Tout élément g de W s'écrit :

$$g = mk \quad \text{où} \quad m \in \mathbb{R}^+ \boxplus \mathbb{R}^2 \text{ et } k \in SO(2)\,.$$

Soit $b \in Z^1(W, H_n)$, donc $b|_{\mathbb{R}^+ \boxplus \mathbb{R}^2} \in Z^1(\mathbb{R}^+ \boxplus \mathbb{R}^2\,,\, H_n)$, d'après la proposition précédente :

$$b|_{\mathbb{R}^+ \boxplus \mathbb{R}^2} \in B^1(M, H_n)\,,$$

plus précisément l'application b vérifie :

$$\text{pour tout } m \in M\,, \quad b_m = U_m F\Big(\bigotimes^n U_{m^{-1}}\Big) - F\,,$$

ainsi le cocycle b' défini par

$$b'_g = b_g - \Big(U_g F\Big(\bigotimes^n U_{g^{-1}}\Big) - F\Big)$$

est nul sur M; par ailleurs, le groupe W ayant une moyenne invariante et l'application b' étant bornée (car continue et nulle sur M, et K est compact), on pose alors

$$F' = -\int_W b'_g \,\mathrm{d}g$$

(d étant une moyenne invariante sur W); on a par suite

$$\begin{aligned} U_g F'\Big(\bigotimes^n U_{g^{-1}}\Big) &= -\int_W U_g b'_{g'}\Big(\bigotimes^n U_{g^{-1}}\Big)\,\mathrm{d}g' \\ &= \int_W (b'_{gg'} - b_g)\,\mathrm{d}g' \\ &= F' + b'_g\,; \end{aligned}$$

alors pour $g \in W$, on a

$$b'_g = U_g F'\Big(\bigotimes^n U_{g^{-1}}\Big) - F'$$

et par conséquent

$$b_g = U_g(F + F') \bigotimes^n U_{g^{-1}} - (F + F') \ ;$$

de plus, pout tout $f \in \widehat{\bigotimes}_\pi^n C^\infty([\,1/a\,,\,a\,])$ $(a > 1)$, on a

$$P_a(F') \leq \int_W P_a(b'_g)\,\mathrm{d}g \ ;$$

or b' étant borné sur W, par exemple par b'_{g_0}, ainsi on obtient

$$P_a(F') \leq P_a(b'_{g_0}) \ ;$$

donc d'après le lemme 3.2, F, F' et $F + F'$ sont continues pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, d'où le résultat. □

Remarques

1) Tous les résultats établis précédemment restent valables si on considère la partie linéaire une intégrale directe de représentations irréductibles de dimensions infinie de W et unitaires dans un espace de Hilbert.

2) D'après [5], on aurait pu se limiter dans toutes les démonstrations au cas $n = 2$, seulement les calculs et les raisonnements demeurent les mêmes et sans le moindre changement.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma reconnaissance au Professeur Jacques Simon qui a dirigé mes recherches en me prodiguant suggestions et encouragements.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude au Professeur Moshé Flato pour l'aide qu'il m'a apporté et les precieux conseils qu'il m'a donnés.

Bibliographie

[1] FLATO (M.), PINCZON (G.) et SIMON (J.) .— *Non linear representations of Lie groups,*
Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **10** (1977), pp. 405-418.

[2] FLATO (M.) et SIMON (J.) .— *Non linear equation and covariance,*
Lett. in Math. Phys. **2** (1977), pp. 155-160.

[3] FLATO (M.) et SIMON (J.) .— *Linearization of relativistic nonlinear wave equations,*
J. Math. Phys. **21** (1980), pp. 913-917.

[4] FLATO (M.) et SIMON (J.) .— *On a linearization program of non linear field equations,*
Phys. Lett. **94** (1980), pp. 518-522.

[5] SIMON (J.) .— *Non linear representations and the affine group of the complexe plane,*
Lectures in Applied Mathematics, vol. 21 (1985).

[6] GROTENDIK (A.) .— *Produit tensoriel topologique et espaces nucléaires,*
Mémoire A.M.S. **16** (1955).

[7] PINCZON (G.) et SIMON (J.) .— *Extension of representations and cohomology,*
Rep. Math. Phys. **16** (1979), pp. 49-77.

[8] SIMON (J.) .— *Non linear representations of the Euclidean group of the plane,*
Preprint, Université de Dijon, France.