ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

DIDIER ARNAL
MABROUK BEN AMMAR
MOHAMED SELMI

Le problème de la réduction à un sous-groupe dans la quantification par déformation

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 12, nº 1 (1991), p. 7-27
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1991_5_12_1_7_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XII, n° 1, 1991

Le problème de la réduction à un sous-groupe dans la quantification par déformation

DIDIER ARNAL[(1)], MABROUK BEN AMMAR[(2)], MOHAMED SELMI[(3)]

RÉSUMÉ. — Le produit associatif "de Berezin" des fonctions sur le dual $\underline{g}^*$ de l'algèbre de Lie $\underline{g}$ d'un groupe de Lie compact G permet de définir des représentations * au sens de Fronsdal et une exponentielle *, qui est une fonction sur $G \times \underline{g}^*$. Avec cette exponentielle *, on sait généraliser la transformée de Fourier usuelle en ce qu'on appelle la transformée de Fourier adaptée. On établit ici une version de la formule de sommation de Poisson qui donne une première description de cette transformée de Fourier adaptée d'un sous-groupe K de G.

ABSTRACT. — Berezin defined a symbolic calculus, which can be seen as an associative product on some space of functions on the dual $\underline{g}^*$ of the Lie algebra $\underline{g}$ of a compact Lie group G. This allows us to define *-representations and *-exponential in the sense of Fronsdal. This later is a function on $G \times \underline{g}^*$. We generalize with it the usual Fourier transform in what we call the adapted Fourier transform. We give here a Poisson formula which is the first description of this adapted Fourier transform for a subgroup K of G.

0. Introduction

Rappelons la formule de sommation de Poisson : soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ alors :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(y+2k\pi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F(k)\, e^{-iky} \tag{1}$$

(1) Université de Metz, Ile du Saulcy, 57045 Metz Cedex, France.

(2) E.N.I.S, BP W, 3038 Sfax, Tunisie.

(3) E.N.I.S, BP W, 3038 Sfax, Tunisie.

où F est la transformée de Fourier de f. Cette formule peut être interprétée de la façon suivante : $\mathbb{R}$ est un groupe de Lie, d'algèbre de Lie $\underline{g} = \mathbb{R}$ (l'application exponentielle étant l'identité), f est une fonction sur le dual de $\underline{g}$, la fonction Tf définie par :

$$Tf(y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} F(k)\, e^{-iky}$$

est la transformée de Fourier de la restriction de F à $\mathbb{Z}$, sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$, cette transformée de Fourier étant celle du groupe $\mathbb{Z}$. La formule de Poisson (1) relie directement f à Tf et donne en particulier le résultat suivant :

$$\text{supp}(Tf) \text{ est inclus dans } \text{supp}(f) + 2\pi\mathbb{Z}\,.$$

Le but de ce travail est d'étudier l'équivalent de la transformation T pour un groupe de Lie G d'algèbre de Lie $\underline{g}$ ayant un sous-groupe de Lie fermé K. Pour cela, il faut déjà définir la transformée de Fourier d'un groupe de Lie G. la transformée de Fourier usuelle d'une fonction F C^∞ à support compact sur G est le champ d'opérateurs sur $\widehat{\mathrm{G}}$, dual unitaire de G :

$$\rho \longrightarrow \rho(F) = \int_G F(g)\, \rho(g)\, \mathrm{d}g\,.$$

Le lien de cette transformée avec $\underline{g}^*$ est donné par la formule du caractère de Kirillov [4] qui associe à la représentation ρ une orbite O de la représentation coadjointe de G dans $\underline{g}^*$:

$$Tr\,\rho\left(F \cdot (j)^{\frac{1}{2}} \right) = \int_O \widehat{F}\, \mathrm{d}\mu\,. \tag{2}$$

Dans cette formule, la fonction j est définie par :

$$j(\exp X) = \det\left(\frac{\mathrm{sh\,ad}\,\frac{X}{2}}{\mathrm{ad}\,\frac{X}{2}} \right),$$

μ est la mesure de Liouville sur O et $\widehat{F}$ la transformée de Fourier de la fonction $F_0 \exp$ définie sur $\underline{g}$.

Nous nous intéressons ici au cas des groupes compacts connexes. La formule (2) provient d'une relation :

$$\chi_\rho(\exp X)\, j(\exp X)^{\frac{1}{2}} = \int_O e^{i\langle X\,,\,\xi\rangle}\,\mathrm{d}\mu(\xi)$$

où X appartient à $\underline{\mathrm{g}}$ et est tel que j est défini, et χ_ρ est le caractère de la représentation ρ.

Dans ce formalisme, le problème de la réduction à un sous-groupe de Lie K peut être décrit géométriquement en termes d'orbites de $\underline{\mathrm{g}}^*$ et de $\underline{\mathrm{k}}^*$ grâce à l'application moment. Citons à ce sujet les travaux de Kostant [5], Guillemin-Sternberg [3] et M. Vergne [7]. Cependant le lien entre F et le support de sa transformée de Fourier usuelle est obscurci par la présence de la fonction j.

Dans ce papier, nous considérons plutôt la transformation de Fourier adaptée de G. On quantifie $\underline{\mathrm{g}}^*$ en introduisant une nouvelle structure d'algèbre associative de fonctions sur $\underline{\mathrm{g}}^*$, grâce à un produit dit produit $*$. Ceci permet de définir une "exponentielle $*$" $E_G(g)$ (ξ), fonction à valeurs complexes définie pour tout g de G et tout ξ de $\underline{\mathrm{g}}^*$ qui permet de poser :

$$f(\xi) = \widehat{F}(\xi) = \int_G F(g)\, E_G(g^{-1})\,(\xi)\,\mathrm{d}g \qquad (F \in C_c^\infty(G))\,.$$

La transformée réciproque est alors simplement :

$$F(g) = \int_{\underline{\mathrm{g}}^*} (f * E_G(g))\,(\xi)\,\mathrm{d}\mu(\xi)\,.$$

Cette transformation est alors telle que si F est un coefficient d'une représentation ρ, le support de $\widehat{F}$ est concentré sur l'orbite O associée à ρ. De plus :

$$Tr\,\rho(F) = \int_O \widehat{F}(\xi)\,\mathrm{d}\mu(\xi)\,.$$

Cette formule, analogue à celle de Kirillov, a le mérite de ne pas nécessiter l'introduction de la fonction j. Si maintenant G est compact connexe et K un sous-groupe de Lie fermé connexe de G, on pose :

$$F(k) = \int_{\underline{\mathrm{g}}^*} (f * E_G(k))\,(\xi)\,\mathrm{d}\mu(\xi)\,, \qquad \forall\, f \in C_c^\infty(\underline{\mathrm{g}}^*)\,,\ k \in K$$

puis :

$$(Tf)(\eta) = \int_K F(k)\, E_K(k^{-1})(\eta)\, \mathrm{d}k\,.$$

Un des résultats de cet article est :

THÉORÈME . — *Si G et K sont des groupes de Lie connexes et compacts, si q est la projection canonique de $\underline{\mathbf{g}}^*$ sur $\underline{\mathbf{k}}^*$ et est $\cdot$ l'action coadjointe de G sur le support de f, alors :*

$$\operatorname{supp} Tf \subset q\,(G \cdot \operatorname{supp} f)\,.$$

En passant on définit des coefficients symboliques et le caractère symbolique d'une représentation de K dans l'algèbre des symboles sur une orbite O de $\underline{\mathbf{g}}^*$ et on montre que la dimension de la composante isotypique d'une représentation σ est l'intégrale de son caractère symbolique sur l'orbite O.

1. Théorème de Borel – Weil – Bott

Nous rappelons dans ce paragraphe le théorème de Borel-Weil-Bott qui permet de réaliser toute représentation unitaire irréductible d'un groupe de Lie compact simplement connexe comme représentation dans l'espace des sections holomorphes d'un certain fibré vectoriel.

Soient G un groupe de Lie compact, connexe et simplement connexe, H le centralisateur d'un tore T_1 de G et T un tore maximal contenant T_1. On désigne par $\underline{\mathbf{t}}_1^{\mathbb{C}}, \underline{\mathbf{t}}^{\mathbb{C}}, \underline{\mathbf{h}}^{\mathbb{C}}$ et $\underline{\mathbf{g}}^{\mathbb{C}}$ les algèbres de Lie complexifiées respectivement de T_1, T, H et G. Une structure complexe sur la variété homogène $W = {G}/{H}$ peut-être construite de la façon suivante.

- Soit C (respectivement C_1) une chambre de Weyl de T relativement à G (respectivement H) tel que si $\triangle$ (respectivement $\triangle_1$) est le système des racines simples de $\underline{\mathbf{g}}^{\mathbb{C}}$ (respectivement $\underline{\mathbf{h}}^{\mathbb{C}}$) relativement à C (respectivement C_1) alors $\triangle_1$ est inclus dans $\triangle$ [8]. C est alors dite T_1 admissible. On désigne par Φ^+ l'ensemble des racines positives, par Φ_1 celles qui sont combinaisons linéaires entières d'éléments de $\triangle_1$ et par N_1^- le sous-groupe analytique connexe de $G^{\mathbb{C}}$ d'algèbre de Lie :

$$\underline{\mathbf{n}}_1^- = \sum_{\beta \in \Phi^+ - \Phi_1} \underline{\mathbf{g}}^{-\beta} \quad \text{alors on a} \quad W = {G}/{H} \simeq {G^{\mathbb{C}}}/{H^{\mathbb{C}} N_1^-} \quad [8]\,.$$

Notons de même $\underline{\mathbf{n}}_1^+$ l'algèbre de Lie :

$$\underline{\mathbf{n}}_1^+ = \sum_{\beta \in \Phi^+ - \Phi_1} \underline{\mathbf{g}}^\beta$$

– Maintenant soit e^λ un caractère de H tel que $\lambda = e_*^\lambda\big|_{\underline{\mathbf{t}}^{\mathbb{C}}}$ soit entier :

$$\frac{2\langle\lambda,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} \in \mathbb{Z}\,, \quad \forall\,\alpha \in \Phi^+ \qquad \text{et} \qquad \langle\lambda,\beta\rangle = 0\,, \quad \forall\,\beta \in \Delta_1\,,$$

on note $\tilde{e}^\lambda$ l'unique extension de e^λ à $H^{\mathbb{C}}N_1^-$ et on désigne par L_λ le fibré vectoriel $G \times_{e^\lambda} \mathbb{C}$ au-dessus de W qui s'identifie à $G^{\mathbb{C}} \times_{\tilde{e}^\lambda} \mathbb{C}$ et possède donc une stucture de fibré vectoriel holomorphe sur lequel $G^{\mathbb{C}}$ agit en tant que groupe d'automorphismes.

La structure hermitienne définie sur L_λ par :

$$\big([g,z]\,,\,[g,z']\big) = z\overline{z}'$$

permet de définir une structure hermitienne sur l'ensemble $H^\circ\ (L_\lambda)$ des structures holomorphes sur L_λ par

$$\langle s\,,\,s'\rangle = \int_W \big(s(x)\,,\,s'(x)\big)\,\mathrm{d}\mu(x)\,,$$

où $d\mu(x)$ est une mesure invariante sur W.

Théorème

1°) Si λ n'est pas dominant $\big(\langle\lambda\,,\,\alpha\rangle \notin \mathbb{Z}_+$ pour un $\alpha \in \Phi^+\big)$ alors $H^\circ(L_\lambda) = 0$.

2°) Si λ est dominant alors $V_\lambda = H^\circ(L_\lambda)$ porte une représentation unitaire irréductible ρ_λ de G de poids dominant λ et tel que $\dim V_\lambda$ *est finie.*

Rappelons que ρ_λ est définie par :

$$\rho_\lambda(g)\,s(x) = g\cdot s(g^{-1}x) \qquad \forall\,g \in G\,, \quad \forall\,x \in W.$$

2. Calcul symbolique

On désigne par $\pi : L_\lambda \longrightarrow W$ la projection canonique, par $\mathbf{P}(V_\lambda^*)$ l'espace projectif de V_λ^* et par p la projection canonique de la sphère unité S de V_λ^* dans $\mathbf{P}(V_\lambda^*)$. $\mathbf{P}(V_\lambda^*)$ peut être muni d'une stucture symplectique, en effet on peut définir une 2-forme symplectique ω par :

$$\left(p^*\omega\right)_v(w_1, w_2) = r\Im\langle w_1, w_2\rangle \qquad \text{où} \quad r \in \mathbb{R}, \quad w_1\,,\ w_2 \in T_vS\,.$$

De plus l'action de G sur $\mathbf{P}(V_\lambda^*)$ est hamiltonienne de moment :

$$\varphi : \mathbf{P}(V_\lambda^*) \longrightarrow \underline{\mathbf{g}}^*$$

tel que :

$$\varphi\big(p(v)\big)(X) = \frac{ir}{2}\langle d\rho_\lambda(X)v\,,\, v\rangle\,, \quad \forall\, v \in S\,,\ \forall\, X \in \underline{\mathbf{g}}\,.$$

Maintenant si q appartient à L_λ privé de la section nulle, alors il existe $l_q \in V_\lambda^*$ tel que :

$$\forall\, s \in V_\lambda\,, \qquad s\big(\pi(q)\big) = l_q(s)q\,.$$

DÉFINITION . — *L'application* $\psi : W \longrightarrow \mathbf{P}(V_\lambda^*)$ *définie par :*

$$\psi\big(\pi(q)\big) = \mathbb{C}\, l_q$$

est appelée l'application de Kodaira.

Cette application vérifie :

$$\varphi \circ \psi(W) = G \cdot \big(-\frac{ir}{2}\lambda\big)$$

où λ est prolongé de $\underline{\mathbf{h}}$ à $\underline{\mathbf{g}}$ par 0 sur $\underline{\mathbf{n}}_1^-$ et sur $\underline{\mathbf{n}}_1^+$, $G \cdot \big(-\frac{ir}{2}\lambda\big)$ est l'orbite de $\big(-\frac{ir}{2}\lambda\big)$ par l'action coadjointe de G sur $\underline{\mathbf{g}}^*$ [1].

D'autre part l_q appartient à V_λ^*, donc il existe un unique élément e_q de V_λ, dit état cohérent de L_λ, tel que :

$$l_q(s) = \langle s\,,\, e_q\rangle\,, \qquad \forall\, s \in V_\lambda\,.$$

On vérifie aisément que :

$$e_{z.q} = \overline{z}^{-1} \cdot e_q\,, \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \qquad \text{et} \qquad \rho_\lambda(g)\cdot(e_q) = e_{g\cdot q}\,, \quad \forall\, g \in G\,.$$

DÉFINITION .— *Le symbole de Berezin d'un opérateur A de V_λ est la fonction réelle-analytique $\widehat{A}$ définie sur W par :*

$$\widehat{A}(x) = \frac{\langle A \cdot e_q\,,\, e_q\rangle}{\langle e_q\,,\, e_q\rangle}\,, \qquad \forall\, q \in \pi^{-1}(x) - \{0\}\,.$$

Le symbole $\widehat{A}$ caractérise A, en effet, connaissant $\widehat{A}$ on peut déterminer A par la formule suivante :

$$(A \cdot s)(x) = \int_W \widetilde{A}(y,x)\langle e_q\,,\, e_{q'}\rangle\big(s(y),q'\big)q\,\mathrm{d}\mu(y)$$

où $q \in \pi^{-1}(x) - \{0\}$, $q' \in \pi^{-1}(y) - \{0\}$ et $\widetilde{A}$ est l'unique fonction définie sur un voisinage de la diagonale de $W \times W$, holomorphe en la première variable, antiholomorphe en la deuxième et vérifiant :

$$\widehat{A}(x) = \widetilde{A}(x,x)\,, \qquad \forall\, x \in W\,.$$

Maintenant, dans l'espace des symboles, on définit un produit, noté $*$, et dit produit $*$ de Berezin, par :

$$\widehat{A} * \widehat{B} = \widehat{A \circ B}$$

Le symbole de l'opérateur $\rho_\lambda(g)$ est noté $E_\lambda(g)$ et s'appelle exponentielle $*$. Il vérifie :

$$\big(E_\lambda(g) * E_\lambda(g')\big)(\xi) = E_\lambda(gg')(\xi)\,, \qquad \forall\, \xi \in W\,, \quad \forall\, g\,,\, g' \in G\,.$$

3. Étude d'un exemple

Soit :

$$G = SU(2) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} ; |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\},$$

alors on a :

$$G^{\mathbb{C}} = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\, ad - bc = 1 \right\} = SL(2,\mathbb{C})$$

et l'algèbre de Lie $\underline{g} = \underline{su}(2)$ de G a pour base :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad X_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} .$$

Le dual de $\underline{g}^*$ de $\underline{g}$ étant identifié à $\underline{g}$ grâce à la forme de Killing, l'action coadjointe de G sur $\underline{g}^*$ est définie par :

$$g \cdot \xi = g\xi g^{-1} , \qquad \forall g \in G , \quad \forall \xi \in \underline{g}^* .$$

Avec des notations évidentes, les orbites de la représentation coadjointe sont donc de la forme :

$$O = \left\{ \xi \in \underline{g}^* \text{ tels que } \langle \xi , X_1 \rangle^2 + \langle \xi , X_2 \rangle^2 + \langle \xi , X_3 \rangle^2 = \mathrm{Cte} \right\} .$$

Soit $\xi_0 = nX_3 \in \underline{g}^*$, où n est un nombre entier positif, et soit $H = G(\xi_0)$ le stabilisateur de ξ_0, alors :

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} , \, |a|^2 = 1 \right\} , \qquad H^{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} , \, a \in \mathbb{C}^* \right\} = \mathbb{C}^* .$$

D'autre part,

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \, c \in \mathbb{C} \right\}$$

et

$$\begin{aligned} W = S^2(n) = G/H &\sim G^{\mathbb{C}}/H^{\mathbb{C}}.N^- \\ &\sim \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} , \, z \in \mathbb{C} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \sim \mathbb{C} \cup \{\infty\} . \end{aligned}$$

On en déduit donc l'action de $G^{\mathbb{C}}$ sur $\mathbb{C}$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{dz + c}{bz + a} , \qquad \forall z \in \mathbb{C} .$$

ξ_0 définit un caractère entier sur H que l'on note e^λ :

$$e^\lambda \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} = a^n .$$

On cherche donc à caractériser les éléments de $H^\circ(L_\lambda)$: soit $s \in H^\circ(L_\lambda)$, W étant identifié à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, on peut écrire $s(z) = [\, z \,,\, F(z)\,]$ où $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et F est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ qui caractérise s. En écrivant :

$$\begin{aligned}\big(\rho_\lambda(g)\,(s)\big) &= g \cdot s\big(g^{-1}z\big)\\ &= \left[z \,,\, (d-bz)^n F\Big(\frac{az-c}{d-bz}\Big)\right] \qquad \text{où } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G^{\mathbb{C}}\,,\end{aligned}$$

on en déduit que s est une section holomorphe si et seulement si F est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à n.

Maintenant on calcule le symbole de l'opérateur $\rho_\lambda(g)$, $g \in G$, on commence donc par déterminer les états cohérents :

- soit $s_\circ \in H^\circ(L_\lambda)$ définie par $s_\circ(z) = [\, z \,,\, 1\,]$,
- soit $q_\circ = s_\circ(z_\circ)$ et soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in G$,
- on écrit $e_{q_\circ}$ sous la forme $[\, z \,,\, F_{z_\circ}(z)\,]$ et on cherche à déterminer $F_{z_\circ}(z)$.

On a : $g^{-1} e_{q_\circ}(z) = e_{g^{-1}q_\circ}(z)$, donc en prenant $z_\circ = 0$ et $z = \overline{b}/\overline{a} = g^{-1} \cdot z_\circ$, on obtient :

$$F_z(z) = \big(1 + |z|^2\big)^n F_{z_\circ}(0)\,.$$

C'est-à-dire que l'on peut prendre :

$$F_z(z') = \big(1 + \overline{z}z'\big)^n\,.$$

Ce qui donne :

$$E_\lambda(g)(z) = \left(\frac{-bz + \overline{a} + az\overline{z} + \overline{b}\overline{z}}{1 + z\overline{z}}\right)^n$$

ou si l'on préfère, en notant :

$$x = \langle \xi \,,\, X_1 \rangle\,, \quad y = \langle \xi \,,\, X_2 \rangle\,, \quad z = \langle \xi \,,\, X_3 \rangle$$

et

$$a = a_1 + ia_2\,, \quad b = b_1 + ib_2 \quad (a_j\,,\, b_j \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \lambda = n\,,$$

$$E_n(g)(x,\, y,\, z) = \left[a_1 - \frac{i}{n}\,(a_2 z - b_1 y + b_2 x)\right]^n.$$

C'est sous cette forme que Fronsdal a calculé l'exponentielle $*$ pour $SU(2)$ dans [2].

En particulier si h est un élément de H, on obtient :

$$E_\lambda(h)\,(z) = E_\lambda\left(\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}\right) = \left(\frac{e^{-i\theta} + e^{i\theta}|z|^2}{1+|z|^2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{\left(1+|z|^2\right)^n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k |z|^{2k} e^{i(2k-n)\theta}\,.$$

On remarque que $e^{i(2k-n)\theta}$ est une valeur propre de l'opérateur $\rho_\lambda(h)$ dont un vecteur propre associé est la section v_k définie par :

$$v_k\big([g]\big) = [\,g\,,\,z^k a^n\,]\,, \qquad \text{où} \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}$$

donc $E_\lambda(h)$ ne fait intervenir que les poids entiers $-n$, $-n+2$, $-n+4$, $\ldots$, $n-2$, n.

D'autre part, la mesure invariante sur W étant :

$$d\mu(z) = \frac{-2in}{\left(1+|z|^2\right)^{2n+2}}\, dz \wedge d\bar{z}\,,$$

on vérifie aisément que les v_k forment une base orthogonale de $H^\circ(L_\lambda)$. On pose :

$$\xi_k = \frac{1}{||v_k||}\, v_k\,,$$

et on obtient alors une base orthonormale $(\xi_k)_{k=0,\ldots,n}$ de $H^\circ(L_\lambda)$ dans laquelle on exprime $E_\lambda(h)(z)$:

$$E_\lambda(h)\,(z) = \frac{\langle \rho_\lambda(h)\cdot e_q\,,\, e_q\rangle}{\langle e_q\,,\, e_q\rangle} = \frac{1}{\langle e_q\,,\, e_q\rangle}\left\langle \sum_{k=0}^{n} \rho_\lambda(h)\langle e_q\,,\,\xi_k\rangle\xi_k\,,\, e_q\right\rangle$$

$$= \frac{1}{\langle e_q\,,\, e_q\rangle}\sum_{k=0}^{n} \langle e_q\,,\,\xi_k\rangle\langle \rho_\lambda(h)\xi_k\,,\, e_q\rangle$$

$$= \frac{1}{\langle e_q\,,\, e_q\rangle}\sum_{k=0}^{n} e^{i(2k-n)\theta}\langle e_q\,,\,\xi_k\rangle\langle \xi_k\,,\, e_q\rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{n} e^{i(2k-n)\theta}\,\frac{\langle \pi_k\cdot e_q\,,\, e_q\rangle}{\langle e_q\,,\, e_q\rangle}\,,$$

où π_k est la projection orthogonale sur $\mathbb{C}\,\xi_k$. Donc :

$$\widehat{\pi}_k(z) = \frac{C_n^k |z|^{2k}}{(1+|z|^2)^n} .$$

Enfin, on vérifie que :

$$\widehat{\pi}_k \star \widehat{\pi}_{k'} = \delta_{kk'}\, \widehat{\pi}_k \quad \text{et} \quad \int_W \widehat{\pi}_k(z)\, \mathrm{d}\mu(z) = 1 , \qquad \forall k .$$

4. Restriction à un sous-groupe K

Soit K un sous-groupe fermé connexe de G, la restriction de ρ_λ à K se décompose en une somme finie de représentations unitaires irréductibles σ^α de K avec une multiplicité m_α ; soit $d(\alpha)$ la dimension de l'espace de σ^α et E_α la composante isotypique de type α i.e E_α est l'espace portant $m_\alpha \sigma^\alpha$. Peut-on déterminer analytiquement les m_α ?

Pour répondre à cette question, on commence d'abord par rappeler quelques résultats généraux (voir [6] par exemple).

K étant compact, une base hilbertienne de $L^2(k)$ est donnée par $\left\{ \sqrt{d(\alpha)}\, a_{ij}^\alpha \mid \alpha \in \widehat{K} \,,\ 1 \leq i,\, j \leq d(\alpha) \right\}$ où $\widehat{K}$ est le dual unitaire de K, et les $a_{ij}^\alpha(k)$ sont les coefficients de la matrice $\sigma^\alpha(k)$ dans une base orthonormée $e_i^{(\alpha)}$ de l'espace de σ^α. On a alors les relations :

1) $\sum_l a_{il}^\alpha(k)\, a_{lj}^\alpha(k') = a_{ij}^\alpha(kk')$;

2) $(a_{ij}^\alpha \times a_{i'j'}^{\alpha'})(k) = \int_K a_{ij}^\alpha(k')\, a_{i'j'}^{\alpha'}(k'^{-1}k)\, \mathrm{d}k' = \delta_{\alpha\alpha'}\, \delta_{ji'} \frac{1}{d(\alpha)}\, a_{ij'}^\alpha .$

Le caractère χ_α de la classe de représentations α est par définition :

$$\chi_\alpha(k) = tr\, \sigma^\alpha(k) = \sum_{i=1}^{d(\alpha)} a_{ii}^\alpha(k)$$

et on a :

$$\chi_\alpha \times \chi_{\alpha'} = \delta_{\alpha\alpha'} \frac{1}{d(\alpha)}\, \chi_\alpha$$

$$\chi_\alpha^\vee(k) = \overline{\chi_\alpha(k^{-1})} = \chi_\alpha(k) .$$

Les fonctions $d(\alpha)\,\chi_\alpha$ sont donc des projecteurs pour l'algèbre $(\mathcal{C}(K)\,,\times)$:

$$\big(d(\alpha)\chi_\alpha\big)\times\big(d(\alpha)\chi_\alpha\big)=d(\alpha)\chi_\alpha$$
$$\big(d(\alpha)\chi_\alpha\big)^\vee=d(\alpha)\chi_\alpha\,.$$

Maintenant, si on fixe $\xi\in W$ alors l'application $k\longrightarrow E_\lambda(k)\,(\xi)$ est continue de K dans $\mathbb{C}$ donc elle se décompose dans $L^2(K)$ en :

$$E_\lambda(k)\,(\xi)=\sum_{\alpha\in\widehat{K}}\sum_{i,j=1}^{d(\alpha)}\sqrt{d(\alpha)}\,\pi_{\lambda,\,\alpha,\,i,\,j}(\xi)\,a^\alpha_{ij}(k)\,.$$

Proposition

1) $\xi\longrightarrow\pi_{\lambda,\,\alpha,\,i,\,j}(\xi)$ *est un symbole sur* W *pour tout* α, i, j ;

2) $\pi_{\lambda,\,\alpha,\,m,\,n}\star\pi_{\lambda,\,\beta,\,i,\,j}=\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{ni}\,\dfrac{1}{\sqrt{d(\alpha)}}\,\pi_{\lambda,\,\alpha,\,m,\,j}\,.$

Preuve.— 1) Par définition,

$$\begin{aligned}\pi_{\lambda,\,\alpha,\,i,\,j}(\xi)&=\int_K E_\lambda(k)\,(\xi)\sqrt{d(\alpha)}\,a^\alpha_{ij}(k)\,\mathrm{d}k\\&=\frac{\langle\int_K\rho_\lambda(k)\,a^\alpha_{ij}\sqrt{d(\alpha)}\,\mathrm{d}k\cdot e_q\,,\,e_q\rangle}{\langle e_q\,,\,e_q\rangle}\quad\text{où}\quad q\in\pi^{-1}(\xi)-\{0\}\,,\end{aligned}$$

donc $\pi_{\lambda,\,\alpha,\,i,\,j}$ est un symbole.

2) On a :

$$\begin{aligned}\big(E_\lambda(k)*E_\lambda(k')\big)\,(\xi)&=E_\lambda(kk')\,(\xi)\\&=\sum_{\alpha\in\widehat{K}}\sum_{i,j}\sqrt{d(\alpha)}\,\pi_{\lambda,\,\alpha,\,i,\,j}(\xi)\,a^\alpha_{ij}\,(kk')\\&=\sum_{\alpha\in\widehat{K}}\sum_{i,\,j,\,l}\sqrt{d(\alpha)}\,\pi_{\lambda,\,\alpha,\,i,\,j}(\xi)\,a^\alpha_{il}(k)\,a^\alpha_{lj}(k')\,.\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\big(E_\lambda(k)*E_\lambda(k')\big)(\xi)=\sum_{\alpha\in\widehat{K}}\sum_{l,\,j}\sqrt{d(\alpha)}\,\big(E_\lambda(k)*\pi_{\lambda,\,\alpha,\,l,\,j}\big)(\xi)\,a^\alpha_{lj}(k')\,.$$

Donc on a :

$$\left(E_\lambda(k) * \pi_{\lambda,\alpha,l,j}\right)(\xi) = \sum_i \pi_{\lambda,\alpha,i,j}(\xi)\, a^\alpha_{il}(k)\,.$$

C'est-à-dire :

$$\sum_{\beta\in\widehat{K}} \sum_{m,n} \left(\pi_{\lambda,\beta,m,n} * \pi_{\lambda,\alpha,l,j}\right)(\xi)\sqrt{d(\beta)}\, a^\beta_{m,n}(k) = \sum_i \pi_{\lambda,\alpha,i,l}(\xi)\, a^\alpha_{il}(k)$$

et par conséquent, on obtient :

$$\pi_{\lambda,\beta,m,n} * \pi_{\lambda,\alpha,l,j} = \delta_{\beta\alpha}\delta_{nl}\frac{1}{\sqrt{d(\alpha)}}\pi_{\lambda,\alpha,m,j}\,.$$

DÉFINITIONS

1) Les éléments $\pi_{\lambda,\alpha,i,j}$ seront appelés les coefficients symboliques de σ^α dans ρ_λ.

2) On appelle caractères symboliques de σ^α dans ρ_λ les fonctions $\pi_{\lambda,\alpha}$ définies par :

$$\pi_{\lambda,\alpha}(\xi) = d(\alpha)\int_K E_\lambda(k)\,(\xi)\chi_\alpha(k^{-1})\,\mathrm{d}k\,.$$

THÉORÈME

i) $\pi_{\lambda,\alpha}$ est le symbole du projecteur orthogonal sur la composante isotypique E_α de la restriction à K de ρ_λ.

ii) σ^α apparaît dans $\rho_\lambda\big|_K$ si et seulement si $\pi_{\lambda,\alpha}$ est non nulle, si et seulement si on peut trouver i et j tels que $\pi_{\lambda,\alpha,i,j}$ est non nulle.

Preuve

i) Choisissons dans V_λ une base de la forme $(e^{\alpha,l}_i)$, où α appartient à $\widehat{K}$ et est tel que σ^α apparaît dans $\rho_\lambda\big|_K$, $1 \le i \le d(\alpha)$ et $1 \le l \le m(\alpha)$, telle que :

$$\rho_\lambda(k)\,(e^{\alpha,l}_i) = \sum_{j=1}^{d(\alpha)} a^\alpha_{ij}(k)\, e^{\alpha,l}_i\,.$$

$\pi_{\lambda,\alpha}$ est le symbole de l'opérateur :

$$P = \int_K d(\alpha)\rho_\lambda(k)\,\chi_\alpha(k^{-1})\,\mathrm{d}(k)$$

dont on désigne la matrice par B. Alors :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & B^{\alpha 1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & B^{\alpha m(\alpha)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{où} \quad B^{\alpha l} = \left(b^{\alpha l}_{mj}\right)$$

et

$$b^{\alpha l}_{mj} = \sum_{i=1}^{d(\alpha)} d(\alpha) \int_K a^{\alpha}_{mj}(k)\, a^{\alpha}_{ii}(k^{-1})\, \mathrm{d}k = \delta_{mj}\,,$$

donc :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathrm{Id} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire que P est le projecteur orthogonal sur E_α (les E_α sont deux à deux orthogonaux).

ii) On vérifie que :

$$\pi_{\lambda,\alpha} = \sqrt{d(\alpha)} \sum_{i=1}^{d(\alpha)} \pi_{\lambda,\alpha,i,i}\,.$$

Donc $\pi_{\lambda,\alpha}$ s'annule si et seulement si le projecteur sur E_α est nul ou si et seulement si σ^α n'apparaît pas dans $\rho_\lambda|_K$, donc si et seulement si $\pi_{\lambda,\alpha,i,j}$ s'annule quel que soit i et j. En effet :

$$\pi_{\lambda,\alpha,i,j}(\xi) = \int_K E_\lambda(k)\,(\xi)\overline{a^{\alpha}_{ij}(k)}\,\mathrm{d}k\,,$$

i.e. $\pi_{\lambda,\alpha,i,j}$ est le symbole de l'opérateur $\displaystyle\int_K \rho_\lambda(k)\overline{a^{\alpha}_{ij}}(k)\,\mathrm{d}k$, mais celui-ci s'annule si et seulement si σ^α n'apparaît pas dans $\rho_\lambda\big|_K$.

COROLLAIRE 1.— *$E_\lambda(k)$ se décompose en somme finie dont le support dans $\widehat{K}$ est exactement $\left\{\alpha \text{ tels que } \sigma^\alpha \text{ apparaît dans } \rho_\lambda\big|_K\right\}$.*

COROLLAIRE 2.— $m_\alpha d(\alpha) = \int_W \pi_{\lambda,\alpha}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ *ou :*

$$m_\alpha = \int_W \int_K E_\lambda(k)\,(\xi)\chi_\alpha(k^{-1})\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\xi\,.$$

En effet on a la relation :

$$Tr\ A = \int_W \widehat{A}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,, \qquad \forall\, A \in \mathrm{End}(V_\lambda)\,.$$

que l'on applique à B.

PROPOSITION .— $\pi_{\lambda,\alpha}$ *est K-invariante i.e. :*

$$\pi_{\lambda,\alpha}(k\cdot\xi) = \pi_{\lambda,\alpha}(\xi)\,, \qquad \forall\, k \in K\,,\ \forall\,\xi \in W\,.$$

En effet le produit de Berezin étant covariant, on sait que (cf. [1]) :

$$E_\lambda(kk'k^{-1}) = E_\lambda(k')\,, \qquad \forall\, k\,,\ k' \in K\,.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\pi_{\lambda,\alpha}(k\cdot\xi) &= d(\alpha)\int_K E_\lambda(k')(k\xi)\chi_\alpha(k'^{-1})\,\mathrm{d}k' \\ &= d(\alpha)\int_K E_\lambda(kk'k^{-1})(\xi)\chi_\alpha(k'^{-1})\,\mathrm{d}k'\,.\end{aligned}$$

On pose : $k'' = kk'k^{-1}$, dk étant invariante et χ_α un caractère, on a :

$$\begin{aligned}\pi_{\lambda,\alpha}(k\cdot\xi) &= d(\alpha)\int_K E_\lambda(k'')(\xi)\chi_\alpha(k^{-1}k''^{-1}k)\,\mathrm{d}k'' \\ &= d(\alpha)\int_K E_\lambda(k'')(\xi)\chi_\alpha(k''^{-1})\,\mathrm{d}k''\end{aligned}$$

donc :

$$\pi_{\lambda,\alpha}(k\cdot\xi) = \pi_{\lambda,\alpha}(\xi)\,.$$

Un exemple

Soient G le groupe $SU(2)\times SU(2)$, K le sous-groupe $SU(2)$ "diagonal" dans G :

$$K = \{(g,g) \mid g \in SU(2)\}\,.$$

Reprenons les notations du paragraphe 3. Soit (ξ_1, ξ_2) l' élément entier de $\underline{g}^*$, identifiée à $\underline{su}(2) \times \underline{su}(2)$, défini par :

$$\xi_1 = n_1 X_3 \quad , \quad \xi_2 = n_2 X_3 \quad \text{avec } (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2 .$$

Soit W l'orbite de (ξ_1, ξ_2) sous l'action coadjointe de G, W est le produit $S^2_{n_1} \times S^2_{n_2}$ de deux sphères de rayons n_1 et n_2 et le calcul du paragraphe 3 donne :

$$E_\lambda\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, z_1\,,\, z_2\right) = \left(\frac{-bz_1 + \bar{a} + az_1\bar{z}_1 + \bar{b}\bar{z}_1}{1 + z_1\bar{z}_1}\right)^{n_1} \times \\ \times \left(\frac{-bz_2 + \bar{a} + az_2\bar{z}_2 + \bar{b}\bar{z}_2}{1 + z_2\bar{z}_2}\right)^{n_2} .$$

Ou, avec l'autre paramétrage :

$$\lambda = (n_1, n_2)\,, \quad a = a_1 + ia_2\,, \quad b = b_1 + ib_2\,, \quad \xi_j = (x_j, y_j, z_j)\,,$$

$$E_{(n_1,n_2)}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2\right) = \\ = \left[a_1 - \frac{i}{n_1}(a_2z_1 - b_1y_1 + b_2x_1)\right]^{n_1}\left[a_1 - \frac{i}{n_2}(a_2z_2 - b_1y_2 + b_2x_2)\right]^{n_2} .$$

Cette fonction se décompose en une somme finie de coefficients de σ^α c'est-à-dire en somme de fonctions polynômiales en les variables a_j et b_j multipliées par nos coefficients symboliques notes ici $\pi_{(n_1,n_2),n,i,j}$. En particulier si $n_1 = n_2 = 1$, on obtient sur $\mathbb{C}^2$:

$$E_{(1,1)}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, z_1, z_2\right) = \\ = \frac{1}{1+|z_1|^2}\,\frac{1}{1+|z_2|^2}\sqrt{3}\sum_{i,j=1}^{3} \pi_{(1,1),2,i,j}(z_1, z_2)\, a^{(2)}_{i,j}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}\right) \\ + \frac{1}{1+|z_1|^2}\,\frac{1}{1+|z_2|^2}\cdot\frac{1}{2}\Big(|z_1|^2 + |z_2|^2 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1\Big)a^{(0)}_{1,1}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}\right)$$

où :

$$\begin{cases} a^{(0)}_{1,1}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}\right) = 1 \\ \sigma^{(2)}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a^2 & i\sqrt{2}ab & b^2 \\ i\sqrt{2}a\bar{b} & |a|^2 - |b|^2 & -i\sqrt{2}\bar{a}b \\ \bar{b}^2 & -i\sqrt{2}\bar{a}\bar{b} & \bar{a}^2 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

et

$$\left(\pi_{(1,1),2,i,j}(z_1,z_2)\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} \left(|z_1z_2|\right)^2 & \frac{-i}{\sqrt{2}} z_1z_2\left(\overline{z}_1+\overline{z}_2\right) & z_1z_2 \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} \overline{z}_1\overline{z}_2(z_1+z_2) & \frac{1}{2}\left(|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2\right) & \frac{-i}{\sqrt{2}}(z_1+z_2) \\ \overline{z}_1\overline{z}_2 & \frac{-i}{\sqrt{2}}\left(\overline{z}_1+\overline{z}_2\right) & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit les fonctions $\pi_{(1,1),2}$ et $\pi_{(1,1),0}$.
Dans les variables $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$, si on pose :

$$\xi_1 \cdot \xi_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\,,$$

ces fonctions s'écrivent :

$$\pi_{(1,1),0}(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4}\left(1-\xi_1\cdot\xi_2\right),$$
$$\pi_{(1,1),2}(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4}\left(3+\xi_1\cdot\xi_2\right).$$

Les autres fonctions π sont nulles.

Plus gènéralement, on remarque que les fonctions $\pi_{(n_1,n_2),m}$ sont des fonctions polynômes des variables ξ_1 et ξ_2, et invariantes, donc des fonctions polynômes de la seule variable $\xi_1.\xi_2$ de degré au plus $\inf(n_1,n_2)$. De plus, on a bien sûr :

$$\pi_{(n_1,n_2),m}(z,z) = 0 \qquad \text{si} \quad m \neq \; n_1+n_2$$

car :

$$E_{(n_1,n_2)}(g\,;\,z,z) = E_{(n_1+n_2)}(g,z)\,, \qquad \forall\, g\in G$$

donc :

$$\pi_{(n_1,n_2),m}(z,z) = d(m)\int_{SU(2)} E_{(n_1+n_2)}(g,z)\chi_m(g^{-1})\,\mathrm{d}g = 0$$

si m n'est pas n_1+n_2. On peut déduire de ces remarques et du fait que la somme des fonctions π est la fonction constante 1, que :

$$\pi_{(n_1,1),n_1-1}(\xi_1,\xi_2) = \frac{n_1}{2(n_1+1)}\left(n_1-\xi_1\cdot\xi_2\right),$$
$$\pi_{(n_1,1),n_1+1}(\xi_1,\xi_2) = \frac{n_1}{2(n_1+1)}\left(n_1+2+\xi_1\cdot\xi_2\right).$$

5. Rapport avec l'application moment

Supposons maintenant que K soit un groupe de Lie (toujours fermé connexe), alors Guillemin et Sternberg ([3]) ont montré le théorème suivant.

Gardons nos notations. Soit q la restriction à W de la projection canonique de $\underline{g}^*$ dans $\underline{k}^*$, et soit O une K-orbite coadjointe entière et σ^O la représentation de K associée, alors :

THÉORÈME .— *Si O n'est pas incluse dans $q(W)$, alors σ^O n'apparaît pas dans $\rho_\lambda\big|_K$*

Si on revient à l'exemple traité dans le paragraphe précédent : $G = SU(2) \times SU(2)$ et $K = SU(2)$ "diagonal" de G, alors $q(W)$ est la région de $\mathbb{R}^3$ comprise entre les sphères de rayons $|n_1 - n_2|$ et $n_1 + n_2$, les orbites entières dans $q(W)$ sont donc les sphères de rayons entiers, et on sait que :

$$\rho_{(n_1,n_2)}\big|_K = \rho_{n_1} \otimes \rho_{n_2} = \oplus_{m=|n_1-n_2|}^{n_1+n_2} \rho_m .$$

Et il y a dans ce cas équivalence entre "O est entière et incluse dans $q(W)$" et "σ^O apparaît dans $\rho_\lambda\big|_K$". La réciproque de ce théorème est cependant en général fausse, par exemple, nous avons vu dans le paragraphe 3, pour $G = SU(2)$ et $K = H$ que les poids $n-1$, $1-n$, $n-3$, $3-n\ldots$ sont dans $q(W)$ mais que σ^{n-1}, σ^{1-n}, $\ldots$ n'apparaissent pas dans $\rho_\lambda\big|_H$.

Par contre, on sait ([5]) que si $\underline{t}$ est un tore maximal de $\underline{k}$, si $\underline{t}_1$ est un tore maximal de $\underline{g}$ contenant $\underline{t}$ et si p_1, p et q_1 sont les projections canoniques, alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \underline{g}^* & \xrightarrow{p_1} & \underline{t}_1^* \\ {\scriptstyle q}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle q_1} \\ \underline{h}^* & \xrightarrow[p]{} & \underline{t}^* \end{array}$$

est commutatif.

De plus, si on pose $D = (p_1 \circ \varphi)\big(\mathbf{P}(V_\lambda^*)\big)$, où φ est l'application moment de $\mathbf{P}(V_\lambda^*)$ dans $\underline{g}^*$, alors on a le résultat classique suivant ([9]):

THÉORÈME .— *D est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de sommets $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ et la représentation ρ_λ est associée à l'orbite $G \cdot \lambda_1$ (λ_1 est* *prolongé à $\underline{g}$ comme dans le paragraphe 1, tous les λ_j sont sur la même orbite).*

On note $\mathrm{Ext}(D)$ l'ensemble des sommets de D. Alors:

PROPOSITION . — *Soit α un élément de $\underline{\mathbf{k}}^*$ tel que $\alpha\big|_{\mathbf{t}^{*\perp}}$ est nul (α est un poids de $\underline{t}$), alors si $p(\alpha)$ appartient à $\mathrm{Ext}(q_1(D))$, $\sigma^{\bar{K}\cdot\alpha}$ apparaît dans $\rho_\lambda\big|_K$.*

Preuve

Soit β un point de $q_1(D)$, alors β est combinaison convexe des $q_1(\lambda_j)$, si β est extrêmal alors β est l'un des $q_1(\lambda_j)$.

Donc si $\beta = p(\alpha)$ et si on prolonge λ_j à $\underline{g}^*$ en imposant $\lambda_j\big|_{\underline{t}_1^{*\perp}} = 0$ alors on peut prendre $\alpha = \lambda_j\big|_{\underline{\mathbf{k}}}$.

On peut choisir un ordre sur les racines de $\underline{g}$ tel que λ_j soit dominant : c'est le poids dominant de ρ_λ, il y a donc un seul vecteur v_λ tel que :

$$\rho_\lambda(T)v_\lambda = e^\lambda(T)v_\lambda$$

et $\rho_\lambda\big|_K$ s'écrit $\displaystyle\sum_{\beta\in\Gamma} m_\beta\sigma^\beta$, où Γ est l'ensemble des poids dominants de $\underline{t}$; chaque β est inférieur à α et un seul est égal à α donc σ^α apparaît dans $\rho_\lambda\big|_K$.

6. Transformée de Fourier

Les parties 4 et 5 nous permettent de considérer les transformées de Fourier adaptées de G et K.

Si f est une fonction C^∞ à support compact sur $\underline{g}^*$, sa transformée de Fourier est :

$$F(g) = \int_{\underline{g}^*} (f * E_G(g))(\xi)\,\mathrm{d}(\xi)$$

où :

$$E_G(g)(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si l'orbite de } \xi \text{ n'est pas entière,} \\ E_\lambda(g)(\xi) & \text{si l'orbite } W \text{ de } \xi \text{ est celle de } \lambda \text{ et est entière.} \end{cases}$$

$d(\xi)$ est la somme des mesures sur les orbites entières. La restriction à K de F a une tranformée de Fourier adaptée sur $\underline{\mathbf{k}}^*$ que l'on notera Tf :

$$(Tf)(\eta) = \int_K F(k) E_K(k^{-1})(\eta)\,\mathrm{d}k\,.$$

THÉORÈME .— *Si G et K sont des groupes de Lie connexes et compacts, alors :*

$$\operatorname{supp} Tf \subset q(G \cdot \operatorname{supp} f).$$

Preuve

On écrit :

$$E_G(k)\,(\xi) = \sum_{\alpha \in \widehat{K}} \sum_{i,j=1}^{d(\alpha)} \sqrt{d(\alpha)}\, \pi_{\lambda,\,\alpha,\,i,\,j}(\xi)\, a_{ij}^{\alpha}(k)$$

de même si η est dans l'orbite $G \cdot \beta$ du poids dominant β, on écrit :

$$E_K(k)(\eta) = \sum_{i',j'=1}^{d(\beta)} \sqrt{d(\beta)}\, \pi_{\beta,i',j'}(\eta)\, a_{i'j'}^{\beta}(k)$$

et

$$(Tf)(\eta) =$$
$$= \sum_{\substack{i,\,j,\\ i',\,j',\\ \alpha}} \int_W \int_K (f * \pi_{\lambda,\alpha,i,j})(\xi) a_{ij}^{\alpha}(k) a_{i'j'}^{\beta}(k^{-1}) \pi_{\beta,i',j'}(\eta)\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\xi \sqrt{d(\alpha)}\sqrt{d(\beta)}.$$

Si cette somme n'est pas nulle, un de ses termes ne l'est pas, donc pour ce terme :

$$\alpha = \beta \qquad \text{et} \qquad \pi_{\lambda,\,\beta,\,i,\,j} \neq 0\,.$$

Donc σ^{β} apparaît dans $\rho_\lambda\big|_K$ et par conséquent l'orbite de β est un sous-ensemble de $q(W)$ dès que $W \cap \operatorname{supp} f$ n'est pas vide.

Bibliographie

[1] ARNAL (D.), GUTT (S.) et CAHEN (M.) .— *Representations of compact Lie groups and quantization by deformation,*
Bull. Classe des Sc. Acad. Roy. de Belgique $5^{ème}$ série **LXXIV** (1988) 4.5, pp. 123-141.

[2] FRONSDAL (C.) .— *Remarks on quantization,*
Reports on Mathematical Physics **15,1** (1978), pp. 111-145.

[3] GUILLEMIN (V.) et STERNBERG (S.) .— *Convexity properties of the moment mapping (I et II),*
Invent. Math. **67** (1982), pp. 491-513 et, **77** (1984), pp. 533-546.

[4] KIRILLOV (A.A.) .— *Elements of the theory of representations,*
Springer Verlag, Berlin, 1976.

[5] KOSTANT (B.) .— *On convexity, the Weyl group and the Iwasawa decomposition,*
Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. $4^{ème}$ série **6** (1973), pp. 413-455.

[6] PUKANSZKY (I.) .— *Leçons sur les représentations des groupes,*
Dunod Paris (1967).

[7] VERGNE (M.) .— *A Poisson-Plancherel formula for semi- simple Lie groups,*
Ann. of Math. **115** (1982), pp. 639-666.

[8] WALLACH (N.) .— *Harmonic analysis on homogeneous spaces,*
Dekker New-York (1973).

[9] WILDBERGER (N.J.) .— *On the Fourier transform of a compact semi-simple Lie group,*
preprint Université de Toronto, Toronto, Ontario, Canada (1987).