ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

DONG PINGPING

Minoration de combinaisons linéaires de deux logarithmes p-adiques

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 12, nº 2 (1991), p. 195-250

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1991_5_12_2_195_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XII, n° 2, 1991

Minoration de combinaisons linéaires de deux logarithmes p-adiques

DONG PINGPING(*)

RÉSUMÉ. — En utilisant la méthode de Schneider dans un domaine ultramétrique, nous donnons une minoration explicite d'une combinaison linéaire de deux logarithmes p-adiques de nombres algébriques à coefficients rationnels. C'est la première version quantitative d'un travail de Veldkamp en 1936. Des minorations explicites semblables aux nôtres (mais plus faibles) avaient déjà été obtenues en 1967 par Schinzel qui utilisait la méthode de Gel'fond. Nous comparons aussi notre résultat à celui de Yu Kunrui qui repose sur la méthode de Baker. Ce travail constitue une traduction p-adique de minorations récemment obtenues par Mignotte et Waldschmidt.

ABSTRACT. — Using Schneider's method in an ultrametric field, we give an explicit lower bound for a linear form in two p-adic logarithms of algebraic numbers with rational coefficients. This is the first quantitative version of Veldkamp's work in 1936. Explicit estimates had been derived by Schinzel in 1967 using Gel'fond's method, but his estimates are weaker than our. We also compare our result with Yu Kunrui's one. Our work is a p-adic translation of recent results by Mignotte and Waldschmidt.

1. Introduction

En 1935, Mahler [2] a établi que si p est un nombre premier, et α_1, α_2 sont deux nombres algébriques différents de 1 vérifiant $|\alpha_1 - 1|_p \leq 1/p$, $|\alpha_2 - 1|_p \leq 1/p$, alors le quotient des deux logarithmes p-adiques $\log \alpha_1 / \log \alpha_2$ est soit rationnel, soit transcendant. La démonstration de Mahler utilisait la méthode qui avait permis à Gel'fond, l'année précédente, de résoudre le septième problème de Hilbert sur la transcendance des nombres complexes

(*) "Problèmes Diophantiens", CNRS et Univ. P. et M. Curie, 11, rue P. et M. Curie, 75231 Paris Cedex 05, France.

$\log\alpha_1/\log\alpha_2$. En 1936, Veldkamp donne une deuxième démonstration de ce résultat de Malher grâce à la méthode introduite par Schneider pour résoudre ce septième problème de Hilbert.

Dès 1935, Gel'fond avait obtenu une minoration explicite pour des combinaisons linéaires de deux logarithmes (complexes) de nombres algébriques. En 1939, il raffine ce résultat et en démontre aussi l'analogue p-adique. Ces deux énoncés (complexe et p-adique) ont été entièrement explicités par Schinzel [6] en 1967 qui en donne diverses applications arithmétiques. La méthode est celle de Gel'fond (et Mahler pour le cas ultramétrique). C'est seulement en 1978 que la méthode de Schneider a été utilisée pour minorer effectivement (et même explicitement) les combinaisons linéaires de deux logarithmes. Les trois articles [3] de Mignotte et Waldschmidt concernent seulement le cas complexe, et nous allons ici en donner la première version ultramétrique.

Notre théorème principal est énoncé au paragraphe 4. En voici un cas particulier. On désigne par α_1, α_2 deux nombres algébriques non nuls, par p un nombre premier, et par b_1, b_2 deux nombres entiers. On suppose

$$\nu(\alpha_i - 1) > \frac{1}{p-1}, \quad (i = 1, 2), \tag{1}$$

où ν désigne un prolongement à une extension finie $\mathbb{K}$ de $\mathbb{Q}$, avec $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, de la valuation p-adique sur $\mathbb{Q}$.

On note ensuite

$$a_i = \max\{h(\alpha_i), 2\log p\}, \quad (i = 1, 2), \tag{2}$$

où h est la hauteur logarithmique absolue, et

$$B = \max\{||b_1||, ||b_2||, 3\}, \tag{3}$$

où $||\cdot||$ désigne la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{Q}$.
Enfin, D désigne le degré de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{Q}$.

Corollaire 1.1.— *Si $\alpha_1^{b_1} \neq \alpha_2^{b_2}$, alors*

$$\nu(\alpha_1^{b_1} - \alpha_2^{b_2}) \le \frac{(51p+67)^2}{(\log p)^4} D^4 a_1 a_2 (\log B)^2.$$

Notre énoncé concerne seulement les combinaisons linéaires de deux logarithmes p-adiques (c'est-à-dire des majorations de $\nu(\alpha_1^{b_1}\alpha_2^{b_2} - 1)$). On connaît des estimations valables pour un nombre quelconque de logarithmes, à commencer par les résultats non effectifs de Gel'fond en 1949 (reposant sur les théorèmes d'approximation de Thue, Siegel, Roth et leurs analogues non archimédiens), sans oublier ceux que l'on obtient par la méthode de Baker (voir [4], [5] et [10]). Les estimations explicites les plus précises actuellement connues étaient celles de Yu Kunrui [10]. Quand le paramètre B n'est pas trop grand, notre corollaire 1.1 est souvent plus précis que celui de [10]. Dans des applications numériques, par exemple pour résoudre complètement certaines équations diophantiennes, le fait que nos valeurs numériques soient petites est très utile.

Enfin, nous renvoyons à l'article [5] et à sa bibliographie pour des références plus complètes aux travaux de Veldkamp, Gel'fond, Günther, Içen, Brumer, Coates, Sprindzuk, Kaufman, Loxton et van der Poorten.

Nous fixons d'abord les notations, puis nous comparons notre corollaire 1.1 aux résultats de Yu Kunrui. Le plan de cet article est le suivant. Dans le deuxième paragraphe nous énonçons quelques lemmes classiques que nous utiliserons plus tard. Le troisième paragraphe est consacré à la démonstration d'une estimation p-adique pour un produit de nombres rationnels; c'est l'analogue ultramétrique de résultats dans la section 3 de [3] II et III. Le théorème principal de cet article est énoncé et démontré au paragraphe 4.

Nous utiliserons les notations suivantes :

- $\mathbb{K}$ une extention finie de $\mathbb{Q}$;
- $D = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$;
- $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathbb{K}$;
- p la caractéristique résiduelle de $\mathfrak{p}$;
- f l'entier positif vérifiant $N(\mathfrak{p}) = p^f$
- e l'indice de ramification de $\mathfrak{p}$: $\mathfrak{p}^{\mathrm{e}} \,\|\, p$
- $|\cdot|$ la valeur absolue $\mathfrak{p}$-adique sur $\mathbb{K}$, normalisée par

$$|x| = p^{-\nu(x)}, \quad x \in \mathbb{K},$$

où $\nu(x) = ({}^1/_{\mathrm{e}}) \operatorname{ord}_{\mathfrak{p}} x$, $\operatorname{ord}_{\mathfrak{p}} x$ étant le plus grand entier m tel que

$$\mathfrak{p}^m \mid x \quad (\operatorname{ord}_{\mathfrak{p}} 0 = \infty)$$

- $g_{\mathfrak{p}} = \left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathrm{e}}{p-1}\right]$, $G_{\mathfrak{p}} = N(\mathfrak{p}^{g_{\mathfrak{p}}})\big(N(\mathfrak{p}) - 1\big) \leq p^D$;

- α_1, α_2 deux éléments de $\mathbb{K}$;
- b_1, b_2 deux entiers rationnels.

Écrivons $\Lambda = \alpha_1^{b_1} - \alpha_2^{b_2}$ et supposons désormais $\Lambda \neq 0$.

On énonce maintenant deux théorèmes de Yu Kunrui donnant des minorations p-adiques de Λ dans son article [9], qui est publié avant son article [10]. Ces résultats imposent certaines restrictions sur les α_i. Les énoncés de Yu Kunrui concernent plus généralement les nombres de la forme $\left|\alpha_1^{b_1} \cdots \alpha_n^{b_n} - 1\right|_p$, mais nous nous restreignons ici au cas $n = 2$.

On pose ici

$$a_i \geq \max\left\{h(\alpha_i)\,,\ \frac{f \log p}{D}\right\}\,, \qquad i = 1, 2 \tag{4}$$

$$B_0 \geq \min_{b_i \neq 0} \|b_i\|\,, \quad B_i \geq \|b_i\|\,, \quad i = 1, 2 \tag{5}$$

$$W_1 \geq \begin{cases} \max\left\{\log\left(1 + \frac{3}{16}\frac{f\log p}{D}\left(\frac{B_2}{a_1} + \frac{B_1}{a_2}\right)\right)\,,\ \log B_0\,,\ \frac{f\log p}{D}\right\} & \text{si } p \mid (b_1, b_2) \\ \max\left\{\log\left(1 + \frac{3}{16}\frac{f\log p}{D}\left(\frac{B_2}{a_1} + \frac{B_1}{a_2}\right)\right)\,,\ \frac{f\log p}{D}\right\} & \text{si } p \nmid (b_1, b_2) \end{cases}$$

$$W_2 \geq \begin{cases} \max\left\{\log\left(1 + \frac{1}{5}\frac{f\log p}{D}\left(\frac{B_2}{a_1} + \frac{B_1}{a_2}\right)\right)\,,\ \log B_0\,,\ \frac{f\log p}{D}\right\} & \text{si } p \mid (b_1, b_2) \\ \max\left\{\log\left(1 + \frac{1}{5}\frac{f\log p}{D}\left(\frac{B_2}{a_1} + \frac{B_1}{a_2}\right)\right)\,,\ \frac{f\log p}{D}\right\} & \text{si } p \nmid (b_1, b_2) \end{cases}$$

On suppose

$$\nu(\alpha_i) = 0\,, \quad i = 1, 2 \tag{6}$$

$$\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2) \tag{7}$$

et q est un nombre premier vérifiant

$$\begin{cases} q \nmid p(p^f - 1) \\ \left[\mathbb{K}(\alpha_1^{1/q}; \alpha_2^{1/q}) : \mathbb{K}\right] = q^2\,. \end{cases} \tag{8}$$

Le premier théorème :

$$\operatorname{ord}_p \Lambda \le C_1(p)\,\frac{50176}{225}\,\sqrt{2}\,e^2 q^4(q-1)\log^2(2q)(p^f-1)\,\frac{\left(2+1/(p+1)\right)^2}{(f\log p)^4}\,\times$$
$$\times\, D^4 a_1 a_2 \left(\frac{W_1}{12}+\log(4D)\right)\left\{\log(4D\max(1,a_1,a_2))+\frac{f\log p}{16}\right\}$$

où

$$C_1(2)=768523 \quad ; \quad C_1(3)=167881$$
$$C_1(p)=87055\left(2+\frac{1}{p-1}\right)^2, \quad p\ge 5\,.$$

Le deuxième théorème :

$$\operatorname{ord}_p \Lambda \le C_2(p)\,\frac{2048e}{9}\,\sqrt{2}\,e^2 q^4(q-1)\log^2(2q)(p^f-1)\,\frac{\left(2+1/(p-1)\right)^2}{(f\log p)^4}\,\times$$
$$\times\, D^4 a_1 a_2 \left(\frac{W_2}{12}+\log(4D)\right)^2$$

où

$$C_2(2)=338071 \quad ; \quad C_2(3)=61716$$
$$C_2(p)=14491\left(2+\frac{1}{p-1}\right)^3, \quad p\ge 5\,.$$

Nous modifions ici le sens des quantités a_1, a_2, B_0, B_1, B_2 en prenant (2) et (3), et remplaçons la condition (6) par (1); nous aurons donc une minoration de $\log|\Lambda|$ (corol. 1.1) bien différent de celle de Yu Kunrui.

Dans les démonstrations des théorèmes de Yu Kunrui et du corollaire 1.1, les conditions sur les nombres algébriques α_1, α_2 sont toutes nécessaires, elles exigent que ces nombres soient assez proche de 1, mais la condition (6) est beaucoup plus faible que la condition (1). Dans les théorèmes de Yu Kunrui, on est obligé d'introduire un nombre premier q vérifiant la condition (8); ce nombre premier q dépend de p, f et surtout des nombres α_1, α_2, et pour une minoration effective, il reste encore à montrer son existence et à le majorer en termes de p, f et α_1, α_2 (Yu Kunrui a enlevé le paramètre q du théorème 1 et du théorème 2 dans son article [10]). Cependant, le corollaire 1.1 donne une majoration d'une forme très simple qui fait intervenir beaucoup moins de paramètres.

Notons d'ailleurs que le lemme de Liouville (sect. 2, lemme 2.4) donne la majoration suivante.

COROLLAIRE 1.2.— *On a*

$$\operatorname{ord}_p \Lambda \leq \frac{eD}{\log p}\left\{\log 2 + (a_1 + a_2)B\right\}.$$

Ce résultat n'exige aucune restriction sur les nombres algébriques α_1, α_2.

En imposant certaines relations sur a_1, a_2 et B, on pourra faire quelques comparaisons entre ces résultats : les deux théorèmes de Yu Kunrui (quand p ne divise pas (b_1, b_2)), le corollaire 1.1 et le corollaire 1.2.

On distingue ici les quatre cas suivants :

$$\left.\begin{array}{llll} \mathrm{I} & a_1 \ll 1\,, & a_2 \ll 1 & \\ \mathrm{II} & B \ll a_1\,, & B \ll a_2 & \\ \mathrm{III} & B \ll a_1\,, & B \ll a_2\,, & \log a_1 \text{ et } \log a_2 \ll \log B \\ \mathrm{IV} & B \ll 1\,. & & \end{array}\right\} \tag{9}$$

Dans ces cas, les quatres résultats possèdent quelquefois des formes plus simples qui sont exprimées dans le tableau ci-dessous.

$\operatorname{ord}_p \Lambda \ll$	Premier théorème de Yu, $p \nmid (b_1, b_2)$	Deuxième théorème de Yu, $p \nmid (b_1, b_2)$	Corollaire 1.1	Corollaire 1.2
I	$D^4 \log(4D) \times$ $\times (\log B + \log D)$	$D^4(\log B + \log D)^2$	$D^4 \log^2 B$	DB
II	$D^4 a_1 a_2 \log(4D)$ $\big(\log(4D) +$ $+ \log\max(1\,, a_1 a_2)\big)$	$D^4 a_1 a_2 \log^2(4D)$	$D^4 a_1 a_2 \log^2 B$	$D(a_1 + a_2)B$
III	$D^4 a_1 a_2 \log(4D)$ $(\log B + \log D)$	$D^4 a_1 a_2 \log^2(4D)$	$D^4 a_1 a_2 \log^2 B$	$D(a_1 + a_2)B$
$\operatorname{ord}_p \Lambda \ll$	Premier théorème de Yu	Deuxième théorème de Yu	Corollaire 1.1	Corollaire 1.2
IV	$D^4 a_1 a_2 \log(4D)$ $\big(\log(4D) +$ $+ \log\max(1\,, a_1\,, a_2)\big)$	$D^4 a_1 a_2 \log^2(4D)$	$D^4 a_1 a_2$	$D(a_1 + a_2)$

Dans les majorations données par les théorèmes de Yu Kunrui, les $\ll$-constantes ne dépendent que de p, e, f, q et des $\ll$-constantes paraissant dans (9) cependant, dans les majorations données par les corollaires 1.1 et 1.2, les $\ll$-constantes ne dépendent que de p, e et des $\ll$-constantes paraissant dans (9).

Il est difficile de dire quand mon résultat (corollaire 1.1) est meilleur en tenant compte en même temps des grandeurs et des constantes que ceux de Yu Kunrui, cependant dans les deux cas suivants, mon résultat est fréquemment meilleur que les siens :

1) en ce qui concerne la dépendance en p, quand $f \geq 3$;
2) en ce qui concerne la dépendance en D, quand D est grand par rapport à a_1, a_2 et B.

2. Lemmes auxiliaires

Dans cette section nous donnons quelques lemmes auxiliaires qui nous seront utiles plus loin. Nous conservons dans toutes les sections suivantes les notations ($\mathbb{K}$, $\mathfrak{p}$, p, f, e, ν, $|\cdot|$, ainsi que α_1, α_2, b_1, b_2, Λ) qui ont été introduites aux paragraphe 1.

Quand P est un élément de l'anneau $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_q]$, on désigne par $L(P)$ sa longeur, somme des valeurs absolues usuelles de ces coefficients. Quand G est une fonction analytique dans le disque $|z| \leq R$ de $\mathbb{C}_p$, avec $R \geq 0$, on désigne par $|G|_R$ la quantité $\sup_{|z|\leq R} |G|$.

LEMME 2.1 (lemme de Siegel). — *Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ des éléments de $\mathbb{K}$ et*

$$P_{ij} \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_q], \quad 1 \leq i \leq \nu,\ 1 \leq j \leq \mu,$$

des polynômes (non tous nuls) de degré au plus N_{jh} par rapport à X_h (pour $1 \leq h \leq q$). On définit

$$L_j = \sum_{i=1}^{\nu} L(P_{ij})$$

et

$$\gamma_{ij} = P_{ij}(\alpha_1, \ldots, \alpha_q), \quad 1 \leq i \leq \nu,\ 1 \leq j \leq \mu.$$

Si $\nu > \mu D$, alors il existe des entiers rationnels $x_1, \ldots, x_\nu$ non tous nuls, tels que

$$\sum_{i=1}^{\nu} \gamma_{ij} x_i = 0, \quad 1 \leq j \leq \mu$$

et

$$\max \|x_i\| \leq \left(2^{\mu}(V_1 \dots V_{\mu})^D\right)^{\frac{1}{\nu - \mu D}}$$

où

$$V_j = L_j \, e^{\sum_{h=1}^{q} N_{jh} h(\alpha_h)}.$$

Démonstration. — Voir [3].

LEMME 2.2.— *Soit G une fonction analytique sur le disque $|z| \leq R$ de $\mathbb{C}_p$ qui possède s zéros dans le disque $|z| \leq r$ $(0 < r < R)$. Alors*

$$|G|_r \leq |G|_R \left(\frac{r}{R}\right)^s.$$

Démonstration. — Voir [4].

LEMME 2.3.— *Soit F une fonction analytique sur le disque $|z| \leq R$ de $\mathbb{C}_p$ et soient $z_1, \dots, z_s \in \mathbb{C}_p$ deux à deux distincts, avec $|z_i| \leq r$, $i = 1, \dots, s$ $(0 < r < R)$. Alors*

$$|F|_r \leq \max\left\{ |F|_R \left(\frac{r}{R}\right)^s, \ \frac{r^{s-1}}{\Delta} |F(z_i)|, \ i = 1, \dots, s \right\}$$

où

$$\Delta = \min_{1 \leq i \leq s} \prod_{j \neq i} |z_i - z_j|.$$

Démonstration. — La fonction

$$G = F - \sum_{i=1}^{s} F(z_i) \prod_{j \neq i} \frac{z - z_j}{z_i - z_j}$$

est analytique sur $|z| \leq R$ et possède z zéros $z_1, \dots, z_s$ dans le disque $|z| \leq r$; le lemme 2.2 dit alors

$$\begin{aligned} |G|_r &\leq |G|_R \left(\frac{r}{R}\right)^s \\ &\leq \left(\frac{r}{R}\right)^s \max\left\{ |F|_R, \ |F(z_i)| \prod_{j \neq i} \left| \frac{z - z_j}{z_i - z_j} \right|_R, \ i = 1, \dots, s \right\} \\ &\leq \max\left\{ |F|_R \left(\frac{r}{R}\right)^s, \ \frac{r^{s-1}}{\Delta} |F(z_i)|, \ i = 1, \dots, s \right\}, \end{aligned}$$

donc

$$\left|F\right|_r \leq \max\left\{ \left|G\right|_r,\ \left|F(z_i)\right| \prod_{j\neq i}\left|\frac{z-z_j}{z_i-z_j}\right|_r,\ i=1,\ldots,s \right\}$$
$$\leq \max\left\{ \left|G\right|_r,\ \frac{r^{s-1}}{\Delta}\left|F(z_i)\right|,\ i=1,\ldots,s \right\},$$

d'où la conclusion. □

LEMME 2.4 (lemme de Liouville). — *Soient* $\alpha_1, \ldots, \alpha_q \in \mathbb{K}$ *et soit* $P \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_q]$ *de degré au plus* N_h *par rapport à* X_h $(1 \leq h \leq q)$, *tels que* $\gamma = P(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) \neq 0$. *Alors :*

a) pour toute valeur absolue archimédienne v *sur* $\mathbb{K}$, *on a*

$$\left|\gamma\right|_v \geq L(P)^{-(D-1)}\, e^{-D\sum_{h=1}^{q} N_h h(\alpha_h)}\,;$$

b) pour toute valeur absolue non archimédienne v *sur* $\mathbb{K}$, *on a*

$$\left|\gamma\right|_v \geq L(P)^{-D}\, e^{-D\sum_{h=1}^{q} N_h h(\alpha_h)}\,.$$

Démonstration. — Si v est une valeur absolue archimédienne sur $\mathbb{K}$, on a

$$\left|\gamma\right|_v \geq L(P)\prod_{h=1}^{q}\max\left(1,\ \left|\alpha_h\right|_v\right)^{N_h}$$

et si v est une valeur absolue non archimédienne sur $\mathbb{K}$, on a

$$\left|\gamma\right|_v \geq \prod_{h=1}^{q}\max\left(1,\ \left|\alpha_h\right|_v\right)^{N_h}.$$

Comme $\gamma \neq 0$, on a la formule du produit

$$\prod_v \left|\gamma\right|_v^{\sigma_v} = 1$$

où v parcourt toutes les valeurs absolues sur $\mathbb{K}$ et σ_v est le degré local de v.

Soit v_0 une valeur absolue sur $\mathbb{K}$ telle que $\left|\gamma\right|_{v_0} \leq 1$, alors

$$\left|\gamma\right|_{v_0} \leq \left|\gamma\right|_{v_0}^{\sigma_{v_0}} = \frac{1}{\prod_{v\neq v_0}\left|\gamma\right|_v^{\sigma_v}}\,.$$

Si v_0 est archimédienne

$$\begin{aligned}
|\gamma|_{v_0} &\geq L(P)^{-(D-1)} \prod_{h=1}^{q} \left(\prod_{v \neq v_0} \max\Big(1\,,\, |\alpha_h|_v\Big)^{\sigma_v} \right)^{-N_h} \\
&\geq L(P)^{-(D-1)} \prod_{h=1}^{q} \left(\prod_{v} \max\Big(1\,,\, |\alpha_h|_v\Big)^{\sigma_v} \right)^{-N_h} \\
&= L(P)^{-(D-1)}\, e^{-D \sum_{h=1}^{q} N_h h(\alpha_h)}\,.
\end{aligned}$$

Si v_0 est non archimédienne

$$\begin{aligned}
|\gamma|_{v_0} &\geq L(P)^{-(D)} \prod_{h=1}^{q} \left(\prod_{v \neq v_0} \max\Big(1\,,\, |\alpha_h|_v\Big)^{\sigma_v} \right)^{-N_h} \\
&\leq L(P)^{-D} \prod_{h=1}^{q} \left(\prod_{v} \max\Big(1\,,\, |\alpha_h|_v\Big)^{\sigma_v} \right)^{-N_h} \\
&= L(P)^{-(D)}\, e^{-D \sum_{h=1}^{q} N_h h(\alpha_h)}\,. \square
\end{aligned}$$

LEMME 2.5.— *Soient* α, β, $\gamma \in \mathbb{C}_p$ *avec* $\nu(\alpha - 1) > {}^1/(p-1)$, $\nu(\beta - 1) > {}^1/(p-1)$ *et* $\nu(\gamma) \geq 0$, *on a*

$$|\log \alpha - \log \beta| = |\alpha - \beta| \tag{10}$$

et

$$|\alpha^\gamma - \beta^\gamma| = |\gamma|\,|\alpha - \beta|\,. \tag{11}$$

Démonstration.— On sait que l'on a

$$\log \alpha = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\alpha - 1)^n}{n} \quad \text{et} \quad \log \beta = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\beta - 1)^n}{n}\,,$$

donc

$$\begin{aligned}
\log \alpha - \log \beta &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\alpha - 1)^n - (\beta - 1)^n}{n} \\
&= (\alpha - \beta) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \sum_{i+j=n-1} (\alpha - 1)^i (\beta - 1)^j\,.
\end{aligned}$$

Pour $n \geq 2$ et $i + j = n - 1$, on a

$$\begin{aligned}\nu\left(\frac{1}{n}(\alpha-1)^i(\beta-1)^j\right) &= i\nu(\alpha-1) + j\nu(\beta-1) - \nu(n) > \\ &> \frac{n-1}{p-1} - \nu(n) \geq \\ &\geq \frac{n-1}{p-1} - \nu(n!) \geq 0\ ;\end{aligned}$$

alors

$$\nu\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\sum_{i+j=n-1}(\alpha-1)^i(\beta-1)^j\right] = 0\,,$$

d'où (10).

Comme $\log\alpha^\gamma = \gamma\log\alpha$ et $\log\beta^\gamma = \gamma\log\beta$, en utilisant (10), on trouve

$$\begin{aligned}\left|\alpha^\gamma - \beta^\gamma\right| &= \left|\log(\alpha^\gamma) - \log(\beta^\gamma)\right| = |\gamma|\,|\log\alpha - \log\beta| \\ &= |\gamma|\,|\alpha-\beta|\,.\ \square\end{aligned}$$

Soient α, β, γ des nombres complexes, $\alpha\gamma \neq 0$ et soient L, M, U, V des entiers positifs. On veut démontrer que, sous des hypothèses convenables, si un polynôme $P \in \mathbb{C}[X\,,\,Y]$ non nul est de degré au plus L et M par rapport à X et Y respectivement, alors, au moins un des nombres

$$P(u+v\beta\,,\,\alpha^u\gamma^v)\,, \quad -U \leq u \leq U\,,\ -V \leq v \leq V\,,$$

$(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ est non nul.

LEMME 2.6.— *Soient U_1, U_2, V_1, V_2 des entiers positifs. Posons $U = U_1 + U_2$ et $V = V_1 + V_2$.*

On suppose :

i) les points $u + v\beta$, $(-U_1 \leq u \leq U_1, -V_1 \leq v \leq V_1)$ sont deux à deux distincts, et $(2U_1+1)(2V_1+1) > L$;

ii) $\operatorname{card}\{\alpha^u\gamma^v\ ;\ -U_1 \leq u \leq U_1\,,\ -V_1 \leq v \leq V_1\} > M$;

iii) $\operatorname{card}\{u+v\beta\ ;\ -U_2 \leq u \leq U_2\,,\ -V_2 \leq v \leq V_2\} > 2LM$.

Alors, au moins un des nombres

$$P(u+v\beta\,,\alpha^u\gamma^v)\,,\ -U\le u\le U\,,\ -V\le v\le V$$

est non nul.

Démonstration.— Voir [6].

Pour la construction de la fonction auxiliaire on introduit des polynômes Δ_h, $(h\in\mathbb{Z},\ h\ge 0)$, définis par $\Delta_0=1$ et

$$\Delta_h(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{h!}\left(z-\dfrac{h-1}{2}\right)\cdots(z-1)z(z+1)\cdots\left(z+\dfrac{h-1}{2}\right) & \\ \hfill \text{si } h \text{ est impair} & \\ \dfrac{1}{h!}\left(z-\dfrac{h-2}{2}\right)\cdots(z-1)z(z+1)\cdots\left(z+\dfrac{h-2}{2}\right)\left(z+\dfrac{h}{2}\right) & \\ \hfill \text{si } h \text{ est pair.} & \end{cases}$$

Pour z dans $\mathbb{Z}$ on a $\Delta_h(z)\in\mathbb{Z}$.

LEMME 2.7.— *Soient $h\ge 0$ et $z\in\mathbb{R}$. On a*

$$\|\Delta_h(z)\|\le 2\frac{E^h}{h!}\quad \textit{avec}\quad E=\max\left(\|z\|\,,\ \frac{h}{2}\right).$$

Démonstration.— Considérons d'abord le cas où h est impair. Pour $1\le i\le (h-1)/2$, on a $\|z^2-i^2\|\le E^2$, donc

$$\|\Delta_h(z)\|=\frac{1}{h!}\|z\|\prod_{i=1}^{(h-1)/2}\|z^2-i^2\|\le\frac{E\cdot E^{h-1}}{h!}=\frac{E^h}{h!}.$$

Supposons maintenant que h est pair; pour $1\le i\le (h-2)/2$, on a $\|z^2-i^2\|\le E^2$, donc

$$\|\Delta_h(z)\|=\frac{1}{h!}\|z\|\left\|z+\frac{h}{2}\right\|\prod_{i=1}^{(h-1)/2}\|z^2-i^2\|\le\frac{2E^2\cdot E^{h-2}}{h!}=2\frac{E^h}{h!}.\ \square$$

3. Estimation d'un produit

LEMME 3.1.— *Pour un nombre premier p fixé, on désigne par $|\cdot|$ la valeur absolue p-adique sur $\mathbb{Q}$*

$$|x| = p^{-\nu_p(x)}\,, \quad x \in \mathbb{Q}\,.$$

Soient b_1, $b_2 \in \mathbb{Z}$ et $\neq 0$, $p \nmid b_2$, $\|b_1\|$, $\|b_2\| \leq B$, $B \geq 2$ et soit $\beta = b_1/b_2$. Soient U, V deux entiers ≥ 2, on suppose que les points

$$u + v\beta\,, \quad (u,v) \in \mathbb{Z}^2\,, \quad -U \leq u \leq U\,, \quad -V \leq v \leq V$$

sont deux à deux distincts, et on note

$$\Gamma = \left\{u + v\beta\,,\ (u,v) \in \mathbb{Z}^2\,,\ -U \leq u \leq U\,,\ -V \leq v \leq V\right\}$$

$$\Delta = \min_{\gamma\in\Gamma} \prod_{\substack{\gamma'\in\Gamma \\ \gamma'\neq\gamma}} |\gamma' - \gamma|\,.$$

On a

$$-\log\Delta = 4\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p^2}\right) UV \log p + 2U \log 2B(U+V) + \\ + 2V\left(\log B + \frac{\log p}{p-1}\right).$$

Démonstration.— Soit $\gamma_0 = u_0 + v_0\beta \in \Gamma$ $(-U \leq u_0 \leq U,\ -V \leq v_0 \leq V)$ un point où le minimum de $\prod |\gamma - \gamma_0|$ est atteint, on a pour $\gamma \in \Gamma$ et $\neq \gamma_0$

$$\Delta = \prod_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ \gamma\neq\gamma_0}} |\gamma - \gamma_0| = \prod_{\substack{-U\leq u\leq U \\ -V\leq v\leq V \\ (u,v)\neq(u_0,v_0)}} \left|(u-u_0) + (v-v_0)\beta\right|$$

$$= \prod_{\substack{-U\leq u\leq U \\ -V\leq v\leq V \\ (u,v)\neq(u_0,v_0)}} \left|b_2(u-u_0) + b_1(v-v_0)\right| = \prod_{\substack{-U-u_0\leq s\leq U-u_0 \\ -V-v_0\leq t\leq V-v_0 \\ (s,t)\neq 0}} \left|b_2 s + b_1 t\right|.$$

Soit $f \geq 0$ l'entier défini par $p^f \parallel b_1$, $b_1 = p^f b$, $p \nmid b$, on voit que

$$\Delta = |A_1|\,|A_2|\,|A_3|\,, \tag{12}$$

où

$$A_1 = \prod_{\substack{-U-u_0 \leq s \leq U-u_0 \\ s \equiv 0 (p^f) \\ s \neq 0}} \ \prod_{-V-v_0 \leq t \leq V-v_0} (b_2 s + b_1 t)\,,$$

$$A_2 = \begin{cases} 1 & f = 0 \\ \displaystyle\prod_{\substack{-U-u_0 \leq s \leq U-u_0 \\ s \not\equiv 0 (p^f)}} \ \prod_{-V-v_0 \leq t \leq V-v_0} (b_2 s + b_1 t) & f \geq 1, \end{cases}$$

$$A_3 = b_1^{2V} \prod_{\substack{-V-v_0 \leq t \leq V-v_0 \\ t \neq 0}} t\,.$$

Il n'existe que $\left[{}^{2U}/{}_{p^f}\right]$ entiers s tel que

$$-U - u_0 \leq s \leq U - u_0\,, \quad s \equiv 0(p^f)\,, \quad s \neq 0\,.$$

Pour un tel entier s, on a

$$\prod_{-V-v_0 \leq t \leq V-v_0} (b_2 s + b_1 t) = p^{(2V+1)f} \prod_{-V-v_0 \leq t \leq V-v_0} (b_2 s p^{-f} + bt)\,.$$

Pour $-V - v_0 \leq t \leq V - v_0$, on a

$$\log_p \|b_2 p^{-f} + bt\| \leq \left(\log 2B(U+V)/\log p\right) - f$$

et pour $l \geq 1$, dans l'intervalle $[\,-V-v_0\,,\ V-v_0\,]$, il n'existe que $\left[({}^{2V}/{}_{p^l})+1\right]$ entiers t tels que $b_2 s p^{-f} + bt \equiv 0 \pmod{p^l}$, donc

$$\begin{aligned} \nu_p\left[\prod_{-V-v_0 \leq t \leq V-v_0} (b_2 s p^{-f} + bt)\right] &\leq \sum_{1 \leq l \leq (\log 2B(U+V)/\log p) - f} \left(\frac{2V}{p^l} + 1\right) \\ &\leq \frac{2V}{p-1} + \frac{\log 2B(U+V)}{\log p} - f\,, \end{aligned}$$

$$\nu_p\left[\prod_{-V-v_0\le t\le V-v_0}(b_2s+b_1t)\right]=(2V+1)f+\nu_p\left[\prod_{-V-v_0\le t\le V-v_0}\left(b_2sp^{-f}+bt\right)\right]$$
$$\le 2V\left(f+\frac{1}{p-1}\right)+\frac{\log 2B(U+V)}{\log p},$$

$$\begin{aligned}-\log|A_1|&=\nu_p(A_1)\log p\le\\&\le\frac{2U}{p^f}\left[2V\left(f+\frac{1}{p-1}\right)+\frac{\log 2B(U+V)}{\log p}\right]\log p\\&=\frac{2U}{p^f}\left[2V\left(f+\frac{1}{p-1}\right)\log p+\log 2B(U+V)\right].\end{aligned}\tag{13}$$

Dans le cas $f\ge 1$

$$\nu_p\left[\prod_{\substack{-U-u_0\le s\le U-u_0\\ s\not\equiv 0(p^f)}}s\right]\le\sum_{l=1}^{f-1}\left[\frac{2U}{p^l}\right]$$
$$\le 2U\frac{1-p^{-(f-1)}}{p-1},$$

$$\nu_p(A_2)=(2V+1)\nu_p\left[\prod_{\substack{-U-u_0\le s\le U-u_0\\ s\not\equiv 0(p^f)}}s\right]$$
$$\le 2U(2V+1)\frac{1-p^{-(f-1)}}{p-1},$$

$$-\log|A_2|=\nu_p(A_2)\log p\le 2U(2V+1)\frac{1-p^{-(f-1)}}{p-1}\log p\tag{14}$$

$$\nu_p\left[\prod_{\substack{-V-v_0\le t\le V-v_0\\ t\ne 0}}\right]\le\frac{2V}{p-1},$$

$$\nu_p(A_3)\le 2V\left(f+\frac{1}{p-1}\right),$$

$$-\log|A_3|=\nu_p(A_3)\log p=2V\left(f+\frac{1}{p-1}\right)\log p.\tag{15}$$

Si $f = 0$, don déduit de (12), (13), (15)

$$-\log\Delta \leq \frac{4\log p}{p-1}UV + 2U\log 2B(U+V) + 2V\frac{\log p}{p-1}.$$

Supposons $f \geq 1$, on déduit de (12), (13), (14), (15)

$$\begin{aligned}-\log\Delta \leq 4UV\left[\frac{1}{p^f}\left(f+\frac{1}{p-1}\right)+\frac{1-p^{-(f-1)}}{p-1}\right]\log p + \\ + 2U\left[\frac{1}{p^f}\log 2B(U+V)+\frac{\log p}{p-1}\right] + 2V\left(f+\frac{1}{p-1}\right)\log p,\end{aligned}$$

$$\frac{1}{p^f}\left(f+\frac{1}{p-1}\right)+\frac{1-p^{-(f-1)}}{p-1} = \frac{1}{p-1}+\frac{f-1}{p^f} \leq \frac{1}{p-1}+\frac{1}{p^2},$$

$$\frac{1}{p^f}\log 2B(U+V)+\frac{\log p}{p-1} \leq \log 2B(U+V),$$

$$\left(f+\frac{1}{p-1}\right)\log p \leq \log B + \frac{\log p}{p-1}$$

d'où le résultat désiré. □

LEMME 3.2.— *Sous les conditions du lemme 3.1, on a*

$$-\log\Delta \leq \frac{4\log p}{p-1}UV + 2U\log 2B(U+V) + 2V\frac{\log p}{p-1}.$$

Démonstration.— Nous conservons les notations et les conclusions de la démonstration du lemme 3.1. On a

$$\Delta = |A_1'|\,|A_2'| \tag{16}$$

où

$$A_1' = \prod_{\substack{-V-v_0\leq t\leq V-v_0\\ t\neq 0}}\ \prod_{-U-u_0\leq s\leq U-u_0}(b_2 s + b_1 t)$$

$$A_2' = \prod_{\substack{-U-u_0\leq s\leq U-u_0\\ s\neq 0}} s.$$

Si $-V - v_0 \leq t \leq V - v_0$, $t \neq 0$, $-U - u_0 \leq s \leq U - u_0$

$$\log_p \|b_2 s + b_1 t\| \leq \frac{\log 2B(U+V)}{\log p}.$$

Si $-V - v_0 \leq t \leq V - v_0$, $t \neq 0$, pour $l \geq 1$, dans l'intervalle $[-U - u_0\,,\, U - u_0\,]$, il n'existe que $\left[({}^{2U}/{}_{p^l}) + 1\right]$ entiers s tels que

$$b_2 s + b_1 t \equiv 0 \qquad (p^l)\,,$$

donc

$$\nu_p\left[\prod_{-U-u_0 \leq s \leq U-u_0} (b_2 s + b_1 t)\right] \leq \sum_{1 \leq l \leq (\log 2B(U+V)/\log p)} \left(\frac{2U}{p^l} + 1\right)$$
$$\leq \frac{2U}{p-1} + \frac{\log 2B(U+V)}{\log p}$$

$$\nu_p(A_1') = \sum_{\substack{-V-v_0 \leq t \leq V-v_0 \\ t \neq 0}} \nu_p\left[\prod_{-U-u_0 \leq s \leq U-u_0} (b_2 s + b_1 t)\right]$$
$$\leq 2V\left(\frac{2U}{p-1} + \frac{\log 2B(U+V)}{\log p}\right)$$

$$-\log|A_1'| = \nu_p(A_1')\log p \leq \frac{4\log p}{p-1} UV + 2V\log 2B(U+V)\,, \tag{17}$$

$$\nu_p(A_2') \leq \sum_{l \geq 1}\left[\frac{2U}{p^l}\right] \leq \frac{2U}{p-1}$$

$$-\log|A_2'| = \nu_p(A_2')\log p \leq \frac{2\log p}{p-1} U\,. \tag{18}$$

La conclusion est obtenue en utilisant (16), (17) et (18). □

COROLLAIRE 3.3. — *Sous les conditions du lemme 3.1. On a*

$$-\log\Delta \leq 4\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p^2}\right) UV\log p +$$
$$+ 2\max(U,V)\left[2\log B + \log\min(U,V) + 2\log 2 + \frac{\log p}{p-1}\right].$$

Démonstration

Cas 1. $U \leq V$ On utilise le lemme 3.1 et l'inégalité $U \log V \leq V \log U$. On a

$$\begin{aligned}
-\log \Delta &\leq 4\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p^2}\right) UV \log p + 2U \log 4BV + 2V\left(\log B + \frac{\log p}{p-1}\right) \\
&= 4\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p^2}\right) UV \log p + 2U(\log B + \log V + 2\log 2) + \\
&\quad + 2V\left(\log B + \frac{\log p}{p-1}\right) \\
&\leq 4\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p^2}\right) UV \log p + \\
&\quad + 2V\left(2\log B + \log U + 2\log 2 + \frac{\log p}{p-1}\right) .
\end{aligned}$$

Cas 2 $V \leq U$ On utilise le lemme 3.2 et l'inégalité $V \log U \leq U \log V$. On a

$$\begin{aligned}
-\log \Delta &\leq \frac{4\log p}{p-1} UV + 2V \log 4BU + 2U \frac{\log p}{p-1} \\
&= \frac{4\log p}{p-1} UV + 2V(\log B + \log U + 2\log 2) + 2U \frac{\log p}{p-1} \\
&\leq \frac{4\log p}{p-1} UV + 2U\left(\log B + \log V + 2\log 2 + \frac{\log p}{p-1}\right) . \square
\end{aligned}$$

4. Le résultat principal

Dans cette section nous donnons le résultat principal : le théorème 4.1. Tout d'abord, nous plongeons le corps valué $(\mathbb{K}, \nu)$ dans $\mathbb{C}_p$ comme un de ses sous-corps valués.

THÉORÈME 4.1.— *On utilise les paramètres a_1, a_2, B qui ont été définis dans (2) et (3), et on fait l'hypothèse (1).*

Pour $p \geq 3$, on a

$$\log \frac{|\Lambda|}{p} \geq -T$$

avec

$$
\begin{aligned}
T = {} & \frac{2500}{\log^3 p}\left[\left(\frac{p}{p-1}+\frac{1}{p^2}\right)p^2 + 0.1715\,p\right] D^4 a_1 a_2 \log^2 B + \\
& - \frac{1111.22}{\log^2 p}\left(1+0.0587\frac{1}{p}\right) D^4 a_1 a_2 \log B + \\
& + \left\{\frac{84.9175\,p^2}{\log^2 p}\left[1+(0.0488+0.0001\log\zeta)\frac{1}{p}\right] + \frac{2.4235\cdot p}{\log p}\left(1+\frac{0.0697}{p}\right)\right. \\
& \quad \left. + \frac{63.315\cdot p}{\log^2 p}\left(1+0.7214\frac{\log p}{p-1}\right)\left(1+\frac{0.0402}{p}\right)\right\} D^3(a_1+a_2)\log B
\end{aligned}
$$

où

$$
\zeta = \max\left(1\,,\ \frac{e}{2\log p}\right) = \begin{cases} 1.2371\ldots & p=3 \\ 1. & p \geq 5 \end{cases}
$$

Pour $p=2$, on a

$$
\log\frac{|\Lambda|}{4} \geq -T
$$

où

$$
\begin{aligned}
T = {} & 37390.252\, D^4 a_1 a_2 \log^2 B - 9724.9496\, D^4 a_1 a_2 \log B \\
& + 1188.3801\, D^3(a_1+a_2)\log B\,.
\end{aligned}
$$

Nous démontrerons la proposition suivante où une condition supplémentaire est imposée, puis nous déduirons le théorème 4.1 de cette proposition.

PROPOSITION 4.2.— *On suppose $(b_1, b_2) = 1$.*

Pour $p \geq 3$, on a

$$
\log\frac{|\Lambda|}{p} \geq -T\,.
$$

Pour $p=2$, on a

$$
\log\frac{|\Lambda|}{4} \geq -T
$$

où T est donné dans l'énoncé du théorème 4.1.

LEMME 4.3.— *Si $1 \leq \log B \leq 2\log p$, on a*

$$
\log|\Lambda| \geq -0.5479\frac{p^2}{\log^3 p} D a_1 a_2 \log^2 B\,.
$$

Démonstration. — Nous utilisons le lemme 2.4 (b)

$$\begin{aligned}\log|\Lambda| &\geq -D\big(\log 2 + \|b_1\|a_1 + \|b_2\|a_2\big) \geq -D\big[\log 2 + B(a_1+a_2)\big]\\ &\geq -D\left[\log 2 + \frac{p^2}{2\log p}(a_1+a_2)\log B\right]\\ &\geq -D\left[\log 2 + \frac{p^2}{2\log^2 p}a_1a_2\log B\right]\\ &\geq -0.5434\frac{p^2}{\log^2 p}Da_1a_2\log B\,.\end{aligned}$$

Si $\log B \geq \log p$, on a

$$\log|\Lambda| \geq -0.5434\frac{p^2}{\log^3 p}Da_1a_2\log^2 B$$

et si $\log B < \log p$, on a

$$\begin{aligned}\log|\Lambda| &\geq -D\big[\log 2 + p(a_1+a_2)\big]\\ &\geq -\left[\frac{\log 2}{4p^2} + \frac{\log p}{p}\right]\frac{p^2}{\log^2 p}Da_1a_2\log^2 B\\ &\geq -0.5479\frac{p^2}{\log^3 p}Da_1a_2\log^2 B\,.\ \square\end{aligned}$$

Démonstration de la proposition 4.2. — Grâce au lemme 4.3 on peut supposer $\log B > 2\log p$.

Soient $c \geq 2$, $c_0 \geq 1$, $c_1 \geq {}^1\!/\log p$ des nombres réels qui ne dépendent que de p et qui satisfont

$$c_0\left(2c_1 - \frac{1}{2\log p}\right) > \left(2c + \frac{1}{4\log^2 p}\right)^2 \tag{19}$$

$$2\log^2 p\cdot c_0 \geq c_1\,. \tag{20}$$

On pose

$$\eta = \frac{\left(2c + \frac{1}{4\log^2 p}\right)^2}{c_0\left(2c_1 - \frac{1}{2\log p}\right) - \left(2c + \frac{1}{4\log^2 p}\right)^2}\,.$$

Soient χ_1, χ_2, χ des nombres positifs ne dépendant que de p, et satisfaisant

$$\begin{aligned} \chi_1 &> \frac{1}{2c}\left(\sqrt{\frac{c_0}{2\log p}} + \frac{1}{4\log^2 p}\right) \\ \chi_2 &> \frac{1}{c}\left(\sqrt{c_0 c_1} + \frac{1}{8\log^2 p}\right) \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} &\chi_2 \geq 1 \text{ et } \chi_1 \\ &\chi \geq \chi_1 + \chi_2 + \frac{1}{4c\log^2 p}. \end{aligned} \tag{22}$$

On note $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2) \subset \mathbb{K}$, et $D_0 = [\mathbb{K}_0 : \mathbb{Q}] \leq D$. Nous écrivons

$$\begin{aligned} L_0 &= [c_0 D^3 a_1 a_2 \log B] & L_1 &= [c_1 D \log B] \\ M_1 &= [cD^2 a_2 \log B] & M_2 &= [cD^2 a_1 \log B] \\ U_1 &= [\chi_1 c D^2 a_2 \log B] & V_1 &= [\chi_1 c D^2 a_1 \log B] \\ U_2 &= [\chi_2 c D^2 a_2 \log B] & V_2 &= [\chi_2 c D^2 a_1 \log B] \\ M_1^* &= [\chi c D^2 a_2 \log B] & M_2^* &= [\chi c D^2 a_1 \log B] \end{aligned}$$

$$\mu = (2M_1 + 1)(2M_2 + 1) \qquad \nu = D_0(L_0 + 1)(2L_1 + 1). \tag{23}$$

Les inégalités suivantes nous seront fréquemment utiles

$$\left\{ \begin{aligned} &L_0 + 1 \geq c_0 D^3 a_1 a_2 \log B \\ &\left(2c_1 - \frac{1}{2\log p}\right) D \log B \leq 2L_1 + 1 \leq \left(2c_1 + \frac{1}{2\log p}\right) D \log B \end{aligned} \right. \tag{24}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\left(2c - \frac{1}{4\log^2 p}\right) D^2 a_2 \log B \leq 2M_1 + 1 \\ &\qquad \leq \left(2c + \frac{1}{4\log^2 p}\right) D^2 a_2 \log B \\ &\left(2c - \frac{1}{4\log^2 p}\right) D^2 a_1 \log B \leq 2M_2 + 1 \\ &\qquad \leq \left(2c + \frac{1}{4\log^2 p}\right) D^2 a_1 \log B \end{aligned} \right. \tag{25}$$

$$\begin{cases} 2U_1 + 1 \geq \left(2\chi_1 c - \dfrac{1}{4\log^2 p}\right) D^2 a_2 \log B\,, \\ 2V_1 + 1 \geq \left(2\chi_1 c - \dfrac{1}{4\log^2 p}\right) D^2 a_1 \log B\,, \\ 2U_2 + 1 \geq \left(2\chi_2 c - \dfrac{1}{4\log^2 p}\right) D^2 a_2 \log B\,, \\ 2V_2 + 1 \geq \left(2\chi_2 c - \dfrac{1}{4\log^2 p}\right) D^2 a_1 \log B\,. \end{cases} \tag{26}$$

Cas 1. Pour deux couples différents (u,v), $(u',v') \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant $||u||$, $||u'|| \leq U_1$, $||v||$, $||v'|| \leq V_1$, on a $\alpha_1^{pu}\alpha_2^{pv} = \alpha_1^{pu'}\alpha_2^{pv'}$ (si $p \geq 3$), $\alpha_1^{4u}\alpha_2^{4v} = \alpha_1^{4u'}\alpha_2^{4v'}$ (si $p = 2$).

Soient $l_1 = u - u'$, $l_2 = v - v'$, on a $\alpha_2^{pl_2}$ $(p > 3)$, $\alpha_2^{4l_1} = \alpha_2^{4l_2}$ $(p = 2)$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $l_2 \neq 0$, on note $N = b_1 l_2 - b_2 l_1$. Alors :

$$(a_1 + a_2)\log B \leq \frac{2}{p}\, a_1 a_2 B^{1/2}$$

$$\begin{aligned} ||N|| &\leq B\big(||l_1|| + ||l_2||\big) \leq 2B(U_1 + V_1) \\ &\leq 2B\chi_1 c D^2 (a_1 + a_2)\log B \leq \frac{4}{p}\,\chi_1 c D^2 a_1 a_2 B^{3/2}\,. \end{aligned}$$

Si $N \neq 0$

$$\begin{aligned} -\log|N| &\leq \log||N|| \leq \log\frac{4\chi_1 c}{p} + \log(D^2 a_1 a_2) + \frac{3}{2}\log B \\ &= \log\frac{4\chi_1 c}{p} + 2\log D + \log(a_1 a_2) + \frac{3}{2}\log B \\ &\leq \begin{cases} \dfrac{1}{8\log^3 p}\left[\log\dfrac{16\chi_1 c\log^2 p}{p} + \dfrac{2}{e} + 3\log p\right] D a_1 a_2 \log B\,, & p \geq 3 \\ \dfrac{1}{8\log^3 2}\left[\log(\chi_1 c) + \dfrac{2}{e} + 1 + 4\log 2\right] D a_1 a_2 \log B\,, & p = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

et si $\alpha_1 \neq 1$ le lemme 2.4 (b) dit

$$\log|\alpha_1 - 1| \geq -2Da_1 \geq \frac{1}{2\log^2 p}\, D a_1 a_2 \log B\,.$$

Maintenant, on utilise le lemme 2.5, dans le cas $p \geq 3$, on a

$$\begin{aligned} |\Lambda| \geq |l_2|\,|\Lambda| = p|pl_2|\,|\Lambda| &= p|\alpha_1^{pb_1l_2} - \alpha_2^{pb_2l_2}| \\ &= p|\alpha_1^{pb_1l_2} - \alpha_1^{pb_2l_1}| = p|\alpha_1^{pN} - 1| \\ &= |N|\,|\alpha_1 - 1| \quad (p \geq 3) \end{aligned}$$

et dans le cas $p = 2$, on a

$$\begin{aligned} |\Lambda| \geq |l_2|\,|\Lambda| = 4|4l_2|\,|\Lambda| &= 4|\alpha_1^{4b_1l_2} - \alpha_2^{4b_2l_2}| \\ &= 4|\alpha_1^{4b_1l_2} - \alpha_1^{4b_2l_1}| = 4|\alpha_1^{4N} - 1| \\ &= |N|\,|\alpha_1 - 1| \quad (p = 2)\,. \end{aligned}$$

On voit d'abord que, dans tous les cas où $N \neq 0$ et $\alpha_1 \neq 1$,

$$\log|\Lambda| \geq \log|N| + \log|\alpha_1 - 1| \tag{27}$$

$$\geq \begin{cases} -\dfrac{1}{8\log^3 p}\left[\log\dfrac{16\chi_1 c\log^2 p}{p} + \dfrac{2}{e} + 7\log p\right] Da_1a_2\log B & p \geq 3 \\[2ex] -\dfrac{1}{8\log^3 2}\left[\log(\chi_1 c) + \dfrac{2}{e} + 1 + 8\log 2\right] Da_1a_2\log B & p = 2 \end{cases}$$

Puisque $(b_1, b_2) = 1$, on peut supposer que $p \nmid b_2$ et on pose $\beta = {}^{b_1}/_{b_2}$.
Cas 2. Pour deux couples différents (u, v), $(u', v') \in \mathbb{Z}^2$, vérifiant $||u||$, $||u'|| \leq U_2$, $||v||$, $||v'|| \leq V_2$, on a

$$u + v\beta = u' + v'\beta\,.$$

Alors $\beta = -\dfrac{u - u'}{v - v'}$ et, puisque $(b_1, b_2) = 1$, on a

$$||b_1|| \leq ||u - u'|| \leq 2U_2\,, \quad ||b_2|| \leq ||v - v'|| \leq 2V_2\,,$$

on en déduit

$$||b_1||a_1 + ||b_2||a_2 \leq 2(U_2a_1 + V_2a_2) \leq 4\chi_2 cD^2a_1a_2\log B\,.$$

Comme $\Lambda \neq 0$, le lemme 2.4 (b) donne

$$\begin{aligned} \log|\Lambda| &\geq -D\big(\log 2 + ||b_1||a_1 + ||b_2||a_2\big) \\ &\geq -D\big(\log 2 + 4\chi_2 cD^2a_1a_2\log B\big) \\ &\geq -\left(\frac{\log 2}{8\log^3 p} + 4\chi_2 c\right) D^3a_1a_2\log B\,. \end{aligned} \tag{28}$$

Cas 3. $Bc(a_1 + a_2) < ({}^{c_0}/_2) D a_1 a_2$.

Comme $\Lambda \neq 0$, le lemme 2.4 (b) donne

$$\begin{aligned}
\log|\Lambda| &\geq -D\big(\log 2 + \|b_1\| a_1 + \|b_2\| a_2\big) \\
&\geq -D\big(\log 2 + B(a_1 + a_2)\big) \\
&> -D\left(\log 2 + \frac{c_0}{2c}\, D a_1 a_2\right) \\
&\geq -\left(\frac{\log 2}{4\log^2 p} + \frac{c_0}{2c}\right) D^2 a_1 a_2\,.
\end{aligned} \tag{29}$$

Enfin on introduit l'hypothèse suivante :

Hypothèse (H). — Les points $u + v\beta$, $-M_1 \leq u \leq M_1$, $-M_2 \leq v \leq M_2$ sont deux à deux distincts.

PROPOSITION 4.4. — *Sous l'hypothèse (H), on note*

$$\Gamma = \big\{ u + b\beta \mid -M_1 \leq u \leq M_1\,,\ -M_2 \leq v \leq M_2 \big\}$$

et

$$\Delta = \min_{\gamma\in\Gamma} \prod_{\gamma'\in\Gamma,\neq\gamma} |\gamma - \gamma'| > 0\,.$$

On a

$$\begin{aligned}
-\log\Delta \leq \bigg\{ 4\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p^2}\right) c^2 \log p \,+& \\
+2\left[\frac{1}{\log p} + \frac{\log(4c\log^2 p)}{4\log^2 p}\right] c \bigg\}& D^4 a_1 a_2 \log^2 B \,+ \\
+\, 2\left(\log 4 + \frac{\log p}{p-1}\right) c D^2 (a_1 + a_2) \log B\,.&
\end{aligned} \tag{30}$$

Démonstration. — On utilise le corollaire 3.3 avec $U = M_1$, $V = M_2$, on voit

$$\begin{aligned}
M_1 M_2 &\leq c^2 D^4 a_1 a_2 \log^2 B \\
\max(M_1, M_2) &\leq c D^2 \max(a_1, a_2) \log B \\
\min(M_1, M_2) &\leq c D^2 \min(a_1, a_2) \log B \\
c D^2 \min(a_1, a_2) \log B &\geq 4c \log^2 p > e
\end{aligned}$$

et

$$\log\left(cD^2\min(a_1,a_2)\log B\right) \geq \frac{\log(4c\log^2 p}{4\log^2 p} D^2 \min(a_1,a_2)\log B$$

d'où

$$\begin{aligned}
&-\log\Delta \leq \\
&\leq 4\left(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p^2}\right)c^2\log p\cdot D^4 a_1a_2\log^2 B + \\
&\quad + 2cD^2\max(a_1,a_2)\log B \times \\
&\quad \times\left\{\left[\frac{1}{\log p}+\frac{\log(4c\log^2 p)}{4\log^2 p}\right]D^2\min(a_1,a_2)\log B + 2\log 2+\frac{\log p}{p-1}\right\} \\
&\leq \left\{4\left(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p^2}\right)c^2\log p + 2\left[\frac{1}{\log p}+\frac{\log(4c\log^2 p)}{4\log^2 p}\right]c\right\}D^4a_1a_2\log^2 B \\
&\quad + 2\left(\log 4+\frac{\log p}{p-1}\right)cD^2(a_1+a_2)\log B\,.\ \square
\end{aligned}$$

Il existe une base de $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2)$ de la forme $\xi_d = \alpha_1^{d_1}\alpha_2^{d_2}$, $0\leq d_i < D_i$, $i = 1, 2$, $d_1+d_2\leq D_0$, $d = 1, 2, \ldots, D_0$ où $D_i = \deg(\alpha_i) = [\mathbb{Q}(\alpha_i) : \mathbb{Q}]$, $i = 1, 2$.

Supposons dans un premier temps que $p \geq 3$.

Cas 4.

$$\text{les points } \alpha_1^{pu}\alpha_2^{pv},\ -U_1\leq u\leq U_1,\ -V_1\leq v\leq V_1 \text{ sont deux à deux distincts.} \tag{31}$$

$$\text{les points } u+v\beta,\ -U_2\leq u\leq U_2,\ -V_2\leq v\leq V_2 \text{ sont deux à deux distincts.} \tag{32}$$

$$Bc(a_1+a_2)\geq (c_0/2)Da_1a_2\,. \tag{33}$$

Pour $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$, on pose

$$\varphi(u,v) = \sum_{h=0}^{L_0}\sum_{k=-L_1}^{L_1} p_{hk}\Delta_h(b_2u+b_1v)\alpha_1^{pku}\alpha_2^{pkv}$$

où

$$p_{hk} = \sum_{d=1}^{D_0} p_{hkd}\xi_d\,,\quad 0\leq h\leq L_0\,,\ -L_1\leq k\leq L_1$$

$$p_{hkd}\in\mathbb{Z}\,,\quad 0\leq h\leq L_0\,,\ -L_1\leq k\leq L_1\,,\ d = 1, 2, \ldots, D_0\,.$$

PROPOSITION 4.5.— *Il existe $p_{hkd} \in \mathbb{Z}$ non tous nuls tels que*

$$\varphi(u,v)=0\,,\quad -M_1\le u\le M_1\,,\ -M_2\le v\le M_2 \tag{34}$$

avec

$$\begin{aligned}\log\max\|p_{hkd}\| \le \eta\{c_2D^3a_1a_2\log^2 B - c_0\log p\cdot D^3a_1a_2\log^2 B+\\ +c_3D^2(a_1+a_2)\log B\}\end{aligned} \tag{35}$$

où

$$\begin{aligned}c_2&=c_0+2pcc_1\\ c_3&=p\left(c+\frac{c_1}{2}\right)+\frac{1}{8\log^2 p}\left[\log(4c_1\log p+1)+\frac{5}{2}\log 2+\log\zeta\right].\end{aligned}$$

Démonstration.— On utilise le lemme 2.1 avec "μ", "ν" indiqués dans (23), on déduit facilement de (21), (24), (25) que $\nu > D_0\mu$ et

$$\frac{D_0\mu}{\nu-D_0\mu}\le\eta\,.$$

$$\varphi(u,v)=\sum_{h=0}^{L_0}\sum_{k=L_1}^{L_1}\sum_{d=1}^{D_0}p_{hkd}\Delta_h(b_2u+b_1v)\alpha_1^{pku+d_1}\alpha_2^{pkv+d_2}\,;$$

pour $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$, les coefficients de $\varphi(u,v)$ sont des polynômes en α_1, α_2, α_1^{-1}, α_2^{-1} à coefficients entiers dans les degrés par rapport à α_1, α_2, α_1^{-1}, α_2^{-1} sont inférieurs ou égaux à

$$\begin{aligned}N_1(u,v)&=pL_1\|u\|+D-1 & N_2(u,v)&=pL_1\|v\|+D-1\\ N_1'(u,v)&=pL_1\|u\| & N_2'(u,v)&=pL_1\|v\|\end{aligned}$$

respectivement.

Pour $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$, $-M_1\le u\le M_1$, $-M_2\le v\le M_2$ et pour $0\le h\le L_0$, on a, grâce à (33)

$$\begin{aligned}\max\left(\|b_2u+b_1v\|\,,\,\frac{h}{2}\right)&\le\max\left(B(M_1+M_2)\,,\,\frac{L_0}{2}\right)\\ &\le\max\left\{Bc(a_1+a_2)D^2\log B\,,\,\frac{c_0}{2}D^3a_1a_2\log B\right\}\\ &=E\end{aligned}$$

où on a posé $E = Bc(a_1 + a_2)D^2 \log B$ et on a

$$\left\|\Delta_h(b_2 u + b_1 v)\right\| \leq 2\frac{E^h}{h!}\,.$$

La somme $L(u,v)$ des longueurs de tous les coefficients de $\varphi(u,v)$ vérifie

$$\begin{aligned} L(u,v) &\leq D(2L_1+1)\sum_{h=0}^{L_0}\left\|\Delta_h(b_2u+b_1v)\right\| \leq 2D(2L_1+1)\sum_{h=0}^{L_0}\frac{E^h}{h!} \\ &\leq 2D(2L_1+1)\left(\frac{B}{p}\right)^{L_0}\sum_{h=0}^{L_0}\frac{1}{h!}\big(pc(a_1+a_2)D^2\log B\big)^h \leq L \end{aligned}$$

avec

$$L = 2D(2L_1+1)\left(\frac{B}{p}\right)^{c_0 D^3 a_1 a_2 \log B} B^{pc(a_1+a_2)D^2}\,,$$

donc

$$\begin{aligned} V(u,v) &= L(u,v)\, e^{N_1(u,v)h(\alpha_1)+N_2(u,v)h(\alpha_2)+N_1'(u,v)h(\alpha_1^{-1})+N_2'(u,v)h(\alpha_2^{-1})} \\ &\leq L\, e^{2pL_1(a_1\|u\|+a_2\|v\|)+(D-1)(a_1+a_2)}\,. \end{aligned}$$

Alors, le lemme 2.1 dit que le système linéaire (34) possède une solution

$$p_{hkd} \in \mathbb{Z}\,,\quad 0 \leq h \leq L_0\,,\ -L_1 \leq k \leq L_1\,,\ d = 1, 2, \ldots, D_0$$

non nulle vérifiant

$$\begin{aligned} \log\max\|p_{hkd}\| &\leq \frac{1}{\nu - D_0\mu}\left\{\mu\log 2 + D_0\sum_{u=-M_1}^{M_1}\sum_{v=-M_2}^{M_2}\log V(u,v)\right\} \qquad (36) \\ &\leq \frac{1}{\nu - D_0\mu}\left\{\mu\log 2 + D_0\left[\mu\log L + 2pL_1 \times \right.\right. \\ &\qquad \left.\left.\times \sum_{u=-M_1}^{M_1}\sum_{v=-M_2}^{M_2}(a_1\|u\|+a_2\|v\|) + \mu(D-1)(a_1+a_2)\right]\right\} \\ &= \frac{1}{\nu - D_0\mu}\big\{\mu\log 2 + D_0\big[\mu\log L + \\ &\qquad + 2pL_1\big(M_1(M_1+1)(2M_2+1)a_1 + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ M_2(M_2+1)(2M_2+1)a_2) + \mu(D-1)(a_1+a_2)]\Big\} \\
&\leq \frac{D_0\mu}{\nu - D_0\mu}\Big\{\log 2 + \log L + \\
&+ pL_1\left[\left(M_1+\frac{1}{2}\right)a_1 + \left(M_2+\frac{1}{2}\right)a_2\right](D-1)(a_1+a_2)\Big\} \\
&\leq \eta\Big\{\log L + pL_1(M_1a_1+M_2a_2) + \\
&+ \log 2 + \left(\frac{pL_1}{2}+D-1\right)(a_1+a_2)\Big\}.
\end{aligned}
$$

Mais $\zeta \log B \geq 2\zeta \log p \geq e$; alors

$$
\log\log B \leq \log(\zeta \log B) \leq \frac{\log(2\zeta\log p)}{2\log p}\log B
$$

$$
\begin{aligned}
\log 2D(2L_1+1) &\leq \log\left[2\left(2c_1+\frac{1}{2\log p}\right)D^2\log B\right] \\
&\leq \log\left[2\left(2c_1+\frac{1}{2\log p}\right)\right] + \\
&\quad + \frac{\log 2}{2}D^2 + \frac{\log(2\zeta\log p)}{2\log p}\log B \\
&\leq c_4 D^2(a_1+a_2)\log B
\end{aligned}
\tag{37}
$$

avec

$$
c_4 = \frac{1}{8\log^2 p}\left[\log(4c_1\log p+1) + \frac{3}{2}\log 2 + \log\zeta\right].
$$

On a aussi

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases}
L_1(M_1a_1+M_2a_2) \leq 2cc_1D^3a_1a_2\log^2 B \\
\log 2 + \left(\dfrac{pL_1}{2}+D-1\right)(a_1+a_2) \leq \log 2 + \\
\qquad\qquad + \left(\dfrac{pc_1}{2}D\log B + D - 1\right)(a_1+a_2)
\end{cases} \\
&\leq \left(\frac{pc_1}{2D}\log B + \frac{D-1}{D^2} + \frac{\log 2}{4\log p}\right)D^2(a_1+a_2) \\
&\leq \left(\frac{pc_1}{2D} + \frac{\log 2}{8\log^2 p}\right)D^2(a_1+a_2)\log B.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

On déduit (35) de (36), (37) et (38). □

On voit facilement que p_{hk}, $0 \leq h \leq L_0$, $-L_1 \leq k \leq L$ ne sont pas tous nuls et que

$$|p_{hk}| \leq 1\,, \quad 0 \leq h \leq L_0\,,\ -L_1 \leq k \leq L_1\,.$$

On pose

$$F(z) = \sum_{h=0}^{L_0} \sum_{k=-L_1}^{L_1} p_{hk} \Delta_h(b_2 z) \alpha_1^{pkz}\,, \quad z \in \mathbb{C}_p\,,\ \nu(z) \geq -1$$

de sorte que

$$F(u+v\beta) = \sum_{h=0}^{L_0} \sum_{k=-L_1}^{L_1} p_{hk} \Delta_h(b_2 u + b_1 v) \alpha_1^{pku} \alpha_1^{pk\beta v}\,.$$

On a donc

$$\varphi(u,v) - F(u+v\beta) = \sum_{h=0}^{L_0} \sum_{k=-L_1}^{L_1} p_{hk} \Delta_h(b_2 u + b_1 v) \alpha_1^{pku} (\alpha_2^{pku} - \alpha_1^{pk\beta v})\,;$$

on utilise le lemme 2.5 pour trouver

$$\begin{aligned} \big|\varphi(u,v) - F(u+v\beta)\big| &\leq \max_{-L_1 \leq k \leq L_1} \left|\alpha_2^{pkv} - \alpha_1^{pk\beta v}\right| = \max_{-L_1 \leq k \leq L_1} \left|\frac{pkv}{b_2}\right| |\Lambda| \\ &\leq \frac{|\Lambda|}{p} \end{aligned} \tag{39}$$

pour tout $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$.

PROPOSITION 4.6.— *Sous l'hypothèse (H), on a*

$$\log\big|\varphi(u,v)\big| \leq \max\left\{\log\big|F\big|_p - \mu \log p\,,\ \log\frac{|\Lambda|}{p} - \log\Delta\right\} \tag{40}$$

pour tout $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ *et*

$$\begin{aligned} \log\big|F\big|_p - \mu\log p < \Bigg[&\left(2c - \frac{2}{4\log^2 p}\right)^2 D^4 a_1 a_2 \log^2 B + \\ &- \frac{p}{p-1} c_0 D^3 a_1 a_2 \log B\Bigg] \log p\,. \end{aligned} \tag{41}$$

Démonstration.— La fonction F est analytique sur le disque $|z| \leq p$ et vérifie

$$\left|F\right|_p \leq \max_{0 \leq h \leq L_0} \left|\Delta_h(b_2 z)\right|_p = \max_{0 \leq h \leq L_0} \left|\Delta_h(z)\right|_p < p^{pL_0/(p-1)}.$$

Pour $\gamma = u' + v'\beta \in \Gamma$, $||u'|| \leq M_1$, $||v'|| \leq M_2$, on a $\varphi(u', v') = 0$, donc

$$\left|F(\gamma)\right| = \left|F(\gamma) - \varphi(u', v')\right| \leq \frac{|\Lambda|}{p}.$$

On utilise le lemme 2.3 avec $R = p$, $r = 1$, $\{z_1, \ldots, z_s\} = \Gamma$, $s = |\Gamma| = \mu$

$$\begin{aligned} \left|F\right|_1 &\leq \max\left\{ \left|F\right|_p p^{-\mu}, \frac{\left|F(\gamma)\right|}{\Delta}, \gamma \in \Gamma \right\} \\ &\leq \max\left\{ \left|F\right|_p p^{-\mu}, \frac{|\Lambda|}{p\Delta} \right\}. \end{aligned}$$

Pour $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, on a

$$\begin{aligned} \left|\varphi(u, v)\right| &\leq \max\Big(\left|\varphi(u, v) - F(u + v\beta)\right|, \left|F(u + v\beta)\right| \Big) \\ &\leq \max\left(\frac{|\Lambda|}{p}, \left|F\right|_1 \right) \leq \max\left(\left|F\right|_p p^{-\mu}, \frac{|\Lambda|}{p\Delta} \right). \end{aligned}$$

On a donc (40); et

$$\begin{aligned} \log\left|F\right|_p - \mu \log p &< \frac{pL_0}{p-1} \log p - \mu \log p \\ &\leq -\left[\left(2c - \frac{1}{4\log^2 p} \right)^2 D^4 a_1 a_2 \log^2 B + \right. \\ &\qquad \left. - \frac{p}{p-1} c_0 D^3 a_1 a_2 \log B \right] \log p. \ \square \end{aligned}$$

PROPOSITION 4.7.— *On pose* $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, $||u|| \leq M_1^*$, $||v|| \leq M_2^*$. *Alors ou bien* $\varphi(u, v) = 0$, *ou bien* $\log\left|\varphi(u, v)\right| \geq -S_1$, *où l'on a posé*

$$S_1 = c_5 D^4 a_1 a_2 \log^2 B - (\eta + 1) c_0 \log p D^4 a_1 a_2 \log B + c_6 D^3 (a_1 + a_2) \log B$$

avec

$$c_5 = (1+\eta)c_0 + 2p(\eta+2\chi)cc_1$$
$$c_6 = p\left[(\eta+\chi)c + \eta\frac{c_1}{2}\right] + \\ + \frac{\eta+1}{8\log^2 p}\left[\log(4c_1\log p + 1) + \frac{3}{2}\log 2 + \log\zeta\right] + \frac{\eta\log 2}{8\log^2 p} + \frac{1}{8\log p}.$$

Démonstration. — Nous utilisons le lemme 2.4 (b) :

$$\varphi(u,v) = \sum_{h=0}^{L_0}\sum_{k=-L_1}^{L_1}\sum_{d=1}^{D_0} p_{hkd}\Delta_h(b_2u+b_1v)\alpha_1^{pku+d_1}\alpha_2^{pkv+d_2}$$

est un polynôme en α_1, α_2, α_1^{-1}, α_2^{-1} à coefficients entiers. Soient N_1, N_2, N_1', N_2' les degrés de φ par rapport à α_1, α_2, α_1^{-1}, α_2^{-1} respectivement. On voit que :

$$N_1 \le pL_1M_1^* + D - 1 \qquad N_2 \le pL_1M_2^* + D - 1$$
$$N_1' \le pL_1M_1^* \qquad N_2' \le pL_1M_2^*.$$

De plus le nombre $S = N_1h(\alpha_1) + N_2h(\alpha_2) + N_1'h(\alpha_1^{-1}) + N_2'h(\alpha_2^{-1})$ est majoré par

$$\begin{aligned}(N_1+N_1')a_1 + (N_2+N_2')a_2 &\le \\ &\le 2pL_1(M_1^*a_1 + M_2^*a_2) + (D-1)(a_1+a_2) \\ &\le 4p\chi cc_1a_1a_2D^3\log^2 B + \frac{1}{8\log p}D^2(a_1+a_2)\log B.\end{aligned}$$

Pour $0 \le h \le L_0$, on a grâce à (33)

$$\begin{aligned}\max\left(\|b_2u+b_1v\|,\ \frac{h}{2}\right) &\le \max\left(B(M_1^*+M_2^*),\ \frac{L_0}{2}\right) \\ &\le \max\left(Bc\chi(a_1+\alpha_2)D^2\log B,\ \frac{c_0}{2}D^3a_1a_2\log B\right) \\ &= \chi E\end{aligned}$$

et

$$\|\Delta_h(b_2u+b_1v)\| \le 2\frac{(\chi E)^h}{h!}.$$

Ainsi, la longueur de φ vérifie

$$\begin{aligned}
L(\varphi) &\leq \sum_{h=0}^{L_0} \sum_{k=-L_1}^{L_1} \sum_{d=1}^{D_0} ||p_{hkd}|| \, \big\|\Delta_h(b_2u + b_1v)\big\| \\
&\leq 2D(2L_1 + 1) \max ||p_{hkd}|| \sum_{h=0}^{L_0} \frac{(\chi E)^h}{h!} \\
&\leq 2D(2L_1 + 1) \max ||p_{hkd}|| \left(\frac{B}{p}\right)^{L_0} \sum_{h=0}^{L_0} \frac{\big(p\chi c(a_1 + a_2)D^2 \log B\big)^h}{h!} \\
&\leq 2D(2L_1 + 1) \max ||p_{hkd}|| \left(\frac{B}{p}\right)^{c_0 D^3 a_1 a_2 \log B} B^{p\chi c(a_1+a_2)D^2} .
\end{aligned}$$

On utilise (37) et la proposition 4.5

$$\begin{aligned}
\log L(\varphi) \leq\ & c4D^2(a_1 + a_2) \log B + \eta\big\{c_4 D^3 a_1 a_2 \log^2 B + \\
& - c_0 \log p \cdot D^3 a_1 a_2 \log B + c_3 D^2 (a_1 + a_2) \log B\big\} + \\
& + c_0 D^3 a_1 a_2 \log^2 B - c_0 \log p \cdot D^3 a_1 a_2 \log B + \\
& + p\chi c D^2 (a_1 + a_2) \log B \\
\leq\ & (c_0 + \eta c_2) D^3 a_1 a_2 \log B - (\eta + 1) c_0 \log p \cdot D^3 a_1 a_2 \log B + \\
& + (c_4 + \eta c_3 + pc\chi) D^2 (a_1 + a_2) \log B .
\end{aligned}$$

Si $\varphi(u, v) \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}
\log \big|\varphi(u, v)\big| &\geq -D\big(\log L(\varphi) + S\big) \\
&\geq -(c_0 + \eta c_2 + 4p\chi c c_1) D^4 a_1 a_2 \log^2 B + \\
&\quad + (\eta + 1) c_0 \log p \cdot D^4 a_1 a_2 \log B + \\
&\quad - \left(c_4 + \eta c_3 + p\chi c + \frac{1}{8 \log p}\right) D^3 (a_1 + a_2) \log B
\end{aligned}$$

mais

$$c_5 = c_0 + \eta c_2 + 4p\chi c c_1 , \quad c_6 = c_4 + \eta c_3 + p\chi c + \frac{1}{8 \log p} . \square$$

Nous imposons ici deux nouvelles restrictions sur c, c_0, c_1 et χ.

$$\left(2c - \frac{1}{4 \log^2 p}\right)^2 \log p \geq c_5 \tag{42}$$

$$\left(\eta - \frac{1}{p-1}\right) c_0 \log^2 p \geq c_6 . \tag{43}$$

On pose

$$P(X,Y)=\sum_{h=0}^{L_0}\sum_{k=-L_1}^{L_1} p_{hk}\Delta_h(b_2X)Y^{L_1+k}\in \mathbb{C}[X,Y].$$

On déduit que $P\neq 0$ du fait que les coefficients p_{hk}, $0\leq h\leq L_0$, $-L_1\leq k\leq L_1$ ne sont pas tous nuls.

Le polynôme P est de degré au plus L_0 et $2L_1$ par rapport à X et Y respectivement.

L'hypothèse (21) implique $U_2\geq U_1$, $V_2\geq V_1$, et (32) implique que les points $u+v\beta$, $-U_1\leq u\leq U_1$, $-V_1\leq v\leq V_1$ sont deux à deux distincts.

La première partie de (21) implique

$$\left(2\chi_1 c-\frac{1}{4\log^2 p}\right)^2 2\log p > c_0 \geq \frac{c_1}{2\log^2 p}$$

$$\begin{aligned}(2U_1+1)(2V_1+1) &\geq \left(2\chi_1 c-\frac{1}{4\log^2 p}\right)^2 D^4 a_1a_2\log^2 B\\ &\geq \left(2\chi_1 c-\frac{1}{4\log^2 p}\right)^2 2\log p\cdot D^3 a_1a_2\log B\\ &> c_0 D^3 a_1a_2 \log B\\ &\geq \begin{cases} L_0\\ \dfrac{c_1}{2\log^2 p} D^3a_1a_2\log B\geq 2c_1D\log B\geq 2L_1\,.\end{cases}\end{aligned}$$

La deuxième partie de (21) implique

$$\left(2\chi_2 c-\frac{1}{4\log^2 p}\right)^2 > 4c_0c_1$$

$$\begin{aligned}(2U_2+1)(2V_2+1) &\geq \left(2\chi_2 c-\frac{1}{4\log^2 p}\right)^2 D^4a_1a_2\log^2 B\\ &> 4c_0c_1D^4a_1a_2\log^2 B\geq 2L_0\cdot 2L_1\,.\end{aligned}$$

On voit aussi que

$$\begin{aligned} M_1^* &\geq \left(\chi-\frac{1}{4c\log^2 p}\right) cD^2a_2\log B\\ &\geq (\chi_1+\chi_2)cD^2a_2\log^2 B\geq U_1+U_2\\ M_2^* &\geq \left(\chi-\frac{1}{4c\log^2 p}\right) cD^2a_1\log B\\ &\geq (\chi_1+\chi_2)cD^2a_1\log^2 B\geq V_1+V_2\end{aligned}$$

En utilisant (31), (32), il résulte du lemme 2.6 qu'il existe un point $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$. $\|u_0\| \leq M_1^*$, $\|v_0\| \leq M_2^*$ tel que $P(u_0 + v_0\beta\,, \alpha_1^{pu_0}\alpha_2^{pv_0}) \neq 0$, ce qui équivaut à $\varphi(u_0, v_0) \neq 0$. Puisque $\chi_2 > 1$, $U_2 \geq M_1$, $V_2 \geq M_2$, (32) implique l'hypothèse (H). Alors, on utilise les propositions 4.6 et 4.7, avec $(u, v) = (u_0, v_0)$

$$\max\left\{\log\left|F\right|_p - \mu\log p\,, \log\frac{|\Lambda|}{p} - \log\Delta\right\} \geq \log\left|\varphi(u_0, v_0)\right| \geq -S_1 \;;$$

mais (43) implique

$$\frac{p}{p-1}c_0\log p \leq (\eta+1)c_0\log p - \frac{c_6}{\log p}\;; \tag{44}$$

alors par (41), (42) et (44), on a

$$\begin{aligned} &\log\left|F\right|_p - \mu\log p < \\ &< -\left\{\left(2c - \frac{1}{4\log^2 p}\right)^2 D^4 a_1 a_2 \log^2 B - \frac{p}{p-1}c_0 D^3 a_1 a_2 \log B\right\}\log p \\ &\leq -\left\{c_5 D^4 a_1 a_2 \log^2 B - \left[(\eta+1)c_0\log p - \frac{c_6}{\log p}\right] D^4 a_1 a_2 \log B\right\} \\ &\leq -S_1\;; \end{aligned}$$

donc

$$\log\frac{|\Lambda|}{p} - \log\Delta \geq -S_1$$

et on utilise la proposition 4.4

$$\begin{aligned} \log\frac{|\Lambda|}{p} &\geq \log\Delta - S_1 \\ &\geq -\left\{4\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p^2}\right)c_2\log p + c_5 + \right. \\ &\qquad \left. + 2\left[\frac{1}{\log p} + \frac{\log(4c\log^2 p)}{4\log^2 p}\right]c\right\} D^4 a_1 a_2 \log^2 B + \\ &\quad + (\eta+1)c_0\log p \cdot D^4 a_1 a_2 \log B + \\ &\quad - \left[c_6 + 2\left(\log 4 + \frac{\log p}{p-1}\right)c\right] D^3(a_1 + a_2)\log B\,. \end{aligned} \tag{45}$$

Maintenant nous nous mettons à choisir c, c_0, c_1 et puis χ_1, χ_2, χ.

Soient t_0, t_1, λ_0 des constantes absolues, λ un nombre réel ne dépendant que de p et satisfaisant les conditions suivantes

$$t_1 \geq \frac{2}{3}, \quad 3t_1 \leq t_0, \quad \lambda > \lambda_0 \geq 2 \tag{46}$$

$$w = t_0 t_1 \geq 3 \tag{47}$$

et

$$\begin{aligned} 4\lambda\left(1-\frac{1}{8\lambda_0^2 p}\right)^2 \geq \tau_1 = \left(\frac{2}{wZ_0-2}+1\right)t_0 + \\ + 4\left(\frac{1}{wZ_0-2}+\sqrt{w}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{t_0}{2\lambda}}+\frac{1}{2\lambda_0^2 p}\right)t_1\,, \end{aligned} \tag{48}$$

où $Z_0 = \big(1-({}^1/4t_1\lambda)\big)\big(1-({}^1/4\lambda_0^2 p)\big)$,

$$\begin{aligned} \tau = p^2\lambda\left[t_0\lambda^2\log p - \left(\lambda + t_1\frac{\log p}{2p}\right)\right] + \\ - \frac{1}{8}\left[\log(4t_1\lambda+1)+\frac{5}{2}\log 2+\log\zeta\right] \geq 0 \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{2}{w\left(1-\frac{1}{4t_1\lambda}\right)-2}-\frac{1}{p-1}\right)t_0\lambda^3p^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{\log p}\left\{p^2\lambda^2\left(\frac{2}{w\left(1-\frac{1}{4t_1\lambda}\right)-2}+\sqrt{w}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{t_0}{2\lambda}}+\frac{1}{2\lambda_0^2 p}\right)+\right. \\ &\quad + \left(\frac{2}{w\left(1-\frac{1}{4t_1\lambda}\right)-2}+1\right)\frac{1}{8}\left[\log(4t_1\lambda+1)+\frac{3}{2}\log 2+\log\zeta\right]+ \\ &\quad \left. + \frac{1}{w\left(1-\frac{1}{4t_1\lambda}\right)-2}\frac{\log 2}{4}\right\} + \frac{t_1\lambda p}{w\left(1-\frac{1}{4t_1\lambda}\right)-2}+\frac{1}{8}. \end{aligned} \tag{50}$$

Choisissons

$$c_1 = \frac{t_1\lambda}{\log p}, \quad c = \frac{\lambda^2 p}{\log^2 p}, \quad c_0 = \frac{t_0\lambda^3p^2}{\log^3 p}.$$

(46) signifie que $c \geq 2$, $c_0 \geq 1$, $c_1 \geq {}^1/\log p$ et $2\log^2 p \cdot c_0 \geq c_1$ et on déduit aussi de $t_1 \geq {}^2/3$, $\lambda_0 \geq 2$ et (47) que

$$\begin{aligned}
Z &= c_0 \left(2c_1 - \frac{1}{2\log p}\right)\left(2c + \frac{1}{4\log^2 p}\right)^{-2} \\
&= \frac{c_0 c_1}{2c^2}\left(1 - \frac{1}{4c_1 \log p}\right)\left(1 + \frac{1}{8c\log^2 p}\right)^{-2} \\
&= \frac{w}{2}\left(1 - \frac{1}{4t_1\lambda}\right)\left(1 + \frac{1}{8\lambda^2 p}\right)^{-2} > \frac{w}{2} Z_0 > 1\,.
\end{aligned}$$

Alors (19), (20) sont vérifiées. On voit que $\eta = {}^1/(Z-1)$, donc

$$\frac{2}{w\left(1 - \frac{1}{4t_1\lambda}\right) - 2} < \eta < \frac{2}{wZ_0 - 2}\,. \tag{51}$$

Choisissons de plus

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t_0}{2\lambda}} + \frac{1}{8\lambda_0^2 p}\,, \quad \chi_2 = \sqrt{w} + \frac{1}{8\lambda_0^2 p} \\
\chi &= \sqrt{w} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t_0}{2\lambda}} + \frac{1}{2\lambda_0^2 p}\,.
\end{aligned} \tag{52}$$

En utilisant (46), (47) les relations (20), (21) deviennent claires.

On utilise (51), (52) et puis (48) pour obtenir

$$\left(2c - \frac{1}{4\log^2 p}\right)^2 \log p \geq \frac{4\lambda^4 p^2}{\log^4 p}\left(1 - \frac{1}{8\lambda_0^2 p}\right)^2 \log p \geq \tau_1 \frac{\lambda^3 p^2}{\log^3 p} \geq c_5\,, \tag{53}$$

c'est (42), et

$$\begin{aligned}
&c_0 \log^2 p - p\left(c + \frac{c_1}{2}\right) + \\
&- \frac{1}{8\log^2 p}\left[\log(4c_1 \log p + 1) + \frac{5}{2}\log 2 + \log\zeta\right] = \frac{\tau}{\log^2 p}\,.
\end{aligned} \tag{54}$$

La condition (50) peut se transformer en

$$\left(\frac{2}{w\left(1-\frac{1}{4t_1\lambda}\right)-2}-\frac{1}{p-1}\right)c_0\log^2 p\geq$$

$$\geq pc\left(\frac{2}{w\left(1-\frac{1}{4t_1\lambda}\right)-2}+\chi\right)+\left(\frac{2}{w\left(1-\frac{1}{4t_1\lambda}\right)-2}+1\right)\times$$

$$\times\frac{1}{8\log^2 p}\left[\log(4c_1\log p+1)+\frac{3}{2}\log 2+\log\zeta\right]+$$

$$+\frac{2}{w\left(1-\frac{1}{4t_1\lambda}\right)-2}\frac{\log 2}{8\log^2 p}+\frac{2}{w\left(1-\frac{1}{4t_1\lambda}\right)-2}\frac{pc_1}{2}+\frac{1}{8\log p},$$

ce qui équivaut à

$$\frac{2}{w\left(1-\frac{1}{4t_1\lambda}\right)-2}\frac{\tau}{\log^2 p}\leq$$

$$\leq\frac{1}{p-1}c_0\log^2+p\chi c+\frac{1}{8\log^2 p}\left[\log(4c_1\log p+1)+\frac{3}{2}\log 2+\log(\zeta p)\right].$$

Alors par (51), on a

$$\eta\frac{\tau}{\log^2 p}\geq\frac{1}{p-1}c_0\log^2 p+p\chi c+$$

$$+\frac{1}{8\log^2 p}\left[\log(4c_1\log p+1)+\frac{3}{2}\log 2+\log(\zeta p)\right]$$

ce qui équivaut à (43).

Choisissons $t_0=4.4$, $t_1=0.95$, $\lambda_0=5$ et $\lambda=\lambda_0+{}^1/10p=5+{}^1/10p$; $w=4.18$.

Les conditions (46), (47) sont claires et on voit que l'on a

$$\begin{aligned}4\lambda_0=20>19.8580\ldots\\ &=\left[\frac{2}{w\left(1-\frac{1}{4t_1\lambda_0}\right)-2}+1\right]t_0+\\ &\quad+4\left[\frac{1}{w\left(1-\frac{1}{4t_1\lambda_0}\right)-2}+\sqrt{w}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{t_0}{2\lambda_0}}\right]t_1.\end{aligned}\tag{55}$$

On en déduit

$$4\lambda\left(1-\frac{1}{8\lambda_0^2 p}\right)^2 \geq 4\lambda_0+\frac{0.1986}{p} > 19.8580\ldots+\frac{0.1207}{p} \geq \tau_1 \; ; \tag{56}$$

c'est (48).

Les conditions (49), (50) peuvent être facilement vérifiées.

Alors on a les minorations (27) dans le cas 1, (28) dans le cas 2, (29) dans le cas 3 et (45) dans le cas 4.

$$\lambda^2 \leq 25+1.0034\frac{1}{p}$$

$$125+7.5\frac{1}{p} \leq \lambda^3 \leq 125+7.5502\frac{1}{p}$$

$$\lambda^4 \leq 625+50.5023\frac{1}{p}$$

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{\log p}\left(4.75+0.095\dfrac{1}{p}\right) \\ c \leq \dfrac{p}{\log^2 p}\left(25+1.0034\dfrac{1}{p}\right) \leq \dfrac{25}{\log^2 p}(p+0.0402) \\ c^2 \leq \dfrac{625}{\log^4 p}(p^2+0.0809\,p) \\ c_0 \geq \dfrac{550}{\log^3 p}(p^2+0.06\,p) \end{cases} \tag{57}$$

$$\chi_1 < 0.3334\,, \quad \chi_2 < 2.0463\,, \quad \chi < 2.3763\,\frac{1}{p} \tag{58}$$

Dans les premiers trois cas, on a même de meilleurs résultats.

Cas 1. $(16\chi_1 c\log^2 p)/p = 16\chi_1\lambda^2 \leq 136$, alors par (27), on a

$$\begin{aligned}\log|\Lambda| &\geq -\frac{1}{8\log^3 p}(5.6485+7\log p)Da_1a_2\log B \\ &\geq -\frac{1.5177}{\log^2 p}Da_1a_2\log B\,.\end{aligned}$$

Cas 2. $4\chi_2 c \leq (204.63/\log^2 p)(p+0.0402)$, alors par (28)

$$\begin{aligned}\log|\Lambda| &\geq -\left[\frac{\log 2}{8\log^3 p}+\frac{204.63}{\log^2 p}(p+0.0402)\right]D^3a_1a_2\log B \\ &\geq -207.3984\frac{p}{\log^2 p}D^3a_1a_2\log B\,.\end{aligned}$$

Cas 3. $c_0/2c = t_0\lambda p/2\log p \leq 11.0734(p/\log p)$, alors par (29)

$$\log|\Lambda| \geq -\left(\frac{\log 2}{4\log^2 p} + \frac{c_0}{2c}\right) D^2 a_1 a_2 \geq -11.1260\,\frac{p}{\log p}\,D^2 a_1 a_2\,.$$

Cas 4. On a :

$$\begin{aligned} 4\left(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p^2}\right)c^2\log p &\leq \frac{2500}{\log^3 p}\left(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p^2}\right)(p^2+0.0809\,p)\\ &\leq \frac{2500}{\log^3 p}\left(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p^2}\right)p^2 + 123.5973\,\frac{p}{\log^3 p}\,. \end{aligned}$$

Par (53), (56) :

$$\begin{gathered} c_5 \leq \tau_1\frac{\lambda^3 p^2}{\log^3 p} \leq \frac{p^2}{\log^3 p}\,\lambda^3\left(20+\frac{0.1986}{p}\right) \leq \frac{2500}{\log^3 p}\,(p^2+0.0706\,p)\,,\\ 2\left[\frac{1}{\log p}+\frac{\log(4c\log^2 p)}{4\log^2 p}\right]c \leq \frac{126.945}{\log^3 p}\,(p+0.0402)\,, \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} 4\left(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p^2}\right)c^2\log p + c_5 + 2\left[\frac{1}{\log p}+\frac{\log(4c\log^2 p)}{4\log^2 p}\right]c \leq\\ \leq \frac{2500}{\log^3 p}\left[\left(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p^2}\right)p^2 + 0.1715\,p\right]. \end{aligned} \tag{59}$$

Par (51) :

$$\eta > \frac{2}{w\left(1-\dfrac{1}{4t_1\lambda}\right)-2} > \eta' = 1.0204 - 0.0024\,\frac{1}{p}\,.$$

Remarquons (54) :

$$\begin{aligned} T_1 &= c_0\log p\cdot D^4 a_1 a_2\log B\, +\\ &\quad -\left[p\left(c+\frac{c_1}{2}\right)+\frac{1}{8\log^2 p}\left(\log(4c_1\log p+1)\, +\right.\right.\\ &\qquad\left.\left. +\,\frac{5}{2}\log 2+\log\zeta\right)\right]D^3(a_1+a_2)\log B\\ &\geq \frac{\tau}{\log^2 p}\,D^3(a_1+a_2)\log B \geq 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(\eta+1)c_0\log p\cdot D^4a_1a_2\log B - c_6D^3(a_1+a_2)\log B = \\
&\quad = \eta T_1 + c_0\log p\cdot D^4a_1a_2\log B - \Big\{p\chi c + \frac{1}{8\log^2 p}\Big[\log(4c_1\log p+1) + \\
&\qquad + \frac{3}{2}\log 2 + \log\zeta\Big] + \frac{1}{8\log p}\Big\} D^3(a_1+a_2)\log B \\
&\quad \geq \eta' T_1 + c_0\log p\cdot D^4a_1a_2\log B - \Big\{p\chi c + \frac{1}{8\log^2 p}\Big[\log(4c_1\log p+1) + \\
&\qquad + \frac{3}{2}\log 2 + \log\zeta\Big] + \frac{1}{8\log p}\Big\} D^3(a_1+a_2)\log B \\
&\quad = (\eta'+1)c_0\log p\cdot D^4a_1a_2\log B - \Big\{p\Big[(\eta'+\chi)c + \eta'\frac{c_1}{2}\Big] + \\
&\qquad + \frac{\eta'+1}{8\log^2 p}\Big[\log(4c_1\log p+1) + \frac{3}{2}\log 2 + \log\zeta\Big] + \\
&\qquad + \frac{\eta'\log 2}{8\log^2 p} + \frac{1}{8\log p}\Big\} D^3(a_1+a_2)\log B\ ;
\end{aligned}
\tag{60}
$$

en utilisant (57), (58) cette inégalité (60) est continuée en

$$
\begin{aligned}
&\geq \frac{1111.22\,p^2}{\log^2 p}\left(1+0.587\,\frac{1}{p}\right) D^4a_1a_2\log B + \\
&\quad - \left\{\frac{84.9175\,p^2}{\log^2 p}\left[1+(0.0488+0.0001\,\log\zeta)\frac{1}{p}\right] + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{2.4235\,p}{\log p}\left(1+0.0697\,\frac{1}{p}\right)\right\} D^3(a_1+a_2)\log B
\end{aligned}
$$

$$
2\left(\log 4 + \frac{\log p}{p-1}\right)c \leq \frac{p}{\log^2 p}\,69.315\left(1+0.7214\,\frac{\log p}{p-1}\right)\left(1+0.0402\,\frac{1}{p}\right). \tag{61}
$$

On déduit de (45), (59), (60), (61) que

$$
\log\frac{|\Lambda|}{p} \geq -T\,.
$$

Supposons que $p=2$. Pour le cas 4 :

les points $\alpha_1^{4u}\ \alpha_2^{4v}$, $-U_1\leq u\leq U_1$, $-V_1\leq v\leq V_1$ sont deux à deux distincts; (62)

les points $u+v\beta$, $-U_2\leq u\leq U_2$, $-V_2\leq v\leq V_2$ sont deux à deux distincts, (63)

$$
Bc(a_1+a_2) \geq \frac{c_0}{2}\,Da_1a_2\,. \tag{64}
$$

Pour $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$, on pose

$$\varphi(u,v) = \sum_{h=0}^{L_0} \sum_{k=-L_1}^{L_1} p_{hk} \Delta_h(b_2 u + b_1 v) \alpha_1^{4ku} \alpha_2^{4kv} ,$$

où

$$p_{hk} = \sum_{d=1}^{D_0} p_{hkd} \xi_d , \quad 0 \le h \le L_0 , \ -L_1 \le k \le L_1 ,$$

$$p_{hkd} \in \mathbb{Z} , \quad 0 \le h \le L_0 , \ -L_1 \le k \le L_1 , \ d = 1, 2, \ldots, D_0 .$$

PROPOSITION 4.8. — *Il existe $p_{hkd} \in \mathbb{Z}$ non tous nuls tels que*

$$\varphi(u,v) = 0 , \quad -M_1 \le u \le M_1 , \ -M_2 \le v \le M_2 \tag{65}$$

avec

$$\begin{aligned} \log \max \|p_{hkd}\| \le \eta \{ & c^2 D^3 a_1 a_2 \log^2 B + \\ & - 2c_0 \log 2 \cdot D^3 a_1 a_2 \log B + c_3 D^2 (a_1 + a_2) \log B \} \end{aligned} \tag{66}$$

où

$$\begin{cases} c_2 = c_0 + 8cc_1 \\ c_3 = 2(2c + c_1) + \dfrac{1}{8 \log^2 2} \left\{ \log \left(4c_1 + \dfrac{1}{\log 2} \right) + \dfrac{7}{4} \log 2 + 1 \right\} . \end{cases}$$

Démonstration

On utilise le lemme 2.1 avec "μ", "ν" indiqués dans (23); on tire facilement de (19), (24), (25) que $\nu > D_0 \mu$ et

$$D_0 \mu / (\nu - D_0 \mu) \le \eta$$

$$\varphi(u,v) = \sum_{h=0}^{L_0} \sum_{k=-L_1}^{L_1} \sum_{d=1}^{D_0} p_{hkd} \Delta_h(b_2 u + b_1 v) \alpha_1^{4ku + d_1} \alpha_2^{4kv + d_2}$$

pour $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$, les coefficients de $\varphi(u,v)$ sont des polynômes en α_1, α_2, α_1^{-1}, α_2^{-1} à coefficients entiers dont les degrés par rapport à α_1, α_2, α_1^{-1}, α_2^{-1} sont inférieurs ou égaux à

$$N_1(u,v) = 4L_1 \|u\| + D - 1 \qquad N_2(u,v) = 4L_1 \|v\| + D - 1$$
$$N_1'(u,v) = 4L_1 \|u\| \qquad N_2'(u,v) = 4L_1 \|v\|$$

respectivement.

Pour $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$, $-M_1 \leq u \leq M_1$, $-M_2 \leq v \leq M_2$ et pour $0 \leq h \leq L_0$, on a grâce à (64) :

$$\begin{aligned}\max\left(\|b_2u + b_1v\|\,,\ \frac{h}{2}\right) &\leq \max\left(B(M_1+M_2)\,,\ \frac{L_0}{2}\right)\\ &\leq \max\left\{Bc(a_1+a_2)D^2\log B\,,\ \frac{c_0}{2}\,D^3a_1a_2\log B\right\}\\ &= E\end{aligned}$$

où on a toujours posé $E = bcD^2(a_1+a_2)\log B$, et on a

$$\left\|\Delta_h(b_2u+b_1v)\right\| \leq 2\frac{E^h}{h!}\,.$$

La somme $L(u,v)$ des longueurs de tous les coefficients de $\varphi(u,v)$ vérifie

$$\begin{aligned}L(u,v) &\leq D(2L_1+1)\sum_{h=0}^{L_0}\left\|\Delta_h(b_2u+b_1v)\right\|\\ &\leq 2D(2L_1+1)\sum_{h=0}^{L_0}\frac{E^h}{h!}\\ &\leq 2D(2L_1+1)\left(\frac{B}{4}\right)^{L_0}\sum_{h=0}^{L_0}\frac{1}{h!}\left(4cD^2(a_1+a_2)\log B\right)^h \leq L\end{aligned}$$

avec

$$L = 2D(2L_1+1)\left(\frac{B}{4}\right)^{c_0D^3a_1a_2\log B} B^{4cD^2(a_1+a_2)}\,;$$

donc

$$\begin{aligned}V(u,v) &= L(u,v)\,e^{N_1(u,v)h(\alpha_1)+N_2(u,v)h(\alpha_2)+N_1'(u,v)h(\alpha_1^{-1})+N_2'(u,v)h(\alpha_2^{-1})}\\ &\leq L\,e^{8L_1(a_1\|u\|+a_2\|v\|)+(D-1)(a_1+a_2)}\,.\end{aligned}$$

Alors le lemme 2.1 dit que le système linéaire (65) possède une solution

$$p_{hkd} \in \mathbb{Z}\,,\quad 0 \leq h \leq L_0\,,\ -L_1 \leq k \leq L_1\,,\ d = 1, 2, \ldots, D_0$$

non nulle vérifiant

$\log\max\|p_{hkd}\| \leq$

$$\leq \frac{1}{\nu - D_0\mu}\left\{\mu\log 2 + D_0 \sum_{u=-M_1}^{M_1}\sum_{v=-M_2}^{M_2} \log V(u,v)\right\}$$

$$\leq \frac{1}{\nu - D_0\mu}\left\{\mu\log 2 + D_0\left[\mu\log L + \right.\right. \tag{67}$$

$$\left.\left. + \; 8L_1 \sum_{u=-M_1}^{M_1}\sum_{v=-M_2}^{M_2} (a_1\|u\| + a_2\|v\|) + \mu(D-1)(a_1+a_2)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{\nu - D_0\mu}\left\{\mu\log 2 + D_0\left[\mu\log L + 8L_1\big(M_1(M_1+1)(2M_2+1)a_1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + M_2(M_2+1)(2M_2+1)a_2\big) + \mu(D-1)(a_1+a_2)\right]\right\}$$

$$\leq \frac{D_0\mu}{\nu - D_0\mu}\left\{\log 2 + \log L + 4L_1\left[\left(M_1 + \frac{1}{2}\right)a_1 + \left(M_2 + \frac{1}{2}\right)a_2\right] + \right.$$

$$\left. + (D-1)(a_1+a_2)\right\}$$

$$\leq \eta\big\{\log L + 4L_1(M_1a_1 + M_2a_2) + \log 2 + (2L_1 + D - 1)(a_1+a_2)\big\}$$

$$\log\log B \leq \log\left(\frac{e}{2\log 2}\log B\right) \leq \frac{\log B}{2\log 2}$$

$$\begin{aligned}
\log 2D(2L_1+1) &\leq \log\left[2\left(2c_1 + \frac{1}{2\log 2}\right)D^2\log B\right] \\
&\leq \log\left[2\left(2c_1 + \frac{1}{2\log 2}\right)\right] + \frac{\log 2}{2}D^2 + \frac{\log B}{2\log 2} \qquad (68)\\
&\leq c_4 D^2(a_1+a_2)\log B
\end{aligned}$$

avec

$$c_4 = \frac{1}{8\log^2 2}\left[\log(4c_1 + \frac{1}{\log 2}) + \frac{1}{2}\log 2 + 1\right].$$

On a aussi

$$\left\{\begin{aligned}
&L_1(M_1a_1 + M_2a_2) \leq 2cc_1D^3a_1a_2\log^2 B\,,\\
&\log 2 + (2L_1 + D - 1)(a_1+a_2)\\
&\quad \leq \log 2 + (2c_1D\log B + D - 1)(a_1+a_2)\\
&\quad \leq \left(2c_1\log B + \frac{D-1}{D^2} + \frac{1}{4D^2}\right)D^2(a_1+a_2)\\
&\quad \leq \left(2c_1 + \frac{5}{32\log 2}\right)D^2(a_1+a_2)\log B\,.
\end{aligned}\right. \tag{69}$$

On en déduit (66) de (67), (68) et (69). □

On voit facilement que p_{hk}, $0 \leq h \leq L_0$, $-L_1 \leq k \leq L_1$ ne sont pas tous nuls et que

$$|p_{hk}| \leq 1 , \quad 0 \leq h \leq L_0 \, , \; -L_1 \leq k \leq L_1 \, .$$

On pose

$$F(z) = \sum_{h=0}^{L_0} \sum_{k=-L_1}^{L_1} p_{hk} \Delta_h(b_2 z) \alpha_1^{4kz} \, , \quad z \in \mathbb{C}_p \, , \quad \nu(z) \geq -2$$

de la sorte que

$$F(u + v\beta) = \sum_{h=0}^{L_0} \sum_{k=-L_1}^{L_1} p_{hk} \Delta_h(b_2 u + b_1 v) \alpha_1^{4ku} \alpha_1^{4kv\beta} \, ,$$

donc

$$\varphi(u,v) - F(u + v\beta) = \sum_{h=0}^{L_0} \sum_{k=-L_1}^{L_1} p_{hk} \Delta_h(b_2 u + b_1 v) \alpha_1^{4ku} (\alpha_2^{4kv} - \alpha_1^{4kv\beta}) \, .$$

On utilise le lemme 2 pour obtenir :

$$\begin{aligned} \left|\varphi(u,v) - F(u, v\beta)\right| &\leq \max_{-L_1 \leq k \leq L_1} |\alpha_2^{4kv} - \alpha_1^{4kv\beta}| \\ &= \max_{-L_1 \leq k \leq L_1} \left|\frac{4kv}{b_2}\right| |\Lambda| \leq \frac{|\Lambda|}{4} \end{aligned} \tag{70}$$

pour tout $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$.

PROPOSITION 4.9.— *Sous l'hypothèse (H), on a*

$$\log\left|\varphi(u,v)\right| \leq \max\left\{\log\left|F\right|_4 - 2\mu \log 2 \, , \, \log \frac{|\Lambda|}{4} - \log \Delta\right\} \tag{71}$$

pour tout $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ *et*

$$\begin{aligned} \log\left|F\right|_4 - 2\mu \log 2 < - &\left[2\left(2c - \frac{1}{4\log^2 2}\right)^2 D^4 a_1 a_2 \log^2 B + \right. \\ &\left. - 3c_0 D^3 a_1 a_2 \log B\right] \log 2 \, . \end{aligned} \tag{72}$$

Démonstration. — La fonction F est analytique sur le disque $|z| \leq 4$ et vérifie

$$|F|_4 \leq \max_{0 \leq h \leq L_0} |\Delta_h(b_2 z)|_4 = \max_{0 \leq h \leq L_0} |\Delta_h(z)|_4 < 8^{L_0}\,.$$

Pour $\gamma = u' + v'\beta \in \Gamma$, $||u'|| \leq M_1$, $||v'|| \leq M_2$, on a $\varphi(u', v') = 0$, donc

$$|F(\gamma)| = |F(\gamma) - \varphi(u', v')| \leq \frac{|\Lambda|}{4}\,.$$

Le lemme 2.3 avec $R = 4$, $r = 1$, $\{z_1, \ldots, z_s\} = \Gamma$, $s = |\Gamma| = \mu$ donne

$$\begin{aligned} |F|_1 &\leq \max\left\{ |F|_4 4^{-\mu},\ \frac{|F(\gamma)|}{\Delta},\ \gamma \in \Gamma \right\} \\ &\leq \max\left\{ |F|_4 4^{-\mu},\ \frac{|\Lambda|}{4\Delta} \right\}. \end{aligned}$$

Pour $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, on a

$$\begin{aligned} |\varphi(u, v)| &\leq \max\bigl(|\varphi(u, v) - F(u + v\beta)|\,,\ |F(u + v\beta)|\bigr) \\ &\leq \max\left(\frac{|\Lambda|}{4},\ |F|_1\right) \leq \max\left(|F|_4 4^{-\mu},\ \frac{|\Lambda|}{4}\right), \end{aligned}$$

on a donc (71) et

$$\begin{aligned} \log|F|_4 - 2\mu \log 2 &< L_0 \log 8 - 2\mu \log 2 = \\ &= -(2\mu - 3L_0) \log 2 \\ &\leq -\left[2\left(2c - \frac{1}{4\log^2 2}\right)^2 D^4 a_1 a_2 \log^2 B - 3c_0 D^3 a_1 a_2 \log B \right] \log 2\,. \ \square \end{aligned}$$

Proposition 4.10. — *On pose $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, $||u|| \leq M_1^*$, $||v|| \leq M_2^*$. Alors ou bien $\varphi(u, v) = 0$ ou bien*

$$\log|\varphi(u, v)| \geq -S_1$$

où

$$S_1 = c_5 D^4 a_1 a_2 \log^2 B - 2(\eta + 1) c_0 \log 2 \cdot D^4 a_1 a_2 \log B + c_6 D^3 (a_1 + a_2) \log B$$

avec

$$c_5 = 2(\eta+1)c_0 + 8(\eta+2\chi)cc_1$$
$$c_6 = 2\eta(2c+c_1) + \frac{\eta+1}{8\log^2 2}\left[\log\left(4c_1+\frac{1}{\log 2}\right)+\frac{7}{4}\log 2+1\right]+$$
$$-\frac{1}{32\log 2}+4\chi c\,.$$

Démonstration. — Nous utilisons le lemme 2.4 (b).

$$\varphi(u,v) = \sum_{h=0}^{L_0}\sum_{k=-L_1}^{L_1}\sum_{d=1}^{D_0} p_{hkd}\Delta_h(b_2u+b_1v)\alpha_1^{4ku+d_1}\alpha_2^{4kv+d_2}$$

est un polynôme en α_1, α_2, α_1^{-1}, α_2^{-1} à coefficients entiers. soient N_1, N_2, N_1', N_2' les degrés de φ par rapport à α_1, α_2, α_1^{-1}, α_2^{-1} respectivement. On voit que

$$N_1 \le 4L_1M_1^* + D - 1 \qquad N_2 \le 4L_1M_2^* + D - 1$$
$$N_1' \le 4L_1M_1^* \qquad N_2' \le 4L_1M_2^*\,.$$

De plus, le nombre

$$S = N_1h(\alpha_1) + N_2h(\alpha_2) + N_1'h(\alpha_1^{-1}) + N_2'h(\alpha_2^{-1})$$

est majoré par

$$\begin{aligned}&(N_1+N_1')a_1 + (N_2+N_2')a_2 \le\\ &\quad\le 8L_1(M_1^*a_1 + M_2^*a_2) + (D-1)(a_1+a_2)\\ &\quad\le 16\chi cc_1a_1a_2D^3\log^2 B + \frac{1}{8\log 2}D^2(a_1+a_2)\log B\,.\end{aligned}$$

Pour $0 \le h \le L_0$, on a grâce à (64)

$$\begin{aligned}\max\left(\|b_2u+b_1v\|,\ \frac{h}{2}\right) &\le \max\left(B(M_1^*+M_2^*),\ \frac{L_0}{2}\right)\\ &\le \max\left[Bc\chi(a_1+a_2)D^2\log B,\ \frac{c_0}{2}D^3a_1a_2\log B\right]\\ &= \chi E\\ \|\Delta_h(b_2u+b_1v)\| &\le 2\frac{(\chi E)^h}{h!}\,.\end{aligned}$$

Ainsi, la longueur de φ vérifie

$$\begin{aligned}
L(\varphi) &\leq \sum_{h=0}^{L_0} \sum_{k=-L_1}^{L_1} \sum_{d=1}^{D_0} \|p_{hkd}\| \left\|\Delta_h(b_2u+b_1v)\right\| \\
&\leq 2D(2L_1+1)\max\|p_{hkd}\| \sum_{h=0}^{L_0} \frac{(\chi E)^h}{h!} \\
&\leq 2D(2L_1+1)\max\|p_{hkd}\| \left(\frac{B}{4}\right)^{L_0} \sum_{h=0}^{L_0} \frac{\left(4\chi c D^2(a_1+a_2)\log B\right)^h}{h!} \\
&\leq 2D(2L_1+1)\max\|p_{hkd}\| \left(\frac{B}{4}\right)^{c_0D^3a_1a_2\log B} B^{4\chi cD^2(a_1+a_2)}\,.
\end{aligned}$$

On utilise (68) et la proposition 4.8 :

$$\begin{aligned}
&\log L(\varphi) \leq \\
&\quad \leq c_4D^2(a_1+a_2)\log B + \\
&\qquad + \eta\Big\{c_2D^3a_1a_2\log^2 B - 2c_0\log 2\cdot D^3a_1a_2\log B + \\
&\qquad\quad + c_3D^2(a_1+a_2)\log B\Big\} + \\
&\qquad + c_0D^3a_1a_2\log^2 B - 2c_0\log 2\cdot D^3a_1a_2\log B + \\
&\qquad + 4\chi cD^2(a_1+a_2)\log B \\
&\quad \leq (c_0+\eta c_2)D^3a_1a_2\log^2 B - 2(\eta+1)c_0\log 2\cdot D^3a_1a_2\log B + \\
&\qquad + (c_4+\eta c_3+4\chi c)D^2(a_1+a_2)\log B\,.
\end{aligned}$$

Si $\varphi(u,v)\neq 0$, alors

$$\begin{aligned}
&\log\left|\varphi(u,v)\right| \geq \\
&\quad \geq -D\big(\log L(\varphi)+S\big) \\
&\quad \geq -(c_0+\eta c_2+16\,\chi c c_1)D^4a_1a_2\log^2 B + \\
&\qquad + 2(\eta+1)c_0\log 2\cdot D^4a_1a_2\log B + \\
&\qquad - \left(c_4+\eta c_3+4\chi c+\frac{1}{8\log 2}\right) D^3(a_1+a_2)(\log B)\,,
\end{aligned}$$

mais

$$c_5 = c_0+\eta c_2+16\,\chi c c_1\,,\quad c_6 = c_4+\eta c_3+4\chi c+\frac{1}{8\log 2}\,.\ \square$$

Nous imposons ici deux nouvelles restrictions sur c, c_0, c_1 et χ :

$$2\left(2c - \frac{1}{4\log^2 2}\right)^2 \log 2 \geq c_5 \tag{73}$$

$$(2\eta - 1)c_0 \log^2 2 \geq c_6 \,. \tag{74}$$

On pose

$$P(X,Y) = \sum_{h=0}^{L_0} \sum_{k=-L_1}^{L_1} p_{hk}\Delta_h(b_2 X) Y^{L_1+k} \in \mathbb{C}[\,X\,,\,Y\,]\,,$$

on déduit que $P \neq 0$ du fait que les p_{hk}, $0 \leq h \leq L_0$, $-L_1 \leq k \leq L_1$ ne sont pas tous nuls.

Le polynôme P est de degré au plus L_0 et $2L_1$ par rapport à X et Y respectivement.

L'hypothèse (21) implique $U_2 \geq U_1$, $V_2 \geq V_1$; (63) implique que les points

$$u + v\beta\,, \quad -U_1 \leq u \leq U_1\,, \quad -V_1 \leq v \leq V_1$$

sont deux à deux distincts.

La première partie de (21) implique

$$\left(2\chi_1 c - \frac{1}{4\log^2 2}\right)^2 2\log 2 > c_0 \geq \frac{c_1}{2}$$

$$\begin{aligned}(2U_1+1)(2V_1+1) &\geq \left(2\chi_1 c - \frac{1}{4\log^2 2}\right)^2 D^4 a_1 a_2 \log^2 B \\ &\geq \left(2\chi_1 c - \frac{1}{4\log^2 2}\right)^2 2\log 2 \cdot D^3 a_1 a_2 \log B \\ &> c_0 D^3 a_1 a_2 \log B \geq L_0 \text{ et } 2L_1\,.\end{aligned}$$

La deuxième partie de (21) implique

$$\left(2\chi_2 c - \frac{1}{4\log^2 2}\right)^2 > 4c_0 c_1$$

$$\begin{aligned}(2U_2+1)(2V_2+1) &\geq \left(2\chi_2 c - \frac{1}{4\log^2 2}\right)^2 D^4 a_1 a_2 \log^2 B \\ &> 4c_0 c_1 D^4 a_1 a_2 \log B \geq 2L_0 \cdot 2L_1\,.\end{aligned}$$

On voit aussi que :

$$\begin{aligned} M_1^* &\geq \left(\chi - \frac{1}{4c\log^2 2}\right) cD^2 a_2 \log B \\ &\geq (\chi_1 + \chi_2) cD^2 a_2 \log B \geq U_1 + U_2 \\ M_2^* &\geq \left(\chi - \frac{1}{4c\log^2 2}\right) cD^2 a_1 \log B \\ &\geq (\chi_1 + \chi_2) cD^2 a_1 \log B \geq V_1 + V_2 \,. \end{aligned}$$

En remarquant (62), (63), il résulte du lemme 2.6 qu'il existe un point $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$, $\|u_0\| \leq M_1^*$, $\|v_0\| \leq M_2^*$ tel que $P(u_0 + v_0\beta\,,\, \alpha_1^{4u_0}\alpha_2^{4v_0}) \neq 0$, ce qui équivaut à

$$\varphi(u_0, v_0) \neq 0\,.$$

Puisque $\chi_2 \geq 1$, on a $U_2 \geq M_1$, $V_2 \geq M_2$, (63) implique l'hypothèse (H). Alors, on utilise les propositions 4.9 et 4.10, avec $(u, v) = (u_0, v_0)$:

$$\max\left\{\log|F|_4 - 2\mu\log 2\,,\ \log\frac{|\Lambda|}{4} - \log\Delta\right\} \geq \log|\varphi(u_0, v_0)| \geq -S_1 \ ;$$

mais (74) implique

$$3c_0\log 2 \leq 2(\eta + 1)c_0\log 2 - \frac{c_6}{\log 2}\,. \tag{75}$$

Alors par (72), (73) et (75), on a

$$\begin{aligned} &\log|F|_4 - 2\mu\log 2 \leq \\ &\leq -\left\{2\left(2c - \frac{1}{4\log^2 2}\right)^2 D^4 a_1 a_2 \log^2 B - 3c_0 D^3 a_1 a_2 \log B\right\}\log 2 \\ &\leq -\left\{c_5 D^4 a_1 a_2 \log^2 B - \left[2(\eta + 1)c_0\log 2 - \frac{c_6}{\log 2}\right] D^4 a_1 a_2 \log B\right\} \\ &\leq -S_1\,, \end{aligned}$$

donc :

$$\log\frac{|\Lambda|}{4} - \log\Delta \geq -S_1$$

$$\begin{aligned} \log\frac{|\Lambda|}{4} &\geq \log\Delta - S_1 \\ &\geq -\left\{5c^2\log 2 + c_5 + \frac{\log(64\,c\log^2 2)}{2\log^2 2}\,c\right\} D^4 a_1 a_2 \log^2 B + \\ &\quad + 2(\eta + 1)c_0\log 2 \cdot D^4 a_1 a_2 \log B + \\ &\quad - (c_6 + 6\log 2 \cdot c) D^3(a_1 + a_2)\log B\,. \end{aligned} \tag{76}$$

Maintenant nous nous mettons à choisir c, c_0, c_1 et puis χ_1, χ_2, χ.

Soient t_0, t_1, λ_0, λ des constantes absolues satisfaisant les conditions suivantes :

$$\frac{2}{3} \leq t_1 , \quad 3t_1 \leq t_0 , \quad \lambda > \lambda_0 \geq 2 , \tag{77}$$

$$w = t_0 t_1 \geq 3 , \tag{78}$$

et

$$\begin{aligned} 8\lambda \left(1 - \frac{1}{16\,\lambda^2}\right)^2 \geq \tau_1 = \left(\frac{2}{wZ_0 - 2} + 1\right) t_0 + \\ - 8\left[\frac{1}{wZ_0 - 2} + \sqrt{w} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t_0}{2\lambda}} + \frac{1}{4\lambda_0^2}\right] t_1 , \end{aligned} \tag{79}$$

où $Z_0 = \big(1 - (^1/4t_1\lambda)\big)\big(1 + (^1/16\,\lambda^2)\big)^{-2}$,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{4}{wZ_0 - 2} - 1\right) 4t_0\lambda^3 \geq \\ &\geq \frac{4}{wZ_0 - 2}\left(\frac{4\lambda^2}{\log 2} + t_1\lambda\right) + \\ &+ \frac{1}{8\log 2}\left(\frac{2}{wZ_0 - 2} + 1\right)\left(\log\frac{4t_1\lambda + 1}{\log 2} + \frac{7}{4}\log 2 + 1\right) - \frac{1}{32} . \end{aligned} \tag{80}$$

Choisissons

$$c_1 = \frac{t_1\lambda}{\log 2} , \quad c = \frac{2\lambda^2}{\log^2 2} , \quad c_0 = \frac{4t_0\lambda^3}{\log^3 2} .$$

(77) signifie que $c \geq 2$, $c_0 \geq 1$, $c_1 \geq {}^1/\log 2$ et $2\log^2 2 \cdot c_0 \geq c_1$ et on déduit aussi que $t_1 \geq {}^2/3$, $\lambda > 2$ et (78) que

$$\begin{aligned} Z &= c_0\left(2c_1 - \frac{1}{2\log 2}\right)\left(2c + \frac{1}{4\log^2 2}\right)^{-2} \\ &= \frac{c_0 c_1}{2c_2}\left(1 - \frac{1}{4c_1\log 2}\right)\left(1 + \frac{1}{8c\log^2 2}\right)^{-2} \\ &= \frac{w}{2} Z_0 > 1 ; \end{aligned}$$

alors (19), (20) sont vérifiées. On voit que

$$\eta = \frac{1}{Z - 1} = \frac{2}{wZ_0 - 2} . \tag{81}$$

Choisissons de plus

$$\chi_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t_0}{2\lambda}} + \frac{1}{16\,\lambda_0^2}, \quad \chi_2 = \sqrt{w} + \frac{1}{16\,\lambda_0^2}$$

$$\chi = \sqrt{w} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t_0}{2\lambda}} + \frac{1}{4\lambda_0^2}. \tag{82}$$

En utilisant (77), (78), les relations (21), (22) deviennent claires.

On utilise (81), (82) et puis (79) :

$$\begin{aligned} 2\left(2c - \frac{1}{4\log^2 2}\right)^2 \log 2 &= \frac{32\,\lambda^4}{\log^3 2}\left(1 - \frac{1}{16\,\lambda^2}\right)^2 \\ &\geq \tau_1 \frac{4\lambda^3}{\log^3 2} = c_5\,, \end{aligned} \tag{83}$$

c'est (73). On divise (80) par $\log 2$, on obtient (74).

Choisissons $t_0 = 4.65$, $t_1 = 0.9$, $\lambda_0 = 3.9254$, $\lambda = 3.9255$, $w = 4.185$.

Les conditions (77), (78) sont claires, et on voit que l'on a

$$8\lambda\left(1 - \frac{1}{16\,\lambda^2}\right)^2 = 31.1497\ldots > 31.1494\ldots = \tau_1\,,$$

c'est (79).

On voit par les calculs que la condition (80) est largement satisfaite.

Alors, on a les minorations (27) dans le cas 1, (28) dans le cas 2, (29) dans le cas 3, et (76) dans le cas 4.

$$\lambda^2 = 15.4095\ldots, \quad \lambda^3 = 60.4901\ldots, \quad \lambda^4 = 237.4542\ldots$$

$$\begin{cases} c_1 \leq 5.0974\,, \quad c \leq 64.3497\,, \quad c^2 = \dfrac{949.8170}{\log^4 2} \\ c_0 \geq \dfrac{2341.4275}{\log 2} \end{cases} \tag{84}$$

$$\chi_1 = 0.3888\ldots, \quad \chi_2 = 2.0497\ldots, \quad \chi = 2.4467\ldots \tag{85}$$

Dans les premiers trois cas, on a même de meilleurs résultats.

Cas 1. $\chi_1 c \le 25.0256$, $\log \chi_1 c \le 3.2203$, alors par (27), on a

$$\log|\Lambda| \ge \frac{1}{8\log^3 2}\left[\log(\chi_1 c) + \frac{2}{e} + 1 + 8\log 2\right] Da_1a_2\log B$$
$$\ge -3.7604\, Da_1a_2\log B\,.$$

Cas 2. $\chi_2 c \le 131.9034$, alors par (28), on a

$$\log|\Lambda| \ge -\left(\frac{1}{8\log^2 2} + 4\chi_2 c\right) D^3 a_1a_2\log B$$
$$\ge -527.8737\, D^3a_1a_2\log B\,.$$

Cas 3. $(c_0/2c) = (t_0\lambda/\log 2) \ge 18.2536/\log 2$, alors par (29), on a

$$\log|\Lambda| \ge -\left(\frac{1}{4\log^2 2} + \frac{c_0}{2c}\right) D^2 a_1a_2$$
$$\ge -26.6969\, D^2a_1a_2\,.$$

Cas 4. $5c^2\log 2 \le 4749.0850/\log^3 2$, par (83), on a

$$c_5 = \tau_1\frac{4\lambda^3}{\log^3 2} \le \frac{7536.9330}{\log^3 2}$$
$$\frac{\log(64\,c\log^2 2)}{2\log^2 2}c = \frac{\lambda^2\log(128\,\lambda^2)}{\log^4 2} \le \frac{168.6741}{\log^3 2}$$
$$5c^2\log 2 + c_5 + \frac{\log(64\,c\log^2 2)}{2\log^2 2}c \le \frac{12454.6921}{\log^3 2} \le 37390.252\,.$$

On calcule par (81)

$$\eta = 1.0767\ldots\,; \tag{86}$$

alors par (84)

$$2(\eta+1)c_0\log 2 \ge 9724.9496\,.$$

On calcule c_6 par (84), (85) et (86) :

$$c_6 \le 920.7369\,,\quad c_6 + 6c\log 2 \le 1188.3801\,.$$

Enfin, il résulte de (76) que

$$\log\frac{|\Lambda|}{4} \ge -T\,.$$

Démonstration du théorème 4.1. — On considère seulement le cas $p \geq 3$ (dans le cas $p = 2$ la démonstration se fait de manière semblable).

Soit $m = (b_1, b_2) > 0$, $b_1 = mb_1'$, $b_2 = mb_2'$ avec deux entiers b_1', b_2', $(b_2', b_2') = 1$. On pose

$$\Lambda' = \alpha_1^{b_1'} - \alpha_2^{b_2'} \neq 0$$

alors, on a le lemme 2.5

$$|\Lambda| = |m|\,|\Lambda'| \geq \frac{|\Lambda'|}{m}. \tag{87}$$

Cas 1. $\max(\|b_1'\|, \|b_2'\|) \geq 2$. On utilise le lemme 2.4 (b) pour $\Lambda' \neq 0$:

$$\begin{aligned}\log|\Lambda'| &\geq -D\big[\log 2 + \|b_1'\|h(\alpha_1) + \|b_2'\|h(\alpha_2)\big]\\ &\geq -D\big[\log 2 + 2(a_1 + a_2)\big]\ ;\end{aligned}$$

on remarque $\log p \leq ({}^1/4)(a_1 + a_2)$, alors par (87) :

$$\begin{aligned}\log\frac{|\Lambda|}{p} &\geq \log|\Lambda'| - \log m - \log p\\ &\geq \log|\Lambda'| - \log B - \log\frac{1}{4}(a_1 + a_2)\\ &\geq -D\left[\log 2 + \frac{9}{4}(a_1 + a_2)\right] - \log B \geq -T\end{aligned}$$

Cas 2. $\max(\|b_1'\|, \|b_2'\|) \geq 3$. On pose $B' = \max(\|b_1'\|, \|b_2'\|)$; on a $B = mB'$:

$$\begin{aligned}&\frac{2500}{\log^3 p}\left[\left(\frac{p}{p-1} + \frac{1}{p^2}\right)p^2 + 0.1715\,p\right]D^4 a_1 a_2 \log^2 B' +\\ &\quad - \frac{1111.22}{\log^2 p}\left(1 + 0.0587\frac{1}{p}\right)D^4 a_1 a_2 \log B' + \log m \leq\\ &\leq \left\{\frac{2500}{\log^3 p}\left[\left(\frac{p}{p-1} + \frac{1}{p^2}\right)p^2 + 0.1715\,p\right]\log B' + \frac{1}{4\log^2 p}\log m +\right.\\ &\quad \left. - \frac{1111.22}{\log^2 p}\left(1 + 0.0587\frac{1}{p}\right)\right\}D^4 a_1 a_2 \log B'\\ &\leq \left\{\frac{2500}{\log^3 p}\left[\left(\frac{p}{p-1} + \frac{1}{p^2}\right)p^2 + 0.1715\,p\right]\log B +\right.\\ &\quad \left. - \frac{1111.22}{\log^2 p}\left(1 + 0.0587\frac{1}{p}\right)\right\}D^4 a_1 a_2 \log B\\ &= \frac{2500}{\log^3 p}\left[\left(\frac{p}{p-1} + \frac{1}{p^2}\right)p^2 + 0.1715\,p\right]D^4 a_1 a_2 \log^2 B +\\ &\quad - \frac{1111.22}{\log^2 p}\left(1 + 0.0587\frac{1}{p}\right)D^4 a_1 a_2 \log B\,.\end{aligned}$$

On pose

$$T' = \frac{2500}{\log^3 p}\left[\left(\frac{p}{p-1}+\frac{1}{p^2}\right)p^2 + 0.1715\,p\right] D^4 a_1 a_2 \log^2 B' +$$
$$- \frac{1111.22}{\log^2 p}\left(1+0.0587\frac{1}{p}\right) D^4 a_1 a_2 \log B' +$$
$$+ \left\{\frac{84.9175}{\log^2 p}p^2\left[1+(0.0488+0.0001\log\zeta)\frac{1}{p}\right] + \right.$$
$$+ \frac{2.4235\,p}{\log p}\left(1+\frac{0.06997}{p}\right) +$$
$$\left. + \frac{69.315\,p}{\log^2 p}\left(1+0.7214\frac{\log p}{p-1}\right)\left(1+\frac{0.0402}{p}\right)\right\} D^3(a_1+a_2)\log B' .$$

On a donc $T' + \log m \le T$.

Puisque $(b_1', b_2') = 1$, $\Lambda' \neq 0$, la proposition 4.2 donne

$$\log\frac{|\Lambda'|}{p} \geq -T'$$

et puis

$$\log\frac{|\Lambda|}{p} \geq \log\frac{|\Lambda'|}{p} - \log m \geq -T' - \log m \geq -T\,. \square$$

Démonstration du corollaire 1.1. — On considère le cas $p \geq 3$ (dans le cas $p = 2$, la démonstration se fait de manière semblable) :

$$T \leq \left\{\frac{2500}{\log^3 p}\left[\left(\frac{p}{p-1}+\frac{1}{p^2}\right)p^2 + 0.1715\,p\right] D^4 a_1 a_2 \log^2 B + \right.$$
$$+ \left[\frac{84.9175}{\log^2 p}p^2\left(1+\frac{0.0489}{p}\right) + \frac{2.4235}{\log p}p\left(1+\frac{0.0697}{p}\right) + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{69.315}{\log^2 p}p\left(1+0.7214\frac{\log p}{p-1}\right)\left(1+\frac{0.0402}{p}\right)\right]\right\} D^3(a_1+a_2)\log B\,.$$

Grâce au lemme 4.3, on peut suposer $\log B \geq 2\log p$, alors

$$T \leq \left\{\frac{2500}{\log^3 p}\left[\left(\frac{p}{p-1}+\frac{1}{p^2}\right)p^2 + 0.1715\,p\right] + \right.$$
$$+ \frac{1}{2\log^2 p}\left[\frac{84.9175}{\log^2 p}p^2\left(1+\frac{0.0489}{p}\right) + \frac{2.4235}{\log p}p\left(1+\frac{0.0697}{p}\right) + \right.$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{69.315}{\log^2 p} p \left(1 + 0.7214 \frac{\log p}{p-1}\right)\left(1 + \frac{0.0402}{p}\right)\Bigg]\Bigg\} D^4 a_1 a_2 \log B \\
&= \frac{1}{\log^3 p}\Bigg\{2500\left[\left(\frac{p}{p-1} + \frac{1}{p^2}\right)p^2 + 0.1715\,p\right] + \\
&+ \frac{1}{2}\Bigg[\frac{84.9175}{\log p} p^2 \left(1 + \frac{0.0489}{p}\right) + 2.4235\,p\left(1 + \frac{0.0697}{p}\right) + \\
&+ \frac{69.315}{\log p} p \left(1 + 0.7214 \frac{\log p}{p-1}\right)\left(1 + \frac{0.0402}{p}\right)\Bigg]\Bigg\} D^4 a_1 a_2 \log^2 B \\
&\leq \frac{1}{\log^3 p}[2538.6481\,p^2 + 6713.3990\,p + 2501.8555] D^4 a_1 a_2 \log^2 B \\
&\leq 2538.6481 (p + 1.3223)^2 \frac{1}{\log^3 p} D^4 a_1 a_2 \log^2 B \;;
\end{aligned}
$$

la conclusion s'obtient du théorème 4.1 □

Remerciements

Je remercie mon directeur, Michel Waldschmidt, qui m'a donné beaucoup de conseils précieux pour achever cet article.

Références

[1] Gramain (F.) et Mignotte (M.) .— *Fonctions entières arithmétiques*, in Approximations diophantiennes et nombres transcendants, Birkhaüser, Progress in Math. **31** (1983) pp. 99-124.

[2] Malher (K.) .— *Über transzendente P-adische Zahlen*, Compositio Math. **2** (1935) pp. 259-275.

[3] Mignotte (M.) et Waldschmidt (M.) .— *Linear forms in two logarithms and Schneider's method*, (I), Math. Ann. **231** (1978) pp. 241-267; (II) Acta Arithm. **53** (1989) pp. 251-287; (III) Ann. Fasc. Sci. Toulouse **97** (1989) pp. 43-75.

[4] Van der Poorten (A.J.) .— *On Baker's inequality for linear forms in logarithms*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **80** (1976) pp. 233-248.

[5] Van der Poorten (A.J.) .— *Linear forms in logarithms in the p-adic case*, Transcendence Theory : Advances and Applications; Academic Press 1977, chap. 2, pp. 29-57.

[6] SCHINZEL (A.) .— *On two theorems of Gel'fond and some of their applications,* Acta Arithm. **13** (1967) pp. 177-236.

[7] SERRE (J.P.) .— *Dépendance d'exponentielles p-adiques,* Sém. Delange-Pisot-Poitou, 7ème année, 1965/66, exposé 15.

[8] SHOREY (T.N.), VAN DER POORTEN (A.J.), TIJDEMAN (R) and SCHINZEL (A.) .— *Applications of the Gel'fond-Baker method to diophantine equations,* Transcendence Theory : Advances and Applications; Academic Press, 1977, chap. 3, pp. 59-77.

[9] KUNRUI (YU) .— *Linear forms in p-adic logarithms,* Acta. Arith. **53** (1989) pp. 107-186.

[10] KUNRUI (YU) .— *Linear forms in p-adic logarithms* II, Compositio Math. **74** (1990) pp. 15-113.