

RENÉE PHILIPPE-VAUDÈNE

**Immersion des espaces de Sobolev généralisés
(de type Orlicz ou à poids) dans des espaces
de fonctions continues**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 12,
n° 2 (1991), p. 251-282

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1991_5_12_2_251_0

© Université Paul Sabatier, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annaes/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**Immersion des espaces de Sobolev généralisés
(de type Orlicz ou à poids)
dans des espaces de fonctions continues**

RENÉE PHILIPPE-VAUDÈNE⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — En utilisant une méthode dérivée de celle de Sobolev [S], on étend aux espaces de type Sobolev issus d'une fonction référentielle à paramètre et variable vectorielle, le théorème classique d'injection continue de $W^{mp}(\Omega)$ dans $C^\ell(\bar{\Omega})$. Dans le cas des espaces de Sobolev-Orlicz, ce résultat fournit une condition d'immersion plus facile à tester que celle donnée par Donaldson et Trudinger [D-T]. Dans le cas des espaces à poids, le résultat principal est que, si Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^k à frontière lipschitzienne et si $(m - \ell)p > k + \nu$ ($\nu > 0$, $1 < p < +\infty$), l'espace de Sobolev $W_\nu^{mp}(\Omega)$ avec le poids $(\text{dist}(x, \partial\Omega))^\nu$ s'injecte continûment dans $C^\ell(\bar{\Omega})$.

ABSTRACT. — Using a method adapted from Sobolev's one [S], we extend to the case of Sobolev type spaces issued from a referential function with parameter and vector variable, the well known theorem on the imbedding of $W^{mp}(\Omega)$ into $C^\ell(\bar{\Omega})$. In the case of the Orlicz-Sobolev spaces, our result provides us with an imbedding condition which can be more easily tested than Donaldson and Trudinger's one [D-T]. As for the weighted spaces, the main result is that, if Ω is a bounded open set in \mathbb{R}^k with lipschitzian boundary and if $(m - \ell)p > k + \nu$ ($\nu > 0$, $1 < p < +\infty$), then the Sobolev space $W_\nu^{mp}(\Omega)$ with weight $(\text{dist}(x, \partial\Omega))^\nu$ is continuously imbedded into $C^\ell(\bar{\Omega})$.

L'objet de cet article est d'étendre à des espaces de Sobolev, issus d'une fonction référentielle φ à paramètre et variable vectorielle (qui généralise la fonction $p^{-1}|\cdot|^p$ du cas classique) et introduits dans [B-V], l'assertion du théorème de Sobolev et Morrey :

Si $(m - \ell)p > k$, $W^{mp}(\Omega)$ s'injecte continûment dans $C_B^\ell(\Omega)$ dès que Ω vérifie la condition du cône et dans $C^\ell(\bar{\Omega})$ si $\partial\Omega$ est lipschitzienne.

⁽¹⁾ Université de Poitiers, Mathématiques, 40 avenue du Recteur-Pineau, 86022 Poitiers Cedex (France).

La méthode utilisée, une adaptation de celle de Sobolev [S], consiste à représenter les éléments u et certaines de leurs dérivées en un point de Ω au moyen du produit de convolution de $\mathcal{D}u = (D^\alpha u)_{|\alpha| \leq m}$ par un noyau convenable et utilise systématiquement les propriétés des espaces intégraux de type Orlicz associés à φ .

L'application de ces résultats aux espaces de Sobolev classiques amène à interpréter l'inégalité $(m - \ell)p > k$ en termes de contrôle de la croissance à l'infini de la fonction référentielle conjuguée (au sens de Fenchel) $q^{-1}|\cdot|^q$ de $\varphi = p^{-1}|\cdot|^p$ (avec $p^{-1} + q^{-1} = 1$); leur application aux espaces de Sobolev-Orlicz fournit une condition d'immersion plus facile à tester que celle que proposaient T.K. Donaldson et N.S. Trudinger [D-T] et enfin, leur application à certains espaces de Sobolev avec poids donne les résultats plus fins que ceux obtenus par A. Kufner [Ku] par une méthode tout à fait différente.

1. Notations, hypothèses, préliminaires

1.1. Notations

- Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^k ($k \geq 1$), de frontière $\partial\Omega$ muni de la mesure de Lebesgue $\text{vol}(\cdot)$; la norme euclidienne de \mathbb{R}^k est notée $|\cdot|$ et le symbole $B(x, \rho)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon ρ .
- $L_{1\text{loc}}(\Omega)$ et $L_{\infty c}(\Omega)$ dénotent respectivement l'espace des fonctions localement intégrables sur Ω et celui des fonctions bornées et à support compact dans Ω .
- m est un entier ≥ 1 , k_m (resp. k'_m) le nombre des k -entiers α d'ordre $|\alpha| \leq m$ (resp. $|\alpha| = m$).
- $\varphi : (x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}^{k_m} \rightarrow \varphi(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ est une fonction de Young (c'est-à-dire un intégrande convexe normal qui, pour presque tout $x \in \Omega$ est positif, pair, nul en zéro et tend vers $+\infty$ avec $|y|$) dont la conjuguée φ^* est aussi une fonction de Young.
- À φ on associe les espaces intégraux $L_\varphi(\Omega)$ (resp. $E_\varphi(\Omega)$) espaces vectoriels respectivement engendré par le (sous-jacent au) convexe $C_\varphi(\Omega)$ des fonctions u de Ω dans \mathbb{R}^{k_m} qui vérifient :

$$\int_{\Omega} \varphi(x, u(x)) \, dx \leq 1$$

Immersion des espaces de Sobolev généralisés dans des espaces de fonctions continues

et on les norme par la jauge de C_φ :

$$\|u\|_\varphi = \inf \left\{ \lambda > 0, \int_\Omega \varphi(x, \lambda^{-1}u(x)) dx \leq 1 \right\},$$

ce qui en fait des espaces de Banach. Les deux espaces $L_\varphi(\Omega)$ et $E_\varphi(\Omega)$ coïncident avec C_φ si et seulement si la fonction φ est “de type Δ_2 ” :

$$\begin{aligned} \exists a \in L_1(\Omega, \mathbb{R}_+), \quad \exists k > 0, \quad \forall x \in \Omega \text{ (p.p.)}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^{km} : \\ \varphi(x, 2y) \leq k\varphi(x, y) + a(x) \end{aligned}$$

(on trouvera dans [G] les principales propriétés de ces espaces).

- Pour toute fonction de Young φ sur $\Omega \times \mathbb{R}^{km}$, on pose :

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R} &\rightarrow \sup \{ \varphi(x, y), |y| = t \} \in \bar{\mathbb{R}}_+ \\ \underline{\varphi} : (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R} &\rightarrow \inf \{ \varphi(x, y), |y| = t \} \in \bar{\mathbb{R}}_+ \\ \varphi_p : (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^{k'_p} &\rightarrow \varphi(x(0, y, 0)) \in \bar{\mathbb{R}}_+. \end{aligned}$$

- On note $\mathcal{D} = (D^\alpha)_{|\alpha| \leq m}$ (\mathcal{D}_Ω si nécessaire) l'opérateur de dérivation à l'ordre m au sens des distributions sur Ω . Les espaces de Sobolev associés à φ s'écrivent alors [V2]

$$\begin{aligned} L_\varphi^{(m)}(\Omega) &= \{ u \in L_{1 \text{ loc}}(\Omega), \mathcal{D}u \in L_\varphi(\Omega) \} \\ E_\varphi^{(m)}(\Omega) &= \{ u \in L_{1 \text{ loc}}(\Omega), \mathcal{D}u \in E_\varphi(\Omega) \} \end{aligned}$$

et sont normés par $\|u\|_\varphi^{(m)} = \|\mathcal{D}u\|_\varphi$.

- Lorsque T est un C^m -difféomorphisme d'un ouvert Ω' de \mathbb{R}^k sur Ω , l'application du théorème de dérivation des fonctions composées conduit à l'écriture matricielle :

$$\mathcal{D}_{\Omega'}(u \circ T)(x) = M_T(x) \cdot \mathcal{D}_\Omega u(Tx)$$

où $M_T(x)$ est une matrice dont les coefficients sont fabriqués à l'aide des dérivées partielles des composantes de T en $x \in \Omega'$.

1.2. Les hypothèses sur Ω

1.2.1. On suppose que Ω vérifie la *propriété du cône*.

- Suivant [A], on appelle *cône fini de sommet x* tout sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^k de la forme $B_1 \cap \{x + \lambda(y - x), \lambda > 0, y \in B_2\}$ où B_1 est une boule ouverte centrée en x , B_2 une boule ouverte de \mathbb{R}^k ne contenant pas x et λ un scalaire réel.

- Deux cônes finis seront dits *congruents* s'ils se déduisent l'un de l'autre par un déplacement. La propriété du cône s'énonce alors :

Il existe un cône fini C (de sommet 0) tel que tout point $x \in \Omega$ soit le sommet d'un cône fini $x + C_x$ congruent à C et contenu dans Ω .

- Comme il est toujours possible de trouver un cône fini C_0 de sommet 0 tel que $\overline{C_0} \subset C \cup \{0\}$, tout x est le sommet d'un cône fini $x + C_x$ congruent à C_0 et tel que $x + \overline{C_x} \subseteq \Omega$; il en résulte alors par compacité que

$$\forall x \in \Omega, \quad \exists \rho > 0, \quad \forall x' \in B(x, \rho) : x' + C_x \subset \Omega.$$

La propriété du cône est donc équivalente à la suivante :

Pour chaque $x \in \Omega$, il existe un cône fini C_x de sommet 0 congruent à un cône C et un réel $\rho > 0$ tels que $\forall x' \in B(x, \rho), x' + C_x \subset \Omega$.

La famille $\{C_x, x \in \Omega\}$ ainsi mise en évidence sera dite *admissible pour Ω* .

Plus généralement, G étant un sous-ensemble de $\overline{\Omega}$, on dira qu'une famille de cônes $\{C_x, x \in G\}$ est *admissible pour G* s'il existe un cône fini C de sommet 0 et pour chaque $x \in G$, un cône C_x congruent à C et un réel $\rho > 0$ tels que

$$\forall x' \in B(x, \rho) \cap G, \quad x' + C_x \subseteq \Omega.$$

- Enfin, tout cône fini C de sommet 0 sera paramétré sous la forme $\{t\sigma, t \in]0, s[, \sigma \in \widehat{C} \cap S_1\}$ où S_1 est la sphère unité centrée à l'origine dans \mathbb{R}^k et s un réel > 0 appelé *hauteur de C* , et on notera \widehat{C} son prolongement $\{\lambda x, x \in C, \lambda > 0\}$.

1.2.2. On suppose que Ω vérifie l'une des conditions géométriques qui permettent d'obtenir la densité des fonctions $C^\infty(\overline{\Omega})$ dans les espaces de Sobolev : condition du segment, être étoilé par rapport à l'un de ses points ([Ne], [A]), être affinement extensible ([F1], [F2]) ou bien, dans certains cas à paramètres, être C^m -extensible au moyen d'une suite $(T_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{N}}$ de C^m -difféomorphismes d'un voisinage ouvert \mathcal{O} de Ω [V2]. Cette dernière

condition contient comme cas particulier celui des ouverts étoilés par rapport à un de leurs points (pour lesquels les T_λ sont tout simplement les homothéties de rapport < 1 centrées en ce point); elle est introduite et étudiée dans [V2].

1.3. Les hypothèses sur φ

1.3.1 L'espace intégral $L_\varphi(\Omega)$ est un espace de distributions, c'est-à-dire : $L_\varphi(\Omega) \hookrightarrow L_{1\text{loc}}(\Omega)$, ce qui équivaut [F4] au fait que, pour toute suite $(K_p)_{p \in \mathbb{N}}$ exhaustive de compacts de Ω , on a $\bigcup_p L_\infty(K_p) \hookrightarrow L_{\varphi^*}(\Omega)$ et peut se traduire par une condition de croissance portant sur φ . Cette condition est, en particulier, réalisée lorsque φ est "continûment coercive" ce qui s'écrit

$$\forall x_0 \in \Omega, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ |y| \rightarrow \infty}} \varphi(x, y) = +\infty.$$

1.3.2. $C^\infty(\bar{\Omega}) \cap L_\varphi^{(m)}(\Omega)$ est $\mathcal{D}^{-1}\sigma(L_\varphi, L_{\varphi^*})$ -séquentiellement dense dans $L_\varphi^{(m)}(\Omega)$. Dans le cas où φ est indépendante du paramètre x , ceci est vrai dès que Ω vérifie l'une des conditions mentionnées au 1.2.2. Lorsque la variable x intervient, la propriété n'a lieu que s'il existe une sorte de "compatibilité" entre la géométrie de l'ouvert Ω et le comportement paramétrique de φ . Ce lien s'écrit sous forme de conditions de croissance reliant φ et une famille de fonctions de Young construites à partir de φ mais, comme ces conditions sont très techniques et, à l'exception d'une seule, n'interviennent plus explicitement dans la suite de cet article, on renvoie le lecteur intéressé à [V2] et on se contente ici de préciser la condition dite de "compatibilité de φ avec les translations" :

Il existe une suite $(K_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de compacts, exhaustive pour l'ouvert Ω , telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction φ soit compatible avec les translations sur K_p ce qui s'écrit :

Il existe $c_p > 0$, $R_p > 0$, $\eta_p > 0$ tels que l'on ait :

- $\forall |z| \leq \eta_p, \forall x \in K_p \cap (\Omega + z)$ (p.p.), $\forall y \in \mathbb{R}^{k_m}$:

$$\varphi(x - z, y) \leq \varphi(x, c_p y) + a_{p,z}(x);$$

- $\int_{K_p \cap (\Omega + z)} a_{p,z} dx \leq R_p;$

- pour tout $p \in \mathbb{N}$, la famille $\{a_{p,z}, |z| \leq \eta_p\}$ est équiintégrable.

2. Une "égalité de Sobolev" généralisée

Il est d'abord nécessaire d'améliorer la propriété de densité imposée en 1.3.2.

PROPOSITION 2.1. — *Sous les hypothèses 1.2.2 et 1.3, pour tout $u \in L_\varphi^{(m)}(\Omega)$, il existe une suite $(u_n)_{n>0}$ contenue dans $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap L_\varphi^{(m)}(\Omega)$ telle que $\mathfrak{D}u_n$ converge vers $\mathfrak{D}u$ presque partout sur Ω et au sens $\sigma(L_\varphi, L_{\varphi^*})$.*

Preuve. — Soit $u \in L_\varphi^{(m)}(\Omega)$ et $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap L_\varphi^{(m)}(\Omega)$ $\mathfrak{D}^{-1}\sigma(L_\varphi, L_{\varphi^*})$ -convergente vers u . D'après [F3], il existe une fonction α strictement positive presque partout, telle qu'on ait l'injection continue $L_\varphi(\Omega) \hookrightarrow L_{\alpha|\cdot|}(\Omega) = L_1^\alpha(\Omega)$; on a donc aussi l'injection continue pour les topologies faibles. En appliquant le lemme de Mazur-Minkowski dans $L_1^\alpha(\Omega)$ à la suite $(\mathfrak{D}v_j)_{j \in \mathbb{N}}$, on obtient l'existence d'une suite $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergeant fortement vers $\mathfrak{D}u$ dans $L_1^\alpha(\Omega)$ et telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad U_k \in \text{co}\{\mathfrak{D}v_j, j \geq k\}.$$

Cette suite $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ possède donc les propriétés suivantes :

- $\forall k \in \mathbb{N}, U_k = \mathfrak{D}u_k$ avec $u_k \in \text{co}\{v_j, j \geq k\}$;
- $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mathfrak{D}u$ pour la topologie $\sigma(L_\varphi, L_{\varphi^*})$ (puisque cette dernière est localement convexe);
- $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mathfrak{D}u$ en α -vol(\cdot)-mesure locale donc aussi en mesure locale (puisque $\alpha > 0$ presque partout).

Le résultat s'obtient alors en extrayant de $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite $(U_n = \mathfrak{D}u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers $\mathfrak{D}u$ presque partout. \square

THÉORÈME 2.2. — *On suppose que Ω et φ vérifient respectivement les hypothèses 1.2 et 1.3. Alors, pour tout entier $\ell \geq 0$, toute famille $\{C_x, x \in \Omega\}$ de cônes (de hauteur $s \leq 1$) admissible pour Ω vérifiant :*

$$(H_1) \quad \forall x \in \Omega, \exists \xi > 0,$$

$$\int_{x+C_x} \overline{(\varphi^*)^m}(y, \xi|y-x|^{m-k-\ell}) dy < \infty$$

et toute fonction $\theta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ de classe C^∞ telle que $\theta(t) = 1$ si $0 \leq t \leq s/2$ et $\theta(t) = 0$ si $t \geq s$, on a :

Immersion des espaces de Sobolev généralisés dans des espaces de fonctions continues

(P₁) pour tout $u \in L_\varphi^{(m)}(\Omega)$, tout $|\beta| \leq \ell$ et presque tout $x \in \Omega$

$$D^\beta u(x) = \int_\Omega \left(\mathfrak{D}u(y) \mid |y-x|^{m-|\beta|-k} \chi_{C_x}(y-x) \times \right. \\ \left. \times \left(A_{\alpha\beta} \theta^{(m-|\alpha|)}(|y-x|) \left(\frac{y-x}{|y-x|} \right)^{\alpha-\beta} \right)_{|\alpha| \leq m} \right) dy,$$

où $(\cdot \mid \cdot)$ représente le produit scalaire dans \mathbb{R}^{k_m} et $\{A_{\alpha\beta}, |\alpha| \leq m\}$ est une famille de coefficients numériques qui ne dépendent que de m, β, k et de la famille admissible de cônes utilisée et vérifient $A_{\alpha\beta} = 0$ si α n'est pas supérieur ou égal à β .

Preuve

1. On suppose d'abord $u \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap L_\varphi^{(m)}(\Omega)$ et on considère, pour $\sigma \in \widehat{C}_x \cap S_1$:

$$I = \int_0^s t^{m-|\beta|-1} \left(\frac{d}{dt} \right)^{m-|\beta|} (D^\beta u(x+t\sigma)\theta(t)) dt.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$I = (-1)^{m-|\beta|} (m-|\beta|-1)! D^\beta u(x).$$

D'autre part, la formule de Leibniz conduit à

$$I = \int_0^s t^{m-|\beta|-1} \left(\sum_{|\gamma| \leq m-|\beta|} A'_{\gamma\beta} \theta^{(m-|\beta|-|\gamma|)}(t) D^{\beta+\gamma} u(x+t\sigma) \cdot \sigma^\gamma \right) dt$$

où $A'_{\gamma\beta}$ est une constante et $\sigma^\gamma = \sigma_1^{\gamma_1} \sigma_2^{\gamma_2} \dots \sigma_k^{\gamma_k}$. Donc

$$D^\beta u(x) = \int_0^s t^{m-|\beta|-1} \times \\ \times \left(\sum_{|\gamma| \leq m-|\beta|} A''_{\gamma\beta} \theta^{(m-|\beta|-|\gamma|)}(t) D^{\beta+\gamma} u(x+t\sigma) \cdot \sigma^\gamma \right) dt.$$

On intègre alors sur $\widehat{C}_x \cap S_1$:

$$D^\beta u(x) = \int_{S_1 \cap \widehat{C}} \int_0^s \left(\sum_{|\gamma| \leq m-|\beta|} t^{m-|\beta|-1} A''_{\gamma\beta} \text{vol}(\widehat{C}_x \cap S_1)^{-1} \times \right. \\ \left. \times \theta^{(m-|\beta|-|\gamma|)}(t) \sigma^\gamma D^{\beta+\gamma} u(y) \right) dt dS_1(\sigma)$$

ce qui, en posant $y = x + t\sigma$, donne (puisque $dy = t^{k-1} dt dS_1(\sigma)$) :

$$D^\beta u(x) = \int_{\Omega} \left(\sum_{|\gamma| \leq m-|\beta|} t^{m-|\beta|-k} \chi_{C_x}(y-x) A''_{\gamma\beta} \text{vol}(\widehat{C}_x \cap S_1)^{-1} \times \right. \\ \left. \times \theta^{(m-|\beta|-|\gamma|)}(t) \sigma^\gamma D^{\beta+\gamma} u(y) \right) dy.$$

Il suffit alors de poser

$$\begin{cases} \alpha = \beta + \gamma \\ A_{\alpha\beta} = A''_{\gamma\beta} \text{vol}(\widehat{C}_x \cap S_1)^{-1} & \text{si } \alpha = \beta + \gamma \\ A_{\alpha\beta} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et enfin $\sigma^{\alpha-\beta} = 0$ lorsque $\alpha \neq \beta + \gamma$.

2. On suppose à présent u quelconque dans $L_\varphi^{(m)}(\Omega)$. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite d'approximations de u comme en 2.1; on peut écrire (\mathcal{P}_1) pour chaque u_n ce qui, en posant pour $z \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$

$$w_\beta(x, z) = |z|^{m-|\beta|-k} \chi_{C_x}(z) \left(A_{\alpha\beta} \theta^{(m-|\alpha|)}(|z|) \left(\frac{z}{|z|} \right)^{\alpha-\beta} \right)_{|\alpha| \leq m}$$

conduit à

$$D^\beta u_n(x) = \int_{\Omega} (\mathcal{D}u_n(y) | w_\beta(x, y-x)) dy.$$

Admettant provisoirement que, pour tout $x \in \Omega$, on a $w_\beta(x, \cdot - x) \in L_{\varphi^*}(\Omega)$, on trouve en faisant tendre n vers $+\infty$:

$$D^\beta u(x) = \int_{\Omega} (\mathcal{D}u(y) | w_\beta(x, y-x)) dy$$

en dehors d'un ensemble de mesure nulle.

Pour prouver que $w_\beta(x, \cdot - x) \in L_{\varphi^*}(\Omega)$, on utilise (H_1) . Choisisant $\epsilon \leq s/2$, on a, pour tout $|y-x| \leq \epsilon$:

$$(w_\beta(x, y-x))_\alpha = \begin{cases} |y-x|^{m-|\beta|-k} \chi_{C_x}(y-x) A_{\alpha\beta} \left(\frac{y-x}{|y-x|} \right)^{\alpha-\beta} \\ 0 & \text{si } \beta \leq \alpha \text{ et } |\alpha| = m \\ & \text{sinon.} \end{cases}$$

Immersion des espaces de Sobolev généralisés dans des espaces de fonctions continues

On pose alors $A = \max\{A_{\alpha\beta}, |\beta| \leq \ell, |\alpha| \leq m\}$ et il vient :

$$\begin{aligned} & \left| \left((w_\beta(x, y-x))_\alpha \right)_{|\alpha|=m} \right|_{\mathbb{R}^{k'_m}} \leq A \sqrt{k'_m} |y-x|^{m-|\beta|-k} \\ \varphi^* \left(y, \left(\frac{\xi}{A \sqrt{k'_m}} \right) w_\beta(x, y-x) \right) &= \\ &= (\varphi^*)_m \left(y, \left(\frac{\xi}{A \sqrt{k'_m}} \right) \left((w_\beta(x, y-x))_\alpha \right)_{|\alpha|=m} \right) \\ &\leq \overline{(\varphi^*)_m} (y, \xi |y-x|^{m-|\beta|-k}) \\ &\leq \overline{(\varphi^*)_m} (y, \xi |y-x|^{m-k-\ell}). \end{aligned}$$

Ainsi, $w_\beta(x, \cdot - x) \chi_{B(x, \epsilon)} \in L_{\varphi^*}(\Omega)$. Comme, par ailleurs, l'autre morceau $w_\beta(x, \cdot - x) \chi_{\Omega \setminus B(x, \epsilon)}$ est borné à support compact dans Ω , il appartient aussi à $L_{\varphi^*}(\Omega)$. \square

3. Immersion dans $C^\ell(\Omega)$

Tout repose sur le théorème 2.2 et les lemmes qui suivent.

LEMME 3.1. — Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^k , $x \in \overline{\Omega}$, C un cône fini (de sommet 0), $W : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k_m}$ une fonction nulle hors de C et continue sur C , φ une fonction de Young définie sur $\Omega \times \mathbb{R}^{k_m}$ satisfaisant à 1.3.1 et $U \in L_\varphi(\Omega)$. On suppose que :

- $\exists \rho > 0, \forall x' \in B(x, \rho) \cap \overline{\Omega}, x' + C \subseteq \Omega$;
- $\{W(\cdot - x'), x' \in B(x, \rho) \cap \overline{\Omega}\}$ est inclus dans $L_{\varphi^*}(\Omega)$ et "scalairement équiintégrable" c'est-à-dire : pour tout $F \in L_\varphi(\Omega)$, $\{(F | W(\cdot - x')), x' \in B(x, \rho) \cap \overline{\Omega}\}$ est une partie équiintégrable de $L_1(\Omega)$.

Alors, l'égalité $V(x') = \int_\Omega (U(y) | W(y - x')) dy$ définit au voisinage du point x une fonction V qui est continue en x .

Preuve

1. Soit ϵ plus petit que la hauteur de C . Pour $x' \in B(x, \rho) \cap \overline{\Omega}$, on écrit

$$V(x') = \mathcal{V}_{1, \epsilon}(x') + \mathcal{V}_{2, \epsilon}(x')$$

avec

$$\mathcal{V}_{1,\epsilon}(x') = \int_{B(x',\epsilon)} (U(y) | W(y-x')) dy,$$

$$\mathcal{V}_{2,\epsilon}(x') = \int_{\Omega \setminus B(x',\epsilon)} (U(y) | W(y-x')) dy.$$

L'équiiintégrabilité de $\{(U | W(\cdot - x')), x' \in B(x, \rho) \cap \bar{\Omega}\}$ entraîne que $\mathcal{V}_{1,\epsilon}$ converge vers zéro uniformément sur $B(x, \rho) \cap \bar{\Omega}$.

2. Ainsi sur $B(x, \rho) \cap \bar{\Omega}$, V est limite uniforme lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ des fonctions $\mathcal{V}_{2,\epsilon}$ et il suffit de montrer que ces fonctions sont continues au point x . On considère donc une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de limite x , que l'on peut supposer contenue dans $B(x, \rho) \cap \bar{\Omega}$. La suite $((U | W(\cdot - x_n)))_{n \in \mathbb{N}}$ est alors équiiintégrable et il en est de même de la suite $((U | (1 - \chi_{B(0,\epsilon)}(\cdot - x_n))W(\cdot - x_n)))_{n \in \mathbb{N}}$. D'autre part, lorsque $y - x \in C \setminus \overline{B(0, \epsilon)}$ (resp. $\mathbb{R}^k \setminus (\bar{C} \setminus B(0, \epsilon))$), il en est de même de $y - x_n$ à partir d'un certain rang (puisque ces ensembles sont ouverts), de sorte que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \chi_{B(0,\epsilon)}(y - x_n))W(y - x_n) = (1 - \chi_{B(0,\epsilon)}(y - x))W(y - x).$$

Comme $(\bar{C} \setminus B(0, \epsilon)) \setminus (C \setminus \overline{B(0, \epsilon)}) = (\bar{C} \cap \partial B(0, \epsilon)) \cup (\partial C \setminus B(0, \epsilon))$ est de mesure nulle dans \mathbb{R}^k , la suite $((U | (1 - \chi_{B(0,\epsilon)}(\cdot - x_n))W(\cdot - x_n)))_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque partout donc en mesure locale sur Ω vers

$$(U | (1 - \chi_{B(0,\epsilon)}(\cdot - x))W(\cdot - x)).$$

D'après le théorème de Vitali, la convergence a lieu aussi au sens de $L_1(\Omega)$, i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{V}_{2,\epsilon}(x_n) = \mathcal{V}_{2,\epsilon}(x). \quad \square$$

LEMME 3.2. — Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^k , $x \in \Omega$, C un cône fini (de sommet 0), $W : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k^m}$ une fonction nulle hors de C et φ une fonction de Young définie sur $\Omega \times \mathbb{R}^{k^m}$ compatible avec les translations (cf. 1.3.2). On suppose que

- $\exists \rho > 0, \forall x' \in B(x, \rho) \subseteq \Omega, x' + C \subseteq \Omega;$
- $W(\cdot - x) \in L_{\varphi^*}(\Omega).$

Alors, il existe $r > 0$ tel que $\{W(\cdot - x'), x' \in B(x, r)\}$ soit scalairement équiiintégrable.

Immersion des espaces de Sobolev généralisés dans des espaces de fonctions continues

Preuve. — Soit $(K_p)_{p \in \mathbb{N}}$ la suite exhaustive de compacts de Ω liée à la compatibilité de φ avec les translations. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\bigcup_{x' \in B(x, \rho)} (x' + C) \subset K_p$$

et on pose $r = \min(\rho, \eta_p)$. Pour $U \in L_\varphi(\Omega)$, $G \subseteq \Omega$ et $x' \in B(x, r)$, on obtient à l'aide de l'inégalité de Young :

$$\begin{aligned} \int_G |(U(y) | W(y - x'))| dy &\leq \\ &\leq \zeta^{-1} \|U\|_\varphi \left[\int_G \varphi \left(y, \frac{U(y)}{\|U\|_\varphi} \right) dy + \int_G \varphi^*(y, \zeta W(y - x')) dy \right]. \end{aligned}$$

Dans la dernière intégrale, on fait le changement de variables $\hat{y} = y - x' + x$:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 &= \int_G \varphi^*(y, \zeta W(y - x')) dy \\ &= \int_{G \cap (x' + C)} \varphi^*(y, \zeta W(y - x')) dy \\ &= \int_{(G - x' + x) \cap (x + C)} \varphi^*(\hat{y} + x' - x, \zeta W(\hat{y} - x)) d\hat{y}. \end{aligned}$$

La compatibilité de φ avec les translations sur K_p entraîne, en passant à la conjuguée φ^* , puisque $|x' - x| \leq \eta_p : \forall \hat{y} \in \Omega \cap K_p - x' + x$,

$$\varphi^*(\hat{y} + x' - x, \zeta W(\hat{y} - x)) \leq \varphi^*(\hat{y}, c_p \zeta W(\hat{y} - x)) + a_{p, x' - x}(\hat{y} + x' - x).$$

En intégrant sur $(G - x' + x) \cap (x + C)$, on majore donc \mathcal{I}_2 par :

$$\begin{aligned} &\int_{(G - x' + x) \cap (x + C)} \varphi^*(\hat{y}, c_p \zeta W(\hat{y} - x)) d\hat{y} + \\ &+ \int_{(G - x' + x) \cap (x + C)} a_{p, x' - x}(\hat{y} + x' - x) d\hat{y}. \end{aligned}$$

Mais $W(\cdot - x) \in L_{\varphi^*}(\Omega)$, donc il existe $\xi > 0$ tel que $\int_\Omega \varphi^*(y, \xi W(y - x)) dy < \infty$ et on prend $c_p \zeta = \xi$; d'autre part, la seconde intégrale s'écrit aussi $\int_{G \cap (x' + C)} a_{p, x' - x}(y) dy$ et on a finalement :

$$\begin{aligned} \int_G |(U(y) | W(y - x'))| dy &\leq \xi^{-1} c_p \|U\|_\varphi \left[\int_G \varphi \left(y, \frac{U(y)}{\|U\|_\varphi} \right) dy + \right. \\ &+ \int_{(G - x' + x) \cap (x + C)} \varphi^*(y, \xi W(y - x)) dy + \\ &+ \left. \int_{G \cap (x' + C)} a_{p, x' - x}(y) dy \right]. \end{aligned}$$

En faisant $G := \Omega$, on obtient que $W(\cdot - x') \in L_{\varphi^*}(\Omega)$; l'absolue continuité pour les deux premières intégrales et l'équiquintégrabilité de $\{a_{p,x'-x}, |x' - x| \leq \eta_p\}$ entraînent (puisque Ω est borné) la propriété d'équiquintégrabilité. \square

THÉORÈME 3.3. — *On suppose que Ω et φ satisfont respectivement aux hypothèses 1.2, 1.3 et 2.2 (H₁). Alors, tout $u \in L_{\varphi}^{(m)}(\Omega)$ est presque partout égal à une fonction de classe C^{ℓ} sur Ω . Si, de plus, φ vérifie l'hypothèse :*

(H₂) *Il existe $\xi > 0$, $\ell \geq 0$ entier et une famille $\{C_x, x \in \Omega\}$ de cônes (de hauteur $s \leq 1$) admissible pour Ω , tels que l'on ait, pour tout $x \in \Omega$:*

$$\int_{x+C_x} \overline{\varphi^*}(y, \xi|y-x|^{m-k-\ell}) dy \leq 1.$$

Alors, l'espace de Sobolev $L_{\varphi}^{(m)}(\Omega)$ s'injecte continûment dans l'espace de Banach $C_B^{\ell}(\Omega)$ des fonctions de classe C^{ℓ} , bornées ainsi que leurs dérivées sur Ω , muni de la norme

$$\|u\|_{C_B^{\ell}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq \ell} \sup_{x \in \Omega} |D^{\alpha} u(x)|.$$

Preuve

1. Soit $x \in \Omega$. Il existe un cône C_x et $\rho > 0$ tels que $\forall x' \in B(x, \rho)$, $x' + C_x \subset \Omega$. La famille de cônes obtenue en remplaçant, pour chaque $y \in B(x, \rho/2)$, C_y par C_x est encore admissible pour Ω de sorte que, d'après 2.2, il existe $N \subset \Omega$ de mesure nulle tel que $D^{\alpha} u(x) = \int_{\Omega} (\mathfrak{D}u(y) |w_{\beta}(x, y-x)|) dy$ en tout point de $B(x, \rho/2) \setminus N$. On applique alors les lemmes 3.2 puis 3.1 avec

$$C := C_x, \quad U := \mathfrak{D}u,$$

$$W(z) := w_{\beta}(x, z) = |z|^{m-|\beta|-k} \chi_{C_x}(z) \left(A_{\alpha\beta} \theta^{(m-|\alpha|)} (|z|) \left(\frac{z}{|z|} \right)^{\alpha-\beta} \right)_{|\alpha| \leq m}.$$

Les hypothèses de ces lemmes sont évidemment satisfaites pour tout β d'ordre $\leq \ell$ (se reporter à la preuve du théorème 2.2) donc V (qui est égale à $\mathfrak{D}^{\beta} u$ sur $B(x, \rho/2) \setminus N$) est continue en x . Ce raisonnement, valable en tout point de Ω , fait que u apparaît comme une distribution dont les dérivées d'ordre $\leq \ell$ coïncident presque partout avec des fonctions continues et, par conséquent, coïncide elle-même presque partout avec une fonction de classe C^{ℓ} sur Ω au sens usuel [Sc].

Immersion des espaces de Sobolev généralisés dans des espaces de fonctions continues

2. Lorsque l'hypothèse (H₂) est vérifiée, on applique l'inégalité de Young. Utilisant les notations de 2.2 et posant $\mathcal{M} = \sup\{|\theta^{(p)}|, 0 \leq p \leq m\}$, on trouve pour tout $|\beta| \leq \ell$ et presque tout $x \in \Omega$:

$$\begin{aligned} |D^\beta u(x)| &\leq \mathcal{M}A\sqrt{k_m}\xi^{-1}\|u\|_\varphi^{(m)} \left[\int_\Omega \varphi \left(y, \frac{\mathfrak{D}u(y)}{\|u\|_\varphi^{(m)}} \right) dy + \right. \\ &\quad \left. + \int_\Omega \varphi^* \left(y, \frac{\xi w_\beta(x, y-x)}{\mathcal{M}A\sqrt{k_m}} \right) dy \right] \\ &\leq 2\mathcal{M}A\sqrt{k_m}\xi^{-1}\|u\|_\varphi^{(m)} \end{aligned}$$

et donc

$$\|u\|_{C_B^\ell(\Omega)} = \max_{0 \leq |\beta| \leq \ell} \sup_{x \in \Omega} |D^\beta u(x)| \leq 2\mathcal{M}A\sqrt{k_m}\xi^{-1}\|u\|_\varphi^{(m)}. \quad \square$$

On peut remarquer que l'hypothèse (H₂) implique que l'ensemble $\{w_\beta(x, \cdot - x), x \in \Omega\}$ est borné dans $L_{\varphi^*}(\Omega)$ et qu'elle est même équivalente à cela lorsque φ est de révolution. En fait, cette hypothèse est une condition suffisante et "presque" nécessaire pour que l'injection continue de $L_\varphi^{(m)}(\Omega)$ dans $C_B^\ell(\Omega)$ ait lieu en ce sens que :

THÉORÈME 3.4. — *On suppose que Ω et φ satisfont respectivement aux hypothèses 1.2 et 1.3 et que $L_{\infty c}(\Omega) \subseteq E_\varphi(\Omega)$. Alors, une condition nécessaire pour que l'espace de Sobolev $L_\varphi^{(m)}(\Omega)$ s'injecte continûment dans $C_B^\ell(\Omega)$ est qu'il existe une famille $\{v_{x,\beta}^*, |\beta| \leq \ell, x \in \Omega\}$ d'éléments de $L_{\varphi^*}(\Omega)$ qui soit bornée en norme dans $L_{\varphi^*}(\Omega)$ et vérifie :*

$$\forall u \in L_\varphi^{(m)}(\Omega), \forall x \in \Omega, \forall |\beta| \leq \ell, \quad D^\beta u(x) = \int_\Omega (\mathfrak{D}u(x) | v_{x,\beta}^*(y)) dy.$$

Preuve. — Elle nécessite, lorsque $L_\varphi(\Omega) \neq E_\varphi(\Omega)$, un lemme dont la démonstration (puisque les propriétés de densité ne sont pas l'objet principal du présent article) sera seulement ébauchée dans le cas particulier de l'ouvert étoilé.

LEMME 3.5. — *On suppose que Ω et φ satisfont respectivement aux hypothèses 1.2 et 1.3, et que $L_{\infty c}(\Omega) \subseteq E_\varphi(\Omega)$. Alors $C^\infty(\bar{\Omega}) \cap E_\varphi^{(m)}(\Omega)$ est $\mathfrak{D}^{-1}\sigma(L_\varphi, L_{\varphi^*})$ -séquentiellement dense dans $L_\varphi^{(m)}(\Omega)$.*

Preuve du lemme 3.5. — On suppose l'ouvert Ω étoilé par rapport à l'origine et on reprend la démonstration de la propriété de densité (voir par exemple [Ne], théorème 3.2, p. 67, ou [V2]). On "dilata" Ω à l'aide des homothéties de rapport $1/\lambda > 1$ centrées à l'origine et, pour approximer u , on tronque puis on régularise $\mathfrak{D}(u(\lambda \cdot))$ qui appartient à $L_{\varphi_\lambda}(\lambda^{-1}\Omega)$ avec $\varphi_\lambda(x, y) = \lambda^{-1}\varphi(\lambda^{-1}x, M_\lambda \cdot y)$ et M_λ définie comme en 1.1. L'espace $E_{\varphi_\lambda}(\lambda^{-1}\Omega)$ hérite de la propriété de $E_\varphi(\Omega)$ soit $L_{\infty c}(\lambda^{-1}\Omega) \subseteq E_{\varphi_\lambda}(\lambda^{-1}\Omega)$ et en tronquant $\mathfrak{D}(u(\lambda \cdot))$ à un compact K tel que $\overset{\circ}{K} \supset \bar{\Omega}$ puis en régularisant cette troncature, on obtient un élément de $L_{\infty c}(\lambda^{-1}\Omega)$ et donc de $E_{\varphi_\lambda}(\lambda^{-1}\Omega)$. Les étapes suivantes (restriction à Ω et injection de $E_{\varphi_\lambda}(\lambda^{-1}\Omega)$ dans $E_\varphi(\Omega)$) préservent l'appartenance au "petit" espace et conduisent au résultat. \square

Retour à la preuve du théorème. — En reprenant la première partie de la preuve de 2.2, on construit, sans autre hypothèse que 1.2 et 1.3, une représentation $D^\beta u(x) = \int_\Omega (\mathfrak{D}u(y) | w_\beta(x, y - x)) dy$ valable pour tout $u \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap L_\varphi^{(m)}(\Omega)$, tout $x \in \Omega$ et tout $|\beta| \leq \ell$. On considère alors le sous-espace $\mathfrak{E} = \mathfrak{D}(C^\infty(\bar{\Omega}) \cap E_\varphi^{(m)}(\Omega))$ de $L_\varphi(\Omega)$ et les formes linéaires définies pour $x \in \Omega$ et $|\beta| \leq \ell$ par

$$W_{x,\beta} : \mathfrak{D}u \in \mathfrak{E} \rightarrow \int_\Omega (\mathfrak{D}u(y) | w_\beta(x, y - x)) dy \in \mathbb{R}.$$

Si l'injection continue de $L_\varphi^{(m)}(\Omega)$ dans $C_B^\ell(\Omega)$ a lieu, c'est qu'il existe une constante Λ telle que pour tout $u \in L_\varphi^{(m)}(\Omega)$,

$$\|u\|_{C_B^\ell(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq \ell} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)| \leq \Lambda \|u\|_\varphi^{(m)}$$

de sorte que chacune des formes linéaires $W_{x,\beta}$ est continue sur \mathfrak{E} et de norme $N(x, \beta) \leq \Lambda$. D'après le théorème de Hahn-Banach, on peut la prolonger à $E_\varphi(\Omega)$ en une forme linéaire continue de même norme $W_{x,\beta}^*$. L'hypothèse $L_{\infty c}(\Omega) \subseteq E_\varphi(\Omega)$ implique que φ est à valeurs dans \mathbb{R}_+ . En tant qu'élément de $(E_\varphi(\Omega))'$, $W_{x,\beta}^*$ est donc représentable par un élément $v_{x,\beta}^*$ de $L_{\varphi^*}(\Omega)$ (voir [G]) et on a pour tout $u \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap E_\varphi^{(m)}(\Omega)$, $\forall |\beta| \leq \ell$:

$$D^\beta u(x) = \int_\Omega (\mathfrak{D}u(y) | w_\beta(x, y - x)) dy = \int_\Omega (\mathfrak{D}u(y) | v_{x,\beta}^*(y)) dy,$$

avec

$$\|W_{x,\beta}^*\| = \|v_{x,\beta}^*\|_{\varphi^*} = N(x, \beta) \leq \Lambda.$$

Mais, grâce au lemme et au théorème 2.1, tout élément u de $L_\varphi^{(m)}(\Omega)$ est $\mathfrak{D}^{-1}\sigma(L_\varphi, L_{\varphi^\bullet})$ -limite d'une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $C^\infty(\bar{\Omega}) \cap E_\varphi^{(m)}(\Omega)$ telle que $\mathfrak{D}u_n$ converge aussi vers $\mathfrak{D}u$ presque partout sur Ω . Comme $\mathfrak{D}^\beta u$ et $\mathfrak{D}^\beta u_n$ ($n \geq 0$) sont continues dès que $|\beta| \leq \ell$, la convergence de $\mathfrak{D}^\beta u_n$ vers $\mathfrak{D}^\beta u$ a lieu partout sur Ω et on en déduit

$$\forall u \in L_\varphi^{(m)}(\Omega), \quad D^\beta u(x) = \int_\Omega (\mathfrak{D}u(y) |v_{x,\beta}^*(y)|) dy. \quad \square$$

4. Immersion dans $C^\ell(\bar{\Omega})$

C'est encore une conséquence du théorème 2.2 et du lemme 3.1, mais ce type de résultat demande des hypothèses un peu plus fortes sur Ω et φ .

- On prolonge la propriété du cône à $\bar{\Omega}$.

Il existe une famille de cônes admissible pour $\bar{\Omega}$, c'est-à-dire :

(H₃) *Pour chaque $x \in \bar{\Omega}$, il existe un cône fini C_x de sommet 0 congruent à un cône C et un réel $\rho > 0$ tels que :*

$$\forall x' \in B(x, \rho) \cap \bar{\Omega} : x' + C_x \subseteq \Omega.$$

- Les hypothèses (H₁) et (H₂) relatives à φ deviennent :

(H₄) *Il existe :*

- *une famille $\{C_x, x \in \bar{\Omega}\}$ de cônes de hauteur $s \leq 1$ admissible pour $\bar{\Omega}$,*

- *une fonction $f : \bar{\Omega} \times [0, s] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$,*

- *un entier $\ell \geq 0$ et un réel $\xi > 0$ tels que l'on ait :*

$$i) \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \forall x' \in B(x, \rho) \cap \bar{\Omega}, \forall y \in x' + C_x, \forall z \in \mathbb{R}^{k_m},$$

$$\varphi^*(y, z) \leq f(x, |y - x'|, |z|)$$

$$ii) \quad \sup_{x \in \bar{\Omega}} \int_0^s f(x, t, \xi t^{m-k-\ell}) t^{k-1} dt < \infty.$$

On verra, dans les paragraphes 5 et 6 comment se traduit, en pratique, cette fonction f selon les divers cas d'application.

LEMME 4.1. — Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^k , $x \in \bar{\Omega}$, C un cône fini (de sommet 0 et de hauteur s). $W : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{km}$ une fonction nulle hors de C et φ une fonction de Young définie sur $\Omega \times \mathbb{R}^{km}$. On suppose que :

- $\exists \rho > 0, \forall x' \in B(x, \rho) \cap \bar{\Omega}, x' + C \subseteq \Omega$;
- il existe un réel $\zeta > 0$ et une fonction $g : [0, s] \times \mathbb{R}^{km} \rightarrow \mathbb{R}_+$ tels que l'on ait :

$$i) \quad \forall x' \in B(x, \rho) \cap \bar{\Omega}, \forall y \in x' + C, \forall z \in \mathbb{R}^{km},$$

$$\varphi^*(y, z) \leq g(|y - x'|, z)$$

$$ii) \quad \int_C g(|z|, \zeta W(z)) dz < \infty.$$

Alors, $\{W(\cdot - x'), x' \in B(x, \rho) \cap \bar{\Omega}\}$ est inclus dans $L_{\varphi^*}(\Omega)$ et scalairement équiintégrable.

Preuve. — Soient $U \in L_{\varphi}(\Omega)$, $G \subseteq \Omega$ et $x' \in B(x, \rho) \cap \bar{\Omega}$. À l'aide de l'inégalité de Young, on obtient :

$$\int_G |(U(y) | W(y - x'))| dy \leq \zeta^{-1} \|U\|_{\varphi} \left[\int_G \varphi\left(y, \frac{U(y)}{\|U\|_{\varphi}}\right) dy + \int_G \varphi^*(y, \zeta W(y - x')) dy \right]$$

mais

$$\begin{aligned} \int_G \varphi^*(y, \zeta W(y - x')) dy &= \int_{G \cap (x' + C)} \varphi^*(y, \zeta W(y - x')) dy \\ &\leq \int_{G \cap (x' + C)} g(|y - x'|, \zeta W(y - x')) dy \\ &\leq \int_{(G - x') \cap C} g(|z|, \zeta W(z)) dz < \infty, \end{aligned}$$

d'où finalement

$$\int_G |(U(y) | W(y - x'))| dy \leq \zeta^{-1} \|U\|_{\varphi} \left[\int_G \varphi\left(y, \frac{U(y)}{\|U\|_{\varphi}}\right) dy + \int_{(G - x') \cap C} g(|z|, \zeta W(z)) dz \right].$$

Si on prend $G := \Omega$, comme $L_\varphi(\Omega)$ et $L_{\varphi^*}(\Omega)$ forment un couple d'espaces de Köthe, on trouve que $W(\cdot - x') \in L_{\varphi^*}(\Omega)$ et, en utilisant l'absolue continuité des intégrales du second membre, on obtient la propriété d'équiiintégrabilité annoncée. \square

THÉORÈME 4.2. — *On suppose que Ω et φ vérifient respectivement les hypothèses 1.2, 4 (H₃) et 1.3, 4 (H₄). Alors, l'espace de Sobolev $L_\varphi^{(m)}(\Omega)$ s'injecte continûment dans l'espace de Banach $C^\ell(\overline{\Omega})$ des fonctions de classe C^ℓ , bornées et uniformément continues sur Ω , ainsi que leurs dérivées, muni de la norme*

$$\|u\|_{C^\ell(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leq \ell} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|.$$

Preuve

1. Les hypothèses du théorème 3.3 sont contenues dans celles du théorème 4.2 de sorte que tout $u \in L_\varphi^{(m)}(\Omega)$ coïncide presque partout sur Ω avec une fonction \hat{u} de classe C^ℓ sur Ω . Il suffit donc de montrer que \hat{u} et ses dérivées d'ordre $\leq \ell$ admettent un prolongement continu à $\overline{\Omega}$. Soit $x \in \partial\Omega$, on choisit ρ et C_x à l'aide de (H₃) et pour $x' \in B(x, \rho) \cap \Omega$, on peut écrire avec les notations du paragraphe 2 :

$$\hat{u}(x') = \int_{\Omega} (\mathfrak{D}u(y) | w_0(x, y - x')) dy$$

et

$$\forall |\beta| \leq \ell, \quad D^\beta \hat{u}(x') = \int_{\Omega} (\mathfrak{D}u(y) | w_\beta(x, y - x')) dy,$$

où

$$w_\beta(x, y - x') = |y - x'|^{m-|\beta|-k} \chi_{C_x}(y - x') \times \left(A_{\alpha\beta} \theta^{(m-|\alpha|)} (|y - x'|) \left(\frac{y - x'}{|y - x'|} \right)^{\alpha-\beta} \right)_{|\alpha| \leq m}$$

et ces formules définissent encore $\hat{u}(x')$ et les $\hat{u}_\beta(x')$ pour $x' \in B(x, \rho) \cap \partial\Omega$ puisque :

selon (H₃) : $\forall x' \in B(x, \rho) \cap \overline{\Omega}, x' + C_x \subseteq \Omega$;

selon (H₄) : $w_\beta(x, \cdot - x') \in L_{\varphi^*}(\Omega)$ (cf. la démonstration de 2.2).

2. La continuité de \hat{u} et des \hat{u}_β au point $x \in \partial\Omega$, s'obtient en appliquant les lemmes 4.1 puis 3.1, avec $C := C_x, g := f(x, \cdot, |\cdot|)$ et $W := w_\beta(x, \cdot)$.

3. Utilisant l'inégalité de Young (comme en 3.3) et (H₄), on obtient :

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{\ell}(\bar{\Omega})} &= \max_{|\alpha| \leq \ell} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |D^{\alpha} u(x)| \\ &\leq \xi^{-1} \mathcal{M} A \sqrt{k_m} \left[1 + \text{vol}(\widehat{C} \cap S_1) \times \right. \\ &\quad \left. \times \sup_{x \in \bar{\Omega}} \int_0^s f(x, t, \xi t^{m-k-\ell}) t^{k-1} dt \right] \|u\|_{\varphi}^{(m)}. \quad \square \end{aligned}$$

5. Exemples de construction de f (cas sans paramètre), comparaison avec les cas classiques

5.1. Cas des espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Cela correspond à $\varphi(x, y) = |y|^p/p$. Puisque le paramètre x n'intervient pas, les hypothèses 1.3 sont automatiquement vérifiées et seules restent à expliciter (H₁), (H₂) et (H₄) qui ici coïncident. En effet

$$\varphi^*(x, z) = \begin{cases} \frac{|z|^q}{q} \text{ avec } p^{-1} + q^{-1} = 1 & \text{si } p > 1 \\ \delta(z, \bar{B}(0, 1)) \text{ (fonction indicatrice} & \text{si } p = 1. \\ \text{de la boule unité)} & \end{cases}$$

Pour réaliser (H₄), il suffit de choisir

$$f(x, t, r) = \begin{cases} \frac{r^q}{q} \text{ avec } p^{-1} + q^{-1} = 1 & \text{si } p > 1 \\ \delta(r, [-1, 1]) & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

et on est ramené à vérifier que

$$\int_0^s f(x, t, \xi t^{m-k-\ell}) t^{k-1} dt < +\infty,$$

ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} q^{-1} \xi^q \int_0^s t^{(m-k-\ell)q+k-1} dt < +\infty & \text{si } p > 1 \\ \int_0^s \delta(\xi t^{m-k-\ell}, [-1, 1]) t^{k-1} dt < +\infty & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

Immersion des espaces de Sobolev généralisés dans des espaces de fonctions continues

et revient à dire

$$\begin{cases} (m - k - \ell)q + k - 1 > -1, & \text{soit } (m - \ell) > k \text{ si } p > 1 \\ t^{m-k-\ell} \text{ est borné sur }]0, s], & \text{soit } m - \ell \geq k \text{ si } p = 1. \end{cases}$$

L'immersion a donc lieu dans $C^\ell(\bar{\Omega})$ dès que $\partial\Omega$ est assez régulier (en particulier, le cas où $\partial\Omega$ est continue lipschitzienne rentre dans le cadre de cet article puisque $W^{m,p}(\Omega)$ est localisable).

5.2. Cas des espaces de Sobolev-Orlicz

5.2.1. Construction de f

Ces espaces sont construits à partir d'une famille $(M_\alpha)_{|\alpha| \leq m}$ de fonctions de Young ([D.T], [Gz], [F1], [F2]) et correspondent au cas

$$\varphi(x, (y_\alpha)_{|\alpha| \leq m}) = \sum_{|\alpha| \leq m} M_\alpha(y_\alpha).$$

On a

$$\varphi^*(x, y) = \sum_{|\alpha| \leq m} M_\alpha^*(y_\alpha)$$

de sorte que

$$\forall |\alpha| \leq m, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad M_\alpha^*(t) \leq \overline{\varphi^*}(x, t) \leq \sum_{|\alpha| \leq m} M_\alpha^*(t)$$

et donc

$$k_m^{-1} \sum_{|\alpha| \leq m} M_\alpha^*(t) \leq \overline{\varphi^*}(x, t) \leq \sum_{|\alpha| \leq m} M_\alpha^*(t).$$

Ainsi, pour réaliser (H_4) , seule hypothèse à vérifier puisque le paramètre x n'intervient pas, on peut choisir

$$f(x, t, r) = \sum_{|\alpha| \leq m} M_\alpha^*(r).$$

La condition de “non explosion” s’écrit alors :

$$\exists \xi, \ell, \int_0^s \sum_{|\alpha| \leq m} M_\alpha^*(\xi t^{m-k-\ell}) t^{k-1} dt < +\infty$$

et se “sépare” en

$$\forall |\alpha| \leq m, \int_0^s M_\alpha^*(\xi t^{m-k-\ell}) t^{k-1} dt < +\infty.$$

5.2.2. *Comparaison avec le théorème d’immersion de T.K. Donaldson et N.S. Trudinger [D-T]*

Ce théorème concerne le cas isotrope (i.e. $\forall |\alpha| \leq m, M_\alpha = M$) avec $k > 1$.

• Dans le cas $m = 1, \ell = 0$, on doit avoir $\int_1^{+\infty} M^{-1}(t) t^{-1-1/k} dt < \infty$ où M^{-1} désigne l’inverse sur \mathbb{R}_+ de la fonction M . Cette condition équivaut à $\int_0^1 M^{-1}(t^{-k}) dt < \infty$ et, dans le cas des espaces de Sobolev classiques, revient à affirmer que $\int_0^1 t^{-k/p} dt$ est convergente. La condition mentionnée ici équivaut, dans le même cas, à dire que $\int_0^1 t^{(1-k)/(p-1)} dt$ est convergente et il est clair que ces deux intégrales sont de même nature.

On peut tester d’autres exemples :

Exemple 1

$$\begin{aligned} M(t) &= e^{|t|} - |t| - 1 & M(t) &\underset{+\infty}{\simeq} e^t \\ M^{-1}(t) &\underset{+\infty}{\simeq} \ln t \\ M^*(t) &= (1 + |t|) \ln(1 + |t|) - |t| & M^*(t) &\underset{+\infty}{\simeq} t \ln t. \end{aligned}$$

En zéro, les fonctions $M^{-1}(t^{-k})$ et $M^*(\xi t^{1-k}) t^{k-1}$ sont respectivement équivalentes à $-k \ln t$ et à $\xi(1-k) \ln t$ donc leurs intégrales sont toutes deux convergentes.

Exemple 2

$$\begin{aligned} M(t) &= (1 + |t|) \ln(1 + |t|) - |t| & M(t) &\underset{+\infty}{\simeq} t \ln t \\ M^*(t) &= e^{|t|} - |t| - 1 & M^*(t) &\underset{+\infty}{\simeq} e^t. \end{aligned}$$

Immersion des espaces de Sobolev généralisés dans des espaces de fonctions continues

$\int_0^1 M^*(\xi t^{1-k}) t^{k-1} dt$ est donc de même nature que $\int_0^1 t^{k-1} e^{\xi t^{1-k}} dt$ et diverge. Par ailleurs

$$\begin{aligned} \int_0^1 M^{-1}(t^{-k}) dt &= k^{-1} \int_{M^{-1}(1)}^{+\infty} \frac{s M'(s)}{M(s)^{1+1/k}} ds \\ &= k^{-1} \int_{M^{-1}(1)}^{+\infty} \frac{s \ln(1+s)}{M(s)^{1+1/k}} ds. \end{aligned}$$

Or la fonction à intégrer équivaut, en $+\infty$, à $(s \ln s)^{-1/k}$ dont l'intégrale diverge.

Exemple 3

$$M(t) = |t|^p \ln(1 + |t|) \quad (p > 1), \quad M(t) \underset{+\infty}{\simeq} t^p \ln t.$$

D'après [K], M^* équivaut (au sens des fonctions de Young) pour les grandes valeurs de t à $t^{p/p-1} (\ln t)^{1/1-p}$. Ainsi

$$\int_0^1 M^*(\xi t^{1-k}) t^{k-1} dt = (k-1)^{-1} \int_1^{+\infty} M^*(\xi s) s^{-2-1/k-1} ds$$

est de même nature que

$$\int_{a>1}^{+\infty} t^{1/(p-1)-1/(k-1)-1} (\ln t)^{1/(1-p)} dt$$

et cette intégrale converge si $p > k$ et diverge si $p \leq k$.

En ce qui concerne la condition présentée dans [D-T], en l'écrivant sous la forme

$$\begin{aligned} \int_{M^{-1}(1)}^{+\infty} t M'(t) M(t)^{-1-1/k} dt &= \\ &= \int_{M^{-1}(1)}^{+\infty} t^{-p/k} \left[p \ln(1+t) + \frac{t}{t+1} \right] (\ln(1+t))^{-1-1/k} dt \end{aligned}$$

comme l'intégrande équivaut à l'infini à $pt^{-p/k} (\ln t)^{-1/k}$, on trouve que l'intégrale converge si $p > k$ et diverge si $p \leq k$.

Ces divers exemples, choisis dans divers types de croissances, laissent penser que pour $m = 1$, $\ell = 0$ les deux conditions dont il est question sont équivalentes.

- Dans le cas $m > 1$, la condition proposée par T.K. Donaldson et N.S. Trudinger s'exprime à l'aide d'une suite d'intégrales et est difficile à manipuler. Mais son inconvénient majeur est le fait qu'elle fasse intervenir la fonction M^{-1} ce qui rend à peu près impossible sa généralisation à des fonctions de Young à variable vectorielle.

5.2.3. Comparaison avec les résultats de H. Hudzik

Dans [H], H. Hudzik propose la condition

$$\exists r, \exists \ell, \int_{|x| \leq r} M^*(|x|^{m-k-\ell}) dx < \infty$$

qui coïncide avec celle qui est proposée dans cet article puisqu'il ne considère que le cas isotrope (c'est-à-dire $M_\alpha = M$ pour tout α) avec M sans paramètre et à variable dans \mathbb{R} . Par ailleurs, il suppose que les deux fonctions M et M^* vérifient la Δ_2 -condition ce qui limite l'application de son résultat aux espaces réflexifs et, en pratique, à des fonctions de Young équivalentes à des fonctions puissances.

6. Exemples de construction de f (cas des espaces de Sobolev avec poids)

Dans ce paragraphe, on envisage le cas où le poids est une puissance positive de la distance Δ au bord $\partial\Omega$ de Ω ce qui revient à travailler avec la fonction $\varphi(x, y) = \Delta(x)^\nu |y|^p / p$ ($p \geq 1$), mais la méthode s'applique à d'autres situations voisines : poids fonction de Δ plus générale qu'une puissance, espace de Sobolev-Orlicz avec poids, poids fonction de la distance à un sous-ensemble de $\partial\Omega$...

Il y a – à notre connaissance – peu de résultats de ce type, A. Kufner [Ku] signale simplement qu'à partir d'immersions du type $L_\varphi^{(m)}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega)$, en utilisant le théorème de Sobolev, on obtient des immersions de $L_\varphi^{(m)}(\Omega)$ dans les espaces de fonctions de classe C^ℓ mais on verra plus loin que les résultats qu'on obtient ainsi sont moins fins que ceux qui figurent dans ce paragraphe. Dans le livre de V.G. Maz'ja [M], où on considère des domaines moins réguliers que ceux qui vérifient la condition du cône, la question est à peine abordée et réglée en termes de capacités ce qui fournit des conditions souvent très difficiles à tester en pratique comme l'auteur lui-même le fait remarquer.

6.1. Construction de f

Dans tout ce qui suit, on suppose que les hypothèses garantissant la densité des fonctions régulières sont remplies et que le bord $\partial\Omega$ de Ω est lipschitzien, c'est-à-dire que tout point $x \in \partial\Omega$ admet un voisinage U_x sur lequel $\partial\Omega \cap U_x$ est le graphe d'une fonction lipschitzienne.

PROPOSITION 6.1.1. — Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^k dont la frontière $\partial\Omega$ est lipschitzienne. Il existe une famille de cônes $\{C_x, x \in \bar{\Omega}\}$ admissible pour Ω et telle que

$$\exists \epsilon > 0, \exists a > 0, \forall x \in \Omega_\epsilon = \{x \in \bar{\Omega}, \Delta(x) < \epsilon\}, \forall y \in x + C_x : \\ \Delta(y) \geq a|y - x|.$$

Preuve

1. Soit $\{U_x, x \in \partial\Omega\}$ un recouvrement de $\partial\Omega$ par des pavés ouverts de \mathbb{R}^k tels que :

- $U_x =] -a_x, a_x [^{k-1} \times] -b_x, b_x [$ dans un système $\{y_i^x, 1 \leq i \leq k\}$ de coordonnées locales dont l'origine est x ;
- $\partial\Omega \cap U_x$ est le graphe d'une application $f_x :] -a_x, a_x [^{k-1} \rightarrow] -b_x, b_x [$ lipschitzienne, de constante M_x ;
- $\Omega \cap U_x = \left\{ y = (y_i^x)_{1 \leq i \leq k}, y_k^x > f_x(y_1^x, \dots, y_{k-1}^x) \right\}$.

On construit un second recouvrement ouvert de $\partial\Omega$ en posant :

$$W_x =] -a_x + 2\eta_x, a_x - 2\eta_x [^{k-1} \times] -b_x + 2\eta_x, b_x - 2\eta_x [$$

avec $\eta_x = (1/4) \min(a_x, b_x)$ et on en extrait - à cause de la compacité de $\partial\Omega$ - un sous-recouvrement fini $\{W_{x_j}, 1 \leq j \leq J\}$. On pose alors :

$$M = \max\{M_{x_j}, 1 \leq j \leq J\}, \quad \eta = \min\{\eta_{x_j}, 1 \leq j \leq J\}$$

$$W_j =] -a_{x_j} + 2\eta, a_{x_j} - 2\eta [^{k-1} \times] -b_{x_j} + 2\eta, b_{x_j} - 2\eta [$$

et il est clair que ce recouvrement vérifie, pour chaque $j \in \{1, \dots, J\}$:

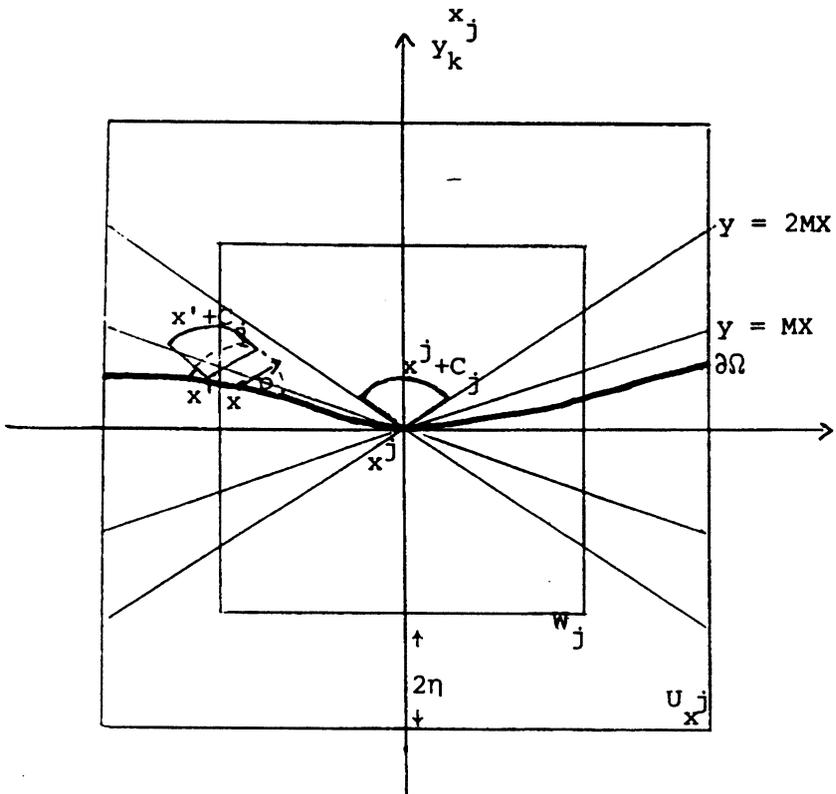
- $\partial\Omega \cap W_j$ est le graphe de $f_j = f_{x_j}|_{W_j}$;
- f_j est M -lipschitzienne;
- dans le système de coordonnées locales $\{y_i^{x_j}, 1 \leq i \leq k\}$ (qu'on notera par la suite $\{y_i^j, 1 \leq i \leq k\}$), $\Omega \cap W_j$ s'écrit :

$$\left\{ y = (y_i^j)_{1 \leq i \leq k}, y_k^j > f_j(y_1^j, \dots, y_{k-1}^j) \right\}.$$

Enfin, la compacité de $\bar{\Omega}$ permet d'affirmer l'existence d'un réel $\alpha \in]0, 1]$ tel que $\Omega_\alpha = \{x \in \bar{\Omega}, d(x, \partial\Omega) = \Delta(x) < \alpha\}$ soit inclus dans $\bigcup_{j=1}^J W_j$: en effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait construire une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de points $\bigcap_{j=1}^J \mathcal{C}W_j \cap \bar{\Omega}$ avec $x_n \in \Omega_{1/n}$ qui admettrait une sous-suite (x_{n_k}) convergeant vers un x nécessairement contenu dans $\partial\Omega \cap \mathcal{C}(\bigcup_{j=1}^J W_j)$ ce qui contredirait le fait que les $W_j, 1 \leq j \leq J$, recouvrent $\partial\Omega$.

2. On définit maintenant la famille $\{C_x, x \in \bar{\Omega}\}$.

On commence par associer à chaque carte locale $(W_j, (y_k^j)_{1 \leq k \leq k})$ le cône fini C_j de sommet l'origine, d'axe Oy_k^j orienté vers les y_k^j positifs, d'angle d'ouverture $\gamma \in]0, \pi/2[$ tel que $\cotan \gamma = 2M$ et de hauteur $\beta = \min(\eta, \alpha)/4$.



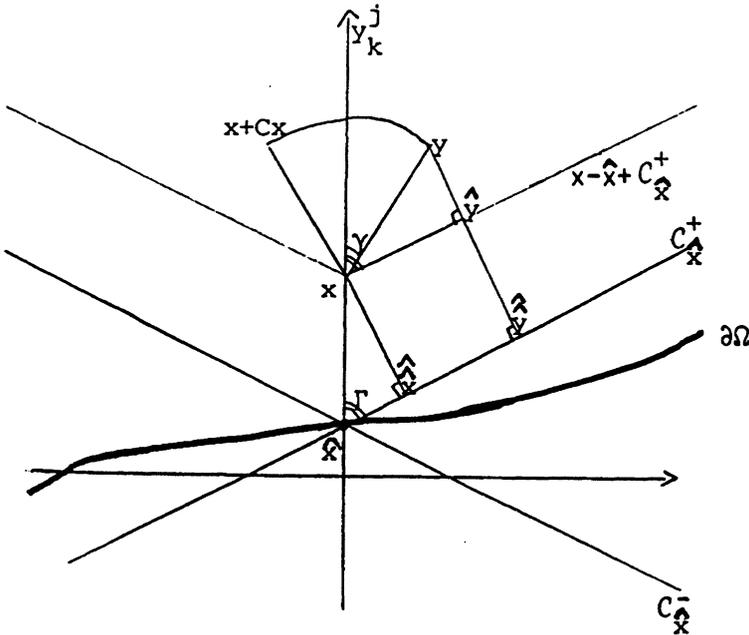
Alors :

- si $x \notin \Omega_{3\beta}$, on peut prendre pour C_x n'importe quel cône fini admettant pour sommet l'origine et congruent à l'un des C_j ;
- si $x \in \Omega_{3\beta}$, on choisit une partition $\{\widetilde{W}_j, 1 \leq j \leq J\}$ de $\Omega_{3\beta}$ subordonnée en recouvrement $\{W_j \cap \Omega_{3\beta}, 1 \leq j \leq J\}$; x est alors contenu dans un seul des \widetilde{W}_j , disons dans \widetilde{W}_{j_0} et on prend $C_x = C_{j_0}$.

Il est immédiat que la famille de cônes ainsi construite est admissible pour $\bar{\Omega}$, il suffit de prendre $\rho = \beta$ pour chaque $x \in \bar{\Omega}$.

3. Lorsque $x \in \Omega_{3\beta}$, i.e. $\Delta(x) < 3\beta$, il existe j ($1 \leq j \leq J$) tel que $x \in \widetilde{W}_j \subseteq W_j$. Tout $y \in x + C_x$ appartient donc à $V_j =]-a_{xj} + \eta, a_{xj} - \eta[^{k-1}x] - b_{xj} + \eta, b_{xj} - \eta[$ et on vérifie facilement que pour tout $1 \leq j \leq J$:

$$\forall y \in V_j \cap \Omega_{3\beta}, \quad \Delta(y) = d(y, \partial\Omega) = d(y, \partial\Omega \cap U_{xj}).$$



Ce qui permet d'écrire, en désignant par \widehat{x} la projection de x sur $\partial\Omega$ parallèlement à l'axe des y_k^j et par C_x^+ le cône de sommet \widehat{x} , d'axe $\widehat{x}y_k^j$ orienté vers les y_k^j positifs, d'angle d'ouverture $\Gamma \in]0, \pi/2[$ tel que $\cotan \Gamma = M$:

$$\forall y \in x + C_x, \quad \Delta(y) \geq d(y, \partial C_x^+) = |y - \widehat{y}|,$$

où \widehat{y} est la projection orthogonale de y sur la génératrice de C_x^+ contenue dans le demi plan déterminé par y et l'axe de C_x^+ qui appartient bien à U_{x^j} .

On a alors

$$|y - \widehat{y}| = |y - \widehat{y}| + |\widehat{y} - \widehat{y}| = |y - x| \sin(\Gamma - \gamma) + |x - \widehat{x}| \sin \Gamma.$$

Comme, par définition, $\sin \Gamma$ et $\sin(\Gamma - \gamma)$ sont deux constantes positives (qui s'expriment en fonction de M), on obtient le résultat annoncé en prenant $\epsilon = 3\beta$ et $a = \sin(\Gamma - \gamma)$. \square

THÉORÈME 6.1.2. — Soient Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^k à frontière lipschitzienne et $\varphi : (x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}^{km} \rightarrow \Delta(x)^\nu |y|^p / p \in \mathbb{R}_+$ (avec $\Delta(x) = d(x, \partial\Omega)$, pour $p \geq 1$ et $\nu > 0$). Il existe une famille $\{C_x, x \in \overline{\Omega}\}$ de cônes finis de hauteur $s \leq 1$ admissible pour $\overline{\Omega}$ et des constantes ϵ, a, K strictement positives telles que la fonction $f : (x, t, r) \in \overline{\Omega} \times [0, s] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$f(x, t, r) = \begin{cases} \left(\frac{\epsilon}{3}\right)^{\nu(1-q)} \left(\frac{r^q}{q}\right) \chi_{\{\Delta \geq \epsilon\}}(x) + \\ \quad + a^{\nu(1-q)} t^{\nu(1-q)} \left(\frac{r^q}{q}\right) \chi_{\{\Delta < \epsilon\}}(x) & \text{si } p > 1, p^{-1} + q^{-1} = 1 \\ K^\nu \delta \left(r \left(\frac{\epsilon}{3}\right)^{-\nu}, [-1, 1] \right) \chi_{\{\Delta \geq \epsilon\}}(x) + \\ \quad + K^\nu \delta (r(at)^{-\nu}, [-1, 1]) \chi_{\{\Delta < \epsilon\}}(x) & \text{si } p = 1, \end{cases}$$

où K dénote le diamètre de Ω , vérifie la condition (H₄) i).

Preuve. — On remarque d'abord que :

$$\varphi^*(y, z) = \begin{cases} \Delta(y)^\nu q^{-1} \left| \frac{z}{\Delta(y)^\nu} \right|^q = \Delta(y)^{\nu(1-q)} q^{-1} |z|^q & \text{avec } p^{-1} + q^{-1} = 1 \quad \text{si } p > 1 \\ \Delta(y)^\nu \delta \left(\frac{z}{\Delta(y)^\nu}, \overline{B}(0, 1) \right) & \text{sinon} \end{cases}$$

et on utilise la famille $\{C_x, x \in \bar{\Omega}\}$ construite en 6.1.

1. Si $\Delta(x) \geq \epsilon, \forall x' \in B(x, \epsilon/3), \forall y \in x' + C_x,$

$$\Delta(y) \geq \frac{\epsilon}{3}.$$

Dans ces conditions, pour tout $z \in \mathbb{R}^{k_m}$, on a :

$$\varphi^*(y, z) \leq \begin{cases} \left(\frac{\epsilon}{3}\right)^{\nu(1-q)} \frac{|z|^q}{q} & \text{si } p > 1 \\ K^\nu \delta \left(|z| \left(\frac{\epsilon}{3}\right)^{-\nu}, [-1, 1] \right) & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

avec $K = \sup\{|x - y|, x \in \Omega, y \in \Omega\}.$

2. Si $\Delta(x) < \epsilon, \forall x' \in B(x, \epsilon/3) \cap \bar{\Omega}, \forall y \in x' + C_x,$

$$\Delta(y) \geq a|y - x'|.$$

On a donc dans ces conditions, pour tout $z \in \mathbb{R}^{k_m}$:

$$\varphi^*(y, z) \leq \begin{cases} (a|y - x'|)^{\nu(1-q)} \frac{|z|^q}{q} & \text{si } p > 1 \\ K^\nu \delta \left(|z| (a|y - x'|)^{-\nu}, [-1, 1] \right) & \text{si } p = 1. \end{cases}$$

D'où le résultat annoncé. \square

6.2. L'inclusion dans $C^\ell(\Omega)$

Il suffit de vérifier l'hypothèse (H₁) du paragraphe 2. Lorsque $\partial\Omega$ est à frontière lipschitzienne, Ω vérifie la condition du cône ce qui implique l'existence d'une famille $\{C_x, x \in \Omega\}$ de cônes, admissible pour Ω et telle que $\forall x \in \Omega, x + \overline{C_x} \subseteq \Omega$. Sur le compact $x + \overline{C_x}$, la fonction Δ est majorée et minorée par des constantes strictement positives de telle sorte que les conditions de convergence sont les mêmes qu'en 5.1 et ceci quel que soit $\nu > 0$ puisque φ^* s'écrit :

$$\varphi^*(y, z) = \begin{cases} \Delta(y)^{\nu(1-q)} \frac{|z|^q}{q} & \text{avec } p^{-1} + q^{-1} = 1 \quad \text{si } p > 1 \\ \Delta(y)^\nu \delta(z \Delta(y)^{-\nu}, \overline{B}(0, 1)) & \text{sinon,} \end{cases}$$

de sorte que $L_\varphi^{(m)}(\Omega)$ est inclus dans $C^\ell(\Omega)$ dès que :

$$\begin{cases} (m - \ell)p > k & \text{si } p > 1 \\ m - \ell \geq k & \text{si } p = 1. \end{cases}$$

6.3. L'immersion dans $C^{\ell}(\bar{\Omega})$

Il ne reste qu'à vérifier la condition de "non explosion" (H_4) ii) du paragraphe 4. Reprenant l'expression de f donnée dans le théorème 6.1.2, on est amené à chercher dans quelles conditions les intégrales suivantes sont convergentes.

$$\int_0^s t^{(m-k-\ell)q+k-1} dt < \infty \quad (\text{cas } p > 1)$$

ou

$$\int_0^s \delta \left(\xi \left(\frac{\epsilon}{3} \right)^{-\nu} t^{m-k-\ell}, [-1, 1] \right) t^{k-1} dt < \infty \quad (\text{cas } p = 1)$$

(qui fournissent une condition de régularité "intérieure") et

$$\int_0^s t^{\nu(1-q)+(m-k-\ell)q+k-1} dt < \infty \quad (\text{cas } p > 1)$$

ou

$$\int_0^s \delta(\xi a^{-\nu} t^{-\nu+m-k-\ell}, [-1, 1]) t^{k-1} dt < \infty \quad (\text{cas } p = 1)$$

(qui donnent une condition de régularité "au bord" pour la fonction φ^*). Or la condition de convergence de chacune des deux premières intégrales n'est autre que la condition déjà écrite en 5.1 dans le cas classique, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} (m-\ell)p > k & \text{si } p > 1, \\ m-\ell \geq k & \text{si } p = 1. \end{cases}$$

En ce qui concerne les deux autres intégrales, leur convergence équivaut aux conditions :

$$\begin{cases} \nu(1-q) + (m-k-\ell)q + k - 1 > -1 & \text{soit } (m-\ell)p > k + \nu & \text{si } p > 1 \\ t^{m-k-\ell-\nu} \text{ borné en zéro,} & \text{soit } m-\ell \geq k + \nu & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

lesquelles entraînent les conditions précédentes puisque $\nu > 0$. On a donc prouvé le théorème suivant.

THÉORÈME 6.3.1. — Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^k à frontière lipschitzienne, $m \geq 1$ et $\ell \geq 0$ deux entiers et ν un réel > 0 . Si $(m-\ell)p > k + \nu$ (avec $p > 1$) (resp. $m-\ell \geq k + \nu$), l'espace de Sobolev d'ordre m avec le poids Δ^ν (où Δ est la distance au bord $\partial\Omega$ de Ω) $W_{\nu}^{m,p}(\Omega)$ (resp. $W_{\nu}^{m,1}(\Omega)$) s'injecte continûment dans l'espace de Banach $C^{\ell}(\bar{\Omega})$.

6.4. Comparaison avec les résultats de A. Kufner

A. Kufner dans [Ku], pages 52, 53, signale qu'on peut obtenir des propriétés de continuité des éléments de $W_\nu^{m,p}(\Omega)$ en appliquant le théorème de Sobolev-Morrey à la suite du résultat d'injection suivant.

Soit Ω un ouvert borné suffisamment régulier de \mathbb{R}^k , M un sous-ensemble de $\partial\Omega$ de dimension $n \in [0, k-1]$, d_M la distance à M , $p > 1$ et $W^{m,p}(\Omega, d_M^\nu)$ l'espace de Sobolev d'ordre m avec le poids d_M^ν . On a l'injection $W^{m,p}(\Omega, d_M^\nu) \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega)$ pour tout ν et q vérifiant :

$$\begin{cases} 0 \leq \nu < (k-n)(p-1), \\ 1 \leq q < \frac{(k-n)p}{(\nu+k-n)}. \end{cases}$$

Le cas qui nous intéresse correspond à $M := \partial\Omega$ et $n := k-1$ et, pour obtenir le résultat le plus fin, il convient de choisir q aussi grand que possible ce qui conduit à l'inégalité $(m-\ell)p > k(1+\nu)$ avec la restriction $0 \leq \nu < p-1$, alors que d'après le théorème 6.3, l'immersion a lieu dès que $(m-\ell)p > k+\nu$ avec $\nu \geq 0$.

6.5. Cas où la condition de "non explosion"

(H₄) ii) n'est pas vérifiée

On doit s'attendre, dans certains cas, à pouvoir trouver des fonctions $u \in W_\nu^{m,p}(\Omega)$ qui ne soient pas dans $C^\ell(\bar{\Omega})$. C'est ce que confirme le contre-exemple suivant.

$$\Omega :=]-1, 1[^2 \subseteq \mathbb{R}^2, \quad m := 2, \quad p := 2, \quad \nu := 5,$$

donc $mp < k + \nu$.

Or la fonction $u : (x_1, x_2) \in \Omega \rightarrow (1-x_1^2)^{-1/2}$ qui est de classe C^2 sur Ω appartient bien à $W_5^{2,2}(\Omega)$ mais n'est pas bornée.

6.6. Cas intermédiaire

On peut se demander si, dans le cas $k < (m-\ell)p \leq k+\nu$ (ou $k \leq m-\ell < k+\nu$ si $p=1$), on n'a pas "un peu plus" que l'appartenance à $C^\ell(\Omega)$.

THÉORÈME 6.6.1. — Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^k à frontière lipschitzienne, $m \geq 1$ et $\ell \geq 0$ deux entiers et ν un réel > 0 . Si $k < (m - \ell)p \leq k + \nu$ (avec $p > 1$) (resp. $k \leq m - \ell < k + \nu$), l'espace de Sobolev d'ordre m avec le poids Δ^ν (où Δ est la distance au bord $\partial\Omega$ de Ω) $W_\nu^{m,p}(\Omega)$ (resp. $W_\nu^{m,1}(\Omega)$) est contenu dans $C^\ell(\Omega) \cap W_\nu^{\ell,\infty}(\Omega)$, c'est-à-dire :

$$\forall |\beta| \leq \ell, \quad D^\beta u \text{ est continue et } \Delta^\nu D^\beta u \text{ est bornée sur } \Omega.$$

Preuve. — On utilise une technique d'inégalité de Young comme à la fin de la démonstration de 3.1 et on reprend les mêmes notations.

Il convient d'abord de remarquer que, puisque $W_\nu^{m,p}(\Omega)$ est contenu dans $C^\ell(\Omega)$ (cf. 6.2), $\Delta^\nu D^\beta u$ est borné sur tout compact contenu dans Ω ; seul se pose donc le problème du comportement au voisinage du bord. Grâce à la proposition 6.1.1, on peut supposer que $\Delta(x) < \epsilon$ et, en posant $\varphi(x, y) = \Delta(x)^\nu \Phi(y) = \Delta(x)^\nu |y|^p/p$, on a, pour tout $|\beta| \leq \ell$:

$$\begin{aligned} |\Delta(x)^\nu D^\beta u(x)| &\leq \xi^{-1} \mathcal{M} A \sqrt{k_m} \|u\|_\varphi^{(m)} \left[\int_{x+C_x} \Delta(x)^\nu \Phi \left(\frac{\mathfrak{D}u(y)}{\|u\|_\varphi^{(m)}} \right) dy + \right. \\ &\quad \left. + \Delta(x)^\nu \int_{x+C_x} \Phi^* \left(\frac{\xi w_\beta(y-x)}{\mathcal{M} A \sqrt{k_m}} \right) dy \right]. \end{aligned}$$

Or la famille de cônes $\{C_x, x \in \Omega\}$ qu'on utilise vérifie :

$$\forall x \in \Omega_\epsilon, \forall y \in x + C_x, \quad \Delta(y) \geq a|y - x|$$

de sorte que $\Delta(x) \leq |y - x| + \Delta(y) \leq (1 + 1/a)\Delta(y)$, ce qui conduit à la majoration :

$$\begin{aligned} |\Delta(x)^\nu D^\beta u(x)| &\leq \xi^{-1} \mathcal{M} A \sqrt{k_m} \|u\|_\varphi^{(m)} \times \\ &\quad \times \left[\left(1 + \frac{1}{a}\right)^\nu \int_{x+C_x} \Delta(y)^\nu \Phi \left(\frac{\mathfrak{D}u(y)}{\|u\|_\varphi^{(m)}} \right) dy + \right. \\ &\quad \left. + \Delta(x)^\nu \int_{x+C_x} \overline{\Phi^*}(\xi|y - x|^{m-k-\ell}) dy \right] \\ &\leq \xi^{-1} \mathcal{M} A \sqrt{k_m} \|u\|_\varphi^{(m)} \left[\left(1 + \frac{1}{a}\right)^\nu + \right. \\ &\quad \left. + \Delta(x)^\nu \int_{x+C_x} \overline{\Phi^*}(\xi|y - x|^{m-k-\ell}) dy \right]. \end{aligned}$$

Immersion des espaces de Sobolev généralisés dans des espaces de fonctions continues

Comme Φ est sans paramètre et tous les C_x congruents à un même cône C_0 , la dernière intégrale ne dépend pas de x et on trouve :

$$\sup_{\Delta(x) \leq \epsilon} |\Delta(x)^\nu D^\beta u(x)| \leq \xi^{-1} \mathcal{M} A \sqrt{k_m} \|u\|_\varphi^{(m)} \left[\left(1 + \frac{1}{a}\right)^\nu + \right. \\ \left. + \epsilon^\nu \text{vol}(\widehat{C}_0 \cap S_1) \int_0^s \overline{\Phi^*}(\xi t^{m-k-\ell}) t^{k-1} dt \right]$$

ce qui permet de conclure. \square

Références

- [A] ADAMS (R.A.) . — *Sobolev spaces*,
Academic Press (1975).
- [B-V] BARRIL (C.) et VAUDÈNE (R.) . — *Opérateurs de calcul des variations sur des espaces de Sobolev-Orlicz à plusieurs variables*,
Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier (1976) n° 17; C.R.A.S. 284 série A (1977) p. 45.
- [D-T] DONALDSON (T.K.) and TRUDINGER (N.S.) . — *Orlicz-Sobolev spaces and imbedding theorems*,
J. Functional Analysis 8 (1971) pp. 52-75.
- [F1] FOUGÈRES (A.) . — Thèse,
Besançon (1972) (résumé dans 2); C.R.A.S. 273 série A (1971) p. 982; 274 série A (1972) p. 181; 274 série A (1972) p. 479; 274 série A (1972) p. 763.
- [F2] FOUGÈRES (A.) . — *Espaces de Sobolev-Orlicz "classiques" : approximations, traces et prolongements*,
Séminaire d'Analyse convexe, Montpellier (1977) n° 12.
- [F3] FOUGÈRES (A.) . — *Coercivité des intégrandes convexes normales, application à la minimisation des fonctionnelles intégrales et du calcul des variations (I)*,
Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier (1976) n° 19; C.R.A.S. 284 série A (1977) p. 873.
- [F4] FOUGÈRES (A.) . — *ibid. (II) et (III)*
Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier (1977) n° 1 et 4; C.R.A.S. 284 série A (1977) p. 1279.
- [F-P] FOUGÈRES (A.) et PERALBA (J.C.) . — *Application au calcul des variations de l'optimisation intégrale convexe*,
Journées d'Analyse non linéaire (Proc. Conf. Besançon 1977) pp. 70-99; Lectures Notes in Math., Springer Berlin (1978) n° 665.
- [G] GINER (E.) . — *Thèse de 3ème cycle*,
Perpignan (1977); C.R.A.S. 284 série A (1977) p. 41; 287 série A (1978) p. 425.
- [Gz] GOSSEZ (J.P.) . — *Nonlinear elliptic B.V.P. for equations with rapidly or slowly increasing coefficients*,
Trans. A.M.S. 190 pp. 163-205.

- [H] HUDZIK (H.) . — *On imbedding theorems of Orlicz-Sobolev space $W_M^k(\Omega)$ into $C^m(\Omega)$ for open bounded and starlike $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$,*
 Comment. Math. Prace. Mat. 20 n° 2 (1977/78) pp. 341-363.
- [K] KRASNOSEL'SKII (M.A.) and RUTICKII (YA.B.) . — *Convex functions and Orlicz spaces,*
 Noordhoff (1961).
- [Ku] KUFNER (A.) . — *Weighted Sobolev spaces,*
 Teubner-Texte zur Mathematik n° 31.
- [L] LACROIX (M.T.) . — *Échelle d'espaces intermédiaires entre un espace de Sobolev-Orlicz et un espace d'Orlicz - Trace d'espaces de Sobolev-Orlicz avec poids,*
 Journées d'Analyse non linéaire (Proc. Conf. Besançon 1977) pp. 121-139;
 Lectures Notes in Math., Springer Berlin (1978) n° 665.
- [M] MAZ'JA (V.G.) . — *Sobolev spaces,*
 Springer Series in Soviet Mathematics (1985).
- [Ne] NECAS (J.) . — *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques,*
 Masson (1967).
- [Ni1] NIKOL'SKII (S.M.) . — *On imbedding, continuation and approximation theorems for differentiable functions of several variables,*
 Russian Math. Surveys 16 (1961) pp. 55-104.
- [Ni2] NIKOL'SKII (S.M.) . — *Approximation of functions of several variables and imbedding theorems,*
 Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, n° 205, Springer (1975).
- [Sc] SCHWARTZ (L.) . — *Théorie des distributions,*
 Hermann (1966).
- [S] SOBOLEV (S.L.) . — *Applications of functional analysis in mathematical physics,*
 Leningrad (1950),
 Traduction anglaise : Amer. Math. Soc., Transl. Math. Mono. 7 (1963).
- [S-N] SOBOLEV (S.L.) and NIKOL'SKII (S.M.) . — *Imbedding theorems,*
 Amer. Math. Soc. Trans. (2), vol. 87 (1970) pp. 147-173
- [T] TRIEBEL (H.) . — *Interpolation theory, function spaces, differential operators,*
 North-Holland Mathematical Library, vol. 18 (1978).
- [V1] VAUDÈNE (R.) . — *Stabilité géométrique et régularisation dans les espaces intégraux de type Orlicz à paramètre et variable vectorielle; critère de compacité de Kolmogorov-Riesz,*
 Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier (1978) n° 6; C.R.A.S. 287 série A (1978) p. 1057.
- [V2] PHILIPPE-VAUDÈNE (R.) . — *Approximation régulière de certains espaces de Sobolev,*
 Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, n° 8 (1981).
- [V3] PHILIPPE-VAUDÈNE (R.) . — *Espaces de Sobolev généralisés de type Orlicz ou à poids : densité, immersion continue, interpolation de Lagrange,*
 Thèse d'État, Perpignan (1985).