ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

MOHAMED DAHER

Convergence des martingales pluri-sous-harmoniques vectorielles à deux indices

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 1, nº 1 (1992), p. 25-38

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1992_6_1_1_25_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Série 6, Vol. I, n° 1, 1992

Convergence des martingales pluri-sous-harmoniques vectorielles à deux indices

MOHAMED DAHER[1]

RÉSUMÉ. — On montre la convergence presque sûre pour les martingales pluri-sous-harmoniques (en abrégé : psh) à deux indices L^p-bornées et la convergence radiale presque partout pour l'espace $\mathbf{H}^p(D^2, X)$ lorsque X est un espace de Banach ayant la propriété de Radon-Nikodym analytique (RNa) ($p > 0$) (cf. [2], [3], [12]).

On généralise le théorème de Dowling pour les opérateurs représentables à valeurs dans un espace de Banach RNa (cf. [6]).

On montre aussi que si X a la propriété RNa alors $\mathrm{M}^1(\Omega)\widehat{\otimes} X$ a RNa.

ABSTRACT. — We prove the almost sure convergence for L^p-bounded pluri-subharmonic martingales and the almost everywhere radial convergence for the space $\mathbf{H}^p(D^2, X)$ when X is a complex Banach space with the analytic Randon-Nikodym property (ARNP).

We generalize Dowling's theorem for representable operators into a space with ARNP.

We also show that $\mathrm{M}^1(\Omega)\widehat{\otimes} X$ has ARNP when X does.

Introduction

La propriété de Radon-Nikodym analytique (RNa) pour les espaces de Banach (complexes) a été introduite par A. V. Bukhvalov et A. A. Danilevich [3]; cette propriété d'un espace de Banach complexe X a été caractérisée par la convergence presque sûre des martingales psh L^p-bornées ($p > 0$) à valeurs dans X ou par la convergence radiale presque partout des fonctions qui sont dans $\mathbf{H}^p(D, X)$ (cf. [2], [3], [12]).

(1) Université Paris VII, U.R.A. 1321, U.F.R. de Mathématiques, Paris (France)

Dans ce travail on donne une autre caractérisation par la convergence presque sûre des martingales psh à deux indices L^p-bornées (à valeurs vectorielles) et la convergence radiale des fonctions dans $\mathbf{H}^p(D^2, X)$ $(p > 0)$. Bien entendu, la convergence des martingales doubles entraîne la convergence des martingales simples. Notre résultat consiste donc à montrer que la propriété RNa entraîne la convergence des martingales psh à deux indices (théorème 1); en fait nous ne démontrons pas ce résultat en toute généralité, mais sous une hypothèse raisonnable sur notre famille de tribus. Par ailleurs nous montrons la convergence radiale pour les fonctions de $\mathbf{H}^p(D^2, X)$ lorsque X vérifie RNa (théorème 2). Par ailleurs, nous généraliserons la caractérisation de Dowling des opérateurs représentables dans le cadre RNa (théorème 3), et nous montrons que l'espace $\mathbf{M}^1(\Omega)\,\widehat{\otimes}\,X$ vérifie RNa lorsque X vérifie RNa (théorème 4).

Nous noterons D le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, m_n la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, m_∞ la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$.

Soit X un espace de Banach complexe, on note pour tout $p > 0$

$$\mathbf{H}^p(D, X) = \left\{ f : D \to X \text{ holomorphe}; \quad \sup_{0 \le r < 1} \int_{\mathbb{T}} \left\| f(re^{it}) \right\|^p \mathrm{d}m_1(t) < +\infty \right\}$$

$$\mathbf{H}^p(D^2, X) = \left\{ f : D^2 \to X \text{ holomorphe}; \quad \sup_{0 \le r < 1} \int_{\mathbb{T}^2} \left\| f(re^{it}, re^{it'}) \right\|^p \mathrm{d}m_2(t, t') < +\infty \right\}.$$

$$\mathbf{h}^p(D, X) = \left\{ f : D \to X\,;\ h \text{ est harmonique et} \quad \sup_{0 \le r < 1} \int_{\mathbb{T}} \left\| f(re^{it}) \right\|^p \mathrm{d}m_1(t) < +\infty \right\}.$$

Pour tout $p \in [\,1\,, +\infty\,[$, on note

$$\mathbf{H}^p_0(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^p(\mathbb{T});\ \int_{\mathbb{T}} e^{ikt} f(t)\, \mathrm{d}m_1(t) = 0\,,\ \forall\, k \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\mathbf{G}_0^p(\mathbb{T}^n) = \Big\{ f \in L^p(\mathbb{T}^n);\ \int_{\mathbb{T}^n} \mathrm{e}^{ik_1 t_1} \otimes \cdots$$
$$\cdots \otimes \mathrm{e}^{ik_n t_n} f(t_1, \ldots, t_n)\, \mathrm{d}m_n(t_1, \ldots, t_n) = 0$$
$$\forall\ k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N} \Big\}\ (n \geq 2)$$

$$\mathbf{G}_0^p(\mathbb{T}^{\mathbb{N}}) = \Big\{ f \in L^p(\mathbb{T}^{\mathbb{N}});\ \int_{\mathbb{T}^{\mathbb{N}}} \mathrm{e}^{i(n_1 \cdot t_1)} \otimes \cdots$$
$$\cdots \otimes \mathrm{e}^{i(n_k \cdot t_k)} f(t_1, \ldots, t_k, \ldots)\, \mathrm{d}m_\infty(t_1, \ldots, t_k, \ldots) = 0\,,$$
$$\forall\ k \geq 1 \text{ et } \forall\ n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N} \Big\}\ .$$

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}\,, \quad P_z(t) = P_r(\theta - t)\,, \quad (z = r\mathrm{e}^{i\theta})\,.$$

Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesuré et X un espace de Banach, on note :

$$\mathbf{M}^1(\Omega, X) = \{\gamma;\ \gamma \text{ est une mesure définie sur } \Omega \text{ à valeur dans } X \text{ à variation bornée}\}\ .$$

Si $\gamma \in \mathbf{M}^1(\Omega, X)$, on pose $\|\gamma\| = |\gamma|(\Omega)$ où $|\gamma|$ la mesure de la variation totale de γ, alors $\big(\mathbf{M}^1(\Omega, X)\,,\ \|\cdot\|\big)$ est un espace de Banach.

On note $M^1(\Omega)\,\widetilde{\otimes}\,X$ la fermeture dans $\mathbf{M}^1(\Omega, X)$ de

$$\Big\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \otimes x_i;\ \lambda_i \in \mathbf{M}^1(\Omega)\,,\ x_i \in X \text{ et } n \in \mathbb{N}^* \Big\}$$

$(\lambda \otimes x(A) = \lambda(A)x\ (x \in X),\ \forall\ A \in \mathcal{F},\ \mathbf{M}^1(\Omega) = \mathbf{M}^1(\Omega, \mathbb{C}))$, remarquons que $\mathbf{M}^1(\Omega)\,\widehat{\otimes}\,X = \mathbf{M}^1(\Omega)\,\widetilde{\otimes}\,X$.

DÉFINITION 1.— *Un opérateur borné $T : L^p(\mathbb{T}^{\mathbb{N}}) \to X$ est dit représentable s'il existe une fonction $\varphi \in L^q(\mathbb{T}^{\mathbb{N}}, X)$ ($1 \leq p < +\infty$ et q est le conjugué de p) telle que*

$$Tf = \int_{\mathbb{T}^{\mathbb{N}}} f(t_1, \ldots, t_k, \ldots) \times$$
$$\times\ \varphi(t_1, \ldots, t_k, \ldots)\, \mathrm{d}m_\infty(t_1, \ldots, t_k, \ldots)\,, \quad \forall\ f \in L^p(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})\,.$$

DÉFINITION 2.— *Soit $(\Omega, \mathbf{P}, \mathcal{F})$ un espace probabilisé; supposons que l'on a sur cet espace une suite $\left(\mathcal{F}_{m,n}\right)_{m,n\geq 0}$ croissante de sous-tribus; soit $\left(M_{m,n}\right)_{m,n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans X telle que pour tout m, $n \in \mathbb{N}$, $M_{m,n}$ est $\mathcal{F}_{m,n}$ mesurable, on dit que $\left(M_{m,n}\right)_{m,n\geq 0}$ est une martingale psh (à deux indices) à valeurs dans X si, pour toute fonction pluri-sous-harmonique $\varphi : X \to [-\infty\,,\,+\infty[$, la suite $\left(\varphi(M_{m,n})\right)_{m,n\geq 0}$ est une sous-martingale.*

Rappelons que $\left(\varphi(M_{m,n})\right)_{m,n\geq 0}$ est une sous-martingale par rapport à $\left(\mathcal{F}_{m,n}\right)_{m,n\geq 0}$ si pour tout m, n, m', $n' \in \mathbb{N}$ avec $(m,n) \leq (m',n')$ (ordre produit) et pour tout $A \in \mathcal{F}_{m,n}$, on a

$$\int_A \varphi\big(M_{m,n}(\omega)\big)\,\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) \leq \int_A \varphi\big(M_{m',n'}(\omega)\big)\,\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega)\,.$$

DÉFINITION 3.— *Soit F une fonction définie sur D^2 à valeurs dans X ; on dit que f admet des limites radiales presque partout s'il existe un ensemble $\Omega \subseteq \mathbb{T}^2$ mesurable de mesure égale à 1 et une fonction $\varphi : \Omega \to X$ tels que pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $(t,t') \in \Omega$ il existe $\delta \in [\,0\,,\,1\,[$ vérifiant que pour tout r, $r' \in [\,\delta\,,\,1\,[$*

$$\left\| f(re^{it}, r'e^{it'}) - \varphi(t,t') \right\| < \epsilon\,.$$

DÉFINITION 4.— *Soit $\left(M_{m,n}\right)_{m,n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans X ; on dit que $\left(M_{m,n}\right)_{m,n\geq 0}$ converge presque sûrement s'il existe un ensemble Ω mesurable de mesure égale à 1 et une variable aléatoire M_∞ tels que pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $\omega \in \Omega$ il existe n_0 vérifiant que pour tout m, $n \geq n_0$*

$$\left\| M_{m,n}(\omega) - M_\infty(\omega) \right\| < \epsilon\,.$$

THÉORÈME 1.— *Soient X un espace de Banach ayant la propriété de Radon-Nikodym analytique, $p > 0$, $(\Omega, \mathbf{P}, \mathcal{F})$ un espace de probabilité et $\left(\mathcal{F}_{m,n}\right)_{m,n\geq 0}$ une suite croissante de sous-tribus tels que*

$$\mathbf{E}\big(f \mid \mathcal{F}_{m,n}\big) = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\big(f \mid \mathcal{F}_{m,\infty}\big) \;\middle|\; \mathcal{F}_{\infty,n}\right)\,, \quad \forall\, f \in L^1(\mathbf{P})\,,$$

$$\left(\mathcal{F}_{\infty,n} = \bigvee_{i\geq 0} \mathcal{F}_{i,n}\,, \quad \mathcal{F}_{m,\infty} = \bigvee_{j\geq 0} \mathcal{F}_{m,j}\right)$$

alors toute martingale psh à deux indices à valeurs dans X et L^p-bornée converge presque sûrement.

THÉORÈME 2. — *Soit X un espace de Banach ayant la propriété de Radon-Nikodym analytique et soit $p > 0$; alors toute fonction dans $\mathbf{H}^p(D^2, X)$ admet des limites radiales presque partout.*

THÉORÈME 3. — *Sur un espace de Banach X ayant la propriété de Radon-Nikodym analytique tout opérateur $T : L^p(\mathbb{T}^n) \to X$ borné et nul sur $\mathbf{G}_0^p(\mathbb{T}^n)$ est représentable si,*

$$\sup_{r_1,\ldots,r_n\in[0\,,1[} \int_{\mathbb{T}^n} \left\| T(P_{r_1 e^{it_1}} \otimes \cdots \right. \\ \left. \cdots \otimes P_{r_n e^{it_n}}) \right\|^q \mathrm{d}m_n(t_1,\ldots,t_n) < +\infty\,, \quad (n \geq 2) \tag{$*$}$$

Remarque 1. — Soit $T : L^p(\mathbb{T}^n) \to X$ un opérateur représentable $(1 \leq p < +\infty)$; on peut montrer facilement que T vérifie $(*)$ pour tout Banach X.

THÉORÈME 4. — *Si X est un espace de Banach ayant RNa alors $\mathbf{M}^1(\Omega) \mathbin{\widehat{\otimes}} X$ a RNa.*

Démonstrations des théorèmes

Démonstration du théorème 1

Soit $(M_{m,n})_{m,n\geq 0}$ une martingale psh à valeurs dans X, L^p-bornée. Pour tout n fixé la suite $(M_{m,n})_{m\geq 0}$ est une martingale psh par rapport à $(\mathcal{F}_{m,n})_{m\geq 0}$ ce qui entraîne que $(\|M_{m,n}\|^{p/2})_{m\geq 0}$ est une sous-martingale; on a alors par l'inégalité de Doob

$$\mathbf{E}\left(\sup_{m\geq 0} \|M_{m,n}\|^p\right) \leq 4 \sup_{m\geq 0} \mathbf{E}\left(\|M_{m,n}\|^p\right).$$

D'autre part, pour tout k, m, $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(\|M_{m,n}\|^{p/2} \,\middle|\, \mathcal{F}_{m,k}\right) &= \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(\|M_{m,n}\|^{p/2} \,\middle|\, \mathcal{F}_{m,\infty}\right) \,\middle|\, \mathcal{F}_{\infty,k}\right) \\ &= \mathbf{E}\left(\|M_{m,n}\|^{p/2} \,\middle|\, \mathcal{F}_{\infty,k}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent $\left(\|M_{m,n}\|^{p/2}\right)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale par rapport à $\left(\mathcal{F}_{\infty,n}\right)_{n\geq 0}$ ce qui entraîne que $\left(\sup_{m\geq 0}\|M_{m,n}\|^{p/2}\right)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale par rapport à $\left(\mathcal{F}_{\infty,n}\right)_{n\geq 0}$; en réappliquant l'inégalité de Doob, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\sup_{m,n\geq 0}\left\|M_{m,n}\right\|^p\right) &\leq 4\sup_{n\geq 0}\mathbf{E}\sup_{m\geq 0}\left(\left\|M_{m,n}\right\|^p\right)\\ &\leq 16\sup_{m\geq 0}\mathbf{E}\left(\left\|M_{m,n}\right\|^p\right).\end{aligned}\tag{$**$}$$

Nous allons montrer maintenant que la suite $\left(M_{m,n}\right)_{m,n\geq 0}$ converge presque sûrement; d'après l'inégalité $(**)$ il suffit de montrer qu'elle est de Cauchy dans $L^p(\Omega, X)$.

Supposons qu'il existe un $\epsilon > 0$ tel que pour tout n il existe i_n, i'_n, j_n, $j'_n \in \mathbb{N}$ vérifiant que

$$i_{n+1} > i'_{n+1} > i_n\,,\quad j_{n+1} > j'_{n+1} > j_n$$

et

$$\left\|M_{i_n,j_n} - M_{i'_n,j'_n}\right\|_{L^p(\Omega,X)} \geq \epsilon\,,$$

soient $M'_{2n} = M_{i'_n,j'_n}$ $M'_{2n+1} = M_{i_n,j_n}$, on voit facilement que $\left(M'_n\right)_{n\geq 0}$ est une martingale psh et, comme X a RNa, alors $\left(M'_n\right)_{n\geq 0}$ est L^p-convergente (cf [2]-[12]) ce qui contredit le fait que $\left(M'_n\right)_{n\geq 0}$ ne converge pas dans $L^p(\Omega, X)$.

Démonstration du théorème 2

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 1.

Pour tout $p > 0$, on a $\mathbf{H}^p(D^2, X) = \mathbf{H}^p\big(D\,,\,H^p(D,X)\big)$ car, si $f \in \mathbf{H}^p(D^2, X)$, alors pour tout $se^{i\theta} \in D$ fixé et pour tout $r \in\,]\,s\,,\,1\,[$, on a

$$\left\|f(se^{i\theta}, r'e^{it'})\right\|^p \leq \int_{\mathbb{T}}\left\|f(re^{it}, r'e^{it'})\right\|^p P_{\frac{s}{r}}(\theta - t)\,\mathrm{d}m_1(t)\,,\quad (r' \in [\,0\,,\,1\,[)$$

donc

$$\int_{\mathbb{T}}\left\|f(se^{i\theta}, r'e^{it'})\right\|^p \mathrm{d}m_1(t') \leq C(s)\left(\left\|f\right\|_{\mathbf{H}^p(D,X)}\right)^p$$

($C(s)$ est une constante dépendant de s), si X a RNa alors $\mathbf{H}^p(D, X)$ a RNa (cf [7]); par conséquent les polynômes à valeurs dans X à deux variables sont denses dans $\mathbf{H}^p(D^2, X)$.

Donc il suffit de montrer qu'il existe une constante C positive telle que pour toute fonction f dans $\mathbf{H}^p(D^2, X)$, on a

$$\int_{\mathbb{T}^2} (f^*(t,t'))^p \,\mathrm{d}m_2(t,t') \leq C^2 \left(\|f\|_{\mathbf{H}^p(D^2,X)}\right)^p \qquad (***)$$

$$\text{où} \quad f^*(t,t') = \sup_{r,r' \in [0\,,\,1[} \left\|f(r\mathrm{e}^{it}, r'\mathrm{e}^{it'})\right\|.$$

Pour cela, soient $f \in \mathbf{H}^p(D^2, X)$ et ρ, $\rho' \in [0\,,\,1[$, on pose $f_{\rho,\rho'}(z,z') = f(\rho z, \rho' z')$. Il est facile de voir que

$$\sup_{0 \leq r' < 1} \left\{ \int_{\mathbb{T}} \left(\sup_{0 \leq r < 1} \int_{\mathbb{T}} \left\|f_{\rho,\rho'}(r\mathrm{e}^{it}, r'\mathrm{e}^{it'})\right\|^p \mathrm{d}m_1(t) \right) \mathrm{d}m_1(t') \right\} = \left(\left\|f_{\rho,\rho'}\right\|_{\mathbf{H}^p(D^2,X)}\right)^p .$$

En appliquant l'inégalité maximale de Hardy-Littlewood sur la fonction $\left\|f_{\rho,\rho'}(\,\cdot\,, r'\mathrm{e}^{it'})\right\|^{p/2}$ (cf. [13]) qui est sous-harmonique, on obtient :

$$\int_{\mathbb{T}} \sup_{0 \leq r < 1} \left\|f_{\rho,\rho'}(r\mathrm{e}^{it}, r'\mathrm{e}^{it'})\right\|^p \mathrm{d}m_1(t) \leq C \left(\left\|f_{\rho,\rho'}(\,\cdot\,, r'\mathrm{e}^{it'})\right\|_{\mathbf{H}^p(D,X)}\right)^p . \tag{1}$$

En intégrant (1) par rapport à t' et par un simple calcul, on trouve qu'on peut réappliquer l'inégalité maximale de Hardy-Littlewood sur la fonction $\sup_{0 \leq r < 1} \left\|f_{\rho,\rho'}(r\mathrm{e}^{it}, \,\cdot\,)\right\|^{p/2}$ qui est sous-harmonique (pour presque tout t, cette fonction est lipschitzienne), on déduit alors que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{T}} (f^*_{\rho,\rho'}(t,t'))^p \,\mathrm{d}m_1(t') \leq \\ &\qquad \leq C \sup_{0 \leq r' < 1} \int_{\mathbb{T}} \sup_{0 \leq r < 1} \left\|f_{\rho,\rho'}(r\mathrm{e}^{it}, r'\mathrm{e}^{it'})\right\|^p \mathrm{d}m_1(t') . \end{aligned} \tag{2}$$

En intégrant (2) par rapport à t et par des simples calculs, on obtient l'inégalité $(***)$ en tendant ρ, ρ' vers 1.

Démonstration du théorème 3

On montre le théorème 3 pour $n = 2$ (le cas $n > 2$ se montre d'une façon analogue).

Soit $g \in L^p(\mathbb{T})$, on définit un opérateur $U_g : L^p(\mathbb{T}) \to X$ par

$$U_g(f) = T(f \otimes g), \quad \forall\, f \in L^p(\mathbb{T}).$$

Il est évident que U_g est un opérateur borné nul sur $\mathbf{H}_0^p(\mathbb{T})$, supposons que $b_g \in \mathbf{H}^q(D,X)$ avec $b_g(z) = T(P_z \otimes g)$ $(\forall\, z \in D)$, alors il existe $\psi_g \in L^q(\mathbb{T},X)$ tel que

$$T(f \otimes g) = \int_{\mathbb{T}} f(t)\psi_g(t)\,\mathrm{d}m_1(t)\,, \quad \forall\, f \in L^p(\mathbb{T}) \text{ (cf [6]).}$$

On définit l'opérateur $U : L^p(\mathbb{T}) \to L^q(\mathbb{T},X)$ par

$$Ug = \psi_g\,, \quad \forall\, g \in L^p(\mathbb{T})\,.$$

Par le théorème des applications ouvertes U est borné et nul sur $\mathbf{H}_0^p(\mathbb{T})$ si on admet aussi que $\psi \in \mathbf{H}^q\big(D, L^q(\mathbb{T},X)\big)$ avec $\psi(z) = U(P_z)$, $(\forall\, z \in D)$, alors il existe $K \in L^q\big(\mathbb{T}, L^q(\mathbb{T},X)\big)$ tel que

$$Ug = \psi_g = \int_{\mathbb{T}} g(t')K(t')\,\mathrm{d}m_1(t')$$

car $L^q(\mathbb{T},X)$ a RNa si $q < +\infty$ (cf. [7]).

Si $p = 1$, on utilise l'injection continue de $L^\infty(\mathbb{T},X)$ dans $L^1(\mathbb{T},X)$, on trouve qu'il existe $K \in L^\infty\big(\mathbb{T}\,,\, L^1(\mathbb{T},X)\big)$ tel que

$$Ug = \psi_g = \int_{\mathbb{T}} g(t')K(t')\,\mathrm{d}m_1(t')\,, \quad \forall\, g \in L^1(\mathbb{T})$$

car $L^1(\mathbb{T},X)$ a RNa (cf. [7]);
comme T est borné alors $K \in L^\infty\big(\mathbb{T}\,,\, L^\infty(\mathbb{T},X)\big)$.

On déduit que pour tout $p \in [\,1\,, +\infty\,[$ il existe $K \in L^q\big(\mathbb{T}\,,\, L^q(\mathbb{T},X)\big)$ tel que

$$Ug = \psi_g = \int_{\mathbb{T}} g(t')K(t')\,\mathrm{d}m_1(t')\,, \quad \forall\, g \in L^p(\mathbb{T})\,.$$

On montre facilement que

$$T(f \otimes g) = \int_{\mathbb{T}^2} f(t)g(t')\varphi(t,t')\,\mathrm{d}m_2(t,t')\,, \quad \forall\, f\,,\, g \in L^p(\mathbb{T})\,,$$

où $\varphi(t,t') = K(t')(t)$. Il reste à montrer que $b_g \in \mathbf{H}^q(D,X)$ $(\forall\, g \in L^p(\mathbb{T}))$ et $\varphi \in \mathbf{H}^q\big(D\,,\, L^q(\mathbb{T},X)\big)$.

Posons pour tout $z,\ z' \in D$, $\widetilde{\varphi}(z,z') = T(P_z \otimes P_{z'})$; par $(*)$, $\widetilde{\varphi} \in \mathbf{H}^q(D^2,X)$ et comme $\mathbf{H}^q(D^2,X) = \mathbf{H}^q\big(D\,,\, \mathbf{H}^q(D,X)\big)$ alors pour tout

$z \in D$, $h_z \in \mathbf{H}^q(D, X)$ avec $h_z(z') = \widetilde{\varphi}(z, z')$; cela implique qu'il existe un opérateur $T_z : L^p(\mathbb{T}) \to X$ unique tel que

$$T_z(P_{z'}) = \widetilde{\varphi}(z, z') = T(P_z \otimes P_{z'})\,, \quad \forall\ z\,,\ z' \in D \text{ (cf. [6])}.$$

Soit maintenant g un polynôme trigonométrique, alors

$$T_z(g) = T(P_z \otimes g) = \lim_{r \nearrow 1} \int_{\mathbb{T}} g(t) h_z(re^{it})\, dm_1(t)\,,$$

ce qui entraîne :

$$\int_{\mathbb{T}} \left\| T(P_{re^{it}} \otimes g) \right\|^q dm_1(t) \leq \left(\|\widetilde{\varphi}\|_{\mathbf{H}^q(D^2, X)} \right)^q \left(\|g\|_{L^p(T)} \right)^q$$

(par l'inégalité de Hölder); par densité cette inégalité est vraie pour tout $g \in L^p(\mathbb{T})$ donc $b_g \in \mathbf{H}^q(D, X)$.

Nous allons montrer aussi que $\psi \in \mathbf{H}^q\big(D, L^q(\mathbb{T}, X)\big)$.

Soient $z' \in D$ et $\widetilde{\psi}_{z'}(t) = \lim_{r \nearrow 1} \widetilde{\varphi}(re^{it}, z')$ (pour presque tout $t \in \mathbb{T}$, $\widetilde{\psi}_{z'}(t)$ existe), alors

$$T(f \otimes P_{z'}) = \int_{\mathbb{T}} f(t) \widetilde{\psi}_{z'}(t)\, dm_1(t)\,, \quad \forall\ f \in L^p(\mathbb{T})$$

car si f un polynôme trigonométrique, on voit que

$$T(f \otimes P_{z'}) = \lim_{r \nearrow 1} \int_{\mathbb{T}} f(t) \widetilde{\varphi}(re^{it}, z')\, dm_1(t)$$

et, par l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_{\mathbb{T}} f(t) \widetilde{\psi}_{z'}(t)\, dm_1(t) = \lim_{r \nearrow 1} \int_{\mathbb{T}} f(t) \widetilde{\varphi}(re^{it}, z')\, dm_1(t)$$

donc $\widetilde{\psi}_{z'} = \psi(z')$ presque-partout. Par $(*)$, on peut déduire que

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_{\mathbb{T}} \left\{ \int_{\mathbb{T}} \left\| \widetilde{\psi}_{re^{it'}}(t) \right\|^q dm_1(t) \right\} dm_1(t') \leq$$

$$\leq \sup_{0 \leq r < 1} \int_{\mathbb{T}^2} \left\| \widetilde{\varphi}(re^{it}, re^{it'}) \right\|^q dm_2(t, t') < +\infty\,.$$

Cela implique que $\psi \in \mathbf{H}^q\big(D\,,\ L^q(\mathbb{T}, X)\big)$, d'où le théorème. □

DÉFINITION 5.— *On dit que* $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ *est une martingale de Hardy à valeurs dans* X *(cf. [11]) si pour presque tout* $(\theta_1,\ldots,\theta_k,\ldots)\in\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned}
\varphi_0(\theta_1,\ldots,\theta_k,\ldots) &= x_0\in X\\
\varphi_1(\theta_1,\ldots,\theta_k,\ldots) &= x_0+\sum_{j\geq 1}\mathrm{e}^{ij\theta_1}\cdot x_{1,j}\,,\quad \textit{les } x_{1,j}\in X,\ \ldots\\
\varphi_n(\theta_1,\ldots,\theta_k,\ldots) &= \varphi_{n-1}(\theta_1,\ldots,\theta_k,\ldots)+\\
&\qquad +\sum_{j\geq 1}\mathrm{e}^{i\theta_n}\cdot x_{n,j}(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}),\ \ldots
\end{aligned}$$

les $x_{i,j}$ *sont des applications mesurables à valeurs dans* X.

COROLLAIRE 1.— *Soit* T *un opérateur borné de* $L^p(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})\to X$ $(1\leq p<+\infty)$ *nul sur* $\mathbf{G}_0^p(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ *tel que*

$$\sup_{n\geq 1}\left\{\sup_{r_1,\ldots,r_n\in[0,1[}\int_{\mathbb{T}^{\mathbb{N}}}\left\|T(P_{r_1\mathrm{e}^{it_1}}\otimes\cdots\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdots\otimes P_{r_n\mathrm{e}^{it_n}})\right\|^q\mathrm{d}m_\infty(t_1,\ldots,t_k,\ldots)\right\}<+\infty\,,$$

alors T *est représentable.*

Preuve.— Pour tout $n\geq 1$, on définit $T_n: L^p(\mathbb{T}^n)\to X$ par

$$T_nf=Tf\,,\quad\forall\, f\in L^p(\mathbb{T}^n)\,.$$

On voit que T_n est un opérateur borné et nul sur $\mathbf{G}_0^p(\mathbb{T}^n)$ (si n=1, T_1 nul sur $\mathbf{H}_0^p(\mathbb{T})$) donc, par le théorème 3, il existe une fonction $\varphi_n\in L^q(\mathbb{T}^n,X)$ telle que

$$Tf=\int_{\mathbb{T}^n}f(t_1,\ldots,t_n)\varphi_n(t_1,\ldots,t_n)\,\mathrm{d}m_n(t_1,\ldots,t_n)\,,\quad\forall\, f\in L^p(\mathbb{T}^n)\,.$$

Posons $\varphi_0=\int_{\mathbb{T}}\varphi_1(t)\,\mathrm{d}m_1(t)$, la suite $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ est une martingale de Hardy car

$$\varphi_n(\theta_1,\ldots,\theta_n)=\sum_{k\geq 0}\mathrm{e}^{ik\theta_n}\cdot C_{k,n}(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})$$

et

$$C_{0,n}(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}) = \int_{\mathbb{T}} \varphi_n(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1},t)\,\mathrm{d}m_1(t)\,.$$

Par récurrence sur n on tire facilement que $C_{0,n} = \varphi_{n-1}$ et comme $\left(\varphi_n\right)_{n\geq 0}$ est L^q-bornée alors $\left(\varphi_n\right)_{n\geq 0}$ converge vers φ dans $L^q(\mathbb{T}^{\mathbb{N}}, X)$ (cf. [11]).

Remarque 2.— Si X a RNa et $f \in \mathbf{H}^1(D^2, X)$, on peut montrer facilement qu'il existe une fonction $\varphi \in L^1(\mathbb{T}^2, X)$ telle que

$$f(z,z') = \int_{\mathbb{T}^2} P_z(t)\otimes P_{z'}(t')\varphi(t,t')\,\mathrm{d}m_2(t,t')\,.$$

En effet,

comme $\mathbf{H}^1(D^2,X) = \mathbf{H}^1(D\,,\mathbf{H}^1(D,X))$, il existe une fonction $\widetilde{\varphi} \in L^1(\mathbb{T}\,,\mathbf{H}^1(D,X))$ telle que, pour tout $z\in D$, on a

$$\widetilde{f}(z)(\,\cdot\,) = \int_{\mathbb{T}} P_z(t)\widetilde{\varphi}(t)(\,\cdot\,)\,\mathrm{d}m_1(t) \quad \left(\widetilde{f}(z)(z') = f(z,z')\right),$$

pour presque tout $t\in\mathbb{T}$, il existe $\varphi_t \in L^1(\mathbb{T}, X)$ telle que

$$\widetilde{\varphi}(t)(z') = \int_{\mathbb{T}} P_{z'}(t')\varphi(t,t')\,\mathrm{d}m_1(t') \quad \left(\varphi(t,t') = \varphi_t(t')\right).$$

Par un simple calcul, on voit que

$$f(z,z') = \int_{\mathbb{T}^2} P_z(t)\otimes P_{z'}(t')\varphi(t,t')\,\mathrm{d}m_2(t,t')\,.$$

Remarque 3.— On peut montrer facilement le théorème 3 à partir de la remarque 2 en utilisant le fait que la famille $\left(P_z\otimes P_{z'}\right)_{z,z'\in D}$ est une famille totale dans $L^p(\mathbb{T}^2)$.

Démonstration du théorème 4

On sait qu'il suffit de montrer que tout sous-espace de Banach séparable de $\mathbf{M}^1(\Omega)\widehat{\otimes} X$ a RNa. Soit E un sous-espace de Banach séparable de $\mathbf{M}^1(\Omega)\widehat{\otimes} X$. Il existe une suite $\left(\lambda_k\right)_{k\geq 0}$ dans la boule unité de $\mathbf{M}^1(\Omega)$ telle que la fermeture de

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_{k_i}\otimes x_i\,;\; k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{N}\,,\; x_i\in X \text{ et } n\in\mathbb{N}^*\right\}$$

dans $\mathbf{M}^1(\Omega, X)$ contient E. On définit une mesure positive α_0 sur Ω par

$$\alpha_0 = \sum_{j=1}^{+\infty} 2^{-j} |\lambda_j| .$$

Par un simple calcul on voit que E se plonge isométriquement dans $L^1(\alpha_0, X)$; comme $L^1(\alpha_0, X)$ a RNa (cf. [7]) alors E a RNa, d'où le théorème.

COROLLAIRE 2.— *Si X est un espace de Banach ayant la propriété de Radon-Nikodym (cf. [5]) alors $\mathbf{M}^1(\Omega, X)$ a RNa, en particulier $\mathbf{h}^1(D, X)$ a RNa.*

Preuve.— Soit $\gamma \in \mathbf{M}^1(\Omega, X)$. La mesure γ est absolument continue par rapport à $|\gamma|$, comme X a la propriété de Radon-Nikodym alors il existe $g \in \mathbf{L}^1(\Omega, |\gamma|, X)$ tel que

$$d\gamma = g d|\gamma| ,$$

(cf. [5]). On déduit que $\mathbf{M}^1(\Omega) \widehat{\otimes} X = \mathbf{M}^1(\Omega, X)$. On note

$$\mathbf{L}^{1,\infty}(\mathbb{T}) = \Big\{ f ;\ f \text{ est une fonction mesurable sur } \mathbb{T} \text{ (à valeurs dans } \mathbb{C}) \\ \text{et } \sup_{a \geq 0} m_1 \{t;\ |f(t)| \geq a\} = \|f\|_{\mathbf{L}^{1,\infty}(\mathbb{T})} < +\infty \Big\}$$

$$\mathbf{H}^p_h(D^2, X) = \Big\{ f : D^2 \to X ;\ f \text{ holomorphe en } z \text{ harmonique en } z' \\ \text{et } \sup_{0<r<1} \int_{\mathbb{T}^2} \|f(re^{it}, re^{it'})\|^p \, dm_2(t,t') < +\infty , \\ (z = re^{it} ,\ z' = r'e^{it'}) \Big\} , \quad (p > 0) .$$

LEMME .— *Il existe une constante C positive telle que pour tout Banach complexe X et pour tout $f \in \mathbf{H}^1_h(D^2, X)$, on a*

$$\int_{\mathbb{T}} \|f^*(t, \cdot)\|_{\mathbf{L}^{1,\infty}(\mathbb{T})} \, dm_1(t) \leq C^2 \sup_{0<r<1} \int_{\mathbb{T}} \|f(re^{it}, re^{it'})\| \, dm_2(t,t') .$$

Preuve. — La démonstration de ce Lemme est analogue à celle de $(***)$, en appliquant l'inégalité maximale de Hardy-Littlewood sur le côté holomorphe de la fonction $\left(f \in \mathbf{H}^1_h(D^2, X)\right)$ et l'inégalité maximale faible de Hardy-Littlewood (cf. [13]) sur le côté sous-harmonique de la fonction.

COROLLAIRE 3. — *Soit X un espace de Banach ayant la propriété de Radon-Nikodym alors toute fonction dans $\mathbf{H}^1_h(D^2, X)$ admet des limites radiales presque partout.*

Preuve. — Soit $f \in \mathbf{H}^1_h(D^2, X) = \mathbf{H}^1\left(D\,,\, \mathbf{h}^1(D, X)\right)$; d'après le corollaire 2; $\mathbf{h}_1(D, X)$ a RNa donc il existe une suite $\left(P_n\right)_{n \geq 0}$ de polynômes à valeurs dans $\mathbf{h}^1(D, X)$ telle que

$$P_n \to f \quad \text{dans } \mathbf{H}^1_h(D^2, X)\,.$$

D'après le lemme, on a

$$\int_{\mathbb{T}} \left\| (P_n - f)^*(t, \cdot) \right\|_{\mathrm{L}^{1,\infty}(\mathbb{T})} dm_1(t) \to 0\,.$$

Donc il existe un ensemble $\Omega \subseteq \mathbb{T}^2$ de mesure égale à 1 et une sous-suite $\left(n_k\right)_{k \geq 0}$ tels que

$$(P_{n_k} - f)^*(t, t') \to 0\,, \quad \forall\, (t, t') \in \Omega\,,$$

mais chaque P_n admet des limites radiales presque partout (cf. [3]) donc f admet des limites radiales presque partout.

Remerciements

Je remercie Monsieur le Professeur Bernard Maurey pour ses encouragements, ses idées et le temps qu'il m'a consacré pour la préparation de ce papier.

Références

[1] Bu (S.) .— *Deux remarques sur la propriété de Radon-Nikodym analytique*, Ann. Fac. Sci. Toulouse V, Série Math., **XI**, n° 2 (1990) pp. 79-89.

[2] Bu (S.) et Schachermayer (W.) .— *Approximation of Jensen measures by image measures under holomorphic functions and applications* (à paraître) (1988).

[3] Bukhvalov (A. V.) et Danilevich (A.A.) .— *Boundary properties of analytic and harmonic functions with values in Banach spaces*, Math. Notes, **31** (1982) pp. 203-214. English Translations : Math. Notes, **31** (1982) pp. 104-110.

[4] Davis (W.), Garling (D.) et Tomczak-Jaegermann (N.) .— *The complex convexity of quasi-normed linear spaces*, J. Funct. Analysis, **55**, n° 1 (janv. 1984).

[5] Diestel (J.) et Uhl (J.J.) .— *Vector measures*, Math. Surveys, **15** A.M.S. (1977).

[6] Dowling (P. M.) .— *Representable operators and the analytic Radon-Nikodym property in Banach spaces*, Proc. Royal Irish Acad., **85A** (1985).

[7] Dowling (P. M.) .— *The analytic Radon-Nikodym property in Lebesgue Bochner functions spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **99**, n° 1 (1987) pp. 119-122

[8] Durett (R.) .— *Brownian motion and martingale in analysis*, Wadsworth (1984).

[9] Edgar (G. A.) .— *Analytic martingale convergence*, J. Funct. Analysis, **69**, n° 2 (1986).

[10] Etter (D. Q.) .— *Vector-valued Analytic Functions*, T.A.M.S. **119** (1965).

[11] Garling (D. J. H.) .— *On martingales with values in complex Banach spaces*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., **104**, n° 2 (1988) pp. 399-406.

[12] Ghoussoub (N.) et Maurey (B.) .— *Plurisubharmonic martingales and barriers in complex quasi-Banach spaces*, Ann. Ins. Fourier, **39** (1989) pp. 1007-1060.

[13] Hardy (G. H.) et Littlewood (J. E.) .— *A maximal theorem with function-theoretic applications*, Acta Math., **54** (1930) pp. 81-116.

[14] Rudin (W.) .— *Fonction theory in polydics*, Benjamin, New-York (1969).