ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

LAURENT LÉVI

Problèmes unilatéraux pour des équations non linéaires de convection-réaction

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 4, nº 3 (1995), p. 593-631

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1995_6_4_3_593_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. IV, n° 3, 1995

Problèmes unilatéraux pour des équations non linéaires de convection-réaction(*)

LAURENT LÉVI(1)

RÉSUMÉ. — On établit un résultat d'existence et d'unicité pour une loi de conservation scalaire associée à des conditions de bord de Dirichlet homogènes et à une condition d'obstacle unilatéral simple. Considérant le problème :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \mathrm{Div}\left[f(U,t,x)\right] + g(U,t,x) = 0\,, \quad U \geq 0\,, \tag{E}$$

nous avons développé deux méthodes, soit par pénalisation de l'équation (E) soit en approchant U par une suite de solutions d'inéquations paraboliques, associées à une contrainte de positivité, dont le terme de diffusion devient négligeable.

ABSTRACT. — The existence and uniqueness for a scalar conservation law related to Dirichlet's homogeneous boundary conditions and to a simple obstacle condition is established. Hense for the following problem:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \mathrm{Div}\left[f(U,t,x)\right] + g(U,t,x) = 0\,, \quad U \geq 0\,, \tag{E}$$

two methods are developed, either by penalizing the equation (E) or by approximating to U through a sequence of solutions of quasilinear parabolic inequalities related to a positivness, whose diffusion term tends to zero.

1. Introduction

1.1 Motivations

Les équations hyperboliques non linéaires et la notion de solution faible entropique à variation bornée ont été largement étudiées, notamment par

(*) Reçu le 2 juillet 1993

(1) Université de Pau, Laboratoire de Mathématiques Appliquées, URA 1204-CNRS, Avenue de l'Université, F-64000 Pau (France)

Travail financé par le Conseil Régional d'Aquitaine

S.N. Kruzkov [8] en 1970, puis en 1979 par C. Bardos, A.-Y. Leroux et J.-C. Nédélec [1] sur des ouverts non bornés, puis bornés. On sait que si la donnée initiale est bornée, sous certaines conditions relatives au terme source, la solution d'un tel problème est bornée. On s'intéresse ici au cas ou le terme source est tel que la solution soit bornée, mais la donnée d'une contrainte sur la condition initiale ne se transmet pas, a priori, à la solution; on est donc amené à chercher une formulation qui englobe cette contrainte. On peut signaler les travaux récents de R. Natalini [16] où l'auteur, dans le cas d'un problème de Cauchy sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, cherche à obtenir des conditions suffisantes sur le terme de source pour que la solution entropique soit localement bornée.

On se propose donc ici d'établir un résultat d'existence et d'unicité pour la solution d'une équation de transport non linéaire à terme réactif, satisfaisant à des conditions de bord de Dirichlet homogène et une condition d'obstacle de type unilatéral sur ouvert cylindrique Q. Lorsque l'obstacle est régulier sur Q et compatible avec la condition de bord, on peut ramener cette étude à celle du problème *formel* $\mathcal{P}^0$:

$$U \geq 0 \quad \text{p.p. sur } Q \tag{1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{Div}\big[f(U,t,x)\big] + g(U,t,x) = 0$$
$$\text{sur } Q^+ = \big\{(t,x) \in Q \mid U(t,x) > 0\big\} \tag{2}$$

$$U(0,\,\cdot\,) = U_0 \quad \text{p.p. sur } \Omega \tag{3}$$

$$U(t,\sigma) = 0 \quad \text{sur une partie de } \Sigma\,, \tag{4}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^p$ (en pratique $p = 3$), de frontière Γ régulière et T un réel strictement positif, fini; $Q = \,]\,0\,,T\,[\, \times \Omega$ et $\Sigma = \,]\,0\,,T\,[\, \times \Gamma$.

On se place dans la situation où $\operatorname{Div}\big[f(0,t,x)\big] + g(0,t,x)$ est le signe quelconque sur Q.

En ingenierie pétrolière, lors de l'étude d'écoulements diphasiques de deux fluides (huiles et gaz) incompressibles et immiscibles, en milieu poreux, pour la récupération assistée des hydrocarbures, un tel type de problème est la transcription, après simplifications diverses, d'une loi de conservation de masse d'un constituant chimique, associée à des lois de comportement. On trouvera un exposé détaillé de ces problèmes par G. Chavent et J. Jaffre [2], notamment pour l'étude du modèle *Black-Oil* auquel nous nous sommes référés. La présence d'huile légère dans la phase *huile* donne lieu, en l'absence de phase *gazeuse*, à l'introduction de contraintes unilatérales couplées (*cf.*

article de G. Gagneux, A.-M. Lefevère et M. Madaune-Tort [5]), où U représente une inconnue qui détermine la composition de la phase huile.

En s'inspirant de la définition donnée par C. Bardos, A.-Y. Leroux et J.-C. Nédélec, pour U_0 donnée bornée et à variation bornée sur Ω, $U_0 \geq 0$ p.p. dans Ω, nous dirons qu'une fonction U, bornée et à variation bornée sur Q, est solution de $\mathcal{P}^0$, si elle vérifie la *formulation faible entropique* $\mathcal{P}$:

$$
\begin{aligned}
& U \geq 0 \quad \text{p.p. sur } Q \\
& \forall\, k \geq 0 \text{ et } \forall\, \psi \in \mathcal{C}^1_{0,+}\big(]\,0\,,T\,[\,\times \overline{\Omega}\big) \\
& \int_Q |U-k| \frac{\partial \psi}{\partial t}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t + \int_Q H(U,t,x)\cdot \nabla\psi\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t + \\
& \qquad - \int_Q \big(\mathrm{Div}\big[f(k,t,x)\big] + g(U,t,x)\big)\, \mathrm{sign}(U-k)\psi\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t + \\
& \qquad + \int_\Sigma \mathrm{sign}(k)\big[f(\gamma U,t,\sigma) - f(k,t,\sigma)\big]\cdot \nu\psi\, \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}t \geq 0 \qquad (\mathcal{R}) \\
& U(0,x) = U_0(x) \quad \text{pour presque tout } x \text{ de } \Omega\,,
\end{aligned}
$$

où $H(U,t,x) = \big[f(U,t,x) - f(k,t,x)\big]\,\mathrm{sign}(U-k)$ et ν est le vecteur unitaire normal extérieur à Ω, supposé défini au moins presque partout sur Γ.

$\mathcal{C}^1_{0,+}\big(]\,0\,,T\,[\,\times \overline{\Omega}\big)$ est l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, positives, à support compact dans $]\,0\,,T\,[\,\times \overline{\Omega}$.

On désigne par fonction à variation bornée sur Ω (resp. sur Q), toute fonction localement sommable sur Ω (resp. sur Q) dont les dérivées distributions premières sont des mesures de Radon bornées sur Ω (resp. sur Q).

γU est la *trace sur* Σ de U, définie au sens des fonctions bornées et à variation bornée (*cf.* par exemple [11]).

La solution de $\mathcal{P}$ est appelée solution faible entropique du problème $\mathcal{P}^0$. Elle est la seule solution du problème $\mathcal{P}^0$, gardant un sens physiquement acceptable lorsque apparaissent des discontinuités.

Pour l'obtention d'une solution au problème $\mathcal{P}$, on propose les deux méthodes qui suivent.

1) Pénalisation du problème $\mathcal{P}$

On adapte au cas hyperbolique non linéaire du premier ordre, une technique généralement employée dans le cadre parabolique et elliptique (J.-L. Lions [11]) et déjà utilisée pour le cas hyperbolique linéaire par F. Mignot et J.-P. Puel dans [14].

On introduit donc, pour tout $\eta > 0$, le problème pénalisé $\mathcal{P}_\eta$:

$$
\begin{aligned}
& U_\eta \in BV(Q) \cap L^\infty(Q) \\
& \forall\, k \in \mathbb{R} \text{ et } \forall\, \psi \in \mathcal{C}^1_{0,+}(]\,0\,,\,T\,[\,\times \overline{\Omega})\,, \\
& \int_Q |U_\eta - k| \frac{\partial \psi}{\partial t}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t + \int_Q H(U_\eta, t, x) \cdot \nabla \psi\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t + \\
& \quad - \int_Q \Big(\mathrm{Div}\big[f(k,t,x)\big] + g(U_\eta, t, x) - \frac{1}{\eta}\, U_\eta^- \Big) \operatorname{sign}(U_\eta - k) \psi\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t + \\
& \quad + \int_\Sigma \operatorname{sign}(k) \big[f(\gamma U_\eta, t, \sigma) - f(k,t,\sigma) \big] \cdot \nu \psi\, \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}t \geq 0 \qquad (\mathcal{R}_\eta) \\
& U_\eta(0,x) = U_0(x) \quad \text{pour presque tout } x \text{ de } \Omega\,.
\end{aligned}
$$

La définition de $\mathcal{P}_\eta$ relève des mêmes justifications que celles faites pour $\mathcal{P}$, ce qui permet de dire que U_η est l'unique solution entropique du problème $\mathcal{P}^0_\eta$:

$$
\frac{\partial U_\eta}{\partial t} + \mathrm{Div}\big[f(U_\eta, t, x)\big] + g(U_\eta, t, x) - \frac{1}{\eta}\, U_\eta^- = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(Q) \tag{5}
$$

$$
\min_{k \in I(0, \gamma U_\eta)} \big\{ \operatorname{sign}(\gamma U_\eta) \big[f(\gamma U_\eta, t, \sigma) - f(k, t, \sigma) \big] \cdot \nu \big\} = 0 \text{ p.p. sur } \Sigma \tag{6}
$$

$$
U_\eta(0,\,\cdot\,) = U_0(x) \text{ p.p. sur } \Omega\,, \tag{7}
$$

où $I(a,b)$ désigne l'intervalle $\big[\min(a,b)\,,\,\max(a,b)\big]$.

On voit bien que (5) caractérise la pénalisation de (2).

D'après [1], on sait déjà que ce problème admet une solution unique, qui est celle obtenue par la méthode de viscosité artificielle. Mais, si l'on se place dans le cas d'une donnée initiale peu régulière, les estimations trouvées dans l'article cité en référence ne peuvent être directement reprises. C'est pourquoi, on s'inspire des travaux de M.-J. Jasor [7] pour montrer que la suite des solutions des problèmes visqueux demeure dans un borné de $W^{1,1}(Q) \cap L^\infty(Q)$ que l'on sait en outre choisir indépendamment du paramètre η, par monotonie de l'opérateur $\beta(U) = -U^-$. Ainsi on en déduit que la famille des solutions des problèmes hyperboliques pénalisés reste fixée dans un borné de $BV(Q) \cap L^\infty(Q)$. On est alors à même de passer à la limite en η, par compacité.

2) Pertubations singulières d'une équation variationnelle

La contrainte $U \geq 0$ suggère que l'on peut aussi chercher à atteindre la solution du problème $\mathcal{P}$, par une suite de solutions d'inéquations paraboliques dont le terme de diffusion devient négligeable. L'obtention de tels types d'inéquations est classique et repose sur la méthode de pénalisation [11], qui amène à considérer le problème $\mathcal{P}_{\varepsilon,\eta}$, de diffusion-convection-réaction :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} U_{\varepsilon,\eta} + \mathrm{Div}\left[f(U_{\varepsilon,\eta}, t, x)\right] + \\
&\qquad + g(U_{\varepsilon,\eta}, t, x) - \frac{1}{\eta} U_{\varepsilon,\eta}^{-} = \varepsilon \Delta U_{\varepsilon,\eta} \quad \text{p.p. sur } Q \qquad (\mathbf{E}_{\varepsilon,\eta}) \\
&U_{\varepsilon,\eta|\Sigma} = 0 \\
&U_{\varepsilon,\eta}(0, \cdot\,) = U_0(\cdot) \quad \text{p.p. sur } \Omega\,,
\end{aligned}$$

retrouvant ainsi le problème visqueux associé à $\mathcal{P}_\eta$.

Des estimations hilbertiennes permettent, par compacité et passage à la limite en η, de construire une solution forte unique de l'inéquation $\mathcal{J}_\varepsilon$, résultant de la pénalisation $\mathcal{P}_{\varepsilon,\eta}$. L'étude du comportement de la famille $\left(U_{\varepsilon,\eta}\right)_{\eta>0}$ montre que la suite $\left(U_\varepsilon\right)_{\varepsilon>0}$ est dans un borné fixe de $W^{1,1}(Q) \cap L^\infty(Q)$, et la compacité de l'injection de $W^{1,1}(Q)$ dans $L^1(q)$ donne le résultat de convergence des solutions de l'inéquation parabolique vers la solution de l'inéquation hyperbolique du permier ordre.

Dans le cas ou le terme de diffusion est non linéaire, cette deuxième étude, menée dans [10], correspond physiquement, dans le cadre de problèmes posés en ingénierie pétrolière, à comparer les modèles obtenus selon que l'on prend en compte ou par les effets de la pression capillaire.

1.2 Les notations utilisées

Nous noterons systématiquement, pour tout s de $]\,0\,,\,T\,]$, Q_s le cylindre $]\,0\,,\,s\,[\,\times\,\Omega$ et Σ_s la couronne $]\,0\,,\,s\,[\,\times\,\Gamma$.

- $g(\,\cdot\,,\,\cdot,\,\cdot\,)$ est une fonction définie sur $\mathbb{R} \times [\,0\,,T\,] \times \overline{\Omega}$, de classe $\mathcal{C}^1$, lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ par rapport à sa première variable, uniformément en (t,x). Nous noterons M_g sa constante de Lipschitz, uniforme en (t,x).

- $f(\,\cdot\,,\,\cdot,\,\cdot\,)$ est une fonction vectorielle, définie sur $\mathbb{R} \times [\,0\,,\,T\,] \times \overline{\Omega}$, dont les p composantes sont de classe $\mathcal{C}^2$ telles que pour tout i de $[\,1\,,\,p\,]$, $\partial f_i/\partial x_i$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ par rapport à sa première variable, uniformément en (t,x). Nous noterons M_{f_i/x_i} leur constante de Lipschitz, uniforme en (t,x) et $M_{f/x}$ la plus grande de toutes ces constantes.

- On désigne par $\mathcal{V}$ l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ et par $\mathcal{V}'$ son dual, $H^{-1}(\Omega)$.
- $W(0,T\,;\mathcal{V}\,;\mathcal{V}')$ est l'espace des fonctions U de $L^2(0,T\,;\mathcal{V})$ dont la dérivée par rapport à t, au sens de $\mathcal{D}'(]\,0\,,T\,[\,,\mathcal{V})$, est élément de $L^2(0,T\,;\mathcal{V}')$; on le munit de la norme du graphe.

Pour les propriétés d'un tel espace, on renvoie à [3, T. 8, § 1, p. 565], et l'on trouve des résultats du compacité dans [11, § 5, p. 57].

- On posera $\mathcal{M} = H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}$, espace de Hilbert lorsqu'il est muni de la norme induite par $H^2(\Omega)$.
- On considérera tout au long de ce travail d'approximation lipschitzienne de la fonction sign($\cdot$), donnée par :

$$p_\lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\lambda} & \text{si } |x| \leq \lambda \\ 1 & \text{si } x \geq \lambda \\ -1 & \text{si } x \leq -\lambda. \end{cases}$$

- On utilisera couramment des propriétés classiques de l'espace BV, des fonctions à variation bornée, que l'on pourra trouver dans [6] ou dans [17].

Notamment, on sait que si Q est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, l'espace $BV(Q) \cap L^1(Q)$ est un espace de Banach, lorsqu'on le norme par :

$$\|f\|_{BV(Q)\cap L^1(Q)} = \|f\|_{L^1(Q)} + TV_Q(f),$$

où :

$$TV_Q(f) = \sup \left\{ \int_Q f \operatorname{Div}[\phi] \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \;\middle|\; \phi \in \mathcal{C}_0^1(Q)^N \,,\ \|\phi\|_{L^\infty(Q)^N} \leq 1 \right\}$$

- Enfin, on rappelle que U_0 est donnée dans $BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $U_0 \geq 0$ p.p. sur Ω.

2. Estimations a priori dans $W^{1,1}(Q)$

Le problème $\mathcal{P}_{\varepsilon,\eta}$ joue un rôle essentiel dans notre exposé car d'une part, il est considéré comme problème de viscosité associé à un problème hyperbolique pénalisé et, d'autre part, comme problème pénalisé relatif à une inéquation parabolique. Ainsi, les estimations qui vont en être dégagées seront fortement utilisées dans les deux approches proposées.

Dans les paragraphes 2.1 à 2.3, on établit un résultat de régularité et d'unicité ainsi que les estimations a priori pour la solution du problème $\mathcal{P}_{\varepsilon,\eta}$ lorsque la donnée initiale est régulière. Au paragraphe 2.4, on construira une suite $(U_0^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de fonctions régulières, approchant U_0. Pour $\varepsilon > 0$, cette fonction U_0^ε sera la condition initiale choisie dans le problème pénalisé visqueux $\mathcal{P}_{\varepsilon,\eta}$.

On rappelle tout d'abord une série de résultats, obtenus grâce aux propriétés établies par A. Friedman [4], et par O. A. Ladysenskaya, V. A. Solonnikov et N. N. Ural'ceva [9].

2.1 Résultats de régularité et de comportement

THÉORÈME 2.1 (résultats d'existence, de régularité et comportement). *Étant donné U_0 élément de $\mathcal{V}$, pour tous ε et η strictement positifs, le problème parabolique quasi linéaire $\mathcal{P}_{\varepsilon,\eta}$:*

$$U_{\varepsilon,\eta} \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}) \cap W\big(0,T;\mathcal{M};L^2(\Omega)\big)$$

$$\forall\, V \in \mathcal{V}, \text{ et pour presque tout } t \text{ de }]\,0\,,T\,[$$

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} U_{\varepsilon,\eta} V \,\mathrm{d}x + \varepsilon \int_\Omega \nabla U_{\varepsilon,\eta}\cdot \nabla V \,\mathrm{d}x + \\ + \int_\Omega \left(\mathrm{Div}\big[f(U_{\varepsilon,\eta},t,x)\big] + g(U_{\varepsilon,\eta},t,x) - \frac{1}{\eta}\, U_{\varepsilon,\eta}^- \right) V \,\mathrm{d}x = 0$$

$$U_{\varepsilon,\eta}(0,x) = U_0(x) \quad \text{pour presque tout } x \text{ de } \Omega\,,$$

admet une solution unique. De plus, on peut préciser quelques propriétés de comportement, utilisées tout au long de ce travail.

i) Si U_0 est élément de $L^\infty(\Omega)$, hypothèse retenue désormais, alors la solution du problème $\mathcal{P}_{\varepsilon,\eta}$ est bornée. Plus précisément, on a :

$$\forall\, t \in [\,0\,,T\,] \text{ et p.p. } x \text{ de } \Omega\,, \quad \big|U_{\varepsilon,\eta}(t,x)\big| \le \mathcal{R}(t)\,,$$

où l'on a posé :

$$\mathcal{R}(t) = \big\|U_0\big\|_{L^\infty(\Omega)} e^{Mt} + \frac{\mathfrak{C}}{M}\,(e^{Mt} - 1)$$

avec

$$M = M_g + \sum_i M_{f_i/x_i}$$

et

$$\mathfrak{C} = \max_{[0,T]\times\overline{\Omega}} \left| g(0,t,x) + \mathrm{Div}\left[f(0,t,x) \right] \right|$$

Les constantes M_g et $\left(M_{f_i/x_i}\right)_{i=1\cdots p}$ sont définies à la section 1.

ii) *La solution du problème $\mathcal{P}_{\varepsilon,\eta}$ dépend de la donnée initiale de manière T-lipschitzienne dans $L^1(\Omega)$, au sens où, si $U_{\varepsilon,\eta}$ (resp. $V_{\varepsilon,\eta}$) est la solution de $\mathcal{P}_{\varepsilon,\eta}$ correspondant à la donnée initiale U_0 (resp. V_0), alors :*

$$\forall\, t \in [\,0\,,\,T\,]\,,$$
$$\left\| \left(U_{\varepsilon,\eta}(t,\,\cdot\,) - V_{\varepsilon,\eta}(t,\,\cdot\,) \right)^+ \right\|_{L^1(\Omega)} \leq e^{M_g t} \left\| \left(U_0 - V_0 \right)^+ \right\|_{L^1(\Omega)} .$$

iii) *Le paramètre de viscosité ε étant fixé, la suite $\left(U_{\varepsilon,\eta}(t,x)\right)_{\eta>0}$ est croissante lorsque le paramètre de pénalisation η devient négligeable, uniformément en (t,x), au sens où :*

si $\eta_1 > \eta_2$ alors,
$$\forall\, t \in [\,0\,,\,T\,]\,, \quad U_{\varepsilon,\eta_1}(t,\,\cdot\,) \leq U_{\varepsilon,\eta_2}(t,\,\cdot\,) \quad \textit{p.p. dans } \Omega\,.$$

Remarque 2.1.— **Nous poserons $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(T) = \max_{[0,T]} \mathfrak{R}(t)$; il est essentiel de noter le fait que $\mathfrak{R}$ est une constante indépendante de tout paramètre.**

Les fonctions g et f_i, $i = 1, \ldots, p$ ainsi que toutes leurs dérivées partielles premières, et secondes en ce qui concerne f_i, sont continues, donc bornées sur le compact $[-\mathfrak{R}, \mathfrak{R}] \times [\,0\,,\,T\,] \times \overline{\Omega}$. De toutes ces bornes, ***qui sont indépendantes de ε et η*, nous noterons K la plus grande valeur.**

2.2 Estimation de $\dfrac{\partial}{\partial t} U_{\varepsilon,\eta}$

On va utiliser la méthode dite des "quotients différentiels", qui repose sur l'estimation de la différence entre deux instants voisins, t et $t+h$, $h > 0$, de la solution du problème $\mathcal{P}_{\varepsilon,\eta}$. Cette méthode présente ici un double avantage :

- **elle permet tout d'abord de nous satisfaire de solutions de problèmes paraboliques peu régulières, telles qu'elles ont été introduites au théorème 2.1, et, par là même, d'imposer un minimum de régularité à la** condition initiale et à la fonction pénalisante (choisie seulement globalement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$) ; de ce point de vue, on affine les méthodes classiquement employées (pour exemple [1], [17] et [8]) ;

- par ailleurs, on va pouvoir faire jouer la monotonie de l'opérateur de pénalisation et ainsi d'affranchir de la présence non seulement du coefficient de viscosité ε mais aussi, et c'est là le plus intéressant, du paramètre pénalisant η.

Pour obtenir le résultat souhaité, nous devons faire des hypothèses supplémentaires concernant la donnée initiale. Ainsi, nous supposons dorénavant que U_0 est une fonction à valeurs positives ou nulles, dont le gradient est élément de $BV(\Omega)^p$. Dès lors, nous avons le résultat suivant.

PROPOSITION 2.2 (estimation de $\partial/\partial t\, U_{\varepsilon,\eta}$ en fonction du gradient de $U_{\varepsilon,\eta}$).— *Il existe une constante A_1^*, indépendante des paramètres ε et η, telle que :*

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t} U_{\varepsilon,\eta}(t,\,\cdot\,)\right\|_{L^1(\Omega)} \leq$$
$$\leq \left(A_1 + A_1^* + K\int_0^t \left\|\nabla U_{\varepsilon,\eta}(\tau,\,\cdot\,)\right\|_{L^1(\Omega)^p}\,\mathrm{d}\tau\right) e^{M_g t} \ \textit{p.p. sur }]\,0\,,T\,[\,,$$

avec :

$$A_1 = K(1+p)\mu es(\Omega) + \varepsilon|\Delta U_0|(\Omega) + K\left\|\nabla U_0\right\|_{L^1(\Omega)^p},$$

où $|\Delta U_0|(\Omega)$ désigne la variation totale sur Ω de la mesure de Radon associée à la distribution ΔU_0 que l'on peut définir par :

$$|\Delta U_0|(\Omega) = \sup\left\{\int_\Omega \nabla U_0\cdot\nabla\phi\,\mathrm{d}x \;\middle|\; \phi\in C_0^1(\Omega)\,,\ \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)}\leq 1\right\}.$$

La constante K est introduite à la remarque 2.1.

Démonstration.— Elle s'organise en trois étapes.

Première étape.— On cherche à estimer l'expression

$$\left\|U_{\varepsilon,\eta}(h,\,\cdot\,) - U_0\right\|_{L^1(\Omega)},\quad h\in[\,0\,,T\,[\,.$$

Puisque U_0 est élément de $\mathcal{V}$, et par application de la propriété de dérivation de la composée d'applications de M. Marcus et V. J. Mizel, il est possible de choisir dans $\mathcal{P}_{\varepsilon,\eta}$, p.p. t de $]0, T[$, la fonction test $p_\lambda\big(U_{\varepsilon,\eta}(t,\cdot) - U_0\big)$; puis on intègre de 0 à h, h étant donné sur $[0, T[$.

On passe à la limite, lorsque λ tend vers 0^+. Après intégration par parties selon la formule de Green, l'utilisation du lemme de Sacks et de la régularité des fonctions f_i $(i = 1, \dots, p)$ montrent que le terme de convection tend vers 0. Par ailleurs, en imposant $U_0 \geq 0$ p.p. dans Ω, par monotonie de l'application qui à U associe $-U^-$, on vérifie que :

$$-\frac{1}{\eta}\, U^-_{\varepsilon,\eta} \operatorname{sign}(U_{\varepsilon,\eta} - U_0) \geq 0 \quad \text{p.p. dans } Q\,.$$

Ainsi, on obtient :

$$\forall\, h \in [0, T[, \quad \big\| U_{\varepsilon,\eta}(h,\cdot) - U_0 \big\|_{L^1(\Omega)} \leq hA_1\,,$$

où $A_1 = K(1+p)\mu es(\Omega) + \varepsilon\big|\Delta u_0\big|(\Omega) + K\big\|\nabla U_0\big\|_{L^1(\Omega)^p}$.

On notera que dans la définition de la variation totale sur Ω de la mesure de Radon associée à la distribution ΔU_0, on peut considérer, par densité, toute fonction ϕ élément de $H^1_0(\Omega)$.

Deuxième étape.— h étant donné sur $[0, T[$, on considère la solution du problème $\mathcal{P}_{\varepsilon,\eta}$ aux deux instants voisins t et $t+h$. On introduit donc les fonctions $U_{\varepsilon,\eta}(t+h,\cdot)$ et $U_{\varepsilon,\eta}(t,\cdot)$ qui ont un sens pour tout h de $[0, T[$ et pour tout t de $[0, T-h]$.

Il est loisible de prendre (selon la propriété de M. Marcus et V. J. Mizel) dans l'équation obtenue par différence entre les égalités satisfaites respectivement par $U_{\varepsilon,\eta}(t+h,\cdot)$ et $U_{\varepsilon,\eta}(t,\cdot)$, p.p. t de $]0, T-h[$, la fonction test :

$$p_\lambda\big(U_{\varepsilon,\eta}(t+h,\cdot) - U_{\varepsilon,\eta}(t,\cdot)\big)\,.$$

Nous omettrons provisoirement les indices ε et η, et nous définirons $Z(t,h,x)$ comme étant la différence $U(t+h,x) - U(t,x)$.

Enfin, on intègre de 0 à s , s étant fixé quelconque dans $[0, T-h]$.

- On organise le terme de convection sous la forme :

$$\int_{Q_s} \operatorname{Div}\big[f\big(U(t+h)\,,\, t+h\,,\, x\big) - f\big(U(t,x)\,,\, t+h\,,\, x\big)\big]\, p_\lambda\big(Z(t,h,x)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$
$$+ \int_{Q_s} \operatorname{Div}\big[f\big(U(t,x)\,,\, t+h\,,\, x\big) - f\big(U(t,x),\, t,\, x\big)\big]\, p_\lambda\big(Z(t,h,x)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,.$$

Après développement du terme divergentiel et compte tenu de la régularité des fonctions f_i, de la définition de la constante K et du fait que p_λ est bornée par 1, on majore la valeur absolue du second terme de l'expression ci-dessous par :

$$hK \int_0^s \left\| \nabla U(t,\,\cdot\,) \right\|_{L^1(\Omega)^p} \mathrm{d}t + hpK\mu es(Q)\,.$$

Le premier terme, intégré par parties, tend vers 0 lorsque λ tend vers 0^+, par utilisation du lemme de Sacks.

• On effectue le même type de découpage sur le terme réactif; enfin, le caractère monotone de l'opérateur de pénalisation conduit à conclure que le terme pénalisé est de signe positif ou nul p.p. sur Q.

Finalement, en passant à la limite, lorsque λ tend vers 0^+, par convergence dominée, la propriété de dérivation des fonctions composées [13] permet d'établir l'existence d'une constante A_1^*, indépendante des paramètres ε et η, telle que pour tout h de $[\,0\,,T\,[$ et tout s de $[\,0\,,T-h\,]$ on ait :

$$\begin{aligned}
&\left\| Z(s,h,\,\cdot\,) \right\|_{L^1(\Omega)} \leq \\
&\quad \leq \left\| Z(0,h,\,\cdot\,) \right\|_{L^1(\Omega)} + hA_1^* + hK \int_0^s \left\| \nabla U(t,\,\cdot\,) \right\|_{L^1(\Omega)^p} \mathrm{d}t + \\
&\qquad + \int_0^s M_g \left\| Z(t,h,\,\cdot\,) \right\|_{L^1(\Omega)} \mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

Compte tenu de la première étape et par utilisation du lemme de Gronwall, on a donc pour tout h de $[\,0\,,T[$ et tout s de $[\,0\,,T-h\,]$:

$$\frac{1}{h} \left\| Z(s,h,\,\cdot\,) \right\|_{L^1(\Omega)} \leq \left(A_1 + A_1^* + K \int_0^s \left\| \nabla U(t,\,\cdot\,) \right\|_{L^1(\Omega)^p} \mathrm{d}t \right) e^{M_g s}\,.$$

Troisième étape.— Selon la deuxième étape, on a $\forall\, h \in [\,0\,,T[\,,\ \forall\, t \in [\,0\,,T-h\,]$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h} \left\| U_{\varepsilon,\eta}(t+h,\,\cdot\,) - U_{\varepsilon,\eta}(t,\,\cdot\,) \right\|_{L^1(\Omega)} \leq \\
&\quad \leq \left(A_1 + A_1^* + K \int_0^t \left\| \nabla U_{\varepsilon,\eta}(\tau,\,\cdot\,) \right\|_{L^1(\Omega)^p} \mathrm{d}\tau \right) e^{M_g' t}\,.
\end{aligned}$$

Puisque $\partial/\partial t\, U_{\varepsilon,\eta}$ est élément de $L^2(Q)$, p.p. t de $]\,0\,,T\,[$ les quotients différentiels $(1/h)\big(U_{\varepsilon,\eta}(t+h,\cdot)-U_{\varepsilon,\eta}(t,\cdot)\big)$ tendent dans $L^1(\Omega)$ vers $\partial/\partial t\, U_{\varepsilon,\eta}(t,\cdot)$, lorsque h tend vers 0^+ ce qui achève la démonstration de la proposition 2.2. □

2.3 Estimation de $\nabla U_{\varepsilon,\eta}$

Cette estimation est plus délicate à obtenir que la précédente car elle nécessite la mise en œuvre de trois lemmes techniques qui reposent sur le fait que $U_{\varepsilon,\eta}$ est élément de $W\big(0,T\,;\,\mathcal{M}\,;\,L^2(\Omega)\big)$.

À partir d'une démonstration présentée dans [1], bien adaptée au cas de solutions de problèmes paraboliques très régulières, M. J. Jasor, [7, chap. 1] a développé une méthode qui permet d'établir une estimation dans $L^1(Q)$ du gradient de solutions faibles, telles que nous les avons introduites au théorème 2.1.

Nous reprenons, en les adaptant au cas considéré ici, les calculs introduits dans [7]; ainsi, nous pourrons constater qu'on peut encore s'affranchir de la présence du paramètre de pénalisation η.

Nous devons tout d'abord définir de nouvelles notations.

Notations utilisées

- Pour $\zeta\in\mathbb{R}^p$, $I_\lambda(\zeta)=\displaystyle\int_0^{|\zeta|} p_\lambda(\tau)\,\mathrm{d}\tau$,

où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^p$.

- $\forall\, i\in[\,1\,,\,p\,]$, $\omega_i=\dfrac{\partial I_\lambda}{\partial\zeta_i}(\nabla U_{\varepsilon,\eta})$, et $\omega=\big[\omega_i\big]_{i=1,\dots,p}\in H^1(\Omega)^p$.

- Pour $r\in\mathbb{R}$, $R_\lambda(r)=\displaystyle\int_0^r p_\lambda(\tau)\,\mathrm{d}\tau - r p_\lambda(r)$.

Noter que : $\forall\, r\in\mathbb{R}$, $\big|R_\lambda(r)\big|\le\lambda/2$.

LEMME 2.3.1.— *Pour tout s de $[\,0\,,T\,]$, on a :*

i) $$-\int_{Q_s}\frac{\partial}{\partial t}U_{\varepsilon,\eta}\,\mathrm{Div}[\omega]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\int_\Omega I_\lambda\big(\nabla U_{\varepsilon,\eta}(s,x)\big)\,\mathrm{d}x+{}$$
$$-\int_\Omega I_\lambda(\nabla U_0)\,\mathrm{d}x\,;$$

ii) $$-\int_{Q_s} \mathrm{Div}\big[f(U_{\varepsilon,\eta},t,x)\big]\,\mathrm{Div}[\omega]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t =$$
$$= -\int_{Q_s} \mathrm{Div}\left[\frac{\partial f}{\partial u}(U_{\varepsilon,\eta},t,x)\right] R_\lambda\big(|\nabla U_{\varepsilon,\eta}|\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \,+$$
$$+\int_{\Sigma_s} \frac{\partial f}{\partial u}(0,t,\sigma)\cdot \nu R_\lambda\left(\left|\frac{\partial}{\partial \nu}U_{\varepsilon,\eta}\right|\right)\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t + \theta\,,$$

où l'on a posé :

$$\theta = \sum_j \int_{Q_s} \mathrm{Div}\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}(U_{\varepsilon,\eta},t,x)\right]\omega_j\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \,+$$
$$-\int_{\Sigma_s} \mathrm{Div}\big[f(0,t,\sigma)\big]\,\omega\cdot\nu\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t\;;$$

iii) $$-\int_{Q_s} \Delta U_{\varepsilon,\eta}\,\mathrm{Div}[\omega]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \mathfrak{C}(\Gamma)\int_{\Sigma_s}\left|\frac{\partial}{\partial\nu}U_{\varepsilon,\eta}\right|\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t,$$

où $\mathfrak{C}(\Gamma)$ est une constante qui ne dépend que de Γ.

Démonstration. — Elle utilise des résultats de densité qui consistent à choisir des suites de fonctions régularisées soit en leur variable temporelle (pour i)), soit en leurs variables spatiales (pour ii) et iii)). Les calculs, techniques et parfois délicats, sont exposés en détails dans [10]. □

Enfin, on établit une estimation dans $L^2(Q)$ du terme pénalisé. Outre le fait que cette majoration nous fournira, par passages à la limite successifs en ε et η, la propriété de positivité de la solution du problème $\mathcal{P}$, elle nous permettra aussi, à la section 4, de construire la solution forte d'une équation parabolique quasi linéaire.

LEMME 2.3.2. — *La solution du problème parabolique pénalisé $\mathcal{P}_{\varepsilon,\eta}$ vérifie :*

$$\frac{1}{\eta}\big\|U^-_{\varepsilon,\eta}\big\|_{L^2(Q)} \le \mathfrak{C}_1\,,$$

où la constante $\mathfrak{C}_1$ est indépendante des paramètres ε et η.

Démonstration. — On choisit dans la formulation variationnelle de $\mathcal{P}_{\varepsilon,\eta}$, p.p. t de $]\,0\,,T[$, la fonction test $(-1/\eta)\big(U_{\varepsilon,\eta}(t,\,\cdot\,)\big)^-$. Après intégration de 0 à T, il apparaît le terme :

$$\frac{1}{\eta}\int_Q \mathrm{Div}\big[f(U_{\varepsilon,\eta},t,x)\big]\,U^-_{\varepsilon,\eta}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,,$$

qui est tout d'abord intégré par parties selon la formule de Green.

Si l'on pose :

$$G_i(U,t,x)=\int_0^U f_i(\tau,t,x)\,\mathrm{d}\tau\,,\ i=1,\,\dots,\,p\quad\text{et}\quad G=\big[G_i\big]_{i=1,\,\dots,\,p}\,,$$

on peut appliquer la règle de dérivation de la composée d'applications, et montrer que ce terme s'écrit sous la forme :

$$-\frac{1}{\eta}\int_Q \mathrm{Div}\big[G(-U_{\varepsilon,\eta}^{-},t,x)\big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\frac{1}{\eta}\int_Q\sum_i\left(\int_0^{-U_{\varepsilon,\eta}^{-}}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\tau,t,x)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,.$$

La première intégrale est nulle, la valeur absolue de la seconde peut être majorée, d'après l'inégalité de Young et par définition de la constante K (remarque 2.1) par :

$$(pK)^2\mu es(Q)+\frac{1}{4}\left\|\frac{1}{\eta}\,U_{\varepsilon,\eta}^{-}\right\|_{L^2(Q)}^2\,.$$

Ces deux derniers arguments permettent encore d'écrire :

$$\left|-\frac{1}{\eta}\int_Q g(U_{\varepsilon,\eta},t,x)U_{\varepsilon,\eta}^{-}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right|\leq K^2\mu es(Q)+\frac{1}{4}\left\|\frac{1}{\eta}\,U_{\varepsilon,\eta}^{-}\right\|_{L^2(Q)}^2\,.$$

Finalement en utilisant les majorations précédentes et le fait que U_0 est, p.p. sur Ω, à valeurs positives ou nulles, il vient l'inégalité :

$$\frac{1}{2\eta}\left\|U_{\varepsilon,\eta}^{-}(s,\,\cdot\,)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\left\|\frac{1}{\eta}\,U_{\varepsilon,\eta}^{-}\right\|_{L^2(Q)}^2\leq K^2\mu es(Q)(1+p^2)\,.$$

On en déduit l'estimation annoncée. □

On est enfin en mesure d'énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 2.3 (estimation du gradient de $U_{\varepsilon,\eta}$ en fonction de $\partial/\partial t\,U_{\varepsilon,\eta}$).— *Il existe des constantes A_2 et A_2^*, indépendantes de la données initiale U_0 et des paramètres ε et η, telles que l'on ait, $\forall\, t\in[0,T]$,*

$$\begin{aligned}&\left\|\nabla U_{\varepsilon,\eta}(t,\,\cdot\,)\right\|_{L^1(\Omega)^p}\leq\\&\quad\leq\left\|\nabla U_0\right\|_{L^1(\Omega)^p}+A_2^*+\\&\qquad+A_2\int_0^t\left(\left\|\frac{\partial}{\partial t}\,U_{\varepsilon,\eta}(\tau,\,\cdot\,)\right\|_{L^1(\Omega)}+\left\|\nabla U_{\varepsilon,\eta}(\tau,\,\cdot\,)\right\|_{L^1(\Omega)^p}\right)\mathrm{d}\tau\,.\end{aligned}$$

Démonstration.— Étant donné s un élément de $[0, T]$, on considère le produit scalaire dans $L^2(Q_s)$ entre $-\operatorname{Div}[\omega]$ et $(\mathrm{E}_{\varepsilon,\eta})$, ce qui est loisible en vertu de la régularité de la solution du problème $\mathcal{P}_{\varepsilon,\eta}$ et de la fonction à valeurs vectorielles ω.

On constate, par intégration par parties selon la formule de Green et compte tenu de la définition de ω, que l'on a l'égalité :

$$\frac{1}{\eta}\int_{Q_s} U_{\varepsilon,\eta}^{-}\operatorname{Div}[\omega]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\eta}\int_{[U_{\varepsilon,\eta}\leq 0]\cap Q_s} |\nabla U_{\varepsilon,\eta}|\,p_\lambda\big(|\nabla U_{\varepsilon,\eta}|\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,.$$

Ainsi, on contrôle le signe du terme pénalisé.

Dès lors, en vertu du lemme 2.3.1, on peut écrire, pour tout s de $[0, T]$:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega I_\lambda\big(\nabla U_{\varepsilon,\eta}(s,x)\big)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega I_\lambda(\nabla U_0)\,\mathrm{d}x \leq \\
&\qquad\leq I_1(\lambda) + I_2(\lambda) - \theta + \varepsilon\mathfrak{C}(\Gamma)\int_{\Sigma_s}\left|\frac{\partial}{\partial\nu}U_{\varepsilon,\eta}\right|\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t\, + \\
&\qquad+ \int_{Q_s} g(U_{\varepsilon,\eta},t,x)\operatorname{Div}[\omega]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,,
\end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$I_1(\lambda) = \int_{Q_s}\operatorname{Div}\left[\frac{\partial f}{\partial u}(U_{\varepsilon,\eta},t,x)\right] R_\lambda\big(|\nabla U_{\varepsilon,\eta}|\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,,$$

$$I_2(\lambda) = -\int_{\Sigma_s}\frac{\partial f}{\partial u}(0,t,\sigma)\cdot\nu R_\lambda\left(\left|\frac{\partial}{\partial\nu}U_{\varepsilon,\eta}\right|\right)\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t\,,$$

et l'expression de θ est donnée au lemme 2.3.1.

Pour pouvoir passer à la limite, lorsque λ tend vers 0^+, dans l'inégalité ci-dessus, il faut estimer θ et les deux dernières intégrales présentes au second membre. Pour ce faire, remarquons que pour tout i de $[1, \ldots, p]$, $\|\omega_i\|_{L^\infty(Q)} \leq 1$ et $|\omega\cdot n| \leq 1$. On utilisera aussi de façon essentielle la constante K, dont la définition a été donnée à la remarque 2.1.

Par ailleurs, pour estimer l'intégrale de bord, on se refère au résultat :

si U est élément de $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ alors $\displaystyle\int_\Gamma\left|\frac{\partial U}{\partial\nu}\right|\mathrm{d}\sigma \leq \|\Delta U\|_{L^1(\Omega)}$,

dont on trouvera une ébauche de démonstration dans [7, chap. 1].

L'expression de $\varepsilon\Delta U_{\varepsilon,\eta}$ étant donnée par $(\mathrm{E}_{\varepsilon,\eta})$, on établit, par application des résultats du lemme 2.3.2 relatifs à l'estimation de $(1/\eta)\,U^-_{\varepsilon,\eta}$, l'existence d'une constante A_2^{**}, indépendante de tout paramètre, telle que :

$$\varepsilon\int_{\Sigma_s}\left|\frac{\partial}{\partial n}U_{\varepsilon,\eta}\right|\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t \leq$$
$$\leq \int_0^s\left(\left\|\frac{\partial}{\partial t}U_{\varepsilon,\eta}(t,\cdot)\right\|_{L^1(\Omega)} + K\left\|\nabla U_{\varepsilon,\eta}(t,\cdot)\right\|_{L^1(\Omega)^p}\right)\mathrm{d}t + A_2^{**}.$$

Finalement, on peut trouver deux constantes A_2 et A_2^*, indépendantes des paramètres ε et η telles que, pour tout s de $[0, T]$, on ait :

$$\int_\Omega I_\lambda\big(\nabla U_{\varepsilon,\eta}(s,x)\big)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega I_\lambda(\nabla U_0)\,\mathrm{d}x \leq$$
$$\leq I_1(\lambda) + I_2(\lambda) +$$
$$+ A_2^* + A_2\int_0^s\left(\left\|\frac{\partial}{\partial t}U_{\varepsilon,\eta}(t,\cdot)\right\|_{L^1(\Omega)} + \left\|\nabla U_{\varepsilon,\eta}(t,\cdot)\right\|_{L^1(\Omega)^p}\right)\mathrm{d}t.$$

Lorsque λ tend vers 0^+, les intégrales $I_1(\lambda)$ et $I_2(\lambda)$ tendent vers 0 par propriété de R_λ; $I_\lambda\big(\nabla U_{\varepsilon,\eta}(t,x)\big)$ approche la norme euclidienne de $\nabla U_{\varepsilon,\eta}(t,x)$, quel que soit $[0, T]$ et pour presque tout x de Ω, ce qui achève la preuve de la proposition 2.3. □

COROLLAIRE 2.3 (obtention des estimations $\nabla U_{\varepsilon,\eta}$ et $\partial/\partial t\, U_{\varepsilon,\eta}$ découplées). — *Étant donné U_0 élément de $\mathcal{V}\cap L^\infty(\Omega)$, dont le gradient est élément de $BV(\Omega)^p$ et à valeurs positives ou nulles p.p. sur Ω, il existe des constantes A_3 et A_3^*, indépendantes de ε, de η et de la donnée initiale telle que :*

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}U_{\varepsilon,\eta}\right\|_{L^\infty(0,T\,;L^1(\Omega))} + \left\|\nabla U_{\varepsilon,\eta}\right\|_{L^\infty(0,T\,;L^1(\Omega)^p)} \leq (A_4 + A_3)\,e^{A_3^* T},$$

où :

$$A_4 = \left\|\nabla U_0\right\|_{L^1(\Omega)^p} +$$
$$+ e^{M_g T}\Big[K(1+p)\mu es(\Omega) + \varepsilon\left|\Delta U_0\right|(\Omega) + K\left\|\nabla U_0\right\|_{L^1(\Omega)^p}\Big]\,.$$

Démonstration. — Les résultats établis aux propositions 2.2 et 2.3 permettent de construire des constantes A_3 et A_3^*, indépendantes des paramètres ε et η et de la donnée initiale U_0, telles que, pour tout t de $[0, T]$, on ait :

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t} U_{\varepsilon,\eta}(t, \cdot)\right\|_{L^1(\Omega)} + \left\|\nabla U_{\varepsilon,\eta}(t, \cdot)\right\|_{L^1(\Omega)^p} \leq$$
$$\leq A_4 + A_3 + A_3^* \int_0^t \left(\left\|\frac{\partial}{\partial t} U_{\varepsilon,\eta}(\tau, \cdot)\right\|_{L^1(\Omega)} + \left\|\nabla U_{\varepsilon,\eta}(\tau, \cdot)\right\|_{L^1(\Omega)^p}\right) \mathrm{d}\tau .$$

On conclut en utilisant le lemme de Gronwall. □

Ainsi, nous avons établi une majoration a priori de la dérivée en temps de $U_{\varepsilon,\eta}$ dans $L^\infty\big(0, T ; L^1(\Omega)\big)$ et de son gradient dans $L^\infty\big(0, T ; L^1(\Omega)^p\big)$. Ces estimations sont indépendantes de tout paramètre dès que l'on s'affranchit de la présence, au sein de la constante A_4, du coefficient de viscosité artificielle, en le supposant, ce qui est licite, plus petit qu'une certaine valeur ε_0, qu'il conviendra parfois de prendre, pour alléger les écritures égale à 1.

2.4 Cas d'une donnée initiale peu régulière

Les hypothèses fortes introduites sur la condition initiale, nous ont permis de construire une solution régulière en temps du problème parabolique $\mathcal{P}_{\varepsilon,\eta}$. Cependant, on s'intéresse en fait à un résultat d'existence pour la solution du problème $\mathcal{P}$, dès que U_0 est donnée dans $BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, telle que $U_0 \geq 0$ p.p. dans Ω. On se propose ici de construire une suite régulière $\big(U_0^\varepsilon\big)_{\varepsilon>0}$ approchant U_0, le paramètre ε étant celui de la régularisation par diffusion. Pour cela, on effectue une régularisation par troncature et convolution de la donnée initiale, en définissant :

$$U_0^\varepsilon = \xi_\varepsilon * V_0^\varepsilon , \quad \text{avec } V_0^\varepsilon = U_0 \chi_\varepsilon ,$$

où χ_ε désigne l'indicatrice de l'ensemble $\Omega_\varepsilon = \big\{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \Gamma) \geq 2\varepsilon\big\}$, prolongée par 0 sur $\mathbb{R}^p \setminus \Omega$.

ξ_ε est une suite régularisante, paire et telle que:

$$\left\|\nabla \xi_\varepsilon\right\|_{L^\infty(\Omega)^p} \leq \frac{C^*}{\varepsilon} .$$

Ainsi, U_0^ε est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, bornée (indépendamment de ε) et positive, dont le support est contenu dans l'ouvert Ω. De plus, la suite

$$\left[(U_0^\varepsilon)_{|\Omega}\right]_\varepsilon$$

est une approximation de U_0 dans les espaces $L^q(\Omega)$, $q \in [1, +\infty[$.

Il est fondamental de constater le résultat suivant.

LEMME 2.4.1.— *Il existe une constante $\mathcal{M}$, indépendante de ε, telle que :*

$$TV_\Omega(V_0^\varepsilon) \leq TV_\Omega(U_0) + \mathcal{M}.$$

Démonstration.— Soit ψ, un élément de $\mathcal{C}_0^1(\Omega)^p$, tel que $\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)^p} \leq 1$.

U^0 et χ_ε sont deux éléments de $BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ de sorte que d'après [17, § 14.5, p. 251], on peut écrire :

$$\int_\Omega V_0^\varepsilon \operatorname{Div}[\psi]\, dx = -\int_\Omega \overline{U}_0 \psi \cdot \nabla \chi_\varepsilon - \int_\Omega \overline{\chi}_\varepsilon \psi \cdot \nabla U_0\,,$$

où $\overline{U}_0$ (resp. $\overline{\chi}_\varepsilon$) désigne la valeur moyenne de U_0 (resp. de χ_ε). En revenant à la définition [17, § 10.1, p. 241], il est clair que

$$\|\overline{U}_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|U_0\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{et} \quad \|\overline{\chi}_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1\,.$$

Ainsi, par définition de la variation totale sur Ω, nous avons :

$$TV_\Omega(V_0^\varepsilon) \leq \|U_0\|_{L^\infty(\Omega)} TV_\Omega(\chi_\varepsilon) + TV_\Omega(U_0)\,,$$

et on sait que la variation totale sur Ω de χ_ε est indépendante du choix du paramètre ε. □

LEMME 2.4.2

i) $\|U_0^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|U_0\|_{L^\infty(\Omega)}$;

ii) $\|\nabla U_0^\varepsilon\|_{L^1(\Omega)^p} \leq TV_\Omega(V_0^\varepsilon)$;

iii) $\varepsilon|\Delta U_0^\varepsilon|(\Omega) \leq C^* TV_\Omega(V_0^\varepsilon)$, *où C^* est une constante indépendante de ε.*

Démonstration.— Elle résulte de celle exposée dans [6, lemme 3.1, p. 67]. □

En fin de compte, *on désigne par* $U_{\varepsilon,\eta}$ *la solution du problème* $\mathcal{P}_{\varepsilon,\eta}$ *correspondant à la donnée initiale régularisée* U_0^ε**, et on conclut alors par la propriété suivante, essentielle dans notre exposé.**

PROPRIÉTÉ 2.4. — *Il existe des constantes* $\mathcal{R}$*,* $\mathcal{A}$*,* $\mathcal{A}_1$ *et* $\mathfrak{C}_1$ *indépendantes des paramètres* ε *et* η *telles que la solution du problème parabolique pénalisé* $\mathcal{P}_{\varepsilon,\eta}$*, associée à la condition initiale régularisée* U_0^ε*, vérifie les estimations :*

$$\left\|U_{\varepsilon,\eta}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \mathcal{R}\,, \tag{2.1}$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}\,U_{\varepsilon,\eta}\right\|_{L^\infty(0,T\,;\,L^1(\Omega))} \leq \mathcal{A}\,, \tag{2.2}$$

$$\left\|\nabla U_{\varepsilon,\eta}\right\|_{L^\infty(0,T\,;\,L^1(\Omega)^p)} \leq \mathcal{A}\,, \tag{2.3}$$

$$\left\|\frac{1}{\eta}\,U^-_{\varepsilon,\eta}\right\|_{L^2(Q)} \leq \mathfrak{C}_1\,, \tag{2.4}$$

et l'on a la propriété :

$$\forall\, h \in [\,0\,,\,T\,[\,,\ \forall\, t \in [\,0\,,\,T-h\,]\,,\quad \left\|U_{\varepsilon,\eta}(t+h,\,\cdot\,)-U_{\varepsilon,\eta}(t,\,\cdot\,)\right\|_{L^1(\Omega)} \leq h\mathcal{A}_1\,. \tag{2.2a}$$

Démonstration

- **(2.1) et (2.4) résultent respectivement du théorème 2.1 et du lemme 2.3.2.**

- **Pour établir (2.2) et (2.3), on utilise le corollaire 2.3 et les lemmes 2.4.1 et 2.4.2 ; on obtient, de même, l'estimation (2.2a), en se reportant à la deuxième étape de la démonstration de la proposition 2.2.** □

3. Pénalisation du problème hyperbolique du premier ordre

La méthode de pénalisation, rapportée aux problèmes hyperboliques, permet de prouver l'existence d'une solution au problème $\mathcal{P}$**. On justifie d'abord, en revenant au problème de viscosité** $\mathcal{P}_{\varepsilon,\eta}$**, que la suite des solutions des problèmes hyperboliques pénalisés** $\mathcal{P}_\eta$ **reste dans un borné fixe de** $BV(Q) \cap L^1(Q)$**. Ceci nous permet alors, par compacité, de construire la solution faible entropique du problème** $\mathcal{P}^0$**.**

3.1 Régularisation du problème pénalisé $\mathcal{P}_\eta$ par $\mathcal{P}_{\varepsilon,\eta}$

Le résultat d'approximation dans $L^1(Q)$ de la solution de $\mathcal{P}_\eta$ par la suite des solutions des problèmes visqueux $\left(\mathcal{P}_{\varepsilon,\eta}\right)_{\varepsilon>0}$ a déjà été obtenu dans [1].

Cependant, nous allons nous attacher à préciser le comportement de cette suite, afin de dégager des estimations suffisantes sur la solution du problème limite $\mathcal{P}_\eta$, indépendantes du paramètre de pénalisation η.

Compte tenu de la propriété 2.4, après extractions successives de sous-suites, utilisant en particulier la compacité de l'injection de $W^{1,1}(Q)$ dans $L^1(Q)$, on a la proposition 3.1.

PROPOSITION 3.1 (comportement de la suite $\left(U_{\varepsilon,\eta}\right)_{\varepsilon>0}$). — *Pour tout η, $\eta > 0$, il existe U_η, élément de $BV(Q) \cap L^\infty(Q) \cap \mathcal{C}^0([0, T]; L^q(\Omega))$, $q \in [1, +\infty[$, tel que, lorsque ε tend vers 0^+, on ait à une sous-suite près :*

$$U_{\varepsilon,\eta} \to U_\eta \begin{cases} a) & \text{dans } L^\infty(Q) \text{ faible}^* \\ b) & \text{dans } \mathcal{C}^0([0, T]; L^q(\Omega)),\ q \in [1, +\infty[\\ c) & \text{p.p. dans } Q. \end{cases} \tag{3.1}$$

Démonstration

- (3.1a) se déduit directement de (2.1).
- Pour montrer (3.1b), on utilise un raisonnement qui sera largement repris par la suite. η étant fixé, l'ensemble $\mathcal{S} = \left\{U_{\varepsilon,\eta} \mid \varepsilon > 0\right\}$ est, d'après (2.2a), uniformément équicontinu de $[0, T]$ à valeurs dans $L^1(\Omega)$. Par ailleurs, d'après (2.1), (2.2) et (2.3), on sait que $\left(U_{\varepsilon,\eta}(t, \cdot)\right)_{\varepsilon>0}$ est, p.p. t de $]0, T[$, à valeurs dans un borné de $W^{1,1}(\Omega)$, ce borné étant contenu dans un compact $\mathcal{K}$ de $L^1(\Omega)$. Puisque (2.2a) entraîne que l'application $t \to U_{\varepsilon,\eta}(t, \cdot)$ est continue de $[0, T]$ dans $L^1(\Omega)$, $\left(U_{\varepsilon,\eta}(t, \cdot)\right)_{\varepsilon>0}$ est en fait à valeurs dans $\mathcal{K}$, pour tout t de $[0, T]$.

Le théorème d'Ascoli, établissant que l'ensemble $\mathcal{S}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}^0([0, T]; L^1(\Omega))$, et le fait que la suite $\left(U_{\varepsilon,\eta}\right)_{\varepsilon>0}$ soit essentiellement bornée sur Q, permettent de conclure.

Enfin, la convergence dans $\mathcal{C}^0([0, T]; L^q(\Omega))$ entraîne celle dans $L^q(Q)$, $q \in [1, +\infty[$ ce qui implique (3.1c). □

THÉORÈME 3.1 (perturbations singulières de l'équation $\mathcal{P}_\eta$). — *Lorsque le paramètre de viscosité ε, tend vers 0^+, la suite généralisée des solutions des problèmes $\left(\mathcal{P}_{\varepsilon,\eta}\right)_{\varepsilon>0}$ converge p.p. dans Q, dans $L^\infty(Q)$ faible* et dans $\mathcal{C}^0([0, T]; L^q(\Omega))$, $q \in [1, +\infty[$, vers la solution du problème $\mathcal{P}_\eta$.*

Démonstration

Vérification de la relation d'entropie $(\mathcal{R}_\eta)$.

Soient U_η la fonction introduite à la proposition 3.1, k un réel et ψ un élément de $\mathcal{C}^1_{0,+}\big(]0\,,\,T[\,\times\,\overline{\Omega}\big)$. On considère le produit scalaire dans $L^2(Q)$ entre $(\mathrm{E}_{\varepsilon,\eta})$ et $p_\lambda(U_{\varepsilon,\eta}-k)\psi$.

Pour exprimer le terme du premier ordre en temps, on introduit la fonction $I_\lambda(U)=\int_0^U p_\lambda(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. Ainsi, l'utilisation de la règle de dérivation de la chaîne de M. Marcus et V. J. Mizel ainsi qu'une intégration par parties par rapport à la variable t, nous donnent :

$$\int_Q \frac{\partial}{\partial t} U_{\varepsilon,\eta} p_\lambda(U_{\varepsilon,\eta}-k)\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=-\int_Q I_\lambda(U_{\varepsilon,\eta}-k)\psi\frac{\partial\psi}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,.$$

Le terme du second ordre est intégré par parties selon la formule de Green. Nous posons

$$\theta(\varepsilon,\eta)=\varepsilon\int_\Sigma \psi\frac{\partial}{\partial\nu}U_{\varepsilon,\eta}\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t\,.$$

On obtient alors l'expression :

$$\varepsilon\int_Q \nabla U_{\varepsilon,\eta}\cdot\nabla\psi p_\lambda(U_{\varepsilon,\eta}-k)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+p_\lambda(k)\theta(\varepsilon,\eta)+$$
$$+\,\varepsilon\int_Q p'_\lambda(U_{\varepsilon,\eta}-k)\psi\left[\nabla U_{\varepsilon,\eta}\right]^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,,$$

pour laquelle il est clair que la dernière intégrale est positive.

Si l'on définit

$$\Theta=\int_Q\sum_i\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(U_{\varepsilon,\eta},t,x)p_\lambda(U_{\varepsilon,\eta}-k)-\frac{\partial H^i_\lambda}{\partial x_i}(U_{\varepsilon,\eta},t,x)\right)\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,,$$

où $H_\lambda=\left[H^i_\lambda\right]_{i=1,\ldots,p}$ avec pour $i=1,\ldots,p$,

$$H^i_\lambda(u,t,x)=\int_k^U\frac{\partial f_i}{\partial u}(\tau,t,x)p_\lambda(\tau-k)\,\mathrm{d}\tau\,,$$

on peut exprimer le terme de convection sous la forme :

$$\int_Q \mathrm{Div}\left[H_\lambda(U_{\varepsilon,\eta},t,x)\right]\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\Theta\,.$$

L'utilisation de la formule de Green au sein de la première intégrale permet d'obtenir :

$$\int_Q \operatorname{Div}\left[f(U_{\varepsilon,\eta},t,x)\right] p_\lambda(U_{\varepsilon,\eta}-k)\psi \, dx\, dt =$$
$$= -\int_Q H_\lambda(U_{\varepsilon,\eta},t,x)\cdot\nabla\psi\, dx\, dt + \int_\Sigma \psi H_\lambda(0,t,\sigma)\cdot\nu\, d\sigma\, dt + \Theta\,.$$

En vue de contrôler l'intégrale de bord $\theta(\varepsilon,\eta)$, on introduit comme dans [1], pour tout $\mu > 0$ la fonction ρ_μ élément de $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, définie par :

$$\begin{cases} \rho_\mu = 1 & \text{sur } \Gamma \\ \rho_\mu = 0 & \text{sur } \left\{x\in\Omega \mid \operatorname{dist}(x,\Gamma)\geq\mu\right\} \\ 0\leq\rho_\mu\leq 1\,, & \left\|\nabla\rho_\mu\right\|_{(L^\infty(\Omega))^p}\leq c/\mu \end{cases}$$

de sorte que l'on a :

$$\theta(\varepsilon,\eta) = \varepsilon\int_\Sigma \rho_\mu\psi\frac{\partial}{\partial\nu}U_{\varepsilon,\eta}\, d\sigma\, dt$$

qui nous donne, selon la formule de Green :

$$\theta(\varepsilon,\eta) = \varepsilon\int_Q \Delta U_{\varepsilon,\eta}\psi\rho_\mu\, dx\, dt + \varepsilon\int_Q \nabla U_{\varepsilon,\eta}\cdot\nabla[\psi\rho_\mu]\, dx\, dt\,.$$

L'expression de $\varepsilon\,\Delta U_{\varepsilon,\eta}$, donnée par $(\mathrm{E}_{\varepsilon,\eta})$ et une intégration par parties en la variable t montrent que :

$$\theta(\varepsilon,\eta) = \varepsilon\int_Q \nabla U_{\varepsilon,\eta}\cdot\nabla[\psi\rho_\mu]\, dx\, dt + \theta^*(\varepsilon,\eta,\mu)\,,$$

avec :

$$\begin{aligned}\theta^*(\varepsilon,\eta,\mu) = -&\int_Q U_{\varepsilon,\eta}\rho_\mu\frac{\partial\psi}{\partial t}\, dx\, dt + \\ &-\int_Q f(U_{\varepsilon,\eta},t,x)\cdot\nabla[\psi\rho_\mu]\, dx\, dt + \int_\Sigma f(0,t,\sigma)\cdot\nu\psi\, d\sigma\, dt + \\ &+\int_Q\left(g(U_{\varepsilon,\eta},t,x) - \frac{1}{\eta}U^-_{\varepsilon,\eta}\right)\psi\rho_\mu\, dx\, dt\end{aligned}$$

Finalement, compte tenu des transformations précédentes, il vient :

$$\begin{aligned}
&-\int_Q I_\lambda(U_{\varepsilon,\eta}-k)\frac{\partial\psi}{\partial t}\,dx\,dt - \int_Q H_\lambda(U_{\varepsilon,\eta},t,x)\cdot\nabla\psi\,dx\,dt + \\
&\quad + \int_\Sigma \psi H_\lambda(0,t,\sigma)\cdot\nu\,d\sigma\,dt + \Theta + \\
&\quad + p_\lambda(k)\theta^*(\varepsilon,\eta,\mu) + \int_Q \left(g(U_{\varepsilon,\eta},t,x) - \frac{1}{\eta}\,U_{\varepsilon,\eta}^-\right) p_\lambda(U_{\varepsilon,\eta}-k)\psi\,dx\,dt \leq \\
&\qquad\qquad \leq -\varepsilon\int_Q \nabla U_{\varepsilon,\eta}\cdot\left[p_\lambda(U_{\varepsilon,\eta}-k)\nabla\psi + p_\lambda(k)\nabla[\psi\rho_\mu]\right]dx\,dt\,.
\end{aligned}$$

On déduit de l'estimation (2.3) que le second membre de l'inégalité précédente peut être majoré par $\varepsilon c(\mu)\mathcal{A}$, où $c(\mu)$ est une constante qui ne dépend que de μ.

Faisons tendre ε *vers* 0^+ (λ et μ sont fixés).

Étant donné le caractère lipschitzien des différentes fonctions introduites, il suffit d'utiliser (3.1b) pour passer à la limite dans le premier membre de l'inégalité précédente.

En particulier $\theta^*(\varepsilon,\eta,\mu)\to\theta^*(\eta,\mu)$, où :

$$\begin{aligned}
\theta^*(\eta,\mu) = &-\int_Q U_\eta\rho_\mu\frac{\partial\psi}{\partial t}\,dx\,dt + \\
&-\int_Q f(U_\eta,t,x)\cdot\nabla[\psi\rho_\mu]\,dx\,dt + \int_\Sigma f(0,t,\sigma)\cdot\nu\psi\,d\sigma\,dt + \\
&+\int_Q \left(g(U_\eta,t,x) - \frac{1}{\eta}\,U_\eta^-\right)\psi\rho_\mu\,dx\,dt\,.
\end{aligned}$$

Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned}
&-\int_Q I_\lambda(U_\eta-k)\frac{\partial\psi}{\partial t}\,dx\,dt - \int_Q H_\lambda(U_\eta,t,x)\cdot\nabla\psi\,dx\,dt + \\
&\quad + \int_\Sigma \psi H_\lambda(0,t,\sigma)\cdot\nu\,d\sigma\,dt + \Theta + \\
&\quad + p_\lambda(k)\theta^*(\eta,\mu) + \int_Q \left(g(U_\eta,t,x) - \frac{1}{\eta}\,U_\eta^-\right) p_\lambda(U_\eta-k)\psi\,dx\,dt \leq 0\,.
\end{aligned}$$

Faisons tendre μ vers 0^+ (λ étant toujours fixé) :

U_η étant élément de $BV(Q) \cap L^\infty(Q)$ et les fonctions f_i étant lipschitziennes, on peut affirmer que :

- $f_i(U_\eta, \cdot, \cdot) \in BV(Q) \cap L^\infty(Q)$,
- $\gamma\big(f_i(U_\eta, t, \sigma)\big) = f_i(\gamma U_\eta, t, \sigma)$ p.p. t de $]\,0\,,\,T\,[$, où γ désigne l'opérateur trace sur Γ, au sens des fonctions à variation bornée.

On dispose aussi de la formule d'intégration ([1], [17]), pour tout i de $[\,1\,,\,p\,]$:

$$\int_Q f_i(U_\eta, t, x) \frac{\partial}{\partial x_i}\,[\psi\rho_\mu]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_\Sigma f_i(\gamma U_\eta, t, \sigma)\cdot \nu_i\psi\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t + \\ - \int_Q \psi\rho_\mu\,\mathrm{d}\mu_i(t)\,,$$

où $\mathrm{d}\mu_i(t)$ désigne ici la mesure de Radon associée à la distribution

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_i\big(U_{\varepsilon,\eta}(t,\,\cdot\,), t,\,\cdot\,\big)\,.$$

La suite $\left(\rho_\mu\right)_{\mu>0}$, qui est une suite de fonctions de $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, uniformément bornées et convergeant partout vers 0 sur l'ouvert Ω, converge p.p. vers 0 au sens de la mesure $\mathrm{d}\mu_i(t)$, mesure de Radon bornée. Ainsi, lorsque μ tend vers 0^+, $\theta^*(\eta,\mu)$ tend vers $\int_\Sigma \big[f(0,t,\sigma) - f(\gamma U_\eta, t, \sigma)\big]\cdot\nu\psi\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t$.

On a finalement :

$$\begin{aligned} &- \int_Q I_\lambda(U_\eta - k)\frac{\partial\psi}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_Q H_\lambda(U_\eta, t, x)\cdot\nabla\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \\ &+ \int_\Sigma \psi H_\lambda(0,t,\sigma)\cdot\nu\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t + \Theta + \\ &+ p_\lambda(k)\int_\Sigma \big[f(0,t,\sigma) - f(\gamma U_\eta, t,\sigma)\big]\cdot\nu\psi\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t + \\ &+ \int_Q \left(g(U_\eta, t, x) - \frac{1}{\eta}\,U_\eta^-\right) p_\lambda(U_\eta - k)\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le 0\,, \end{aligned}$$

où

$$\Theta = \int_Q \sum_i \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\,(U_\eta, t, x) p_\lambda(U_\eta - k) - \frac{\partial H_\lambda^i}{\partial x_i}(U_\eta, t, x)\right]\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,.$$

Lorsque λ tend vers 0^+, par convergence dominée, on obtient la relation $(\mathcal{R}_\eta)$.

Pour achever la démonstration du théorème 3.1, il suffit de constater que la condition initiale est donnée par (3.1b). L'unicité de la solution, déjà obtenue dans [1], nous permet de conclure que toute la suite $\left(U_{\varepsilon,\eta}\right)_{\varepsilon>0}$ converge vers U_η aux sens donnés à la proposition 3.1, lorsque ε tend vers 0^+. □

Remarque 3.1

Il faut noter que l'utilisation de (3.1b) permet d'obtenir une information sur la dépendance T-lipschitzienne dans $L^1(\Omega)$ de la solution du problème $\mathcal{P}_\eta$, en la donnée initiale, différente de celle trouvée dans [1]. En effet, il est clair qu'à partir de celle relative au problème $\mathcal{P}_{\varepsilon,\eta}$ on a :

$$\forall\, t \in [\,0\,,T\,]\,,\quad \left\|\left(U_\eta(t,\,\cdot\,) - V_\eta(t,\,\cdot\,)\right)^+\right\|_{L^1(\Omega)} \leq e^{M_g t}\left\|(U_0 - V_0)^+\right\|_{L^1(\Omega)}\,.$$

En vue d'étudier le comportement de la suite $\left(U_\eta\right)_{\eta>0}$, nous allons préciser les estimations a priori, indépendantes pénalisant η vérifiées par la solution du problème quasi linéaire du premier ordre pénalisé $\mathcal{P}_\eta$. On déduit immédiatement de la propriété 2.4 et de la proposition 3.1

PROPRIÉTÉ 3.1 (estimations de U_η). — *La solution du problème du premier ordre pénalisé $\mathcal{P}_\eta$ vérifie :*

$$\left\|U_\eta\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \mathfrak{R}\,, \tag{3.1.1}$$

où $\mathfrak{R}$ est la constante définie à la remarque 2.1 ;

$$\left\|U_\eta\right\|_{BV(Q)\cap L^1(Q)} \leq \overline{\mathcal{A}}\,, \tag{3.1.2}$$

où $\overline{\mathcal{A}}$ est une constante indépendante de ε et η ;

$$\begin{gathered}\forall\, h \in [\,0\,,T\,[\,,\ \forall\, t \in [\,0\,,T-h\,]\,,\\ \left\|U_\eta(t+h,\,\cdot\,) - U_\eta(t,\,\cdot\,)\right\|_{L^1(\Omega)} \leq \mathcal{A}_1 h\ ;\end{gathered} \tag{3.1.3}$$

$$\frac{1}{\eta}\left\|U_\eta^-\right\|_{L^2(Q)} \leq \mathfrak{C}_1\,. \tag{3.1.4}$$

3.2 La méthode de pénalisation pour l'équation hyperbolique non linéaire du premier ordre

Par compacité de l'injection de $BV(Q) \cap L^1(Q)$ dans $L^1(Q)$, on va pouvoir passer à la limite en η dans le problème $\mathcal{P}_\eta$ et construire ainsi une solution du problème $\mathcal{P}$, telle qu'elle a été introduite à la section 1.

Compte tenu des estimations dégagées à la propriété 3.1, et après extractions éventuelles de sous-suites, on peut énoncer le résultat suivant.

PROPOSITION 3.2 (comportement de la suite $(U_\eta)_{\eta>0}$).— *Il existe U, élément de $BV(Q) \cap L^\infty(Q) \cap \mathcal{C}^0([0,T]; L^q(\Omega))$, $q \in [1, +\infty[$, $U \geq 0$ p.p. dans Q, tel que lorsque η tend vers 0^+, à une sous-suite près, on ait :*

$$U_\eta \to U \begin{cases} a) & \text{dans } L^\infty(Q) \text{ faible}^* \\ b) & \text{dans } \mathcal{C}^0([0,T]; L^q(\Omega)),\ q \in [1, +\infty[, \\ c) & \text{p.p. dans } Q. \end{cases} \tag{3.2}$$

Démonstration.— On développe le même type de raisonnement qu'à la proposition 3.1. Notamment, pour établir (3.2b), on introduira l'ensemble $\mathcal{S} = \{U_\eta \mid \eta > 0\}$ qui, d'après (3.1.3) est uniformément équicontinu de $[0,T]$ à valeurs dans un borné de $L^1(\Omega)$. De plus, on notera que p.p. t de $]0,T[$, $(U_{\varepsilon,\eta}(t,\cdot))_{\eta>0}$ est à valeurs dans un borné de $W^{1,1}(\Omega)$ et il s'ensuit d'après (3.1b) que $(U_\eta(t,\cdot))_{\eta>0}$ est p.p. t de $]0,T[$, à valeurs dans un borné de $BV(\Omega) \cap L^1(\Omega)$, borné qui est contenu dans un compact $\mathcal{K}$ de $L^1(\Omega)$; en fait, cette propriété a lieu pour tout t de $[0,T]$, puisque d'après (3.1.3), l'application $t \to U_\eta(t,\cdot)$ est continue de $[0,T]$ dans $L^1(\Omega)$. Il suffit alors d'utiliser le théorème d'Ascoli, et de constater que la suite $(U_\eta)_{\eta>0}$ est essentiellement bornée sur Q.

La positivité de U résulte de (3.1.4) et (3.2b). □

On est alors en mesure d'énoncer le résultat principal de ce paragraphe, qui généralise au cas de problèmes du premier ordre la méthode de pénalisation, généralement utilisée pour construire des inéquations variationnelles ou quasi variationnelles. Notons que cet autre aspect de la pénalisation sera abordé à la section 4.

THÉORÈME 3.2 (existence et unicité de la solution du problème $\mathcal{P}$).— *Le problème $\mathcal{P}$ donné en introduction, admet une solution unique, qui est la limite dans $L^\infty(Q)$ faibre* dans $\mathcal{C}^0([0,T]; L^q(\Omega))$, $q \in [1, +\infty[$, et p.p.*

dans Q de la suite des solutions des problèmes quasi linéaires du premier ordre pénalisés $\left(\mathcal{P}_\eta\right)_{\eta>0}$.

Démonstration

Vérification de la relation d'entropie $(\mathcal{R})$

Soient U la fonction introduite à la proposition 3.2 (par limite de la suite $\left(U_\eta\right)_{\eta>0}$), k un réel positif ou nul et ψ un élément de $\mathcal{C}^1_{0,+}\left(]\,0\,,\,T[\,\times\,\overline{\Omega}\right)$.

On sait que U_η vérifie la condition d'entropie $(\mathcal{R}_\eta)$; cependant on ne peut pas passer directement à la limite en η, aux sens de la proposition 3.2, dans $(\mathcal{R}_\eta)$ à cause des termes de traces. Ainsi, on considère le produit scalaire $L^2(Q)$ entre $(\mathrm{E}_{\varepsilon,\eta})$ et $p_\lambda(U_{\varepsilon,\eta} - k)\psi$.

De fait, on reprend les calculs déjà exposés dans la démonstration du théorème 3.1 et on effectue d'abord, comme dans cette démonstration, le passage à la limite lorsque ε tend vers 0^+, η, λ et μ étant fixés. Puis, on note que le choix de k positif ou nul entraîne que :

$$-\frac{1}{\eta}\,U_\eta^-\left(p_\lambda(U_\eta - k) + p_\lambda(k)\rho_\mu\right)\psi \geq 0 \quad \text{p.p. sur } Q\,.$$

On obtient ainsi une relation satisfaite par U_η dépendant uniquement des paramètres λ et μ, dans laquelle il est possible de faire tendre η vers 0^+ en utilisant (3.2b), à λ et μ fixés. La suite de la preuve, lorsque μ tend 0^+, puis lorsque λ tend vers 0^+, se calque sur celle du théorème 3.1 et permet d'obtenir la relation $(\mathcal{R})$.

Pour conclure, notons que la condition initiale est donnée par (3.2b).

Unicité

La démonstration reprend point pour point celle exposée dans [1], la solution de $\mathcal{P}$ étant à valeurs positives ou nulles. Elle permet de constater :

- **en prenant $\psi = \kappa\rho_\mu$ où $\kappa \in \mathcal{C}^1_{0,+}\left(]\,0\,,\,T[\right)$, que la solution U du problème $\mathcal{P}$ vérifie la relation de bord de Dirichlet homogène généralisée :**

$$\min_{k\in[0,\gamma u]}\left\{\operatorname{sign}(\gamma U)\left[f(\gamma U,t,\sigma) - f(k,t,\sigma)\right]\cdot\nu\right\} = 0 \quad \text{p.p. sur } \Sigma\,;$$

- **si U (resp. V) est la solution du problème $\mathcal{P}$ associée à la donnée initiale U_0 (resp. V_0), alors :**

$$\forall\, t \in [\,0\,,\,T\,]\,,\quad \left\|U(t,\cdot) - V(t,\cdot)\right\|_{L^1(\Omega)} \leq e^{Mt}\left\|U_0 - V_0\right\|_{L^1(\Omega)}\,,$$

où M est la constante définie au théorème 2.1. □

Remarques 3.2

• L'unicité de la solution du problème $\mathcal{P}$ permet que toute la suite $(U_\eta)_{\eta>0}$ converge vers U aux sens donnés à la proposition 3.2, lorsque le paramètre η tend vers 0^+.

• D'après (3.2b) et la remarque 3.1, on obtient une information sur la dépendance T-lipschitzienne dans $L^1(\Omega)$ de la solution de $\mathcal{P}$ en la donnée initiale, puisque :

$$\forall\, t \in [\,0\,,T\,]\,,\quad \left\|\big(U(t,\cdot\,) - V(t,\cdot\,)\big)^+\right\|_{L^1(\Omega)} \le e^{M_g t}\left\|\big(U_0 - V_0\big)^+\right\|_{L^1(\Omega)}\,.$$

Il est intéressant de remarquer la monotonie de la convergence de la suite des solutions des problèmes pénalisés $(\mathcal{P}_\eta)_{\eta>0}$ vers la solution du problème $\mathcal{P}$. On retrouve ainsi le caractère de maximalité de la solution obtenue par la méthode de pénalisation, déjà mis en évidence notamment dans [14] pour l'étude des inéquations variationnelles et quasi variationnelles du premier ordre.

PROPRIÉTÉ 3.2 (comportement de la suite des solutions pénalisées).— *La suite des solutions des problèmes hyperboliques pénalisés $(\mathcal{P}_\eta)_{\eta>0}$ converge vers la solution U du problème $\mathcal{P}$, en étant croissante au sens suivant :*

$$\text{si } \eta_1 > \eta_2 \text{ alors } \forall\, t \in [\,0\,,T\,],\ U_{\eta_1}(t,\cdot\,) \le U_{\eta_2}(t,\cdot\,) \le U(t,\cdot\,),\ \text{p.p. dans } \Omega.$$

Démonstration.— Dans un premier temps, par utilisation de la propriété de convergence (3.1b) et de la propriété iii) du théorème 2.1, on constate que la suite $\big(U_\eta(t,x)\big)_{\eta>0}$ est monotone croissante, uniformément en (t,x). Le résultat de convergence (3.2b) permet alors d'obtenir l'inégalité annoncée. □

3.3 Un résultat de comparaison

Introduisons U, l'unique solution faible entropique (donnée par [1]) du problème sans contrainte $\widehat{\mathcal{P}}$:

$$\widehat{U} \in BV(Q) \cap L^\infty(Q)$$

$$\forall\, k \in \mathbb{R} \text{ et } \forall\, \psi \in \mathcal{C}^1_{0,+}\big(]\,0\,,T\,[\,\times \overline{\Omega}\big)\,,$$

$$\int_Q |\widehat{U} - k|\frac{\partial \psi}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_Q H(\widehat{U},t,x)\cdot\nabla\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t +$$

$$
\begin{aligned}
&- \int_Q \Big(\mathrm{Div}\big[f(k,t,x)\big] + g(\widehat{U},t,x)\Big)\,\mathrm{sign}(\widehat{U}-k)\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \,+ \\
&+ \int_\Sigma \mathrm{sign}(k)\big[f(\gamma\widehat{U},t,\sigma) - f(k,t,\sigma)\big]\cdot\nu\psi\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t \geq 0 \qquad (\widehat{\mathcal{R}})\\
&\widehat{U}(0,x) = U_0(x) \quad \text{pour presque tout } x \text{ de } \Omega\,,
\end{aligned}
$$

où $H(\widehat{U},t,x) = \big[f(\widehat{U}t,x) - f(k,t,x)\big]\,\mathrm{sign}(\widehat{U}-k)$.

On rappelle que cette solution vérifie, au sens des distributions :

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{U} + \mathrm{Div}\big[f(\widehat{U},t,x)\big] + g(\widehat{U},t,x) = 0\,,$$

et satisfait à une condition de bord de Dirichlet homogène généralisé (*cf.* démonstration du théorème 3.2). On peut donner des résultats de comparaison de cette solution avec les solutions pénalisées :

PROPRIÉTÉ 3.3 (comparaison de la solution contrainte avec la non contrainte)

i) La suite $(U_\eta)_{\eta>0}$ *des solutions des problèmes hyperboliques pénalisés* $(\mathcal{P}_\eta)_{\eta>0}$ *est minorée sur* Q *par la solution du problème sans contrainte* $\widehat{\mathcal{P}}$*, au sens où :*

$$\forall\,\eta,\ \eta>0\,,\ \forall\,t\in[\,0\,,T\,]\,,\quad \widehat{U}(t,\cdot\,)\leq U_\eta(t,\cdot\,)\quad \textit{p.p. dans } \Omega.$$

ii) $\forall\,t\in[\,0\,,T\,]$*,* $\widehat{U}(t,\cdot\,)\leq U_\eta(t,\cdot\,)$ *p.p. dans* Ω*, qui fournit une comparaison entre la solution sans contrainte tronquée* $(\widehat{U})^+$ *et la solution avec contrainte* U*.*

Démonstration. — Il s'agit de voir que, lorsque η tend vers $+\infty$, la suite $(U_\eta)_{\eta>0}$ converge vers $\widehat{U}$ dans $L^\infty(Q)$ faible* et dans $C^0([\,0\,,T\,]\,;L^q(\Omega))$, $q\in[\,1\,,+\infty\,[$. En effet, puisque la suite $(U_\eta)_{\eta>0}$ demeure dans un borné fixe de $L^\infty(Q)$ (*cf.* estimation (3.1.1)), il est clair que $\big((1/\eta)\,U_\eta^-\big)_{\eta>0}$ converge vers 0^+ dans $L^q(Q)$ fort, $q\in[\,1\,,+\infty\,[$. De fait, on peut reprendre la démonstration du théorème 3.1 et y faire tendre η vers $+\infty$, puisque dans ce cas l'intégrale :

$$\int_Q -\frac{1}{\eta}\,U_\eta^-\,\big(p_\lambda(U_\eta-k)+p_\lambda(k)\rho_\mu\big)\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

tend vers 0 pour tout k réel et toute fonction ψ élément de $C^1_{0,+}\big(]\,0\,,T\,[\,\times\overline{\Omega}\big)$.

On construit ainsi une solution faible entropique de $\widehat{\mathcal{P}}$, au sens donné dans [1]. L'unicité de la solution de $\widehat{\mathcal{P}}$ et la propriété 3.2 permettent d'obtenir i), en passant à la limite lorsque η_1 tend vers $+\infty$, dans $\mathcal{C}^0([0, T]; L^1(\Omega))$, η_2 étant fixé.

On en déduit par là même ii), ce qui achève la démonstration. □

4. Perturbations singulières du problème $\mathcal{P}$ par une inéquation

On suppose ici que U_0 est une fonction régulière au sens suivant : $U_0 \in \mathcal{V}$, $\nabla U_0 \in BV(\Omega)^p$, c'est-à-dire que U_0 vérifie les conditions de régularité introduites à la section 2, pour l'étude du problème $\mathcal{P}_{\varepsilon,\eta}$.

Nous allons approcher la solution du problème $\mathcal{P}$ par une suite de solutions d'inéquations paraboliques $(\mathcal{J}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, dont le terme de diffusion devient négligeable lorsque ε tend vers 0^+. Pour chaque $\varepsilon > 0$, le problème pénalisé associé à $\mathcal{J}_\varepsilon$ est $\mathcal{P}_{\varepsilon,\eta}$. On montre alors que la solution de $\mathcal{J}_\varepsilon$ reste dans un borné fixe de $W^{1,1}(Q) \cap L^\infty(Q)$, à l'aide des estimations développées à la section 2. Puis, un raisonnement par compacité nous permettra de montrer que la solution des solutions des problèmes $(\mathcal{J}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge vers la solution entropique de $\mathcal{P}$, dans $L^q(Q)$ fort, $q \in [1, +\infty[$.

4.1 Définition et propriétés de l'inéquation $\mathcal{J}_\varepsilon$

Étant donné ε strictement positif, on considère le problème formel $\mathcal{J}_\varepsilon^0$:

$$
\begin{aligned}
& U_\varepsilon \geq 0 \quad \text{p.p. dans } Q \\
& \frac{\partial}{\partial t} U_\varepsilon - \varepsilon\, \Delta U_\varepsilon + \mathrm{Div}\big[f(U_\varepsilon, t, x)\big] + g(U_\varepsilon, t, x) = 0 \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur } Q_\varepsilon^+ = \big\{(t,x) \in Q \mid U_\varepsilon(t,x) > 0\big\} \\
& U_{\varepsilon|\Sigma} = 0 \\
& U_\varepsilon(0, \cdot) = U_0 \quad \text{p.p. dans } \Omega\,.
\end{aligned}
$$

Formellement, il s'agit là du problème visqueux relatif au problème $\mathcal{P}^0$, sujet de notre étude et introduit au paragraphe 1.1.

On démontre par la méthode classique de pénalisation [11], le problème pénalisé associé étant donné par $\mathcal{P}_{\varepsilon,\eta}$, le résultat d'existence, d'unicité et de régularité suivant.

Théorème 4.1 (existence et unicité de la solution de l'inéquation $\mathcal{J}_\varepsilon$). — *L'inéquation variationnelle parabolique quasi linéaire $\mathcal{J}_\varepsilon$:*

$$U_\varepsilon \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}) \cap W(0,T;\mathcal{M};L^2(\Omega)) \quad 0 \le U_\varepsilon \le \mathfrak{R} \quad \textit{p.p. sur } Q\,,$$

pour presque tout t de $]\,0\,,T\,[$ et $\forall\ V \in \mathcal{V}$, $V \ge 0$ p.p. sur Q :

$$\int_\Omega \Big\{ \frac{\partial}{\partial t} U_\varepsilon (V - U_\varepsilon) + \varepsilon \nabla U_\varepsilon \cdot \nabla (V - U_\varepsilon) + \\ + \big(\mathrm{Div}\big[f(U_\varepsilon,t,x)\big] + g(U_\varepsilon,t,x)\big)(V - U_\varepsilon)\Big\}\,\mathrm{d}x \ge 0\,,$$

$$U_\varepsilon(0,\,\cdot\,) = U_0 \quad \textit{p.p. dans } \Omega\,,$$

admet une solution unique, telle que, si U_ε (resp. V_ε) est la solution de $\mathcal{J}_\varepsilon$ correspondant à la donnée initiale U_0 (resp. V_0), alors :

$$\forall\ t \in [\,0\,,T\,]\,, \quad \big\| \big(U_\varepsilon(t,\,\cdot\,) - V_\varepsilon(t,\,\cdot\,)\big)^+ \big\|_{L^1(\Omega)} \le e^{M_g t} \big\| (U_0 - V_0)^+ \big\|_{L^1(\Omega)}\,.$$

Remarques 4.1a

• La propriété de régularité « U_ε élément de $W(0,T;\mathcal{M};L^2(\Omega))$ » (qui nous garantit que l'on construit une solution forte — *cf.* [11] — de l'inéquation $\mathcal{J}_\varepsilon$) résulte de façon essentielle de l'estimation (2.4) sur le terme de pénalisation dans $L^2(Q)$ (lemme 2.3.2).

• En choisissant dans $\mathcal{J}_\varepsilon$, p.p. t de $]\,0\,,T\,[$, $V(t,\,\cdot\,) = \varphi + U_\varepsilon(t,\,\cdot\,)$, où φ est un élément de $\mathcal{D}'(\Omega)$ à valeurs positives ou nulles, on établit que la distribution définie, p.p. t de $]\,0\,,T\,[$, par :

$$T_t = \frac{\partial}{\partial t} U_\varepsilon - \varepsilon\,\Delta U_\varepsilon + \mathrm{Div}\big[f(U_\varepsilon,t,x)\big] + g(U_\varepsilon,t,x)$$

est positive ou nulle. On vérifie rapidement que T_t est en fait un élément de $L^2(\Omega)$, donc une fonction à valeurs positives ou nulles. De plus, en constatant que l'ensemble donné par $\{V \in L^2(\Omega) \mid V \ge 0 \text{ p.p. sur } \Omega\}$ est un cône de sommet 0, on peut écrire, p.p. t de $]\,0\,,T\,[$ et pour tout V de $L^2(\Omega)$ à valeurs positives ou nulles p.p. dans Ω :

$$\int_\Omega \Big(\frac{\partial}{\partial t} U_\varepsilon - \varepsilon\,\Delta U_\varepsilon + \mathrm{Div}\big[f(U_\varepsilon,t,x)\big] + g(U_\varepsilon,t,x)\Big)\,V\,\mathrm{d}x \ge 0\,,$$

avec égalité à 0 si $V = U_\varepsilon$. Ainsi, on retrouve l'interprétation de l'inéquation $\mathcal{J}_\varepsilon$ qui permet d'appréhender la notion de *problème à frontières libres* qui lui est associée :

$$\begin{cases} T_t \geq 0 \text{ et } U_\varepsilon(t,\,\cdot\,) \geq 0 & \text{pour presque tout } t \text{ de }]\,0\,,\,T\,[\text{ et p.p. dans } \Omega, \\ T_t U_\varepsilon(t,\,\cdot\,) = 0 & \text{pour presque tout } t \text{ de }]\,0\,,\,T\,[\text{ et p.p. dans } \Omega, \\ U_{\varepsilon|\Sigma} = 0\,, & \\ U_\varepsilon(0,\,\cdot\,) = U_0 & \text{p.p. sur } \Omega. \end{cases}$$

• Enfin, on peut préciser que la suite $\big(U_{\varepsilon,\eta}(t,x)\big)_{\eta>0}$ converge vers $U_\varepsilon(t,x)$ en croissant, uniformément en (t,x), puisque pour $\eta_1 > \eta_2$ on a :

$$\forall\ s \in [\,0\,,\,T\,]\,,\ \ \widehat{U}_\varepsilon(s,\,\cdot\,) \leq U_{\varepsilon,\eta_1}(s,\,\cdot\,) \leq U_{\varepsilon,\eta_2}(s,\,\cdot\,) \leq U_\varepsilon(s,\,\cdot\,) \text{ p.p. dans } \Omega\,,$$

où $\widehat{U}_\varepsilon$ désigne la solution du problème parabolique sans contrainte $\mathcal{P}_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} & \widehat{U}_\varepsilon \in L^\infty\big(0,T\,;\,\mathcal{V}\big) \cap W\big(0,T\,;\,\mathcal{M}\,;\,L^2(\Omega)\big)\,, \\ & \forall\ V \in \mathcal{V} \text{ et pour presque tout } t \text{ de }]\,0\,,\,T\,[\,, \\ & \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\widehat{U}_\varepsilon V\,\mathrm{d}x + \varepsilon\int_\Omega \nabla\widehat{U}_\varepsilon\cdot\nabla V\,\mathrm{d}x\,+ \\ & \qquad\qquad + \int_\Omega \Big(\mathrm{Div}\big[f(\widehat{U}_\varepsilon,t,x)\big] + g(\widehat{U}_\varepsilon,t,x)\Big)\,V\,\mathrm{d}x = 0\,, \\ & \widehat{U}_\varepsilon(0,\,\cdot\,) = U_0 \quad \text{p.p. dans } \Omega\,. \end{aligned}$$

On retrouve ainsi la propriété de maximalité de la solution d'une inéquation par rapport aux solutions pénalisées, propriété que nous avons déjà notée dans le cas de problèmes du premier ordre (propriétés 3.2 et 3.3).

Enfin, on indique les propriétés de convergence de la suite des solutions pénalisées $\big(U_{\varepsilon,\eta}\big)_{\eta>0}$ vers la solution U_ε de l'inéquation $\mathcal{J}_\varepsilon$.

PROPOSITION 4.1 (comportement de la suite $\big(U_{\varepsilon,\eta}\big)_{\eta>0}$) .— *$\varepsilon$ étant fixé, lorsque η tend vers 0^+, la suite $\big(U_{\varepsilon,\eta}\big)_{\eta>0}$ vérifie :*

$$U_{\varepsilon,\eta} \to U_\varepsilon \quad \textit{dans} \begin{cases} a) & L^\infty(\Omega)\ \textit{faible}^* \\ b) & W\big(0,T\,;\,\mathcal{M}\,;\,L^2(\Omega)\big)\ \textit{faible} \\ c) & L^\infty(0,T\,;\,\mathcal{V})\ \textit{faible}^* \\ d) & \mathcal{C}^0\big([\,0\,,\,T\,]\,;\,L^q(\Omega)\big),\ q \in [\,1\,,\,+\infty\,[\,, \end{cases} \tag{4.1}$$

En vue d'obtenir un résultat de perturbations singulières pour l'inéquation parabolique $\mathcal{J}_\varepsilon$, on précise quelques estimations à priori, indépendantes du coefficient de viscosité ε, vérifiées par U_ε. Ainsi, on a la propriété suivante.

PROPRIÉTÉ 4.1 (estimations de U_ε). — *Les constantes $\mathfrak{R}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_1$ ayant déjà été introduites à la section 2, la solution de l'inéquation parabolique quasi linéaire $\mathcal{J}_\varepsilon$ vérifie :*

$$\|U_\varepsilon\|_{L^\infty(Q)} \leq \mathfrak{R}, \tag{4.1.1}$$

$$\begin{gathered} \forall\, h \in [\,0\,, T\,[\,,\ \forall\, t \in [\,0\,, T - h\,]\,, \\ \|U_\varepsilon(t + h,\, \cdot\,) - U_\varepsilon(t,\, \cdot\,)\|_{L^1(Q)} \leq \mathcal{A}_1 h\,, \end{gathered} \tag{4.1.2}$$

$$\|\nabla U_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T\,;\,L^1(\Omega)^p)} \leq \mathcal{A}. \tag{4.1.3}$$

Démonstration. — On reprend les estimations vérifiées par la solution $U_{\varepsilon,\eta}$ du problème parabolique pénalisé $\mathcal{P}_{\varepsilon,\eta}$ (propriété 2.4) et on les associe aux résultats de convergence énoncés à la proposition 4.1.

Notons tout de même que, d'après (4.1c),

$$\nabla U_{\varepsilon,\eta_1} \to \nabla U_\varepsilon \quad \text{dans } L^\infty\big(0, T\,;\, L^2(\Omega)^p\big) \text{ faible}^*\,.$$

Ainsi pour toute fonction φ élément de $L^1\big(0,T\,;\, L^\infty(\Omega)^p\big)$, on a :

$$\int_Q \nabla U_{\varepsilon,\eta} \cdot \varphi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \underset{\eta\to 0^+}{\longrightarrow} \int_Q \nabla U_\varepsilon \cdot \varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,.$$

De sorte que, compte tenu de l'estimation (2.3), on peut écrire :

$$\left|\int_Q \nabla U_\varepsilon \cdot \varphi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right| \leq \mathcal{A}\|\varphi\|_{L^1(0,T\,;\,L^\infty(\Omega)^p)}\,,$$

d'où (4.1.3).

Enfin, la relation (4.1.2) permet de justifier que la suite $\big(\partial/\partial t\, U_\varepsilon\big)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^\infty\big(0,T\,;\,L^1(\Omega)\big)$ par la constante $\mathcal{A}_1$ (méthode des quotients différentiels. □

Remarques 4.1b.— On peut établir, par le choix de la fonction test $V = 0$ dans la formulation variationnelle de $\mathcal{J}_\varepsilon$ l'existence d'une constante $\mathfrak{C}_2$ indépendante de tout paramètre dès que $\varepsilon \leq 1$, telle que la solution U_ε de $\mathcal{J}_\varepsilon$ vérifie :

$$\sqrt{\varepsilon}\|U_\varepsilon\|_{L^2(0,T\,;\,\mathcal{V})} \leq \mathfrak{C}_2 \,. \tag{4.1.3)*}$$

Cette estimation pourra servir, parallèlement à l'estimation (4.1.3), lors de l'étude de perturbations singulières par l'inéquation $\mathcal{J}_\varepsilon$ (démonstration du théorème 4.2).

4.2 Perturbations singulières par l'inéquation $\mathcal{J}_\varepsilon$

Nous avons établi que la suite des solutions des inéquations $\left(\mathcal{J}_\varepsilon\right)_{\varepsilon>0}$ reste au moins dans un borné fixe de $W^{1,1}(Q)$. Par compacité nous allons pouvoir préciser son comportement lorsque ε tend vers 0^+.

Notons que des résultats de perturbations singulières d'inéquations variationnelles ont déjà été obtenus, notamment par M. Mignot et J.-P. Puel [15], dans le cas d'opérateurs elliptiques, par M. Madaune-Tort [12], pour des inéquations paraboliques de type dégénéré, dans le cas monodimensionnel, pour une contrainte de bord seulement et dans le cas multidimensionnel par M.-J. Jasor [7, chap. 2].

Ici, l'étude du comportement de la suite des solutions des inéquations paraboliques $\left(\mathcal{J}_\varepsilon\right)_{\varepsilon>0}$ lorsque le terme de diffusion devient négligeable, nous permet encore d'établir une propriété de perturbations singulières et de retrouver ainsi le résultat d'existence de la solution d'une loi de conservation scalaire quasi linéaire du premier ordre, associé à une condition d'obstacle unilatérale et à une condition de bord de Dirichlet homogène, déjà acquis au théorème 3.2. En effet nous avons les résultats suivant.

THÉORÈME 4.2 (perturbations singulières par l'inéquations $\mathcal{J}_\varepsilon$.— *Lorsque ε tend vers 0^+, la suite $\left(U_\varepsilon\right)_{\varepsilon>0}$ des solutions des inéquations paraboliques $\left(\mathcal{J}_\varepsilon\right)_{\varepsilon>0}$ converge p.p. sur Q, dans $L^\infty(Q)$ faible* et dans $\mathcal{C}^0\big([\,0\,,T\,]\,;\,L^q(\Omega)\big)$, $q \in [\,1\,,\,+\infty\,[$, vers la solution du problème $\mathcal{P}$.*

Démonstration.— Étant donné les estimations dégagées à la propriété 4.1, et après extraction éventuelle d'une sous-suite en utilisant la compacité de l'injection de $W^{1,1}(Q)$ dans $L^1(Q)$, on établit l'existence d'une fonction U, à valeurs positives ou nulles p.p. sur Q, élément de $BV(Q) \cap L^\infty(Q) \cap \mathcal{C}^0\big([\,0\,,\,T\,]\,;\,L^q(\Omega)\big)$, $1 \leq q < +\infty$, telle que lorsque ε tend vers 0^+, à une sous-suite près, on ait :

$$U_\varepsilon \to U \quad \text{dans} \begin{cases} \text{a)} & L^\infty(Q) \text{ faible}^*, \\ \text{b)} & \mathcal{C}^0([0, T]; L^q(\Omega)),\ q \in [1, +\infty[, \\ \text{c)} & \text{p.p. dans } Q. \end{cases} \tag{4.2}$$

Notons que pour obtenir ces résultats, on reprend exactement la demonstration de la proposition 3.1. □

Vérification de la relation d'entropie ($\mathcal{R}$).

Soient k un réel positif ou nul et ψ un élément de $\mathcal{C}^1_{0,+}(]0, T[\times\overline{\Omega})$. nous posons, pour, $\psi \not\equiv 0$:

$$\alpha = \frac{\lambda}{2\|\psi\|_{L^\infty(Q)}}$$

$$W_\varepsilon = U_\varepsilon - \alpha\psi\left[p_\lambda(U_\varepsilon - k) + p_\lambda(k)\rho_\mu\right],$$

où ρ_μ est la fonction définie à la démonstration du théorème 3.1.

Il est loisible de choisir dans $\mathcal{J}_\varepsilon$, p.p. t de $]0, T[$, la fonction test $V(t, \cdot) = W_\varepsilon(t, \cdot)$. Il vient, en reprenant les mêmes calculs que ceux développés au théorème 3.1 :

$$\begin{aligned} &-\int_Q I_\lambda(U_\varepsilon - k)\frac{\partial\psi}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_Q H_\lambda(U_\varepsilon, t, x)\cdot\nabla\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \\ &\quad + \int_\Sigma \psi H_\lambda(0, t, \sigma)\cdot\nu\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t + \Theta + p_\lambda(k)\theta^*(\varepsilon, \mu) + \\ &\quad + \int_Q g(U_\varepsilon, t, x)p_\lambda(U_\varepsilon - k)\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \\ &\quad \le -\varepsilon\int_Q \nabla U_\varepsilon\cdot\left[p_\lambda(U_\varepsilon - k)\nabla\psi + p_\lambda(k)\nabla[\psi\rho_\mu]\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$I_\lambda(U) = \int_0^U p_\lambda(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$H_\lambda = \left[H^i_\lambda\right]_{i=1,\dots,p}$$

avec

$$H^i_\lambda(U, t, x) = \int_k^U \frac{\partial f_i}{\partial u}(\tau, t, x)p_\lambda(\tau - k)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$\theta^*(\varepsilon,\mu) = -\int_Q U_\varepsilon \rho_\mu \frac{\partial\psi}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_Q f(U_\varepsilon,t,x)\cdot\nabla[\psi\rho_\mu]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \\ + \int_\Sigma f(0,t,\sigma)\cdot\nu\psi\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t + \int_Q g(U_\varepsilon,t,x)\psi\rho_\mu\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,.$$

Pour contrôler le second membre de l'inégalité ci-dessus, on peut soit utiliser (4.1.3) (dans ce cas, on borne par $\varepsilon C(\mu)\mathcal{A}$, $C(\mu)$ étant une constante qui ne dépend que de μ), soit (4.1.3)* (on borne alors par $\sqrt{\varepsilon}\, C^*(\mu)\mathfrak{C}_2$, où $C^*(\mu)$ est une constante qui ne dépend que de μ). Quoi qu'il en soit, on peut faire tendre ε vers 0^+ (*cf.* justifications au théorème 3.1). Puis en utilisant le fait que U est élément de $BV(Q)\cap L^\infty(Q)$, on fait tendre μ vers 0^+. On obtient alors la relation $(\mathcal{R})$, par convergence dominée, lorsque λ tend vers 0^+.

Enfin, la condition initiale est donnée par (4.2b) et, l'unicité de la solution du problème $\mathcal{P}$, déjà établie dans la section 3, permet de justifier que toute la suite $\left(U_\varepsilon\right)_{\varepsilon>0}$ converge vers U, au sens de (4.2), ce qui achève la preuve. □

Remarque 4.2. — **On vient donc d'établir la convergence de la suite des solutions des inéquations $\left(\mathcal{J}_\varepsilon\right)_{\varepsilon>0}$, associées à la données initiale U_0, vers la solution du problème $\mathcal{P}$, lorsque U_0 vérifie $U_0\in\mathcal{V}$, $\nabla U_0\in BV(\Omega)^p$, $U_0\geq 0$ p.p. dans Ω.**

Lorsque U_0 est un élément de $BV(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ tel que $U_0\geq 0$ p.p. dans Ω, on obtient la convergence vers la solution du problème $\mathcal{P}$ associé à U_0, de la suite des solutions des inéquations $\left(\mathcal{J}_\varepsilon\right)_{\varepsilon>0}$ associées aux conditions initiales régularisées $\left(U_0^\varepsilon\right)_{\varepsilon>0}$, où U_0^ε a été définie dans le paragraphe 2.4.

5. Conclusion

Pour conclure cet exposé, on notera, comme on l'a précisé en introduction, que tous les résultats dégagés au cours de ce travail s'adaptent au *cas d'un obstacle mobile* ζ qui satisfait aux deux hypothèses fondamentales :

H1) ζ est compatible avec la condition de bord, au sens où $\zeta = 0$ sur Σ.

H2) ζ est une fonction régulière sur Q ; précisément, ζ doit avoir le même type de régularité que celui imposé pour la fonction f ; en l'occurence dans notre travail, une régularité C^2 sur $\overline{Q}$.

Sous ces conditions, on se ramène tout naturellement au cas traité précédemment par changement de fonctions $U = W - \zeta$. Ainsi, on peut énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 5.1. — *Étant donné W_0 dans $BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $W_0 \geq \zeta(0, \cdot)$ p.p. dans Ω, le problème $\mathcal{P}_\zeta^0$:*

$$\begin{aligned}
&W \geq \zeta \quad \textit{p.p. sur } Q \\
&\frac{\partial W}{\partial t} + \mathrm{Div}\left[f(W,t,x)\right] + g(W,t,x) = 0 \\
&\qquad\qquad\qquad \textit{sur } Q_\zeta^+ = \left\{(t,x) \in Q \mid W(t,x) > \zeta\right\}, \\
&W(t,\sigma) = \zeta(t,\sigma) \quad \textit{sur une partie de } \Sigma, \\
&W(t, \cdot) = W_0 \quad \textit{p.p. sur } \Omega,
\end{aligned}$$

admet une solution unique, caractérisée par la formulation faible entropique, $\mathcal{P}_\zeta$:

$$\begin{aligned}
&W \in BV(Q) \cap L^\infty(Q)\,,\ W \geq \zeta \quad \textit{p.p. dans } Q\,, \\
&\forall\, k \geq 0 \textit{ et } \forall\, \psi \in \mathcal{C}^1_{0,+}(]\,0\,,\,T\,[\,\times \overline{\Omega})\,, \\
&\int_Q |W - k - \zeta| \frac{\partial \psi}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_Q H(W,t,x) \cdot \nabla\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \\
&\quad - \int_Q \left(\mathrm{Div}\left[f(k+\zeta,\,t,\,x)\right] + g(W,t,x) + \frac{\partial \zeta}{\partial t}\right) \mathrm{sign}(W - k - \zeta)\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \\
&\quad + \int_\Sigma \mathrm{sign}(k)\left[f(\gamma W,t,\sigma) - f(k,t,\sigma)\right] \cdot \nu\psi\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t \geq 0 \qquad\qquad (\mathcal{R}_\zeta) \\
&W(0, \cdot) = W_0 \quad \textit{p.p. sur } \Omega,
\end{aligned}$$

où $H(W,t,x) = \left[f(W,t,x) - f(k+\zeta,t,x)\right] \mathrm{sign}(W - k - \zeta)$.

La solution de $\mathcal{P}_\zeta$ dépend de manière T-lipschitzienne dans $L^1(\Omega)$ de la donnée initiale (constante de Lipschitz M_g).

Cette solution peut être approchée, aux sens du théorème 3.2, par une suite solutions de problèmes hyperboliques du premier ordre pénalisés de type $\mathcal{P}_\eta$ ou par une suite de solutions d'inéquations paraboliques de type $\mathcal{J}_\varepsilon$, dont le terme de diffusion tend vers 0^+ et dont les solutions satisfont à la contrainte $W \geq \zeta$ p.p. dans Q.

Enfin, si $\widehat{W}$ désigne la solution du problème sans contrainte, tel qu'il a été introduit au pararagraphe 3.2, on a pour $\eta_1 > \eta_2$ quelconques :

$$\forall\, t \in [\,0\,,\,T\,]\,, \quad \widehat{W}(t, \cdot) \leq W_{\eta_1}(t, \cdot) \leq W_{\eta_2}(t, \cdot) \leq W(t, \cdot) \quad \textit{p.p. dans } \Omega\,.$$

Références bibliographiques

[1] Bardos (C.), Leroux (A.-Y.) et Nédélec (J.-C.) .— *First order quasilinear equations with boundary conditions*, Comm. in partial differential equation, **4**, n° 9 (1979), pp. 1017-1034.

[2] Chavent (G.) et Jaffre (J.) .— *Mathematical models and finite element for reservoir simulation*, Studies in Mathematics and its Applications, North Holland, **17** (1986).

[3] Dautray (R.) et Lions (J.-L.) .— *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et techniques*, INSTN-CEA, Masson (1987-1988).

[4] Friedman (A.) .— *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice Hall, New-York (1969).

[5] Gagneux (G.), Lefevère (A. M.) et Madaune-Tort (M.) .— *Une approche analytique d'un modèle black-oil des écoulements triphasiques compressibles en ingenierie pétrolière*, Journal de Mécanique Théorique et Appliquée **6**, n° 4 (1987), pp. 547-569.

[6] Godlewski (E.) et Raviart (P. A.) .— *Hyperbolic systems of conservation laws*, S.M.A.I Mathématiques et Applications, Ellipses (1991).

[7] Jasor (M.-J.) .— *Perturbations singulières d'équations non linéaires de diffusion-convection modélisant des écoulements diphasiques incompressibles en milieu poreux*, Thèse de doctorat, Université de Pau et des Pays de l'Adour (avril 1992).

[8] Kruzkov (S. N.) .— *First order quasilinear equations with several independant variables*, Math Sbornik, Tome 81, **123**, n° 2 (1970), pp. 228-255.

[9] Ladyzenskaya (O. A.), Solonnikov (V. A.) et Ural'ceva (N. N.) .— *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Amer. Math. Soc. Trans. **23** (1968).

[10] Lévi (L.) .— *Loi de conservation scalaire avec contrainte unilatérale*, Publication interne de l'URA CNRS 1204, n° 92/24 (décembre 1992);
perturbations singulières d'une équation parabolique dégénérée. Publication interne de l'URA CNRS 1204, n° 93/15 (février 1993).

[11] Lions (J.-L.) .— *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Études Mathématiques, Dunond, Paris (1969).

[12] Madaune-Tort (M.) .— *Un résultat de perturbations singulières pour des inéquations variationnelles dégénérées*, Annali di Matematica Pura et Applicata (IV) CXXXI (1982), pp. 117-143.

[13] Marcus (M.) et Mizel (V. J.) .— *Every superposition operator mapping one Sobolev space into another is continuous*, Journal of Functional Analysis **33** (1979), pp. 217-229.

[14] Mignot (F.) et Puel (J.-P.) .— *Inéquation variationnelles et quasi variationnelles hyperboliques du premier ordre*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **55** (1976), pp. 353-378.

[15] Mignot (F.) et Puel (J.-P.) .— *Un résultat de perturbations singulières dans les inéquations variationnelles*, Lecture Notes in Mathematics;
Singular perturbations and boundary layer theory, Springer-Verlag, New-York (1977).

[16] NATALINI (R.) .— *Solutions non bornées pour des lois de conservation avec source*, CRAS, Tome 313, Série I (1991), pp. 731-734.

[17] VOL'PERT (A. I.) .— *The spaces BV and quasilinear equations*, Math. USSR Sbornik **2**, n° 2 (1967), pp. 225-267.